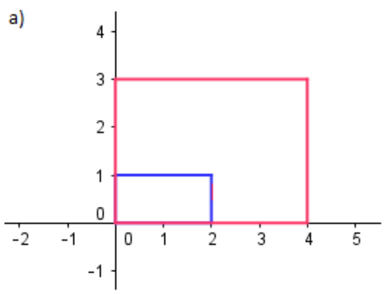
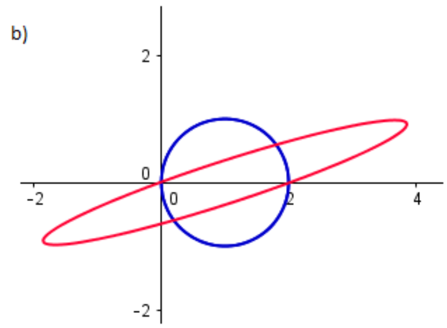
UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Tarefas: Transformações lineares

1. Em cada item, decida se a transformação que leva a figura azul na figura vermelha é linear e explique porquê.





2. Verifique se as funções dadas abaixo são transformações lineares. Em cada caso, justifique sua afirmação:

   (a) $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z, t) = (x + y, 0, z + t)$.

   (b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por $L(x, y) = xy$.

   (c) $S : M(2, 2) \mapsto \mathbb{R}^2$, $S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, 0)$

   (d) $G : M(5, 5) \mapsto M(5, 5)$; $G(A) = AB + I_5$; onde $B = diag(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ é uma matriz diagonal e I_5 é a matriz identidade de ordem 5.

   (e) $F : P_2 \mapsto P_2$ tal que $F(p) = p + q$; $p \in P_2$ e $q(t) = t^2 + 1$; $t \in \mathbb{R}$.

   (f) $S : R^2 \mapsto R^2$ dada por $S(x, y) = (x + y, x - y)$.

   (g) $T : M(2, 2) \mapsto R$ dada por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   (h) $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$; $T(x) = |x|$.

   (i) $T : M_2 \mapsto P_1$; $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + dt$

   (j) $S : R^3 \mapsto R^3$ tal que $S(x, y, z) = (3x, a, 5z)$; onde a $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante.

   (k) $T : P_n \mapsto P_n$ tal que $T(p(x)) = p'(x) + x^2 p''(x)$

3. Considere o espaço vetorial $H = \{(x, y) \in R^2 | y > 0\}$ com as operações de $(+)$ e $(\cdot)$ definidas, respectivamente, por: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2)$ e $k(x_1, y_1) = (kx, y^k)$. Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \mapsto H$ definida por $T(x, y) = (x, e^y)$ é uma transformação linear.

4. Para cada transformação linear, encontre: (i) uma base e a dimensão do núcleo (ii) uma base e a dimensão da imagem.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x, 2y)$

   (b) $T : M(2, 2) \mapsto \mathbb{R}^4$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a + b, b + c + d, 2a + c, 2c + d)$

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \P_2$ dada por $T(a, b, c) = (a + b + c) + (a - b + 2c)x + (2a + b + 9c)x^2$

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^4$ dada matricialmente por $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Considere a base $S = \{v_1, v_2\}$ do R^2, em que $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 3)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(v_1) = (-1, 2, 0)$ e $T(v_2) = (0, -3, 5)$. Encontre uma expressão para $T(x, y)$ e use esta expressão para obter $T(2, -3)$.

6. Encontre a transformação linear T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = 6x$.

7. O operador linear $T(x, y, z) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z, y, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z)$ é a rotação de um ângulo θ em torno do eixo y. Determine o valor do ângulo θ.

8. Considere o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(-3, -3)$ e $(2, -1)$. Determine a imagem destes vértices ao ser aplicada a transformação T que faz uma rotação anti-horária de 60°. Faça um desenho da imagem.

