Sumário

Apresentação da disciplina

Caro aluno

Esta apostila segue de muito perto a bibliografia referenciada no Plano de Ensino da disciplina e que correspondem aos **livros texto deste curso**. Sugere-se a sua aquisição. O único objetivo deste material é facilitar as atividades dos alunos em sala de aula, de forma que possam complementar o assunto aqui proposto com as notas expostas pelos professores em sala de aula e ainda servir de referência aos professores e alunos sobre quais tópicos deverão ser trabalhados em cada capítulo. De maneira nenhuma a leitura ou consulta da bibliografia está descartada, isto é dever do aluno. Este material podem conter eventuais erros, enganos ou omissões, caso encontrar, por favor, comunique seu professor.

As respostas da maior parte dos exercícios serão disponibilizadas na página: http://www2.joinville.udesc.br/~dma2gm .

A Álgebra Linear constitui uma parte da Matemática da qual necessitam matemáticos, físicos, engenheiros, programadores de computadore, economistas, administradores e outros cientistas. Este requisito reflete a importância desta disciplina pelas múltiplas aplicações e pelo alcance de sua linguagem. Ela também se faz presente nos diversos ramos da matemática, aparecendo em disciplinas como cálculo, equações diferenciais, matemática discreta, estatística, análise numérica e outras. Sendo assim, a Álgebra Linear se tornou uma ferramenta indispensável em quase todas as áreas da matemática e ciências afins. Os objetos de que trata a Álgebra Linear não são apenas matrizes e sistemas lineares. A sua essência está no estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares.

Desejamos a todos um ótimo semestre de estudos.

Capítulo 1

MATRIZES E SISTEMAS

Definição de matriz: Chama-se matriz de ordem $m \times n$ a uma tabela de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação: Costumamos denotar as matrizes por letras latinas maiúsculas:A, B, C, ...

Definição 1 *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de ordem $m \times n$. Dizemos que as matrizes A e B são iguais se, e somente se,*

$$a_{ij} = b_{ij} \ ; \quad i = 1, \ldots, m \quad e \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.1 Tipos de matrizes

Matriz coluna:

É a matriz de ordem $m \times 1$.

$$A = [1]_{1\times 1}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 999 \\ 1000 \end{bmatrix}_{1000\times 1}$$

Matriz linha:

É a matriz de ordem $1 \times n$.

Exemplo 2 *:*

$$A = [1]_{1\times 1}\,, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -10 \end{bmatrix}_{1\times 8}$$

Matriz nula:

É a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ onde $a_{ij} = 0$, para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo 3 *:*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N = [0]$$

Observação: Denotaremos freqüentemente a matriz nula por **0**.

Matriz quadrada:

É a matriz de ordem $n \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos da forma a_{ii} costituem a diagonal principal
Os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a diagonal secundária.

Exemplo 4 *:* $A = [0]_{1\times 1}\,, \;\; B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal:

Matriz diagonal é a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Notação: $diag(A) = \{a_{11}, \cdots, a_{nn}\}$

Exemplo 5 *:* $A = [0]_{1\times 1}\;,\;\; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz identidade:

É a matriz diagonal I onde $diag(I) = \{1, \cdots, 1\}$.

Notação: I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Exemplo 6 *:*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta:

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^T é denominada a transposta de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Exemplo 7 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 2 & 12 & 22 & 32 & 42 \\ 3 & 13 & 23 & 33 & 43 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ 5 & 15 & 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}_{1 \times 6} \Rightarrow D^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Matriz simétrica:

Uma matriz quadrada $S = [a_{ij}]$ é simétrica se $S^T = S$, isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$. Assim, os elementos simetricamente opostos à diagonal principal são iguais.

Exemplo 8 *:*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz anti-simétrica:

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é anti-simétrica se $A^T = -A$, isto é, se $a_{ij} = -a_{ji}$. Assim,

i. os elementos da diagonal principal são todos nulos;

ii. os elementos simetricamente dispostos em relaçào à diagonal principal são opostos.

Exemplo 9 *:* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz triangular superior:

A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ é chamada matriz triagular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{10000}$$

Matriz triangular inferior:

A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ é chamada matriz triangular inferior.

Exemplo 10 *:*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -2 & 0 \\ 9 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes

Adição:

Dados $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ definimos $A + B$ por,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Propriedades:

i. $A + B = B + A$

ii. $A + (B + C) = (A + B) + C$

iii. $A + \mathbf{0} = A$

Multiplicação por escalar:

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real definimos $k \cdot A$ por

$$kA = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo 11 *:* $-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Propriedades:

i. $k(A+B) = kA + kB$

ii. $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$

iii. $0 \cdot A = \mathbf{0}$

iv. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Multiplicação de Matrizes:

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, definimos $A \cdot B$ por $AB = [c_{ij}]_{m\times p}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Observe que o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

Exemplo 12 *:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes:

i. $AI = IA = A$

ii. $A(B+C) = AB + AC$

iii. $(A+B)C = AC + BC$

iv. $(AB)C = A(BC)$

v. $(AB)^T = B^TA^T$

vi. $\mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Observação 13 *Note que, em geral, $AB \neq BA$. Por exemplo,dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Verifique que $AB = \mathbf{0}$ e que $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Propriedades da matriz transposta

i. $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, onde λ é um númerto real

iii. $(A^T)^T = A$

iv. $(AB)^T = B^T A^T$

Exemplo 14 *Mostre que se A é uma matriz quadrada então $A+A^T$ é simétrica e $A - A^T$ é anti-simétrica.*

Matriz inversa:

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, se existir uma matriz B que satisfaça $AB = BA = I$ diz-se que B é a inversa de A e denota-se B por A^{-1}, ou seja, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Exemplo 15 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz A é inversível (não singular) se existe a matriz inversa A^{-1}, caso contrário dizemos que a matriz A é não inversível (singular).

Algumas propriedades importantes:

1. A é não singular se o determinante de A é diferente de zero. A é singular se determinante de A é igual a zero.

2. Se A admite inversa ($\det A \neq 0$) esta é única.

3. Se A é não singular, sua inversa A^{-1} também é, isto é, se $\det A \neq 0$ então $\det A^{-1} \neq 0$. A matriz inversa de A^{-1} é A.

