

## Lista de Exercícios - Autovalores e autovetores


### Legenda

 Cálculos

 Teoria


 Geometria

### Questões

-  1. Considere o quadrado determinado pelos pontos  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(1,1)$  e  $D(0,1)$ . Em cada item aplique o referido operador linear sobre o quadrado e verifique se é preservada a direção dos vetores  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$ .

- (a) Cisalhamento em  $x$  de duas unidades.
- (b) Cisalhamento em  $y$  de três unidades.
- (c) Dilatação de duas unidades.
- (d) Reflexão em torno da reta  $y = 2x$ .

Além dos vetores  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$ , existem outros vetores que ao serem transformados (por cada um dos referidos operadores) preservam a direção? Quais?

-  2. Suponha que um operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  transforma os pontos indicados na [Figura 1](#) nos pontos correspondentes da [Figura 2](#):

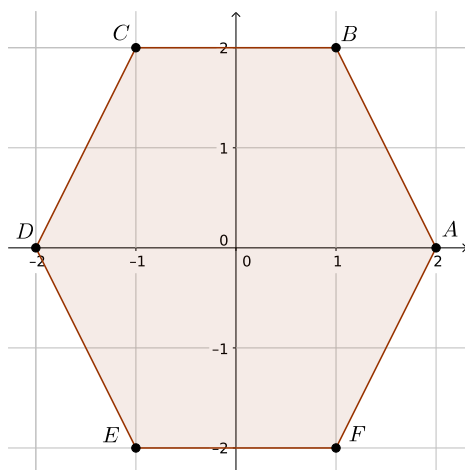


Figura 1: Domínio

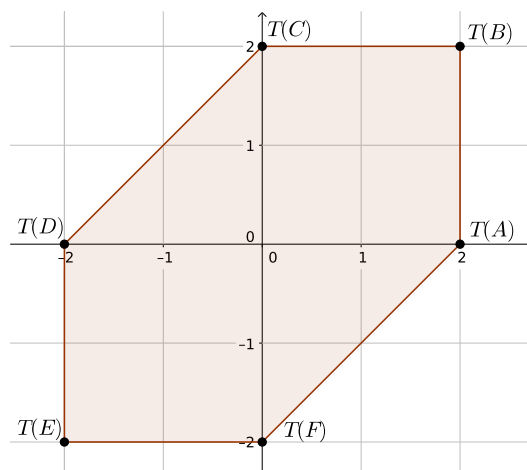


Figura 2: Contradomínio

- (a) Qual é a fórmula para  $T(x,y)$ ?
- (b) Quais são os autovalores e os autovetores de  $T$ ?

-  3. Encontre os autovalores e autovetores das transformações lineares dadas:

- (a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x,y) = (2y,x)$ .

- (b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$ .  
 (c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$ .  
 (d)  $T : P_2 \rightarrow P_2$  tal que  $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$ .  
 (e)  $T : M(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$  tal que  $T(A) = A^T$ .



4. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



5. (ENADE) Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  faz uma reflexão em relação ao eixo horizontal, conforme mostrado na [Figura 3](#).

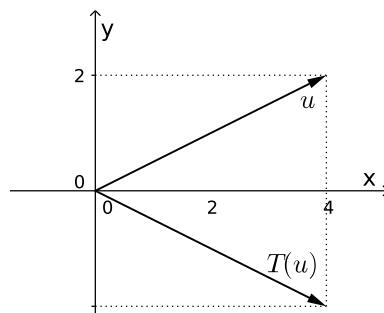


Figura 3: Aplicação de  $T$  em um vetor  $u \in \mathbb{R}^2$

Essa transformação  $T$ :

- (a) É dada por  $T(x, y) = (-x, y)$ .  
 (b) Tem autovetor  $(0, -1)$  com autovalor associado igual 2.  
 (c) Tem autovetor  $(2, 0)$  com autovalor associado igual 1.  
 (d) Tem autovetor de multiplicidade 2.  
 (e) Não é inversível.



6. Construa uma matriz  $2 \times 2$  **não diagonal** com autovalores 1 e  $-1$ .



7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine o conjunto  $S = \{v \in \mathbb{R}^3 | Av = v\}$  e represente-o geometricamente.  
 (b) Determine uma base e a dimensão para  $S$ .