9. Seja $T : P_2 \mapsto P_2$ um operador linear tal que $T(1) = 1 + t$, $T(t) = t + t^2$ e $T(t^2) = 1 + t - 2t^2$:

   (a) Encontre $T(p)$.

   (b) T é injetora? Justifique sua resposta.

   (c) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

   (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

10. a) Encontre a transformação $T : \mathbb{R}^2 \mapsto M(2, 2)$ tal que $T(-1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $T(0, -1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

    b) Usando a transformação T encontrada no item $a)$, calcule $T(1000; 999)$

    c) A transformação é bijetora? Justifique sua resposta.

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$; $T(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

    (a) $N(T)$.

    (b) $N(T) \cap Im(T)$

    (c) $N(T) + Im(T)$

12. Sejam $\alpha = \{(1, -1); (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1); (0, 1, 2); (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$; respectivamente e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

    (a) Encontre a transformação linear T.

    (b) Encontre uma base para $Ker(T)$ e uma base para $Im(T)$.

    (c) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(-2, 1) = (-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$ e $T(\frac{1}{2}, 4) = (1, 1)$. Determine $dimIm(T)$ e $dimN(T)$. T é inversível ? Se for, determine T^{-1}.

14. Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (1; 1; 1)$, $T(0; 0; 1) = (1; 0; 1)$ e $T(0; 1; 2) = (0; 0; 4)$. O operador T é um isomorfismo? Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

15. Considere a transformação linear $T : P_2 \mapsto R^3$ tal que $T(1) = (1, 0, 1)$; $T(x + x^2) = (1, 2, -2)$ e $T(1 - x) = (0, -1, 1)$. Encontre T^{-1}.

16. Considere o operador linear $T : R^3 \mapsto R^3$ definido pela reflexão de um vetor $v = (x, y, z)$ através da origem. Determine a expressão do operador T^{-1} .

17. Usando inversão matricial, mostre que:

    (a) A transformação inversa de uma reflexão em torno da reta $y = x$ é a reflexão em torno da reta $y = x$.

    (b) A transformação inversa de uma reflexão em torno de um eixo coordenado é a reflexão em torno daquele próprio eixo.

18. Seja $T : P_2 \mapsto P_3$ a transformação definida por $T(p(x)) = xp(x - 3)$. Encontre $[T]^{\gamma}_{\beta}$ em relação às bases $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\gamma = \{1, x, x^2\}$.

19. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e a imagem é gerada pelo vetor $(1, -1, 1)$.

20. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado por $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

21. Mostre que se a matriz transformação $[T]$ é inversível então $N(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

22. Se $T : V \mapsto W$ é uma transformação linear tal que $T(w) = T(u) + T(v)$ então $w = u + v$?

23. Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear $T : P2 \mapsto M_2$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:
(i) o elemento $p(x) = 1 + x^2$ pertence ao $N(T)$;
(ii) o elemento $q(x) = 1 - x + x^2$ não pertence ao $N(T)$;
(iii) o elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ pertence à $Im(T)$.

24. Seja $T : V \mapsto W$ uma transformação linear.
    (a) Mostre que o núcleo de T é um subespaço de V.
    (b) Mostre que a imagem de T é um subespaço de W.

25. Seja $T : P_2 \mapsto P_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp'(x)$.
    (a) Quais dos seguintes polinômios pertencem ao $N(T)$?
        i. 2
        ii. x^2
        iii. $1 - x$
    (b) Quais dos polinômios do item a) pertencem a Im(T)?
    (c) Descreva $N(T)$ e $Im(T)$.

26. Quando possível, dê exemplos de transformaçes lineares satisfazendo:
    (a) $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $dimN(T) = 1$.
    (b) $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$.
    (c) $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $Im(T) = \{(0, 0, 0)\}$.
    (d) $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x\}$.
    (e) $T : R^3 \mapsto R^3$ tal que $Im(T) = \{(x, y, z) \in R^3, y = 2x - z\}$

27. Seja $T : P_3 \mapsto P_2$ definida por $T(p) = p'$. Determine a matriz T em relação às bases $\alpha = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $\beta = \{1, 1 + t, -1 + t^2\}$ isto é, $[T]^\alpha_\beta$.