4. A matriz identidade I é não singular (pois $\det I = 1$) e $I^{-1} = I$.

5. Se a matriz A é não singular, sua transposta A^T também é. A matriz inversa de A^T é $(A^{-1})^T$, isto é , $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, dai concluimos que se $\det A \neq 0$ então $\det A^T \neq 0$.

6. Se as matrizes A e B são não singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não singular. Vale a relação $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemplo 16 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2 \Rightarrow A \text{ é não singular}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow A \text{ é singular}$$

Exemplo 17 *Demonstre as propriedades 2 e 6.*

Matriz ortogonal:

Uma matriz M, quadrada, cuja inversa conicide com sua transposta é denominada matriz ortogonal. Portanto M é ortogonal se $M^{-1} = M^T$, ou seja,

$$MM^T = M^TM = I$$

Exemplo 18 $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

Potência de uma matriz:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n.

1. Define-se $A^0 = I_n$

2. A matriz $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ..... \cdot A}_{p\ vezes}$ é chamada k-ésima potência de A para $k \geq 1$.

3. Se A for invertível, define-se $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k,\ k \in \mathbb{N}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{bmatrix}$$

Traço de uma matriz:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. O traço de A, que denotamos por $tr(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.3 Matriz na forma escada reduzida por linhas

Definição 19 *Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada, ou escalonada, se:*

a) *O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.*

b) *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.*

c) *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é,. daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)*

d) *Se as linhas $1, ..., p$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha í ocorre na coluna k_1, então $k_1 < k_2 < ..... < k_n$.*

Exemplo 20 *:*

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale b).

2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale a) e b).

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale c).

4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é forma escada.

Operações elementares linha: São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

1^o) Permuta da $i - ésima$ e $j - ésima$ linha ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Exemplo 21 *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2^o) Multiplicação da $i - ésima$ linha por um escalar não nulo k ($L_i \rightarrow kL_i$).

Exemplo 22 *.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -3L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3^o) Substituição da $i-ésima$ linha pela $i-ésima$ linha mais k vezes a $j-ésima$ linha ($L_i \longrightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo 23 *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observação 24 *Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Notação $A \sim B$.*

Exemplo 25 *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pois,}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \to -L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 4L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Toda matriz A de ordem $m \times n$ é linha equivalente a uma única matriz linha-reduzida à forma escada.

Exemplo 26 *: Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$*,obtenha uma única matriz B na forma escada linha equivalente a matriz A.*

Solução:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_1 \to \tfrac{1}{2}L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \to L_3 - 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_2 \to \tfrac{1}{3}L_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + \tfrac{1}{2}L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_3 \to -\tfrac{2}{13}L_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - \tfrac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - \tfrac{3}{2}L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 27 *Dada a matriz A, obtenha uma matriz na forma escada equivalente a matriz dada.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Posto de uma matriz:

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada, linha equivalente à matriz A. O *posto* de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B e a *nulidade* de A é $n-p$, onde n é o número de colunas de A e p é o posto de A.

Exemplo 28 *: Encontrar o posto e a nulidade das matrizes:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: A matriz A é linha equivalente a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$ portanto o posto de A é 3 (o número de linhas não nulas da matriz B) e a nulidade é $n-p = 4-3 = 1$ (n é o numero de colunas da matriz A e p é o posto de A)

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: posto $A = 2$ e nulidade de A é $3-2 = 1$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução posto de $A = 3$ e nulidade de A é 0

1.4 Cálculo da inversa

Cálculo da inversa por escalonamento:

Para se determinar a matriz inversa de uma matriz A, não singular, através de operações elementares entre as linhas da matriz fazemos o seguinte:

a) Coloca-se ao lado da matriz A a matriz I, separada por um traço vertical tracejado.

b) Transforma-se por meio de operações elementares a matriz A na matriz I, aplicando simultaneamente à matriz I colocada ao lado da matriz A as mesmas operações elementares aplicadas à matriz A.

Exemplo 29 *: Calcular inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *por escalonamento.*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to \frac{1}{2}L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 4L_1$$
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5 Determinantes

Definição 30 *Determinante de uma matriz A é um número real associado à matriz A.*

Notação: $\det A$.

Denotamos também o determinante da matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propriedades do determinante:

1. $\det A = \det A^T$;
2. $\det(AB) = \det A \det B$;
3. Se a matriz A possui uma linha ou coluna nula então $\det A = 0$;
4. Se a matriz A tem duas linhas ou colunas iguais então $\det A = 0$;
5. Se na matriz A uma linha (ou coluna) é múltipla de outra linha (coluna) então $\det A = 0$;
6. Trocando a posição de duas linhas (colunas) o derminante muda de sinal;
7. Quando se multiplica uma linha (coluna) de uma matriz A por um número $k \neq 0$ o determinante fica multiplicado por esse mesmo número;
8. O determinante de uma matriz A não se altera quando se faz a seguinte operação entre linha: $L_i \to L_i + kL_j$;
9. O determinante de uma matriz triangular superior (ou inferior) é igual ao produto do elementos da diagonal principal;
10. A partir de $\det(AB) = \det A \det B$ temos

$$\det(AA^{-1}) = \det I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

Cálculo do determinante por triangulação. Para se calcular o determinante de uma matriz A usamos as operações elementares linha de modo a obter uma matriz triangular superior (ou inferior) observando as propriedades do determinante e fazendo as compensações necessárias.

Exemplo 31 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} L_2 \longleftrightarrow L_3$ (Quando permutamos as linhas o determinante troca de sinal)

$(-1)\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} L_1 \to \frac{1}{2}L_1$(Quando multiplicamos uma linha por um número o det. fica multiplicado pelo mesmo número)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 + (-3)L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix}$ (Esta operação não altera o determinante)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad L_3 \to L_3 - 2L_2$ (Esta operação não altera o determinante)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \frac{1}{2} \Rightarrow \det A = -1$

Cálculo do determinante por desenvolvimento de Laplace:

Regra de Chió:

Se a matriz A é de ordem 2×2 então:

$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 5 * 3 - 2 * 1 = 13$

Regra de Sarrus:

Se A é é de ordem 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \nearrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{33}a_{21}a_{12})$

Desenvolvimento de Laplace:

Para uma matriz de ordem $n \times n$ usamos o desenvolvimento de Laplace qué é dado pela fórmula.