8. Na [Figura 4](#) encontram-se os auto-espacos  $S_1$ , associado ao autovalor  $-1$ , e  $S_2$ , associado ao autovalor 0, de um operador linear no  $\mathbb{R}^3$ .

Determine:

- (a) os autovetores desse operador.  
 (b) a fórmula explícita desse operador.

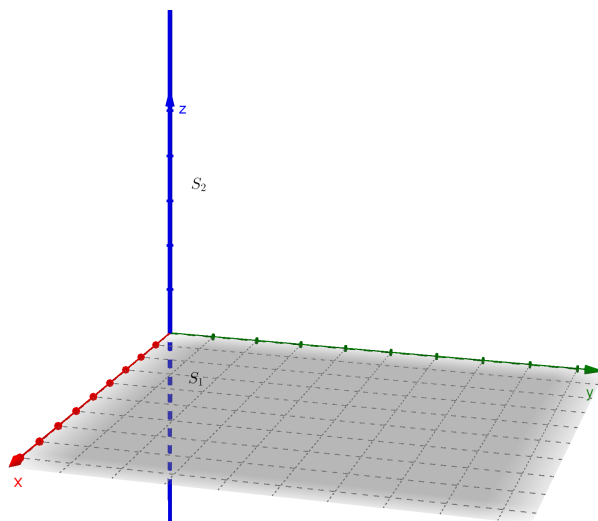


Figura 4: Autoespaços do operador linear


- ✎ 9. (ENADE) Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .
- Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , mostre que  $2\lambda$  é um autovalor de  $2A$ .
  - Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , mostre que  $\lambda^2$  é um autovalor de  $A^2$ .
- 📊 10. Encontre a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $T$  tenha autovalores  $-2$  e  $3$  associados aos autovetores  $(3y, y)$  e  $(-2y, y)$  respectivamente.
- 🗑️ 11. Que vetores **não nulos** do plano, quando cisalhados por  $C(x, y) = (y - 3x, y)$  e em seguida girados de  $45^\circ$  (no sentido anti-horário) ficam **ampliados** / **reduzidos** (na mesma direção)? Em **quantas** vezes? Represente geometricamente os vetores e suas imagens.
- 🗑️ 12. Determine os autovalores e autovetores, se existirem, do operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  obtido quando se faz uma rotação de  $\pi$  radianos em torno do eixo  $x$ , seguida de uma contração de  $\frac{1}{2}$ . Represente graficamente os auto-espaços.
- 📊 13. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear que dobra o comprimento do vetor  $(1, -3)$  e triplica e muda o sentido do vetor  $(3, -1)$ .
- Determine  $T(x, y)$ .
  - Calcule  $T(0, 2)$ .
  - Qual é a matriz do operador  $T$  na base  $\alpha = \{(2, 1), (1, 2)\}$ ?
- 📊 14. Seja  $T : M(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$  um operador com autovetores  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  associados aos autovalores  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 2$  e  $\lambda_4 = 0$ , respectivamente. Determine  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ .
- 📊 15. Dada a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que é a projeção sobre a reta  $y = \frac{\pi}{2}$ , encontre os autovalores e autovetores da transformação  $T$ . Faça a representação geométrica dos auto-espaços.