28. Mostre que se uma transfomação linear é injetora então $N(T) = \overrightarrow{0}$.

29. Seja β a base canônica de M_2. Se $T : M_2 \mapsto P_3$é dada por:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b + c)x + (c - d)x^2 + dx^3$$

    (a) Encontre $[T]^\beta_\alpha$ onde $\alpha = \{2, 2 + x, 2 + x^2, 2 + x^3\}$ é base de P_3
    (b) Faça o escalonamento da matriz $[T]^\beta_\alpha$
    (c) Determine $dimKer(T)$.
    (d) Determine $dimIm(T)$.

30. Se $A \in M(n, n)$ é inversível então:
    (a) $dimN(A) =$
    (b) $dimIm(T_A) =$

31. Determine $dimN(T)$ sabendo que:
    (a) $T : R^6 \mapsto R^8$ com $dim(Im(T)) = 3$;
    (b) $T : V \mapsto W$com T sobrejetiva, $dimV = 5$; $dimW = 3$;

(c) $T : V \mapsto W$ com T injetiva;

(d) $T : R^4 \mapsto R^4$ sabendo que existe a inversa de T.

32. Explique em cada caso abaixo porque não existe uma transformação linear:

(a) $T : R^4 \mapsto R^2$ cujo núcleo seja a origem;

(b) $T : R^5 \mapsto R^6$ que seja sobrejetiva;

(c) $T : R^3 \mapsto R^2$ que seja injetiva;

(d) $T : R^7 \mapsto R^6$ tal que $dimN(T) = dimIm(T)$;

(e) $T : R^4 \mapsto R^3$ com $N(T) = [(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0)]$ e $Im(T) = [(1, 1, 2); (2, 2, 4)]$

33. Responda as seguintes questões:

(a) Se $T : R^5 \mapsto R^6$ é uma transformação linear, podemos ter $dimIm(T) > 6$? Justifique sua resposta.

(b) Existe alguma transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $T(1, 1) = (2, 2)$ e $T(2, 2) = (3, 1)$? Justifique sua resposta.

(c) A transformação $T : P_1 \mapsto P_2$ definida por $T(p(t)) = tp(t) + p(0)p'(1)$ é linear?

(d) Se $T : R^3 \mapsto R^3$ é um operador linear e se a imagem de T é um plano que passa pela origem, que tipo de objeto geométrico é o núcleo de T ?

34. Seja $T : R^2 \mapsto R^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre os vetores u e v tais que

(a) $T(u) = 2u$.

(b) $T(v) = -v$.

34. Sejam $F, G : R^3 \mapsto R^3$ transformações lineares dadas por $F(x, y, z) = (x + y, z + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

(a) Determine $F \circ G$.

(b) Determine uma base para $N(F \circ G)$.

(c) Determine uma base para $Im(F \circ G)$.

(d) $F \circ G$ é isomorfismo? Justifique sua resposta.

35. Seja $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$. Mostre que $(T^2-I)\circ(T^2-9I) = 0$.

36. Sejam R, S, T três transformaçẽs lineares de R^3 em R^3. Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ encontre T tal que $R = S \circ T$.

37. Sejam as transformações lineares $S : P_1 \mapsto P_2$ e $T : P_2 \mapsto P_1$ definidas por $S(a + bx) = a + (a + b)x + 2bx^2$ e $T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$.

(a) Determine $(SoT)(3 + 2x - x^2)$.

(b) É possível calcular $(ToS)(a + bx)$? Em caso afirmativo calcule $(ToS)(\pi + \pi x)$?.

38. Considere o operador $T : P_2 \mapsto P_2$ definida por $T(p(x)) = p'(x) + p(x)$ e a transformação linear $S : P_2 \mapsto R^3$ definida por $S(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b)$.