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida a partir da matriz A eliminando-se a $i - ésima$ linha e a $j - ésima$ coluna da matriz A. Se chamarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ então

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Exemplo 32 *:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz fazendo o desenvolvimento pela primeira linha (note que seria mais conveniente desenvolver pela segunda linha, pois ela possui dois elementos nulos).

$$\det A = -1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (-1)(1)(-6) + 2(-1)(-12) + (3)(1)(10) + (-4)(-1)(78)$$

$$\det A = 372.$$

1.6 Primeira lista de exercícios

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, determine a, b, c e d para que $A = B$.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$.Determine o valor de x para que A seja uma matriz simétrica.

3. Mostre que se A é simétrica, então $B^T AB$ é simétrica (B quadrada de mesma ordem que A).

4. Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica, ou seja, $A = S + N$ onde S é uma matriz simétrica e N é uma matriz anti-simétrica. Sugestão: Use o exemplo 14.

5. Seja A invertível. Mostre que se $AB = BC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não-nula A tal que $AB = BC$, mas $B \neq C$.

6. Mostre que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   é uma matriz ortogonal.

7. Sejam P e Q matrizes ortogonais de mesma ordem.

   (a) PQ é uma matriz ortogonal? P^T é uma matriz ortogonal? Justifique sua resposta.

   (b) Quais os valores que $\det Q$ pode ter?

8. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$ mostre que a matriz AA^T é uma matriz simétrica de ordem $m \times m$. A matriz $A^T A$ é simétrica? Qual sua ordem?

9. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ é idempotente, isto é, $A^2 = A$.

10. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Qual a condição que devemos ter para que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

11. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz

$$\begin{array}{l} \\ Moderno \\ Mediterrâneo \\ Colonial \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Ferro & Madeira & Vidro & Tinta & Tijolo \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right] \end{array}$$

(a) Se ele vai construir 5,7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

(b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 reais. Qual o preço unitário de cada tipo de casa?

(c) Qual o custo total do material empregado?

12. Calcule o determinante de A onde

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

13. Encontre A^{-1}, onde

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$

14. Encontre os valores d k para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} k-3 & 0 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 \\ -5 & 0 & k+5 \end{bmatrix}$$

é não inversível.

15. Existe alguma matriz "inversível"X tal que $X^2 = 0$? Justifique sua resposta.

16. Encontre todos os valores de λ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

17. Para a matriz $A = (a_{ij})$de ordem 2 definida por $a_{ij} = i + j$, calcular $f(t) = det(A - tI_2)$ e resolver a equação do segundo grau $f(t) = 0$.

18. Para a matriz definida por:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

calcular $f(t) = det(M - tI_2)$ e resolver a equação do segundo grau $f(t) = 0$.

19. Verifique se as afirmações abaixo são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**. Se forem verdadeiras, demonstre. Se forem falsas, dê um contra-exemplo.

    (a) Se uma matriz quadrada A for ortogonal então $\det A = \pm 1$.

    (b) $\det(I + A) = 1 + \det A$

    (c) Se A é uma matriz simétrica então $A + A^T$ também é simétrica.

    (d) Se A e B são inversíveis então $A + B$ também é.

    (e) Se A é uma matriz quadrada simétrica e B é uma matriz ortogonal então a matriz $A + B^{-1}$ **nunca** será simétrica.

    (f) Se A é uma matriz anti-simétrica de ordem 3, então $\det A = 0$

    (g) Se A é não-inversível e $AB = 0$ então $B = 0$

    (h) Se A é anti-simétrica inversível, então A^{-1} é anti-simétrica.

    (i) Seja A uma matriz quadrada, então $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

    (j) Se A, B e C são matrizes $n \times n$ inversíveis, então $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

    (k) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ satisfazem a relação $A^{-1}BA = D$ então $\det B = 24$.

1.7 Sistema de equações lineares

1.7.1 Introdução

Uma equação linear é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

na qual $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveies $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e b é o termo independente. Os números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e o termo independente b geralmente são números conhecidos e as variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as incógnitas.

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados raízes das equações lineares.

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistema de equações lineares e tem a seguinte representação:

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema de equações lineares em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação constituem sua solução.

Diz-se que dois sistemas de equações lineares são **equivalentes** quando admitem a mesma solução.

Exemplo 33 *Os sistemas*

$$\begin{array}{c} 2x + 3y = 11 \\ -x + y = -3 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} 10x - 2y = 38 \\ -3x + 5y = -7 \end{array}$$

são equivalentes pois possuem as mesmas soluções, $x = 4$ *e* $y = 1$

Quanto as soluções, três casos podem ocorrer:

1. O sistema possui uma única solução. Neste caso, dizemos que o sistema é compatível e determinado.

2. O sistema possui infinitas soluções. Neste caso, dizemos que o sistema é compatível e indeterminado.

3. O sistema não possui nenhuma solução. Neste caso, dizemos que o sistema é incompatível.

1.7.2 Sistemas e matrizes.

Dado um sistema linear na forma,

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.1}$$

podemos representa-lo matricialmente utilizando as notações da teoria de matrizes da seguinte maneira:

Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema (1.1) na forma matricial:

$$AX = B$$

onde A é a **matriz dos coeficientes,** B a matriz coluna dos termos independentes e X é a matriz coluna das incógnitas.

Ao sistema (1.1) associamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos **matriz ampliada** do sistema.

Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Dada a matriz ampliada do sistema de equações lineares consideramos a matriz linha reduzida a forma escada obtida a partir da matriz ampliada do sistema:

Teorema:

1. Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

2. Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$ (número de colunas da matriz dos coeficientes, ou números de variáveis) a solução é única.

3. Se as duas matrizes tem o mesmo posto e $p \neq n$ podemos escolher $n - p$ incógnitas e as outras incógnitas serão dadas em função destas. O número $n - p$ é chamado grau de liberdade do sistema.

Resumo:

Dado um sistema de m equações e n incógnitas seja A_a a matriz ampliada do sistema e seja A_e a matriz linha equivalente a matriz A_a onde a matriz dos coeficientes estão na forma escada. Seja p_a o posto da matriz ampliada e p_c o posto da matriz dos coeficientes obtidos a partir da matriz A_e.