16. Considere  $P_1$  como o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a um. Seja  $D : P_1 \rightarrow P_1$  dado por  $D(p) = x \cdot p' + p'$ . Determine os autovalores e autovetores de  $D$ .
17. Seja  $A$  uma matriz quadrada e  $A^T$  a sua transposta. As matrizes  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos autovalores e autovetores? Justifique sua resposta.
18. Determine os autovalores e autovetores da transformação linear, e faça a representação geométrica, que a cada vetor  $v \in \mathbb{R}^3$  associa a sua projeção ortogonal no plano  $x + y = 0$ .
19. Um lançador de mísseis controlado por computador foi raqueado por forças inimigas. Especialistas descobriram que toda vez que o lançador é posicionado na direção do vetor  $v = (x, y, z)$  (com o objetivo de acertar um alvo inimigo) automaticamente é redirecionado para a direção do vetor  $w = (4x + 2y + 2z, 2x + 4y + 2z, 2x + 2y + 4z)$  evitando que o alvo seja atingido. Devido ao sistema do lançador, este só poderá ser reprogramado (com o objetivo de evitar a mudança automática de posição) se for encontrada uma direção na qual a ação da mudança automática não tenha efeito, isto é, se for encontrada uma direção  $v$  tal que  $w = kv$ . Para resolver este problema foi chamado um matemático muito famoso chamado Roger. Como Roger resolveu este problema?
20. Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear.
- Se  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $T$ , mostre que  $T$  não é injetora.
  - A recíproca é verdadeira? Ou seja, se  $T$  não é injetora,  $\lambda = 0$  é autovalor de  $T$ ?
21. Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação  $D : P_2 \rightarrow P_2$  dado por  $D(p) = p'$ .
22. Sejam  $A, B \in M(n, n)$  matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre os seus autovalores? Qual?
23. Mostre que o conjunto formado pelo vetor nulo e por todos os autovetores de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  associados a um autovalor  $\lambda$  é um **subespaço vetorial** de  $V$ .
24. Discuta a veracidade da seguinte afirmação: Se  $\lambda$  **não** é um autovalor de  $A$ , então o sistema linear  $(A - \lambda I)v = 0$  só tem a solução trivial.
25. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Dizemos que uma matriz  $B$  é semelhante a uma matriz  $A$  se existir uma matriz inversível  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ . Mostre que se  $B$  é semelhante a  $A$ , então as duas matrizes tem o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.
26. Mostre que se  $B = R^{-1}AR$  e  $v$  é um autovetor de  $B$  associado a um autovalor  $\lambda$  então  $Rv$  é um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ .
27. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear definido por  $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$ . Determine uma base de  $\mathbb{R}^2$  formada por autovetores de  $T$  e mostre que a matriz do operador  $[T]_\beta^\beta$  é diagonal.
28. Nos itens abaixo, considere que  $T : V \rightarrow V$  é uma transformação linear. Se possível, determine uma matriz  $P$  que diagonaliza a matriz  $A$  de  $T$  e calcule  $P^{-1}AP$ .
- $T : P_1 \rightarrow P_1$  definida por  $T(a + bx) = (4a + 2b) + (a + 3b)x$
  - $T : P_1 \rightarrow P_1$  definida por  $T(p(x)) = p(x + 1)$
29. Verifique se cada matriz  $A$  a seguir é diagonalizável. Caso seja, determine uma matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  e calcule  $P^{-1}AP$ .

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$


$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$


$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

-  30. Considere o operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $T(x, y, z) = (5x + 4z, x - 5y, 3z)$  e o operador  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido pela reflexão através do plano  $\pi : x + 2z = 0$ .


(a) Determine  $S \circ T$

(b)  $S \circ T$  é diagonalizável? Se for, encontre  $D$  e  $P$  tais que  $D = P^{-1}[S \circ T]P$ .


-  31. Determine o valor de  $k$  para que a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  seja diagonalizável.


-  32. Determine  $a$  de modo que a matriz  $A$  seja diagonalizável. Para o valor de  $a$  encontrado, determine uma matriz inversível  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $P^{-1}AP = D$ .


$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$


-  33. Encontre os autovalores de  $A^9$  se


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$


-  34. Calcule  $A^{10}$  para  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

-  35. Seja  $T$  um operador linear que preserva o comprimento do vetor  $v_1 = (1, 0, 0)$ , duplica o comprimento do vetor  $v_2 = (0, 2, 0)$  e inverte o sentido do vetor  $v_3 = (0, 2, 1)$ . Determine o operador linear  $T^{20}$ .

-  36. Seja  $T : V \rightarrow V$  o operador linear que tem autovalores  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \dots, \lambda_n = n$  associados aos autovetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , respectivamente. Sabendo que  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e que  $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ , determine  $[T(v)]_\beta$ .


-  37. Verifique se o operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y, z) = (x + y + z, -2x + 4y + 2z, 2z)$  é diagonalizável ou não. Em caso afirmativo, determine  $T^{22}(x, y, z)$ .

-  38. Seja  $A$  uma matriz inversível. Prove que se  $A$  é diagonalizável então  $A^{-1}$  também é.


-  39. Seja  $A$  uma matriz  $4 \times 4$  e seja  $\lambda$  um autovalor de multiplicidade 3. Se  $A - \lambda I$  tem posto 1,  $A$  é diagonalizável? Explique.

-  40. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.