(a) Verifique se S é isomorfismo. Se for, determine S^{-1}.

(b) Determine uma base para $N(SoT)$ é uma base para $Im(SoT)$.

(c) Seja $\beta = \{1 + x; x - x^2\}$ uma base de P_2 e $\alpha = \{(1, 0, 0); (0, 1, 1); (0, 0, -1)\}$ base do R^3. Determine $[SoT]^{\beta}_{\alpha}$.

39. Considere a transformação linear $T : R^4 \mapsto M_2$ definida por $T(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & a+b \\ b+c & d \end{bmatrix}$ e a transformação linear $S : M_2 \mapsto M_2$ definida por $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & c-b \\ b & a+d \end{bmatrix}$. Verifique se SoT é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $(S \circ T)^{-1}$,

40. No plano, uma rotação anti-horária de 45° é seguida por uma dilatação de $\sqrt{3}$. Ache a aplicação T que representa esta transformação do plano.

41. Determine a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ que representa uma reflexão da reta $y = -x$,seguida de uma dilatação de fator 2 na direção x e, um cisalhamento de fator 3 na direção vertical.

42. Analise se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se $T : R^2 \mapsto R^2$ é uma rotação de um ângulo θ (em sentido anti-horário) em torno da origem, seguida de uma dilatação de fator 3 então T^{-1} é uma contração de fator $\frac{1}{3}$ seguida de uma rotação de um ângulo $-\theta$ em torno da origem".

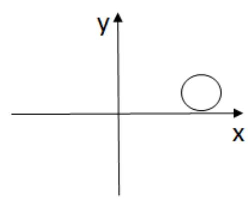
43. Encontre a transformação linear $T : R^2 \mapsto R^2$ definida pela rotação de $\frac{\pi}{6}$ (sentido anti-horário) seguida de uma reflexão através da reta $y = 2x$. A seguir, faça um esboço da $Im(T)$ se a transformação T for aplicada ao retângulo de vértices $(0,0), (1,0), (1,2)$ e $(0,2)$.

44. Seja $T : R^3 \mapsto R^3$ é a projeção do vetor $v = (x, y, z)$ no plano $x + y + z = 0$. Encontre $T(x, y, z)$.

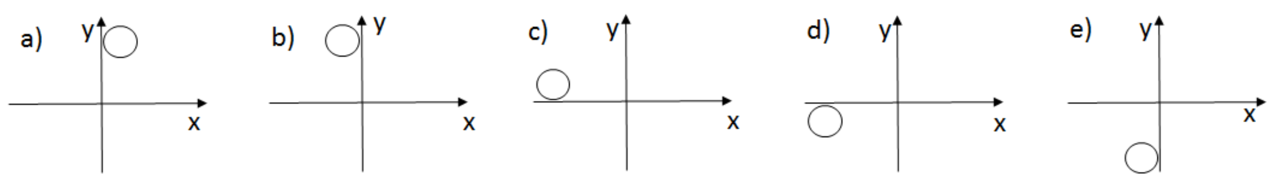
45. Seja $T : R^3 \mapsto R^3$ definida pelo triplo da reflexão do vetor $v = (x, y, z)$ no plano $2x - y + z = 0$. Encontre $T(x, y, z)$.

46. Seja $L : R^3 \mapsto R^3$ onde T é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ em torno do eixo y. Encontre $L(x, y, z)$.