- Se $p_a \neq p_c$ então o sistema é incompatível (não possui solução)
- Se $p_a = p_c$ então o sistema é compatível (possui solução). Seja $p = p_a = p_c$, se $p = n$ então o sistema é compatível e determinado (possui uma única solução). Se $p < n$ o sistema é compatível e indeterminado (possui infinitas soluções). Sempre que um sistema possuir infinitas soluções deveremos atribuir valores a algumas variáveis e determinar o valor das outras variáveis em função destas. O número de variáveis as quais deveremos atribuir valor é o grau de liberdade do sistema, dado pelo número $n - p$.

Exemplo 34 *Classificar e resolver o sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & -12 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Solução:
Matriz Ampliada
$$A_a = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 2 & 2 & | & 4 \\ 2 & 5 & 3 & | & -12 \end{array} \right]$$
Matriz linha equivalente a matriz ampliada, onde a parte da matriz dos coeficientes está na forma escada
$$A_e = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{array} \right]$$
De A_e obtemos: $p_c = 3$, $p_a = 3$ e $n = 3$.
$p = p_c = p_a = 3 \Rightarrow$ sistema compatível
$p = n \Rightarrow$ sistema compatível e determinado (possui uma única solução)

A matriz A_c é a matriz ampliada do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Como sistemas equivalentes tem a mesma solução, a solução do sistema (1.2) é

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -5$$
$$x_3 = 3$$

Exemplo 35 *Classificar e resolver o sistema:*

$$\begin{cases} 4y + 2x + 6z & = & -6 \\ -4z - 2y + 3x & = & -38 \\ x + 3z + 2y & = & -3 \end{cases}$$

Solução: Reescrevendo o sistema, obtém-se

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z & = & -6 \\ 3x - 2y - 4z & = & -38 \\ x + 2y + 3z & = & -3 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & -6 \\ 3 & -2 & -4 & | & -38 \\ 1 & 2 & 3 & | & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & | & -\frac{41}{4} \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & | & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso temos:
$n = 3$
$p_a = 2$
$p_c = 2 \Rightarrow p = 2$
$p < n \Rightarrow$sistema compatível e indeterminado (infinitas soluções)
$grau\ de\ liberdade = n - p = 1$
O sistema (1.3) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & - & \frac{1}{4}z & = & -\frac{41}{2} \\ y & + & \frac{13}{8}z & = & \frac{29}{8} \end{cases}$$

Para encontrar uma solução (note que existem infinitas soluções) devemos atribuir valor a uma das variáveis (pois o grau de liberdade é 1) e determinar as outras. Note que fica mais fácil se atribuirmos valor a variável z : Por exemplo fazendo $z = 0$, temos que: $x = -\frac{41}{4}$ e $y = \frac{29}{8}$ (Poderíamos atribuir outro valor qualquer a z, e para cada valor de z teremos os valores correspondentes de x e y, daí temos infinitas soluções)

Exemplo 36 *Classificar e resolver o sistema:*

Solução:

$$\begin{cases} 6x - 4y - 2z & = & 3 \\ x + y + z & = & 1 \\ 3x - 2y - z & = & 1 \end{cases}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & -2 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & | & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & | & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Neste caso:
$n = 3$
$p_c = 2$
$p_a = 3 \Rightarrow p_a \neq p_c \Rightarrow$sistema incompatível (não possui solução)

1.7.3 Solução de um sistema por matriz inversa

Usando a notação matricial para sistemas lineares temos que

$$\begin{aligned} CX &= B \text{ (supondo que existe } C^{-1}\text{)} \\ C^{-1}CX &= C^{-1}B \text{ (observe que estamos multiplicando } C^{-1} \text{ pela esquerda)} \\ IX &= C^{-1}B \\ X &= C^{-1}B \end{aligned}$$

Logo para se determinar a solução basta multiplicar a matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes (pela esquerda, já que a multiplicação de matrizes não é comutativa). Se a matriz C não tem inversa então ou o sistema não possui solução ou possui infinitas soluções.

Exemplo 37 *Resolva o sistema* $\begin{cases} -2x + 3y - z & = & 1 \\ x - 3y + z & = & 1 \\ -x + 2y - z & = & 1 \end{cases}$ *pelo método da inversa:*

Solução:

$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$CX = B$
$X = C^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

O próximo teorema apresenta resultados importantes sobre sistemas lineares e matrizes inversíveis.

Teorema 38 *Se A uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *A é inversível.*

b) *$AX = 0$ só tem a solução trivial.*

c) *A é equivalentes por linha à matriz I_n.*

d) *$AX = B$ tem exatamente uma solução para cada matriz $B_{n \times 1}$.*

Demonstração: A demonstração fica como exercício.

1.8 Segunda lista de exercícios

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo a matriz ampliada do sistema inicial e escrevendo o sistema final do qual se obterá a solução do sistema original:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 11 \\ 4x - 3y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y + z &= 4 \end{cases}$$

2. Considere o sitema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$. Para que valores de a e b o sistema

   (a) tem uma infinidade de soluções?

   (b) tem única solução?

   (c) é impossível?

3. Seja $\begin{bmatrix} a & 0 & b & \vdots & 2 \\ a & a & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & a & 2 & \vdots & b \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de um sistema linear. Para quais valores de a e b o sistema tem

   (a) única solução,

   (b) nenhuma solução,

   (c) uma solução com duas variáveis livres?

4. Encontre a relação entre a, b e c para que o sistema linear $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \\ 5x + 9y - 6z = c \end{cases}$ seja possível para quaisquer valores de a, b e c.

5. Reduza as matrizes à forma escada através de operações linhas:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

6. Determine k para que o sistema admita solução
$$\begin{cases} -4x+3y &= 2 \\ 5x-4y &= 0 \\ 2x-y &= k \end{cases}$$

7. Encontre todas as soluções do sistema
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+3x_4-7x_5 &= 14 \\ 2x_1+6x_2+x_3-2x_4+5x_5 &= -2 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_5 &= -1 \end{cases}$$

8. Apresente todos os possíveis resultados na discussão de um sistema não-homogêneo de 6 equações lineares com 4 incógnitas.

9. Se A é uma matriz 3×5, quais são os possíveis valores da nulidade de A? E se A for 4×2?

10. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

11. Um sistema homogêneo com 3 equações e 4 incógnitas sempre tem uma solução não-trivial.

12. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes são todos nulos.

    (a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

    (b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo
    $$\begin{cases} 2x-5y+2z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ 2x+kz &= 0 \end{cases}$$
    tenha uma solução distinta da solução trivial.

