UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT)

GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

GABARITO DA PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-0001**

Respostas:

1. a) SPI. Solução: $x = \frac{-41}{4} + \frac{1}{4}z; \quad y = \frac{29}{8} - \frac{13}{4}z.$

   b) Sistema impossível.

   c) SPI. Solução: $y = 19 - 8x; \quad z = 5 - 2x.$

   d) Sistema impossível

   e) SPI. Solução: $x = 2 + z\,; \quad y = 2.$

   f) SPD. Solução: $x = 4\,; \;\; y = -3.$

   g) SPD. Solução: $x = 1\,; \;\; y = 0; \;\; z = 3\,; \;\; w = 2.$

   h) SPD. Solução: $x = \frac{21}{5}\,; \;\; y = \frac{13}{25}\,; \;\; z = \frac{-63}{25}\,; \;\; w = \frac{13}{5}.$

2. A matriz ampliada do sistema é $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. A única solução é $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3. $x_1 = -3x_2 - x_5 - 87; \qquad x_3 = x_5 + 34; \qquad x_4 = 2x_5 - 9.$

4. $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{22}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-17}{7} \end{bmatrix}$; posto(A)=3 nulidade(A)=1

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, posto(A)=2 nulidade(A)=1

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2020/1: Graciela, Katiani e Marnei.

6. A nulidade de uma matriz 3×5 pode ser igual a 4, 3 ou 2. A nulidade de uma matriz 4×2 pode ser igual a 2, 1 ou 0.

7. a) $posto(A) \leq 4;\quad nulidade(A) \geq 0$ b) $posto(A) \leq 3;\quad nulidade(A) \geq 2$

c) $posto(A) \leq 3;\quad nulidade(A) \geq 0$ d) $posto(A) \leq 6;\quad nulidade(A) \geq 3$

8. a) $posto(A) = 4,$ se $t = 1;$ $posto(A) = 2,$ se $t = -2.$

b) $posto(A) = 3,$ se $t \neq 1, -2.$

9. O posto é igual a dois se $r = 2$ e $s = 1$. O posto de A nunca é igual a um.

10. $k = -6.$

11. a) $a = 5$ e $b = 4.$ b) $a \neq 5$ e $b \in R.$ c) $a = 5$ e $b \neq 4.$

12. a) $a \neq 0$ e $b \neq 2.$ b) $a = 0$ **ou** $b \neq 2.$ c) $a = 0$ e $b = 2.$

13. $3a + b - c = 0$

14. a) $k = 3$ **ou** $k = -4.$ b) não existe valor de *k* para o qual o sistema seja spd.

c) $k \neq 3$ **e** $k \neq -4.$

15. a) i) sistema impossível

ii) sistema possível e indeterminado, com uma variável livre.

iii) sistema possível e indeterminado, com quatro variáveis livres.

iv) sistema possível e determinado

b) Lembre-se que sistemas homogêneos sempre admitem solução! Assim:

i) infinitas soluções, com uma variável livre.

ii) infinitas soluções, com uma variável livre.

iii) infinitas soluções, com quatro variáveis livres.

iv) única solução (nenhuma variável livre).

16. Lembre-se que a nulidade de uma matriz está relacionada à quantidade de variáveis livres de um sistema linear.

17. a) É a solução $X = 0$, ou seja, em que todas as incógnitas/variáveis são iguais a zero.

b) $k = 2.$

18. Sim, pois a matriz dos coeficientes desse sistema tem posto no máximo igual a 3. Com isso, a nulidade dessa matriz é no mínimo igual a 1. Assim, esse sistema admite pelo menos uma variável livre e haverá infinitas soluções. Portanto, existem soluções distintas da trivial.

19. Sim. Como $\det(A) = 0$, a matriz dos coeficientes desse sistema não é inversível e, por isso, não existe solução única. Como o sistema é homogêneo, ele sempre admite solução. Portanto, existem infinitas soluções.

20. Não existem tais valores para k pois um sistema homogêneo sempre admite pelo menos a solução trivial.

21. Se o posto da matriz ampliada e o posto da matriz dos coeficientes forem ambos iguais a quatro, o sistema tem única solução. Se esses postos forem iguais, mas menores do que quatro, o sistema tem infinitas soluções. Se esses postos forem diferentes, o sistema é impossível.

22. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix}$:

a) O sistema $AX = 0$ admite somente a solução trivial, pois $posto(A) = 4$.

b) Tal sistema é $\begin{cases} 2x + y - 3z = 18 \\ -x + y + 4z = -23 \\ 5x + y - 10z = 59 \end{cases}$. Existem outras soluções para esse sistema (que é spi).

23. (a) $t = 3$ ou $t = -1$ b) $t = -5$ ou $t = 0$ ou $t = 4$ c) $t = -3$ ou $t = 0$ ou $t = 1$.

