UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DMAT

Exercícios sobre PRODUTO INTERNO
Professores: Graciela Moro *Semestre: 2020/01*

1. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ e $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

   (a) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2$

   (b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_2$

2. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Identifique os casos em que temos um produto interno no $\mathbb{R}^3$. Nos casos que falham, identifique as propriedades que não verificam.

   (a) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1x_2 + z_1z_2$

   (b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_2z_1 + y_1x_2z_2$

3. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ e $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2)$. A expressão $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

4. Ache a distância entre os vetores:

   (a) $u = (1, 3, 5, 7)$ e $v = (4, -2, 8, 1)$ em $\mathbb{R}^4$;

   (b) $u = t + 2$ e $v = 3t - 2$ onde $< u, v >= \int_0^1 u(t)v(t)dt$

5. Utilize os produtos internos do exercício 1 para calcular:

   (a) $\|u\|$ com $u = (-1, 3)$

   (b) $d(u, v)$ com $v = (3, 5)$

6. Em P_2, considere o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ e os polinômios $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$. Mostre que f e g são ortogonais e a seguir, determine $\overline{g}$ um múltiplo de g tal que $\|\overline{g}\| = 1$.

7. Considere $V = M(2, 2)$, com o produto interno usual. Determine a projeção ortogonal de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Mostre que:

   (a) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$

   (b) $< u, v >= \frac{1}{4} (||u + v||^2 - ||u - v||^2)$

9. Seja V um espaço vetorial com produto interno definido, e sejam u, v vetores ortogonais de V, tais que $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 2$. Mostre que $d(u, v) = \sqrt{5}$. Interprete este resultado geometricamente quando $u, v \in \mathbb{R}^2$.

10. Seja V o espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$. Defina em V o seguinte produto interno:
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

    a) Calcule $\|f(x)\|$ quando $f(x) = x^3 - x - 1$.

    b) Calcule a $d(f, g)$ se $f(x) = 1$ e $g(x) = x$.

11. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^\perp$ e a distância entre $v = (1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$.

12. (ENADE) Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ munido do seguinte produto interno:$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1x_2 - y_1x_2 - x_1y_2 + 4y_1y_2$, em que $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{u} = (x_2, y_2)$ são vetores do $\mathbb{R}^2$. Considere $T : V \to V$ o operador linear dado por $T(x, y) = \left(2y, \frac{x}{2}\right)$. Com relação ao produto interno dado e ao operador T, assinale a opção correta.

    a) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são ortogonais em relação ao produto interno dado.

    b) O operador T preserva o produto interno, isto é, $\langle T(\overrightarrow{u}), T(\overrightarrow{v}) \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

    c) $T(x, y) = T(y, x)$,para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

    d) O vetor $\overrightarrow{v} = (2, 0)$ pertence ao $N(T)$.

    e) Existe um vetor $\overrightarrow{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ e $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine uma base para o complemento ortogonal do $N(T)$.

    (b) Determine uma base para o complemento ortogonal da $\mathrm{Im}(T)$.

14. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W = ger\left\{(0, 1, 0), \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right\}$. Exprima $w = (1, 2, 3)$ na forma $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$.

15. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e $W = ger\{(-1, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 1)\}$. Expresse $w = (-1, 2, 6, 0)$ na forma $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$.

16. Seja $V = M(2, 2)$. determine uma base para o complemento ortogonal do:

    (a) subespaço das matrizes diagonais

    (b) subespaço das matrizes simétricas.

17. Encontre uma base **ortonormal** de autovetores para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Considere a base ortonormal $\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), (0,1,0) \right\}$ para $\mathbb{R}^3$. Encontre $[\overrightarrow{v}]_\beta$ para $\overrightarrow{v} = (2,-3,1)$.(**Não resolva nenhum sistema linear.)**

19. Suponha que S consiste dos seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,1,0,-1),\ u_2 = (1,2,1,3),\ u_3 = (1,1,-9,2) \text{ e } u_4 = (16,-13,1,3)$$

   (a) Mostre que S é ortogonal e é uma base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Ache as coordenadas do vetor $v = (1,0,2,3)$ em relação à base S.(**Não resolva nenhum sistema linear.)**

20. Qual é a base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ obtida pelo processo de Gram-Schmidt a partir da base $\{(2,6,3),(-5,6,24),(9,-1,-4)\}$?

21. Use o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal para um subespaço W de um espaço vetorial V, para cada um dos seguintes casos:

   (a) $V = \mathbb{R}^4$ tal que $W = ger\{(1,1,0,0),(2,-1,0,1),(3,-3,0,-2),(1,-2,0,-3\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ tal que $W = \{(x, x+y, y); x, y \in \mathbb{R}\}$

   (c) $V = M(3,1)$ tal que W é o conjunto solução do sistema homogêneo $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$

22. Seja W um subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t,\ y = -5t,\ z = 4t,\ t \in \mathbb{R}$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente ?

23. Seja V o espaço das funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Defina em V o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   a) Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, t, t^2\}$ para obter um conjunto ortonormal $\{f_0, f_1, f_2\}$.

   b) Achar o complemento ortogonal do subespaço $W = [5, 1+t]$.