13. Se $\det A = 0$, então o sistema homogêneo $AX = 0$ tem infinitas soluções ? Justifique sua resposta.

14. Podemos resolver um sistema usando matriz inversa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Isto é útil quando desejamos resolver vários sistemas lineares que possuem a mesma matriz dos coeficientes.

Usando a teoria acima resolva os sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$
e

a) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 100 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1000 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 111 \\ 311 \\ 511 \end{bmatrix}$

15. Resolva o sistema matricial $D^{-1}X = A$ onde $D = diag(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Classifique o sistema e exiba uma solução, caso ela exista:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z &= -6 \\ 3x - 2y - 4z &= -38 \\ x + 2y + 3z &= -3 \end{cases}$$

17. Uma editora publica um best-seller potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encardenação de luxo. Cada exemplar necessita de um certo tempo para costura e cola conforme mostra a tabela abaixo:

	Costura	**Cola**
Capa Mole	1 min	2 min
Capa Dura	2 min	4 min
Luxo	3 min	5 min

Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local onde se cola, 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia, de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

18. Num grande acampamento militar há 150 blindados dos tipos BM3, BM4 e BM5, isto é, equipados com 3, 4 e 5 canhões do tipo MX9 respectivamente. O total de canhões disponíveis é igual a 530. A soma dos BM4 com os BM5 corresponde aos 2 / 3 dos BM3. Se para o início de uma manobra militar, cada canhão carrega 12 projéteis, quantos projéteis serão necessários para o grupo dos BM4 no início da operação?

19. a) Em cada parte, use a informação da tabela para determinar se o sistema $AX = B$ é **possível**. Se for, determine o **número de variáveis livres** da solução geral. Justifique sua resposta.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Tamanho de A	3×3	9×5	4×4	3×3
Posto de A	2	4	0	3
Posto de $[A\|B]$	3	4	0	3

b) Para cada uma das matrizes da tabela acima determine se o sistema homogêneo $AX = 0$, é **possível**. Indique a **quantidade de soluções** para cada caso.

1.9 Apêndice

1.9.1 Cálculo da inversa por adjunta

Dada uma matriz , lembramos que o cofator d_{ij} do elemento a_{ij} da matriz A é o elemento $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$, onde A_{ij} é a submatriz de A obtida extraindo-se a $i-ésima$ linha e a $j-ésima$ coluna. Com estes cofatores forma-se uma nova matriz A, denomindada matriz dos cofatores denotada por $\overline{A}$. Portanto

$$\overline{A} = [d_{ij}]$$

onde $d_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$

Exemplo 39 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \Rightarrow d_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 1 * (-19) = -19$$

$$a_{12} = 1 \Rightarrow d_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -1 * (-19) = 19$$

$$a_{13} = 0 \Rightarrow d_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 1 * (-19) = -19$$

$$a_{21} = -3 \Rightarrow d_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -1 * (5) = -5$$

$$a_{22} = 1 \Rightarrow d_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 1 * (10) = 10$$

$$a_{23} = 4 \Rightarrow d_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = -1 * (11) = -11$$

$$a_{31} = 1 \Rightarrow d_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 * (4) = 4$$

$$a_{32} = 6 \Rightarrow d_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -1 * (8) = -8$$

$$a_{33} = 5 \Rightarrow d_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 1 * (5) = 5$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de *matriz adjunta* de A à transposta da matriz dos cofatores de A e denotaremos *adj* A. Portanto *adj* $A = \overline{A}^T$.

Teorema: Uma matriz quadrada A admite inversa se e somente se $\det A \neq 0$. Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj A)$$

1.9.2 Regra de Cramer

Um outro método de resolução de sistemas lineares de ordem $n \times n$ é a Regra de Cramer onde as soluções do sistema linear são calculadas usando o determinante. Justamente por usar o determinante este método torna-se inviável computacionalmente, mas é bastante prático em certas questões teóricas.

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Na forma matricial este sistema é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det C \neq 0$ e portanto que C tenha inversa C^{-1} obtemos

$$\begin{array}{rcl}
CX & = & B \\
C^{-1}CX & = & C^{-1}B \text{ (observe que estamos multiplicando } C^{-1} \text{ pela esquerda)} \\
IX & = & C^{-1}B \\
X & = & C^{-1}B
\end{array}$$

usando a relação

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(adjC)$$

temos

$$X = \frac{1}{\det C}(adjC)B$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} adj \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \left(\begin{bmatrix} D_{11} & Da_{12} & \cdots & Da_{1n} \\ Da_{21} & Da_{22} & \cdots & Da_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ Da_{n1} & Da_{n2} & \cdots & Da_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} b_1 D_{11} + & b_2 Da_{12} & + \cdots + & b_n Da_{1n} \\ b_1 Da_{21} + & b_2 Da_{22} & + \cdots + & b_n Da_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ b_1 Da_{n1} & b_2 Da_{n2} & \cdots & b_n Da_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
x_1 = \frac{1}{\det C} \left(b_1 D_{11} + b_2 Da_{12} + \cdots + b_n Da_{1n} \right)
$$

$$
x_1 = \frac{1}{\det C} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}
$$

Analogamente

$$
x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}
$$

$i = 2, 3, ..., n$

Podemos escrever esta relação na forma

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

onde

$$D_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando a Regra de Cramer podemos classificar um sistema $n \times n$:

Se $D \neq 0$ então o sistema possui uma única solução (compatível e determinado)

Se $D = 0$ e algum dos $D_i \neq 0$ então o sistema é incompatível

Se $D = 0$ e todos os $D_i = 0$, para $i = 1, ..., n$ então o sistema possui infinitas soluções. Note que não podemos determinar o grau de liberdade pela Regra de Cramer.

Exemplo 40 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 10x + 10y = 20 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = 0$$

Logo o sistema possui infinitas soluções.

Exemplo 41 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 20x + 20y - 20z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 20 & 20 & -20 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 20 & -20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & -20 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 20$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 20 & 20 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Como $D_2 = 20$ e $D_3 = -1$ o sistema é incompatível

Exemplo 42 *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

Logo o sistema tem uma única solução

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

A solução é

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-4} = 1 \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \\ x_3 &= \frac{D}{D_3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício: Usando a Regra de Cramer faça a classificação de um sistema homogêneo $AX = 0$

Capítulo 2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 Introdução

Álgebra linear é uma parte da Álgebra que, por sua vez, é um ramo da Matemática na qual são estudados matrizes, espaços vetoriais e transformações lineares. Todos esses itens servem para um estudo detalhado de sistemas lineares de equações.