- (a) Se  $A$  é diagonalizável então  $A$  tem  $n$  autovalores distintos.
- (b) Se  $A$  é inversível então  $A$  é diagonalizável.
- (c) Uma matriz quadrada com vetores-coluna linearmente independentes é diagonalizável.
- (d) Se  $A$  é diagonalizável, então cada um de seus autovalores tem multiplicidade 1.
- (e) Se nenhum dos autovalores de  $A$  é nulo, então  $\det(A) \neq 0$ .
- (f) Se  $u$  e  $v$  são autovetores de  $A$  associados, respectivamente, aos autovalores distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então  $u + v$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_1 + \lambda_2$ .
- (g) Se  $v$  é autovetor dos operadores  $T : V \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow V$  então  $v$  é autovetor do operador  $T + S$ .

 41. (ENADE) O que é correto afirmar a respeito de um operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que possua os números 2 e 3 como únicos autovalores?

- (a) Pode existir uma base de  $\mathbb{R}^3$  na qual a matriz desse operador é da forma  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .
- (b) Existe base de  $\mathbb{R}^3$  na qual a matriz desse operador tem uma linha nula.
- (c) Existe base de  $\mathbb{R}^3$  na qual a matriz desse operador é da forma  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .
- (d) É possível que o autoespaço associado a algum dos autovalores de  $T$  tenha dimensão 2.
- (e) O polinômio característico de  $T$  é igual a  $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ .

 42. Mostre que se  $\lambda$  é autovalor de uma matriz inversível  $A$  associado ao autovetor  $v$ , então  $\lambda^{-1}$  é um autovalor de  $A^{-1}$  associado ao autovetor  $v$ .

## Soluções

- 1.
2. (a)  $T(x, y) = \left( \frac{2x + y}{2}, y \right)$   
 (b)  $\lambda = 1$  e  $v = (x, 0)$ , com  $x \neq 0$
3. (a)
  - Para  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$  tem-se  $v_1 = (-\sqrt{2}y, y)$ , com  $y \neq 0$ .
  - Para  $\lambda_2 = \sqrt{2}$  tem-se  $v_2 = (\sqrt{2}y, y)$ , com  $y \neq 0$ .
 (b)
  - Para  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$  tem-se  $v_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}y, y)$ , com  $y \neq 0$ .
  - Para  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$  tem-se  $v_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}y, y)$ , com  $y \neq 0$ .
 (c)
  - Para  $\lambda_1 = -2$  tem-se  $v_1 = (x, -3x, x)$ , com  $x \neq 0$ .
  - Para  $\lambda_2 = -1$  tem-se  $v_2 = (-2z, 4z, z)$ , com  $z \neq 0$ .
  - Para  $\lambda_3 = 2$  tem-se  $v_3 = (y, y, y)$ , com  $y \neq 0$ .
 (d)
  - Para  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  tem-se  $p_1(x) = ax^2 + bx + b$ , com  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ .
  - Para  $\lambda_2 = -1$  tem-se  $p_2(x) = -bx + b$ , com  $b \neq 0$ .