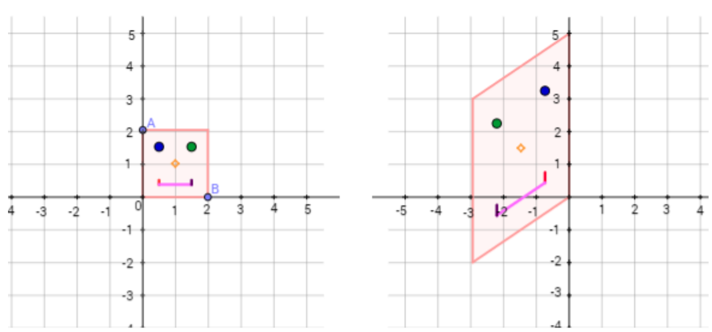
47. Aplicando a transformação $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a todos os pontos da circunferência da figura abaixo



obtém-se como imagem:



48. Identifique a(s) transformação(ões) linear(es), explicitando a (s) sua(s) respectiva(s) expressão(ões) algébrica(s):



Algumas respostas:

1. a) É linear. Mostre que a definição é satisfeita. b) Não é linear pois $T(0,0) \neq (0,0)$

2. a) Sim b) Não c) Sim d) Não e) Não f) Sim g) Não h) Não i) Sim j) É transformação linear se $a=0$ k) Sim

3. T é uma transformação linear.

4. (a) Não existe base para o $N(T)$ e $dimN(T) = 0$; uma base para a $Im(T)$ é $\beta = \{(1,1,2,0),(1,-1,0,2)\}$

   (b) $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para o $N(T)$ e $dimN(T) = 1$; $\alpha = \{(1,1,0,0),(0,1,1,2),(0,1,0,1)\}$ é uma base para a $Im(T)$ e $dimIm(T) = 3$.

   (c) Não existe base para o $N(T)$ e $dimN(T) = 0$; $\alpha = \{1+x+x^2, 1-x+x^2, 5+2x+9x^2\}$ é uma base para a $Im(T)$ e $dimIm(T) = 3$.

   (d) $\alpha = \{(-1,1,1,0)\}$ é uma base para o $N(T)$ e $dimN(T) = 1$; $\beta = \{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base para a $Im(T)$ e $dimIm(T) = 3$

5. $T(x,y) = \left(\dfrac{3x-y}{7}, \dfrac{-9x-4y}{7}, \dfrac{5x+10y}{7}\right)$ e $T(2,-3) = \dfrac{1}{7}(-11,19,5)$

6. $T(x,y) = \left(\dfrac{-35x+12y}{37}, \dfrac{12x+35y}{37}\right)$

7. $\dfrac{5\pi}{4}$

8.

9. (a) $T(a+bt+ct^2) = (a+c) + (a+b+c)t + (b-2c)t^2$

   (b) Sim, pois $N(T) = 0 + 0t + 0t^2$

   (c) Sim. (Você pode justificar usando o teorema da dimensão)

   (d) Sim, pelos itens (b) e (c).

10. (a) $T(x,y) = \begin{bmatrix} -x+y & x-y \\ x-y & -x+y \end{bmatrix}$

    (b) $T(1000,999) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

    (c) Não, pois T não é injetora ($dimN(T) = 1 \neq 0$) e T não é sobrejetora ($dimIm(T) = 1 \neq 4$)

11. (a) $\alpha = \{(1,-1,1)\}$

    (b) $N(T) \cap Im(T) = (0,0,0)$. Logo não a base de $N(T) \cap Im(T)$ é o conjunto vazio.

    (c) $\beta = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,1,2)\}$

12. (a) $T(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{x-y}{2}, 2x+y\right)$

    (b) Como $N(T) = \{\vec{0}\}$, sua base é o conjunto vazio. Além disso, $\beta = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2\right), \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)\right\}$ é base para a $Im(T)$.

    (c) Uma possibilidade é $\gamma = \{(1,1,1),(1,0,0),(-1,-1,2)\}$

13. $T(x,y) = \left(\dfrac{4x+2y}{5}, \dfrac{2x+y}{5}\right)$, $dimN(T) = dimIm(T) = 1$. T não é inversível pois não é bijetora.

14. $T^{-1}(x,y,z) = \left(y, \dfrac{-x+z}{4}, \dfrac{x-2y+z}{2}\right)$

15. $T^{-1}(a,b,c) = (2a-2b-c) + (-a+2b+c)x + (a-b-c)x^2$

16. $T(x,y,z) = (-x,-y,-z)$

17.