Tanto a álgebra Linear como a Geometria Analítica aplicam-se a várias áreas, em especial às Engenharias. Citamos, a seguir, alguma delas. É claro que neste curso não conseguiremos aborda-las todas. Contudo, nosso objetivo no momento é que o estudante tome contato com o que representa o estado da arte neste contexto.

· *Jogos de Estratégia:* no jogo de roleta o jogador dá seu lance com uma aposta e o cassino responde com o giro da roleta; o lucro para o jogador ou para o cassino é determinado a partir destes dois movimentos. Esses são os ingredientes básicos de uma variedade de jogos que contêm elementos tanto de estratégia quanto de acaso. Os métodos matriciais podem ser usados para desenvolver estratégias otimizadas para os jogadores.

· *Administração de Florestas:* o administrador de uma plantação de árvores de Natal quer plantar e cortar as árvores de uma maneira tal que a configuração da floresta permaneça inalterada de um ano para outro. O administrador também procura maximizar os rendimentos, que dependem de número e do tamanho das árvores cortadas. Técnicas matriciais podem quantificar este problema e auxiliar o administrador a escolher uma programação sustentável de corte.

· *Computação gráfica:* uma das aplicações mais úteis da computação gráfica é a do simulador de vôo. As matrizes fornecem uma maneira conveniente de lidar com a enorme quantidade de dados necessários para construir e animar os objetos tridimensionais usados por simuladores de vôo para representar um cenário em movimento. Outras aplicações mais simples em computação gráfica são: vetores e matrizes – são utilizados em espaços de cores(RGB, HSV, etc), em coordenadas e transformações geométricas em duas e três dimensões, em combinações convexas e lineares de pontos(curvas e superfícies spline), em representação compacta de sessões cônicas, etc.; coordenadas homogêneas e geometria projetiva – utilizando comumente para representar consistentemente transformações afins e processos de projeção(paralela, perspectiva, modelos de câmera virtual): números complexos – em rotação no plano e também em processamento de imagens, incluindo transformadas de co-seno, Fourier, etc.; quatérnios – rotação espaciais e implementação de cinemática inversa(resolver problemas de posicionamento de juntas articuladas).

· *Redes Elétricas:* circuitos elétricos que contenham somente resistências e geradores de energia podem se analisados usando sistemas lineares derivados das leias básicas da teoria de circuitos.

· *Distribuição de Temperatura de Equilíbrio*: uma tarefa básica da ciência e da engenharias, que pode se reduzida a resolver um sistema de equações lineares através de técnicas matriciais interativas, é determinar a distribuição de temperatura de objetos tais como a do aço saindo da fornalha.

· *Cadeias de Markov:* os registros meteorológicos de uma localidade específica podem ser usados para estimar a probabilidade de que vá chover em um certo dia a partir da informação de que choveu ou não no dia anterior. A teoria das cadeias de Markov pode utilizar tais dados para prever, com muita antecedência, a probabilidade de um dia chuvoso na localidade.

· *Genética*: os mandatários do Egito recorriam a casamentos entre irmãos para manter a pureza da linhagem real. Este costume propagou e acentuou certos traços genéticos através de muitas gerações. A teoria das matrizes fornece um referencial matemático para examinar o problema geral da propagação de traços genéticos.

· *Crescimento Populacional por Faixa Etária:* a configuração populacional futura pode ser projetada aplicando álgebra matricial às taxas, especificas por faixas etárias, de nascimento e mortalidade da população. A evolução a longo prazo da população depende das características matemáticas de uma matriz de projeção que contém os parâmetros demográficos da população.

· *Colheita de Populações Animais*: a colheita sustentada de uma criação de animais requer o conhecimento da demografia da população animal. Para maximizar o lucro de uma colheita periódica, podem ser comparadas diversas estratégias de colheita sustentada utilizando técnicas matriciais que descrevem a dinâmica do crescimento populacional.

· *Criptografia:* durante a Segunda Guerra Mundial, os decodificadores norte americanos e britânicos tiveram êxito em quebrar o código militar inimigo usando técnicas matemáticas e máquinas sofisticadas (por exemplo, a Enigma). Hoje me dia, o principal impulso para o desenvolvimento de códigos seguros é dado pelas comunicações confidencias entre computadores e em telecomunicações.

· *Construção de Curvas e Superfícies pó Pontos Específicos*: em seu trabalho "Principia Mathematica" (os princípios matemáticos da Filosofia Natural) I. Newton Abordou o problema da construção de uma elipse por cinco pontos dados. Isto ilustraria como encontrar a órbita de um cometa ou de um planeta através da análise de cinco observações. Ao invés de utilizarmos o procedimento geométrico de Newton, podemos utilizar os determinantes para resolver o problema analiticamente.

· *Programação Linear Geométrica:* um problema usual tratado na área de programação linear é o da determinação de proporções dos ingredientes em uma mistura com o objetivo de minimizar seu custo quando as proporções variam dentro de certos limites. Um tempo enorme do uso de computadores na administração e na indústria é dedicado a problemas de programação linear.

· *O problema na Alocação de Tarefas*: um problema importante na indústria é o do deslocamento de pessoal e de recursos de uma maneira eficiente quanto ao custo. Por exemplo, uma construtora pode querer escolher rotas para movimentar equipamento pesado de seus depósitos para os locais de construção de maneira a minimizar a distância total percorrida.

· *Modelos Econômicos de Leontief*: num sistema econômico simplificado, uma mina de carvão, uma ferrovia e uma usina de energia necessitam cada uma de uma parte da produção das outras para sua manutenção e para suprir outros consumidores de seu produto. Os Modelos de produção de Leontief podem ser usados para determinar o nível de produção necessário às três indústrias para manter o sistema econômico.

· *Interpolação Spline Cúbica*: as fontes tipográficas PostScript e TrueType usadas em telas de monitores e por impressoras são definidas por curvas polinomiais por partes denominadas splines. Os parâmetros que os determinam estão armazenados na memória do computador, um conjunto de parâmetros para cada um dos caracteres de uma particular fonte.

