Alunos(as): ______________________________ Turma/Professor: ____________

Introdução a Espaços Vetoriais

Na tarefa 1 a *adição* e a *multiplicação por escalar* de pontos (ou vetores) de $\mathbb{R}^2$ são definidas por:

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \text{ para quaisquer } u, v \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$k \cdot u = k \cdot (x_1, y_1) = (kx_1, ky_1), \text{ para quaisquer } k \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

1. Cada uma das figuras a seguir apresenta um subconjunto H de $\mathbb{R}^2$.

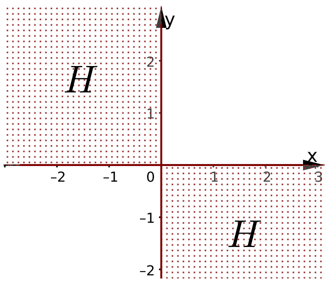


Figura 1: 2º e 4º quadrantes (com os eixos)

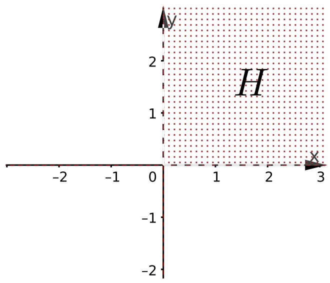


Figura 2: 1º quadrante (sem os semieixos)

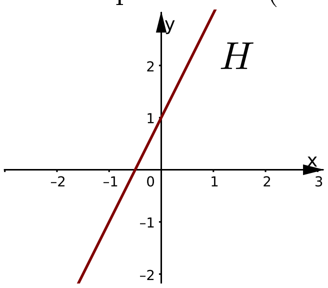


Figura 3: Reta $y = 2x + 1$

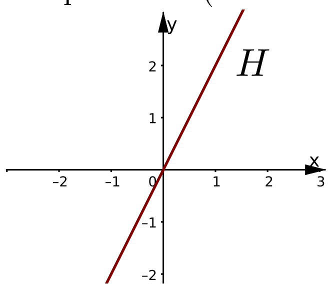


Figura 4: Reta $y = 2x$

Para cada uma dos subconjuntos acima, responda as perguntas a seguir:

(a) A soma de quaisquer dois vetores de H sempre pertence a H? Por quê?

(b) Os múltiplos dos vetores de H sempre pertencem a H? Por quê?

(c) Qual a representação algébrica de H?

Definição de conjunto fechado

Definição 1. Um conjunto E é fechado para as operações de soma e multiplicação por escalar se:

- dados dois elementos u e v que pertencem a E, a soma $u + v$ também é um elemento que pertence a E. (Fechado para a soma)
- k é um escalar arbitrário e u é um elemento que pertence a E, então ku também é um elemento que pertence a E. (Fechado para a multiplicação por escalar).

Pergunta-se: Dentre os subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ apresentados na tarefa 1, quais são fechados para as operações de soma e multiplicação por escalar?

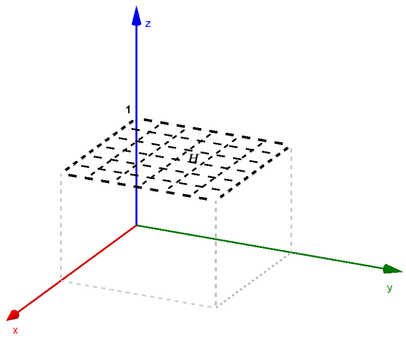
2. Seja $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 < 36\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Considerando as operações de soma e multiplicação por escalar usuais do $\mathbb{R}^2$ (Como foi definido para a tarefa 1), responda os itens a seguir:

   (a) Represente G geometricamente.

   (b) A soma de quaisquer dois vetores de G sempre pertence a G? Por quê?

   (c) Os múltiplos dos vetores de G sempre pertencem a G? Por quê?

3. Considere o subconjunto M do $\mathbb{R}^3$, representado na Figura 5



5.png

Figura 5: Plano $z = 1$

   (a) Descreva M algebricamente.

   (b) A soma de quaisquer dois elementos de M sempre pertence a M? Por quê?

   (c) Os múltiplos dos elementos de M sempre pertencem a M? Por quê?

4. Seja S o conjunto solução do sistema linear $\begin{cases} 3x - y - 5z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ x - 4y - 9z &= 0 \\ 7x + 5y + 3z &= 0 \end{cases}$

   (a) Descreva S algebricamente.

   (b) A soma de quaisquer dois elementos de S sempre pertence a S? Por quê?

   (c) Os múltiplos dos elementos de S sempre pertencem a S? Por quê?