24. a) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 185 \\ 5 \\ 98 \end{bmatrix}$ c) $X = \begin{bmatrix} 3160 \\ -1990 \\ -910 \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} 111 \\ 89 \\ 89 \end{bmatrix}$.

25. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

26. $X = AB^{-2}$.

27. As soluções são:

a) $\begin{cases} s = \pi^2 \\ t = 2\pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = \frac{1}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 1 + 4x_2 + x_5 \\ x_2 = 4 + 2x_5 \\ x_4 = 1 + 3x_5 \end{cases}$ d) Esse sistema é impossível.

28. É possível utilizar o método da inversa somente nos itens a e b. Faça isso e encontre, em cada item, a seguinte inversa das matrizes dos coeficientes:

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5+\pi/15 & \pi/3 \\ 1/15 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+\pi & 5\pi \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -8/25 & 0 & -3/5 \\ 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -32 & 0 & -60 \\ 0 & 32 & 0 & 60 \\ -50 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

29. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 27 & 82 \\ -4 & -21 & -63 \\ 1 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & -1/5 & 5/3 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ c) não existe A^{-1}

30. Perceba que a matriz dos coeficientes dos três sistemas é a mesma. Com isso, basta calcular a inversa apenas da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e obter $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Assim:

a) Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ então $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Se $X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Se $X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ então $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -66 \\ 27 \\ 5 \end{bmatrix}$.

31. Note que é preciso separar a demonstração em dois casos, dependendo da entrada da primeira linha e primeira coluna:

i) Se $a \neq 0$ então a redução à forma escalonada da matriz M consiste na matriz identidade. E com isso pode-se concluir que o sistema só tem a solução trivial.

ii) Se $a = 0$ então uma troca da primeira com a segunda linha faz com que o problema recaia no caso anterior, em que a primeira entrada da primeira linha não é zero. Note que nesse caso *c* não será zero, pois senão ocorreria $ad - bc = 0.d - b.0 = 0$, o que contradiz a hipótese.

32. Uma solução possível é: 180 livros de capa mole, nenhum de capa dura e 60 de luxo. Mas esta não é a única solução. Você consegue exibir outras?

33. Serão necessários 1920 projéteis.

34. a) A solução do sistema é $\begin{cases} x_1 = 300 - x_4 \\ x_2 = -50 + x_4 \\ x_3 = 150 - x_4 \\ x_4 \in R \end{cases}$.

b) No contexto do problema, x_4 deve ser um número natural. Assim, pode-se fazer, por exemplo, $x_4 = 100$ e $x_4 = 75$. Obtenha os valores das outras incógnitas para esses valores.

c) 150 veículos.

35.

a) A solução do sistema é $\begin{cases} x_1 = x_6 \\ x_2 = x_7 \\ x_3 = 600 - x_6 \\ x_4 = x_6 - x_7 \\ x_5 = 500 - x_7 \\ x_6, x_7 \in R \end{cases}$.

b) $x_1 = 100$ $x_2 = 100$ $x_3 = 500$ $x_4 = 0$ $x_5 = 400$ $x_6 = 100$ $x_7 = 100$

c) $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 600$ $x_4 = 0$ $x_5 = 500$ $x_6 = 0$ $x_7 = 0$

d) Quando $x_5 = 1000$ não existe solução que faça sentido para o problema, pois senão teríamos $x_7 = -500 < 0$.

36.

a) A solução do sistema é $\begin{cases} x_1 = 100 + x_4 \\ x_2 = -100 + x_4 \\ x_3 = 200 + x_4 \\ x_4 \in R \end{cases}$.

b) Quando $x_4 = 0$ não existe solução que faça sentido para o problema, pois senão teríamos $x_2 = -100 < 0$.

c) $x_1 = 200$ $x_2 = 0$ $x_3 = 300$ $x_4 = 100$.

d) $x_1 = 200$ $x_2 = 0$ $x_3 = 300$ $x_4 = 100$.

37.

a) Verdadeira.
b) Verdadeira se e somente se U e V tiverem a mesma ordem.
c) Verdadeira.
d) Verdadeira.
e) Falsa.
f) Falsa.
g) Falsa
h) Verdadeira.

38.

a) Verdadeira.
b) Falsa. A matriz nula é tanto simétrica quanto antissimétrica.
c) Falsa.
d) Falsa.
e) Falsa.
f) Verdadeira.
g) Falsa.
h) Verdadeira.

i) Verdadeira.
j) Falsa.
k) Verdadeira.
l) Verdadeira.
m) Falsa. $A - A^T$ é sempre antissimétrica, mas AA^T não.
n) Verdadeira.
o) Verdadeira.
p) Verdadeira.

39. Ao supor que AB é uma matriz antissimétrica, após calcular esse produto é possível encontrar que $x = -1$ e $y = 5$. Substituindo esses valores em A e B e calculando o produto BA, pode-se verificar que BA não é antissimétrica e nem inversível.

40.

a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Falsa.
d) Verdadeira.