· *Teoria de Grafos:* a classificação social num grupo de animais é uma relação que pode ser descrita e analisada com a teoria de grafos, Esta teoria também tem aplicações a problemas tão distintos como a determinação de rotas de companhias aéreas e a análise de padrões de votação.

· *Tomografia Computadorizada*: um dos principais avanços no diagnóstico médico é o desenvolvimento de métodos não invasivos para obter imagens de seções transversais do corpo humano, como a tomografia computadorizada e a ressonância magnética. Os métodos da Álgebra Linear podem ser usados para reconstruir imagens a partir do escaneamento por raios X da tomografia computadorizada.

· *Conjuntos Fractais:* conjuntos que podem ser repartidos em versões congruentes proporcionalmente reduzidas do conjunto original são denominadas fractais. Os fractais são atualmente aplicados à compactação de dados computacionais. Os métodos de Álgebra Linear podem ser usados para construir e classificar fractais

· *Teoria do Caos*: os pixels que constituem ema imagem matricial podem ser embaralhados repetidamente de uma mesma maneira, na tentativa de tornalos aleatórios. Contudo, padrões indesejados podem continuar aparecendo no processo. A aplicação matricial que descreve o processo de embaralhar ilustra tanto a ordem quanto a desordem que caracterizam estes processos caóticos.

· *Um Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana*: o ouvido interno contém uma estrutura com milhares de receptores sensoriais ciliares. Estes receptores, movidos pelas vibrações do tímpano, respondem a freqüências diferentes de acordo com sua localização e produzem impulsos elétricos que viajam até o cérebro através do nervo auditivo. Desta maneira, o ouvido interno age como um processador de sinais que decompõe uma onda sonora complexa em um espectro de freqüências distintas.

· *Deformações e Morfismos*: você já deve ter visto em programas de televisão ou clips musicais imagens mostrando rapidamente o envelhecimento de uma mulher ao longo do tempo, ou a transformação de um rosto de mulher no de uma pantera, a previsão de como seria hoje o rosto de uma criança desaparecida há 15 anos atrás, etc. Estes processos são feitos a partir de algumas poucas fotos. A idéia de continuidade, de evolução do processo, é feita através do computador.Este processo de deformação é chamado de morfismo, que se caracteriza por misturas de fotografias reais com fotografias modificadas pelo computador. Tais técnicas de manipulação de imagens têm encontrado aplicações na indústria médica, cientifica e de entretenimento.

Produto de dez anos de intensa pesquisa e desenvolvimento, o primeiro ônibus espacial dos EUA (lançado em 1981) foi uma vitória da engenharia de controle de sistemas, envolvendo muitas áreas da engenharia - aeronáutica, química , elétrica, hidráulica e mecânica. Os sistemas de controle de ônibus espacial são absolutamente críticos para vôo. Ele requer um constante monitoramento por computador durante o vôo atmosférico. O sistema de vôo envia uma sequência de comandos para a superfície de controle aerodinâmico. Matematicamente , os sinais de entrada e saída de um sistema de Engenharia são funções. É importante para as aplicações que essas funções possam ser somadas e multiplicadas por escalares. Essas duas operações em funções tem propriedades algébricas que são completamente análogas às operações de soma de vetor e multiplicação de vetor por escalar no $\mathbb{R}^n$. Por esse motivo, o conjunto de todas as entradas possíveis (funções) é chamado de um **espaço vetorial**. A fundamentação matemática para a engenharia de sistemas repousa sobre espaços vetoriais de funções, portanto precisamos estender a teoria de vetores do $\mathbb{R}^n$ de modo a incluir tais funções.

Antes de apresentarmos a sua definição, analisaremos em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $F(\mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$.

A soma de duas funções f e g de $F(\mathbb{R})$ é definida como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Note também que se $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar o escalar α pela função f , da seguinte forma:

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

resultando num elemento de $F(\mathbb{R})$.

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$ podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{nxn}$$

que é um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

Com relação à multiplicação do escalar α pela matriz $A \in \mathbb{R}$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{nxn}$$

o qual também $\in M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois exemplos acima, com a adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm em comum?

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $F(\mathbb{R})$ e para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + f$
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$
3. Se g representa a função nula então $f + g = f$
4. $f + (-f) = 0$

5. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$

6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

7. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$

8. $1f = f$

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B, e C em M_n e para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. Se 0 representa a matriz nula então $A + 0 = A$

4. $A + (-A) = 0$

5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

8. $1A = A$

Observamos que o conjunto das funções bem como o das matrizes, quando munidos de soma e multiplicação por escalar, apresentam propriedades algébricas comuns. Existem muitos outros exemplos de conjuntos que apresentam as mesmas propriedades acima. Para não estudarmos separadamente cada conjunto, estudaremos um conjunto genérico e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas as operações de adição e multiplicação por escalar.

Definição 43 *Um espaço vetorial V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores, u e $v \in V$ faz corresponder um novo vetor denotado por $u + v \in V$, chamado a soma de u e v, e a multiplicação por um número real, que a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor denotado por αv, chamado produto de α por v. Estas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u, v e $w \in V$ as seguintes propriedades:*

1. Comutatividade: $u + v = v + u$

2. Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$

3. Vetor nulo: existe um vetor nulo $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$

4. Inverso aditivo: Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $-v + v = 0$

5. Distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

6. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

8. Multiplicação por 1: $1.u = u$

Exemplo 44 *Para todo número natural n, o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas (chamadas n-uplas) $u = (x_1,x_2,x_{3,.......,}x_n), v = (y_1, y_2,y_3, ...y_n)$ de números reais. Por definição a igualdade vetorial $u = v$ significa as n igualdades numéricas*

$$x_1 = y_1,x_2 = y_2, ...x_n = y_n.$$

Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_{2,}....x_n + y_n)$$

e

$$\alpha u = (\alpha x_{1,}\alpha x_2, ...\alpha x_n)$$

Verifica-se sem dificuldades, que estas definições fazem do $\mathbb{R}^n$ um E. V. (verifique).