- (e) • Para  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  tem-se  $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ , com  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ .
- Para  $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$  tem-se  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix}$ , com  $c \neq 0$ .
4. (a) Para  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  tem-se  $v_1 = (x, 0, 0)$ , com  $x \neq 0$ .
- (b) • Para  $\lambda_1 = -1$  tem-se  $v_1 = (-z, -2z, z)$ , com  $z \neq 0$ .
- Para  $\lambda_2 = 1$  tem-se  $v_2 = (-x, x, 0)$ , com  $x \neq 0$ .
- Para  $\lambda_3 = 3$  tem-se  $v_3 = (x, 0, x)$ , com  $x \neq 0$ .
- (c) • Para  $\lambda_1 = -1$  tem-se  $v_1 = (-\frac{1}{3}z, 0, z, 0)$ , com  $z \neq 0$ .
- Para  $\lambda_2 = 1$  tem-se  $v_2 = (0, -t, 0, t)$ , com  $t \neq 0$ .
- Para  $\lambda_3 = 6$  tem-se  $v_3 = (\frac{1}{4}z, 0, x, 0)$ , com  $x \neq 0$  ou  $z \neq 0$ .
5. Apenas o item (c) é verdadeiro.
- 6.
7. (a) Para  $\lambda = 1$  tem-se  $S_1 = \left\{ \left( \frac{z-y}{2}, y, z \right); y, z \in \mathbb{R} \right\}$  e para  $\lambda = 7$  tem-se  $S_2 = \left\{ \left( -\frac{1}{2}z, -z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$ .
- (b) Para  $S_1, \alpha = \{(-1, 2, 0), (1, 0, 2)\}$  e para  $S_2, \beta = \{(-1, -2, 2)\}$ .
8. (a)  $v = (x, y, 0)$  e  $u = (0, 0, z)$
- (b)  $T(x, y, z) = (-x, -y, 0)$
9. (a) Se  $Av = \lambda v$  então  $(2A)v = 2(Av) = 2(\lambda v) = (2\lambda)v$ .
- (b) Se  $Av = \lambda v$  então  $(A^2)v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$ .
10.  $T(x, y) = (-6y, -x + y)$
11. Para  $\lambda_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$  tem-se  $v_1 = (x, \frac{3}{5}x)$  e para  $\lambda_2 = \sqrt{2}$  tem-se  $v_2 = (0, y)$ .
12. Para  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$  tem-se  $v_1 = (x, 0, 0)$  e para  $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$  tem-se  $v_3 = (0, y, z)$ .
13. (a)  $T(x, y) = \left( \frac{-29x-15y}{8}, \frac{15x+21y}{8} \right)$
- (b)
- (c)  $\begin{bmatrix} \frac{-11}{24} & \frac{51}{8} \\ \frac{51}{8} & \frac{175}{24} \end{bmatrix}$
14.  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+c-d & -b \\ 2c-2d & 0 \end{bmatrix}$
15. Para  $\lambda_1 = 1$  tem-se  $v_1 = (2y, y)$  e para  $\lambda_2 = 0$  tem-se  $v_2 = (x, -2x)$ .
16. Para  $\lambda_1 = 0$  os autovetores são do tipo  $p_1(x) = a$  e para  $\lambda_2 = 1$  eles têm a forma  $p_2(x) = b + bx$ .
17. Para concluir que os autovalores são os mesmos, mostre que  $A$  e  $A^T$  têm o mesmo polinômio característico.
18. Para  $\lambda_1 = 0$  tem-se  $v_1 = (x, x, 0)$  e para  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  tem-se  $v_2 = (-y, y, z)$

19. Basta tomar a direção do vetor  $v_1 = (1, 1, 1)$  e então  $w = 8v$ , ou a direção dos vetores  $v_2 = (-1, 0, 1)$  ou  $v_3 = (-1, 1, 0)$  onde  $k = 2$ .

20. (a)

(b)

21.  $\lambda = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ .

22.

23.

24. Verdadeiro.

25. Partir da hipótese  $A = PBP^{-1}$  e mostrar que  $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ .

26. Se  $B = R^{-1}AR$  então  $RB = AR$ . Assim, se  $Bv = \lambda v$ , tem-se:

$$A(Rv) = (AR)v = (RB)v = R(Bv) = R(\lambda v) = \lambda(Rv).$$

27.  $\beta = \{(\frac{1}{2}, 1), (-2, 1)\}$  e  $[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

28. (a)  $\beta = \{(-1, 1), (2, 1)\}$  e  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(b) Não existe base  $\beta$  para a qual exista a matriz diagonalizadora  $P$ .

29. (a) Não

(b)  $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Não

30. (a)  $(S \circ T)(x, y, z) = (3x, x - 5y, -4x - 5z)$ .

(b) Para  $\lambda_1 = 0$  tem-se  $v_1 = (0, y, 0)$ , para  $\lambda_2 = 3$  tem-se  $v_2 = (-2z, -\frac{7}{3}z, z)$  e para  $\lambda_3 = -5$  tem-se  $v_3 = (0, y, y)$ .

31.  $k = 0$

32.  $a = 4, P = \begin{bmatrix} 1 & -15 & 1 & 0 \\ 1 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

33. São  $1, 2^{-9}, 0, 2^9$

34.  $A^{10} = \begin{bmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{bmatrix}$

35.  $T^{20}(x, y, z) = (x, 1048576y - 2097150z, z)$

36.  $[T(v)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ \vdots \\ n^2 \end{bmatrix}$



37.

38.

39.

40. (a) F (b) F (c) F (d) F (e) V (f) F (g) V

41. Alternativa (d)

42. Se  $Av = \lambda v$  e existe  $A^{-1}$ , então  $A^{-1}v = A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)v = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda v) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(Av) = \frac{1}{\lambda}(A^{-1}A)v = \frac{1}{\lambda}Iv = \frac{1}{\lambda}v$ .