Técnicas de Demonstração e Indução Matemática

Lista 2

1.

x e y são inteiros pares $\rightarrow$ xy é par

- Por prova direta:

Se x e y são pares, então $x = 2n, n \in \mathbb{Z}$ e $y = 2m, m \in \mathbb{Z}$.

$$xy = 2n \cdot 2m$$

$$= 4mn$$

$$= 2 \cdot (2mn)$$

Consideramos que $2mn = k \in \mathbb{Z}$.

Assim, $xy = 2k, k \in \mathbb{Z}$, logo, xy é par.

2.

x^2 é ímpar $\rightarrow$ x é ímpar

- Por contraposição:

$\neg$(x é ímpar) $\rightarrow$ $\neg$(x^2 é ímpar)
x é par $\rightarrow$ x^2 é par
Se x é par, então $x = 2n, n \in \mathbb{Z}$.

$$x^2 = (2n)^2$$

$$= 4n^2$$

$$= 2 \cdot (2n^2)$$

Consideramos que $2n^2 = m \in \mathbb{Z}$.

Assim, $x^2 = 2m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, x^2 é par.

3.

n + 1 senhas são distribuídas para n pessoas $\rightarrow$ alguma pessoa recebeu ao menos 2 senhas

- Por absurdo:

Supondo que $n + 1$ senhas foram distribuídas e nenhuma pessoa recebeu mais de 1 senha.

Das n pessoas, cada uma recebeu 1 senha. Portanto, o total de senhas é $n \cdot 1 = n$.

Mas já se sabe que o total é $n + 1$. Portanto, é impossível que ninguém tenha recebido mais de uma senha.

4.

Existe $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não é um número racional

- Por absurdo:

  Supondo $\sqrt{2}$ racional.

Se $\sqrt{2}$ é um número racional, então pode ser escrito como uma fração irredutível.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Por ser uma fração irredutível, a e b não podem ser pares simultaneamente; caso contrário, seria possível simplificar por 2.

Elevando os dois lados da equação ao quadrado:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$2b^2 = a^2$$

Logo, a^2 é par, portanto, a é par e pode ser escrito como $a = 2k, k \in \mathbb{Z}$.
Substituindo a por $2k$ na equação:

$$2b^2 = (2k)^2$$
$$2b^2 = 4k^2$$
$$b^2 = 2k^2$$

Logo, b^2 é par, portanto, b é par.

Temos que a e b são pares simultaneamente. Logo, $\frac{a}{b}$ não é irredutível.
Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional.

5.

x e y são inteiros ímpares → x + y é par

- Por prova direta:

  Se x e y são ímpares, então $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ e $y = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x + y &= (2n + 1) + (2m + 1) \\ &= 2n + 2m + 2 \\ &= 2 \cdot (n + m + 1) \end{aligned}$$

Consideramos que $n + m + 1 = k \in \mathbb{Z}$.
Assim, $x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x + y$ é par.

6.

x é par $\rightarrow x^2$ é divisível por 4

- Por prova direta:

Se x é par, então $x = 2n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x^2 &= (2n)^2 \\ &= 4n^2 \end{aligned}$$

Consideramos que $n^2 = m \in \mathbb{Z}$.

Assim, $x^2 = 4m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, x^2 é divisível por 4.

7.

$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x \neq 2$

- Por absurdo:

Supondo $x = 2$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 0$$
$$4 + 4 - 3 = 0$$
$$5 = 0$$

Chegamos em um absurdo, portanto, é impossível satisfazer a equação com $x = 2$. Logo, $x \neq 2$.

8.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$3 \cdot (2n^2 + 2n + 3) - 2n^2$ é um quadrado perfeito.

- Base:

Com $n = 0$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2n^2 + 2n + 3) - 2n^2 &= 3 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3) - 2 \cdot 0 \\ &= 3 \cdot (3) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Como $9 = 3^2$, é um quadrado perfeito.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \rightarrow p(k+1)$$

$$3 \cdot (k^2 + 2k + 3) - 2k^2 = m^2 \rightarrow 3 \cdot ((k+1)^2 + 2 \cdot (k+1) + 3) - 2 \cdot (k+1)^2 = n^2$$

Com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Testando a expressão para $k+1$:

$$3 \cdot ((k+1)^2 + 2 \cdot (k+1) + 3) - 2 \cdot (k+1)^2$$

$$= 3 \cdot ((k^2 + 2k + 1) + (2k + 2) + 3) - 2 \cdot (k^2 + 2k + 1)$$
$$= 3 \cdot (k^2 + 4k + 6) - (2k^2 + 4k + 2)$$
$$= 3k^2 + 12k + 18 - 2k^2 - 4k - 2$$
$$= k^2 + 8k + 16$$
$$= (k+4)^2$$

Ou seja, a expressão representa um quadrado perfeito para $n = k + 4$ ou $n = -(k+4)$.