24. Seja $V = P_3$, $p = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$ e $q = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$ e $\langle p, q \rangle = a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1 + d_0d_1$ um produto interno em P_3. Ache uma base ortonormal para o subespaço W de P_3 gerado pelos vetores $\overrightarrow{v}_1 = 1 + x + x^2 + x^3$, $\overrightarrow{v}_2 = 1 + x + 2x^2 + 4x^3$ e $\overrightarrow{v}_3 = 1 + 2x - 4x^2 - 3x^3$.

25. Seja $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas do vetor $v = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$ em relação à base **ortonormal** obtida a partir da base $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

26. Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$ um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}$. Determine uma base **ortonormal** de $U^{\perp}$, usando o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$.

27. Seja $V = P_2$, com produto interno usual.

    (a) Determine uma base ortonormal para o subespaço W de P_2 gerado por $4t + 3t^2$ e por $12 + t + 7t^2$.

    (b) Determine a projeção ortogonal de $p(t) = t^2$ sobre W.

28. Encontre a projeção ortogonal de $v = (1,2,3)$ sobre o subespaço W gerados pelos vetores $u_1 = (2,-2,1)$ e $u_2 = (-1,1,4)$.

29. Encontre a decomposição ortogonal de $v = (4,-2,3)$ em relação a $W = ger\{(1,2,1),(1,-1,1)\}$.

30. Ache uma matriz ortogonal P cuja primeira linha é $u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Obs.: a matriz P não é única.

31. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa:

    (a) Todo conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortogonal.

    (b) Se A é uma matriz quadrada, cujas colunas são ortonormais então A é inversível e $A^{-1} = A^T$.

    (c) Se W é um subespaço de um espaço com produto interno V então o vetor nulo pertence a $W^{\perp}$.

    (d) Se $\overrightarrow{x}$ é ortogonal a ambos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então x é ortogonal a $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

    (e) Todo conjunto ortogonal é ortonormal.

    (f) Todo vetor pode ser normalizado.

2. Nenhum dos casos é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

3. Sim.

4. a) $d(u,v) = \sqrt{79}$ b) $d(u,v) = \frac{2}{3}\sqrt{21}$

5. Utilize os produtos internos do exercício 1 e os vetores $u = (-1, 3)$ e $v = (3, 5)$.

6. $\overline{g} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$

7. $proj_B^A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

8.

10. a) $\|f(x)\| = \sqrt{\frac{331}{210}}$ b) $d(f,g) = \sqrt{\frac{1}{3}}$

11. $W^\perp = \{(x, -2x, -3x); x \in \mathbb{R}\}$ e $d(v, W) = \sqrt{\frac{8}{7}}$, $d(v, W^\perp) = \sqrt{\frac{6}{7}}$

12. a) Não b) Sim c) Não d) Não e) Não

13. Uma base para o complemento ortogonal do núcleo é $\{(1,0,5,-2),(0,1,-3,2)\}$ e para o complemento ortoganl da imagem é $\{(-2,1,-1)\}$.

14. $w_1 = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right)$ e $w_2 = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$

15. $w_1 = \left(-\frac{7}{6}, 1, \frac{7}{6}, \frac{10}{3}\right)$ e $w_2 = \left(\frac{17}{10}, 0, \frac{5}{2}, -\frac{2}{5}\right)$

16. Considerando $\langle A, B\rangle = tr\left(A^T B\right)$, tem-se : a) Uma base para $W^\perp$ é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

17.

18. $(2,-3,1) = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{3}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 3(0,1,0)$

19. b) $[v]_s = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{11}{87} \\ \frac{9}{145} \end{bmatrix}$

20.

21. a) $\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \frac{\sqrt{2}}{11}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right), \frac{\sqrt{11}}{12}\left(\ \frac{12}{11},\quad -\frac{12}{11},\quad 0,\quad -\frac{36}{11}\ \right) \right\}$

b) $\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \right\}$

c) $\alpha = \left\{ \left(-\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}} \right) \right\}$

22. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 5 + 4z = 0\}$ e $d(v, W^{\perp}) = \frac{2\sqrt{5}}{15}$, $d(v, W) = \sqrt{\frac{86}{45}}$

23. a) $\beta = \{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$

24. $\alpha = \left\{ \frac{1}{2}(1 + x + x^2 + x^3), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 - x + 2x^3), \frac{1}{5\sqrt{2}}(1 + 3x - 6x^2 + 2x^3) \right\}$

25. $\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \frac{\sqrt{30}}{15} \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), \frac{\sqrt{210}}{14} \left(\frac{8}{15}, -\frac{7}{15}, -\frac{4}{15} \right) \right\}$

26. Um base ortonormal é $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$

27. a) Uma base ortonormal é $\alpha = \left\{ \frac{4}{5}t + \frac{3}{5}t^2, \frac{12}{13} - \frac{2}{13}t = \frac{4}{13}t^2 \right\}$

b) $proj_W^u = \frac{4228}{4225} - \frac{300}{4225}t + \frac{1921}{4225}t^2$

28. $proj_W^v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3 \right)$

29. $v = w_1 + w_2$ onde $w_1 = \left(\frac{7}{2}, -2, \frac{7}{2} \right)$ e $w_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$

30. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Salientamos que P não é única.

31. F,V,V,V,F,F