18. $[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. Uma possibilidade é: $T(x, y, z) = (x - y, -x + y, x - y)$

20. Uma possibilidade é: $T(x, y, z, w) = (w, y - x, 0, 0)$

21.

22. Como T é linear, podemos escrever $T(w) = T(u + v)$. Isso não implica que $w = u + v$, pois não temos a hipótese de que T é injetora.

23. $T(a + bx + cx^2 = \begin{bmatrix} a - 2b - c & -3b \\ b & -b \end{bmatrix}$

24.

25. (a) Apenas $p(x) = 2 \in N(T)$.
    (b) Apenas $p(x) = x^2 \in Im(T)$.
    (c) $N(T) = \{p(x) = bx + cx^2; b, c \in \mathbb{R}\}$

26.

27. $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

28. (a) $[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
    (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
    (c) $dimN(T) = 0$
    (d) $dimIm(T) = 4$

29.

30. a) $dimN(A) = 0$ b) $dimIm(A) = n$

31. a) $dimN(T) = 3$ b) $dimN(T) = 2$ c) $dimN(T) = 0$ d) $dimN(T) = 0$

32. Use o teorema da dimensão no núcleo e da imagem.

33. (a) Não, pois $dimN(T) \leq 5$
    (b) Não, pois o conjunto $\{(1, 1), (2, 2)\}$ não forma uma base para o $\mathbb{R}^2$
    (c) Não
    (d) O $N(T)$ é uma reta que passa pela origem.

34. a) $u = (x, 0)$ b) $v = (x, -3x)$

35. (a) $(F \circ G)(x, y) = (x + 3y - z, x + y + z, x + 2z)$
    (b) $\beta = \{(-2, 1, 1)\}$ é uma base para $N(F \circ G)$
    (c) Uma das bases é $\alpha = \{(1, 1, 1), (3, 1, 0)\}$
    (d) Não. Justifique sua resposat baseado nos itens (b) e (c)

36.

37.

38. a) $(S \circ T)(3+2x-x^2) = 2-4x^2$ b) $(T \circ S)(\pi + \pi x) = 2\pi + 4\pi x$

39. (a) $S^{-1}(a,b,c) = \left(\dfrac{a+c}{2}\right) + \left(\dfrac{a-c}{2}\right)x + bx^2$

(b) A base de $N(S \circ T)$ é o conjunto vazio. Uma base para $Im(S \circ T)$ é $\alpha = \{(1,0,1),(2,0,0),(2,1,-2)\}$

(c) $[Ss \circ T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

40. $(S \circ T)^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+c, -a-b, a+2b+c, -a-b-c+d)$

41. $T(x,y) = \left(\dfrac{-3\sqrt{6}x - \sqrt{6}y}{2}, \dfrac{\sqrt{6}x + \sqrt{6}y}{2}\right)$

42. $T(x,y) = (-2y, -x-6y)$

43. Verdadeira.

44.

45. $T(x,y,z) = \left(\dfrac{2x-y-z}{3}, \dfrac{-x+2y-z}{3}, \dfrac{-x-y+2z}{3}\right)$

46. $T(x,y,z) = (-x+2y-2z, 2x+2y+z, -2x+y+2z)$

47. $L(x,y,z) = \left(\dfrac{-y+\sqrt{3}z}{2}, x, \dfrac{\sqrt{3}y+z}{2}\right)$

48. letra b)

49. A transformação linear é $T(x,y) = \left(-\dfrac{3x}{2}, -x + \dfrac{5y}{2}\right)$. Uma forma de obter isso é considerar T como uma dilatação de $\dfrac{3}{2}$ na direção x e $\dfrac{5}{2}$ na direção y, seguida de um cisalhamento em y de um fator $\alpha = -1$ e uma reflexão através de oy.