9.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- Base:

Com $n = 1$:

$$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Como $1 = 1^2$, a expressão funciona para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \rightarrow p(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$$

Analisando a expressão para $k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2 \cdot (k+1) - 1)$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)$:

$$= k^2 + (2 \cdot (k+1) - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 2 - 1$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$$

10.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

- Base:

Com $n = 1$:

$$2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$$
$$1 + 2 = 4 - 1$$
$$3 = 3$$

Provado que a expressão funciona para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1 \to \sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$$

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1}$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=0}^{k} 2^i$:

$$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

Somando os expoentes de 2^1 e 2^{k+1} :

$$= 2^{k+1+1} - 1$$
$$= 2^{k+2} - 1$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$$

11.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

$2^{2n} - 1$ é divisível por 3

- Base:

Com $n = 1$:

$$2^{2n} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

3 é divisível por 3, então a proposição vale para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \rightarrow p(k+1)$$

$$2^{2k} - 1 = 3n \rightarrow 2^{2(k+1)} - 1 = 3m$$

Com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Manipulando $p(k)$:

$$2^{2k} - 1 = 3n$$

$$2^{2k} = 3n + 1$$

Guardaremos essa informação para mais tarde.

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1$$

Abrindo as potências de 2:

$$= 2^{2k} \cdot 2^2 - 1$$

Substituindo o valor que encontramos para 2^{2k}:

$$= (3n + 1) \cdot 2^2 - 1$$

$$= (3n + 1) \cdot 4 - 1$$

$$= 12n + 4 - 1$$

$$= 12n + 3$$

Colocando o 3 em evidência:

$$= 3 \cdot (4n + 1)$$

Consideramos $4n + 1 = m \in \mathbb{Z}$.

Provamos então que $2^{2(k+1)} - 1 = 3m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

12.

$\forall\ n \geq 4, n \in \mathbb{Z}$

$n^2 > 3n$

- Base:

Com $n = 4$:

$$n^2 = 4^2 = 16$$

$$3n = 3 \cdot 4 = 12$$

Como $16 > 12$, a proposição vale para $n = 4$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$k^2 > 3k \to (k+1)^2 > 3 \cdot (k+1)$$

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Já sabemos que $k^2 > 3k$. Resta analisar $(2k + 1)$:

$$k \geq 4 \Rightarrow 2k + 1 \geq 2 \cdot 4 + 1$$

$$2k + 1 \geq 9$$

Como $9 > 3$, temos:

$$2k + 1 \geq 9 > 3$$

Logo:

$$2k + 1 > 3$$

Juntando as informações ($k^2 > 3n$ e $2k + 1 > 3$):

$$k^2 + 2k + 1 > 3n + 3$$

$$k^2 + 2k + 1 > 3 \cdot (n+1)$$

Provamos então que:

$$(k+1)^2 > 3 \cdot (n+1)$$

13.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$

- Base:

Com $n = 1$:

$$(2n-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3} = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Como $1 = 1$, a proposição vale para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \rightarrow p(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1)^2 = \frac{k \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{3} \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1)^2 = \frac{(k+1) \cdot (2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1)}{3}$$

Manipulando o resultado esperado para $k + 1$:

$$\frac{(k+1) \cdot (2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1)}{3} = \frac{(k+1) \cdot (2k+2-1) \cdot (2k+2+1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (2k+1) \cdot (2k+3)}{3}$$

$$= \frac{(2k^2 + k + 2k + 1) \cdot (2k+3)}{3}$$

$$= \frac{(2k^2 + 3k + 1) \cdot (2k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 6k^2 + 6k^2 + 9k + 2k + 3}{3}$$

$$= \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3}$$

Guardaremos essa informação para mais tarde.

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{k} (2i-1)^2 + (2(k+1)-1)^2$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=1}^{k} (2i-1)^2$:

$$= \frac{k \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{3} + (2(k+1)-1)^2$$

$$= \frac{k \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{k \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{3} + \frac{3 \cdot (2k+1)^2}{3}$$

$$= \frac{(2k^2-k) \cdot (2k+1) + 3 \cdot (4k^2+4k+1)}{3}$$

$$= \frac{(4k^3+2k^2-2k^2-k) + (12k^2+12k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

Já analisamos que:

$$\frac{(k+1) \cdot (2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1)}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

Portanto, provamos que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1)^2 = \frac{(k+1) \cdot (2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1)}{3}$$

14.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

- Base:

Com $n = 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Está provado que funciona para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{k}{k+1} \to \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Analisando a expressão para $k+1$;

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i \cdot (i+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)}$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i\cdot(i+1)}$:

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$= \frac{k\cdot(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

Simplificando $(k+1)$:

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

15.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot n}{2}$

- Base:

Com $n = 1$:

$$(-1)^{n+1}n^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot n}{2} = \frac{(-1)^2\cdot(1+1)\cdot 1}{2} = \frac{1\cdot 2\cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Está provado que funciona para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \rightarrow p(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2 = \frac{(-1)^{k+1}\cdot(k+1)\cdot k}{2} \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 = \frac{(-1)^{k+2}\cdot(k+2)\cdot(k+1)}{2}$$

Analisando a expressão para $k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2 + (-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2$:

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot k}{2} + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot k + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2}$$

Colocando $(-1)^{k+1} \cdot (k+1)$ em evidência:

$$\frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot [k + 2 \cdot (-1) \cdot (k+1)]}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot [k - 2 \cdot (k+1)]}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot (k - 2k - 2)}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot (-k - 2)}{2}$$

Colocando (-1) em evidência no último termo:

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot (-1) \cdot (k+2)}{2}$$

Somando os expoentes das potências de (-1):

$$= \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{2}$$