5 a) $f \circ (g-h) = f \circ g - f \circ h$

Seja $f(x) = 2x$, $g(x) = x-3$ e $h(x) = x^2$

Desenvolvendo $f \circ (g-h)$

$f \circ (x-3-x^2) = f \circ (-x^2+x-3) = 2(-x^2+x-3)$

$= -2x^2 + 2x - 6$

Desenvolvendo $f \circ g - f \circ h$

$f \circ g = f(g(x)) = f(x-3) = 2(x-3) = 2x-6$

$f \circ h = f(h(x)) = f(x^2) = 2x^2$

$f \circ g - f \circ h = 2x-6-2x^2 = -2x^2+2x-6$

Concluimos que para esse caso a propriedade é válida

Testando a propriedade para outras funções *(a)

$f \circ (g - h) = f \circ g - f \circ h$

Seja $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 2x$

Desenvolvendo $f \circ (g - h)$

$g - h = x - 3 - (2x) = x - 3 - 2x = -x - 3$

$f \circ (g - h) = f((g-h)(x)) = (-x-3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Desenvolvendo $f \circ g - f \circ h$

$f \circ g = f(g(x)) = (x-3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$f \circ h = f(h(x)) = (2x)^2 = 4x^2$

$f \circ g - f \circ h = x^2 + 6x + 9 - 4x^2 = -3x^2 + 6x + 9$

Como $x^2 + 6x + 9 \neq -3x^2 + 6x + 9$ logo essa propriedade não é válida

b) $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ \frac{1}{g}$

Seja $f(x) = 2x$, $g(x) = x-3$ e $h(x) = x^2$

Desenvolvendo $\frac{1}{f \circ g}$

$f \circ g = f(g(x)) = 2(x-3) = 2x-6$ ou seja $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{2x-6}$

Desenvolvendo $\frac{1}{f} \circ \frac{1}{g}$

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{(x-3)}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{x-3}} = 1 \cdot \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{2}$$

Como $\frac{1}{2x-6} \neq \frac{x-3}{2}$, A propriedade falha nesse caso, logo ela não é válida

c) $\frac{1}{f \circ g} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Seja $f(x) = 2x$ $\quad g(x) = x - 3$

Desenvolvendo $\frac{1}{f \circ g}$

$f \circ g = f(g(x)) = 2(x-3) = 2x - 6$

$\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{2x-6}$

Desenvolvendo $f^{-1} \circ g^{-1}$

$f(x) = 2x \quad y = 2x \quad x = \frac{y}{2} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$g(x) = x - 3 \quad y = x - 3 \quad y + 3 = x \quad g^{-1}(x) = x + 3$

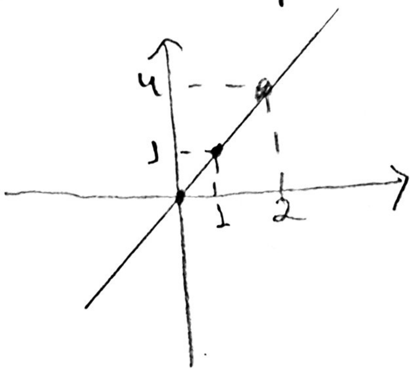
$f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{x+3}{2}$

Como $\frac{1}{2x-6} \neq \frac{x+3}{2}$ Essa propriedade não é válida

D) Suponha f invertível, $f^{-1} \circ g = g \circ f^{-1} \rightarrow g \circ f = f \circ g$

Seja $f(x) = 2x$ e $g(x) = x - 3$

* Esboço da f



Pelo teste das retas horizontais podemos concluir que $f(x)$ é injetiva logo, inversível

Desenvolvendo $f^{-1} \circ g = g \circ f^{-1}$

* Desenvolvendo $f^{-1} \circ g$

$f(x) = 2x \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \quad f^{-1} \circ g = \frac{x-3}{2}$

* Desenvolvendo $g \circ f^{-1}$

$g \circ f^{-1} = \frac{x}{2} - 3 = \frac{x-6}{2}$

Como $\frac{x-3}{2} \neq \frac{x-6}{2}$ e estamos em uma implicação logo o antecedente é falso e por vacuidade a implicação é verdadeira

$p \rightarrow q \quad F \rightarrow q = V$

Provando que $f^{-1} \circ g = g \circ f^{-1} \to g \circ f = f \circ g$.

Desenvolvendo $f^{-1} \circ g = g \circ f^{-1}$

* multiplicando por $\circ f$ em ambos os lados

$$f^{-1} \circ g \circ f = g \circ f^{-1} \circ f \to f^{-1} \circ g \circ f = g.$$

Como pela implicação temos que $g \circ f = f \circ g$.

Substituindo

$$\boxed{f^{-1} \circ f} \circ g = g \to g = g.$$