Espaços Vetoriais

Definição 2. Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a **adição** e a **multiplicação por escalar**. Dizemos que V é um **espaço vetorial** e que os objetos de V são vetores se:

- V é um conjunto fechado para as operações de soma e multiplicação por escalar;
- os seguintes axiomas forem satisfeitos para qualquer elementos u, v e w de V e escalares α e β :

1. A adição é associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. A adição é comutativa: $u + v = v + u$
3. A adição admite elemento neutro (nulo): existe $\vec{0} \in V$, tal que $v + \vec{0} = v$ para todo $v \in V$.
4. A adição admite simétricos: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$, tal que $-v + v = \vec{0}$.
5. A multiplicação por escalar é associativa: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
6. Distributividade sobre a adição de escalares: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
7. Distributividade sobre a adição de vetores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
8. A mutiplicação por escalar admite elemento neutro: $1u = u$.

Observe que a definição de espaço vetorial não especifica nem a natureza dos vetores, nem das operações. Qualquer tipo de objeto pode ser um vetor (uma matriz, uma função, um polinômio, por exemplo), e as operações de adição e multiplicação por escalar podem não ter relação alguma com as operações usuais (podemos ter outras regras para a soma de vetores ou multiplicação de um vetor por um escalar, por exemplo, diferentes da usual que aprendemos em Geometria Analítica). A única exigência é que o conjunto seja fechado para tais operações, como elas forem definidas, e que os 8 axiomas sejam satisfeitos.

4. Considere V o conjunto dos pares ordenados de números reais e denote por $+$ e $\cdot$ as operações de adição e multiplicação por escalar definidas como segue:

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \text{ para quaisquer } u, v \in V \tag{3}$$
$$k \cdot u = k \cdot (x_1, y_1) = (kx_1, 0), \text{ para quaisquer } k \in \mathbb{R}, u \in V \tag{4}$$

   (a) Escolha $k \in \mathbb{R}$ e dois vetores pertencente a V (tome valores numéricos). A soma destes vetores pertence a V? E o produto do escalar por um dos vetores está em V?

   (b) Que conclusões sobre o fechamento de V podem ser obtidas se forem tomados quaisquer vetores de V e qualquer escalar pertencente a $\mathbb{R}$? Justifique (sem especificar valores numéricos).

   (c) A adição definida por (3) satisfaz as 4 propriedades da definição de espaço vetorial? Em caso afirmativo, demonstre=as. Senão, exiba um contraexemplo, identificando alguma propriedade que não seja satisfeita.

   (d) A multiplicação por escalar definida por (4) satisfaz as outras quatro propriedades da definição de espaço vetorial? Em caso afirmativo, demonstre-as. Senão, exiba um contraexemplo, identificando alguma propriedade que não seja satisfeita.

   (e) Podemos concluir que V, com as operações (3) e (4), é um espaço vetorial? Justifique.

5. Considere o subconjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, representado na Figura 6,

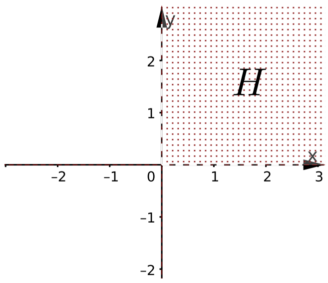


Figura 6: 1º quadrante (sem os semieixos)

com estas **novas** definições para as operações de adição e multiplicação por escalar:

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2), \text{ para quaisquer } u \in H, v \in H \tag{5}$$
$$k \cdot u = k \cdot (x_1, y_1) = (x_1^k, y_1^k), \text{ para quaisquer } k \in \mathbb{R}, u \in H \tag{6}$$

   (a) Calcule $u + v$ e $k \cdot u$, utilizando as operações definidas por (5) e (6), sendo $u = (1, 2)$, $v = (3, 4)$ e $k = 3$.

   (b) Que conclusões sobre o fechamento de H podem ser obtidas se forem tomados quaisquer vetores de H e qualquer escalar pertencente a $\mathbb{R}$? Justifique (sem especificar valores numéricos).

   (c) Verifique que a adição dada por (5) é comutativa e associativa.

   (d) Podemos dizer que $\vec{0}$ (o elemento neutro dessa adição) é o vetor $(0, 0)$? Em caso negativo, existe algum elemento $\vec{0} \in H$ que faz o papel de neutro?

   (e) Se $u = (x, y) \in H$, quem é $-u$?

   (f) Com base na resposta anterior, é verdade que $-u + u = \vec{0}$? Justifique.

   (g) Podemos concluir que H, com as operações (5) e (6) é um espaço vetorial? Justifique sua resposta e compare com o que ocorre ao usar as operações usuais de $\mathbb{R}^2$ neste mesmo subconjunto. (Tarefa 1)