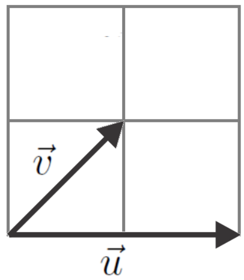
UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

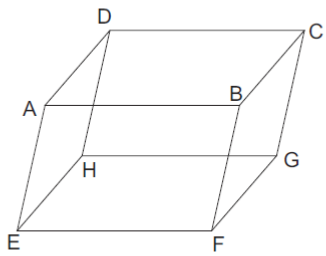
GAN 0001 - Geometria Analítica
Primeira Lista de Exercícios

1. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:



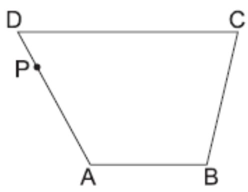
   (a) $\vec{u} - \vec{v}$
   (b) $\vec{v} - \vec{u}$
   (c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$
   (d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

2. Com base no paralelepípedo representado a seguir, determine os seguintes vetores usando H como origem.

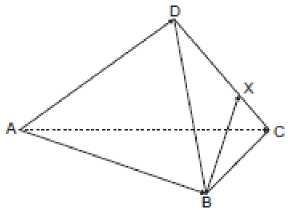


   (a) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$
   (b) $-(G - B) + (B - A)$

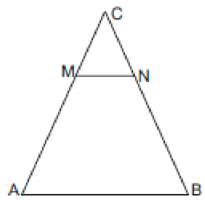
3. Dado o trapézio $ABCD$ em que $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{b}$ e $\overrightarrow{DP} = \dfrac{\overrightarrow{DA}}{4}$, expressar $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CP}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



4. Considere o tetraedro $ABCD$ dado a seguir, em que $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ e $\overrightarrow{CX} = -\dfrac{\overrightarrow{DC}}{3}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{BX}$ em função dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.



5. Na figura abaixo tem-se $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA}}{3}$ e $\overrightarrow{CN} = \dfrac{\overrightarrow{CB}}{3}$. Prove que os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, e que o comprimento do primeiro é $\dfrac{1}{3}$ do comprimento do segundo.



6. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$, determinar o ângulo formado pelos vetores:
   (a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$
   (b) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$
   (c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$
   (d) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$
7. Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.
8. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que
   (a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \dfrac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$
   (b) $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$
9. Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, -1)$, calcular $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.
10. Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$
11. Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.
12. Verificar se são colineares os pontos:
    (a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$
    (b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$
13. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$, expresse $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

14. Sejam os vetores $\vec{u} = (2, -3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

    (a) Escrever o vetor $\vec{w} = (7, -11, 2)$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

    (b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

    (c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

15. Sabendo que a distância entre os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(1, -1, m)$ é 7, determine os possíveis valores de m.

16. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

17. Dados os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + \left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \overrightarrow{AC}$.

18. Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determinar o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$

19. Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = \left(n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ seja unitário.

20. Seja o vetor $\vec{v} = (m + 7)\vec{i} + (m + 2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular m para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

21. Prove que o triângulo cujos vértices são $A(1, 2, 0)$, $B(4, 0, -1)$ e $C(2, -1, 2)$ é equilátero.

22. Determine os pontos do plano xz cuja distância ao ponto $A(1, 1, 0)$ é 2 e ao ponto $B(2, 0, 1)$ é 3.

23. Obter um ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.

24. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m + 2)$ é $\frac{\pi}{3}$, determinar m.

25. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

26. Provar que os pontos $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$ e $C(-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

27. Os ângulos diretores de um vetor são 45°, 60° e γ. Determinar γ.

28. Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

29. Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos x?

30. Os pontos $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 3, 1)$ e $C(0, -1, 2)$ formam um triângulo.

    (a) Determine a projeção do lado AB sobre o lado CA.

    (b) Obtenha, se possível, o valor de c para que o vetor $\vec{v} = (3c + 4, -2, 9)$ seja colinear ao vetor projeção.

31. Mostrar que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, tal que $\vec{u} + \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

32. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 4$.

33. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ e $-\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, sabendo-se que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, e $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são mutuamente ortogonais.

34. Calcule o valor de a para que o vetor $\vec{v} = \left(-28, 0, -\frac{7}{2}\right)$ seja mutuamente ortogonal aos vetores $\vec{w} = a\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{u} = (a - 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

35. Determine o vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

36. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

(a) $\vec{w} \times \vec{v}$
(b) $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$
(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$
(d) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$
(e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
(f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
(g) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
(h) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

37. Sabendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e $45°$ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

38. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

39. Calcular a área do triângulo de vértices

    (a) $A\,(-1, 0, 2)$, $B\,(-4, 1, 1)$ e $C\,(0, 1, 3)$
    (b) $A\,(1, 0, 1)$, $B\,(4, 2, 1)$ e $C\,(1, 2, 0)$
    (c) $A\,(2, 3, -1)$, $B\,(3, 1, -2)$ e $C\,(-1, 0, 2)$
    (d) $A\,(-1, 2, -2)$, $B\,(2, 3, -1)$ e $C\,(0, 1, 1)$

40. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A\,(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B\,(1, 1, -1)$ e $C\,(0, 1, 2)$.

41. Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço, com $\vec{v} \neq \vec{0}$:

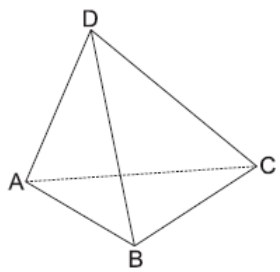
    (a) Determinar o número real r tal que $\vec{u} - r\vec{v}$ seja ortogonal a $\vec{v}$
    (b) Mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.

42. Verificar se são coplanares os seguintes vetores:

    (a) $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 3, 4)$
    (b) $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 2)$

43. Para que valor de m os pontos $A\,(m, 1, 2)$, $B\,(2, -2, -3)$, $C\,(5, -1, 1)$ e $D\,(3, -2, -2)$ são coplanares?

44. Considere o tetraedro $ABCD$, ilustrado a seguir, cujos vértices da base são: $A\,(2, 2, -1)$, $B\,(3, 2, 1)$ e $C\,(2, 1, 0)$. Calcular as coordenadas do vértice D, considerando que ele está no eixo x, de forma que o volume do tetraedro seja 8 unidades de volume.



45. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v_1} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v_2} = 6\vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v_3} = -4\vec{i} + \vec{k}$ seja igual a 10.

46. Os vetores $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ e $\vec{c} = (m + 1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m.

47. Calcular o volume do tetraedro $ABCD$, sendo dados:

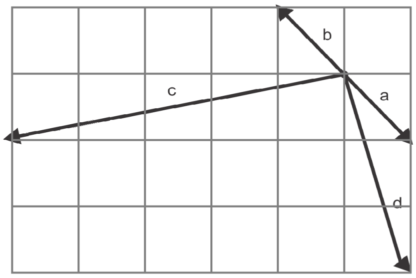
(a) $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,1,0)$, $C\,(0,0,1)$ e $D\,(4,2,7)$

(b) $A\,(-1,3,2)$, $B\,(0,1,-1)$, $C\,(-2,0,1)$ e $D\,(1,-2,0)$. Para este, calcular também a medida da altura traçada do vértice A.

48. Calcule a área do paralelogramo construído sobre os vetores $2\vec{u}-3\vec{v}$ e $\vec{w}$, sabendo que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{4}$ rad e que $\vec{w}$ é a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.

Respostas dos Exercícios

1. Vetores:



2. (a) $\overrightarrow{HF}$

   (b) $\overrightarrow{HB}$

3. $\overrightarrow{BD} = -\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$ e $\overrightarrow{CP} = \dfrac{\vec{a} - 7\vec{b}}{4}$

4. $\overrightarrow{BX} = -\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

5. Dica: use soma de vetores.

6. (a) $120°$

   (b) $120°$

   (c) $60°$

   (d) $60°$

7. $(1, -2)$

8. (a) $\vec{w} = \left(-\dfrac{15}{2}, \dfrac{15}{2}\right)$

   (b) $\vec{w} = \left(\dfrac{23}{5}, -\dfrac{11}{5}\right)$

9. $(-4, 1)$, $(2, 5)$, $(-5, -30)$

10. $P\,(14, -10, -6)$

11. $a = \dfrac{3}{2}$ e $b = -\dfrac{9}{2}$

12. (a) Sim

    (b) Não

13. $\vec{w} = -2\vec{u} + 6\vec{v}$

14. (a) $\vec{w} = 3\vec{u} - \vec{v}$

    (b) $k = 12$

    (c) $16a + 10b - c = 0$

15. $m = 9$ ou $m = -3$

16. $a = 2$

17. $\vec{x} = (-17, -13, -15)$

18. $\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

19. $n = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

20. $m = -4$ ou -5

21. Prove que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

22. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

23. $P\,(1, 0, 0)$

24. $m = -4$

25. $\vec{v} = t\,(3, -2, 1)\,,\ t \in \mathbb{R}$

26. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

27. $\gamma =$60° ou 120°

28. $\frac{10}{9}\,(2, 1, -2)$

29. 3

30. (a) $\left(-\frac{16}{17}, -\frac{16}{17}, \frac{24}{17}\right)$
    (b) Não existe valor de c.

31. Resultado de $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$

32. Aproximadamente $75, 52°$

33. 60°

34. $a = \frac{1}{2}$

35. $\pm\left(\frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$

36. (a) $(2, 2, -1)$
    (b) $(-1 - 1, 0)$
    (c) $(-2, -2, 2)$
    (d) $(6, 6, -6)$
    (e) 3
    (f) -1 e -1
    (g) $(4, -1, 3)$ e $(1, -4, -6)$
    (h) 1

37. 3

38. $\sqrt{117}$

39. (a) $\sqrt{6}$
    (b) $\frac{7}{2}$
    (c) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

   (d) $2\sqrt{6}$

40. $\sqrt{74}$

41. (a) $r = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$

    (b) Obtido usando as propriedades do produto vetorial.

42. (a) Não

    (b) Sim

43. $m = 4$

44. $D\left(\dfrac{51}{2}, 0, 0\right)$ ou $D\left(-\dfrac{45}{2}, 0, 0\right)$

45. $m = 6$ ou -4

46. $m = 2$ ou $-\dfrac{8}{3}$

47. (a) 2

    (b) 4 e $\dfrac{8}{\sqrt{10}}$

48. $A = 9$ u.a.