Exemplo 45 *O conjunto dos polinômios em x, de grau menor ou igual a n é definido por :*

$$P_n = \left\{p(x) = a_o + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ \diagup \ a_o, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

com as operações de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial. Note que cada elemento de P_n é uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplo 46 *O conjunto das matrizes definido por*

$$M(m, n) = \left\{[a_{ij}]_{m\times n} \ \diagup \ a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, .., m \ e\ j = 1, .., n\right\}$$

com a soma usual de matrizes e multiplicação usual de um escalar por uma matriz é um espaço vetorial.

No caso particular das matrizes quadradas de ordem n denotaremos $M(n, n)$ por M_n.

Exemplo 47 *Seja o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \diagup x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações assim definidas:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ com estas operações não é um espaço vetorial, de fato:
Vamos mostrar que falha a propriedade 5) do E.V.

$$(\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha+\beta)x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta u &= = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1) + (\beta x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, 2y_1) \\ &\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)u \neq \alpha u + \beta u\end{aligned}$$

Exercício 48 *Verifique se $V = M_2$ com as operações:*

(i) Soma: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$

(ii) Multiplicação por escalar: $\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & d_1 \end{pmatrix}$

é um **espaço** vetorial.

Solução:

Como a adição é a usual, então todas as propriedades da adição serão satisfeitas. Se alguma propriedade falhar, será na multiplicação por escalar, pois esta não é a usual.

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$.

Vamos mostrar que falha a propriedade: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

(i) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha b + \beta b \\ \alpha c + \beta c & d \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha A + \beta A = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ \alpha c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & \alpha b + \beta b \\ \alpha c + \beta c & 2d \end{pmatrix}$

Por (i) e (ii) concluímos que $(\alpha+\beta)A \neq \alpha A + \beta A$. Logo $V = M_2$ com as operações definidas acima não é um espaço vetorial.

2.2 Subespaços

Definição 49 *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:*

1. se u, $v \in W$ então $u + v \in W$
2. se $u \in W$ então $\alpha u \in W$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Podemos fazer três observações:

- as condições da definição garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de W. Isto é suficiente para afirmar que W é ele próprio um E.V.

- Qualquer subespaço W de V precisa conter o vetor nulo.
- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços: o conjunto formado pelo vetor nulo e o próprio E.V.

Exemplo 50 *Seja* $V = \mathbb{R}^5$ *e* $W = \{0, x_{2,}x_3, x_4, x_5)\}$ *,* W *é um subespaço vetorial?*

Resolução:
verificamos as condições de subespaço: seja $u = (0, x_{2,}x_3, x_4, x_5) \in W$ e $v = (0, y_{2,}y_3, y_4, y_5) \in W$

1. $u + v = (0, x_2 + y_{2,}x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in W$
2. $\alpha u = \alpha(0, x_{2,}x_3, x_4, x_5) = (0, \alpha x_{2,}\alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5) \in W$

logo W é um subespaço vetorial.

Exemplo 51 *Seja* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x + y + z = 0\}$*,* S *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$?

Resolução:
Dados $u = (x_1, y_1, z_1) \in S$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in S$

1. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Como $u = (x_1, y_1, z_1) \in S \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$. Analogamente $x_2 + y_2 + z_2 = 0$, e podemos concluir que $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \Rightarrow u + v \in S$

2. $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ para todo $\alpha \Rightarrow \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) = \alpha 0 = 0$ e dai $\alpha u \in S$

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 52 $V = M_n$ *e* W *é o subconjunto das matrizes triangulares superiores.* W *é subespaço de* V*, pois a soma das matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular por um escalar (Verifique).*

Exemplo 53 *Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Considere o sistema homogêneo* $AX = O$*, onde* A *é uma matriz* $m \times n$ *e* X *é uma matriz coluna* $n \times 1$*.Se* X_1 *e* X_2 *são duas soluções do sistema* $AX = O$ *então tem-se* $AX_1 = O$ *e* $AX_2 = O$*. Mas* $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O$*, logo* $X_1 + X_2$ *é uma solução do sistema* $AX = O$*. Também,* $A(kX_1) = kAX_1 = O$*, portanto* kX_1*é uma solução do sistema* $AX = O$*.*

Como o conjuntos das matrizes $X_{n\times 1}$ *é uma espaço vetorial temos que o subconjunto de todas as matrizes de ordem* $n \times 1$ *que são soluções do sistema* $AX = O$ *é uma subespaço vetorial do espaço vetorial formadso por todas as matrizes de ordem* $n \times 1$

Exemplo 54 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R})$. *Se escolhermos* $u = (1,1)$ *e* $v = (2,4) \in W$, *temos:* $u + v = (3,5) \notin W$, *portanto* W *não é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 55 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$, W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$, *pois temos:*

1. Para $u = (x_1, 2x_1)$ e $v = (x_2, 2x_2) \in W$ tem-se $u + v = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W$, pois a segunda componente de $u + v$ é igual ao dobro da primeira.
2. $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in W$, pois a segunda componente de αu é igual ao dobro da primeira.

Exemplo 56 *Considere o espaço vetorial* M_2 *e a matriz* $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$.*Seja* $W = \{A \in M_2 / AB = BA\}$. *Verifique se* W *é um espaço vetorial de* M_2.

1^a Solução: Sejam A_1, A_2 petencente a M_2.
$(A_1 + A_2) B = A_1B + A_2B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2) \Rightarrow (A_1 + A_2) \in M_2$
$(kA_1) B = k(A_1B) = k(BA_1) = B(kA_1) \Rightarrow (kA_1) \in M_2$
Logo W é um subespaço vetorial de W.

2^a Solução: Tomando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$, sabe-se que a matriz A deve satisfazer a relação $AB = BA$.Portanto

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} \\
b &= -c \\
-a &= -d \Rightarrow a = d \\
a &= d \\
-c &= b \Rightarrow b = -c
\end{aligned}$$

Logo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_2 / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Sejam $u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$

$u + v = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -b-y & a+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -(b+y) & a+x \end{bmatrix} \in W$

$ku = k\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{bmatrix} \in W$
Como $u + v \in W$ e $ku \in W \Rightarrow W$ é um subespaço vetorial de M_2

Exemplo 57 *Verifique se* $W = \left\{ p(x) \in P_3 : p^{''}(2) + p^{'}(1) = 0 \right\}$ *é um subespaço vetorial de* $V = P_3$.

Resolução:
Sejam $p(x), q(x) \in W \Rightarrow p^{''}(2) + p^{'}(1) = 0$ e $q^{''}(2) + q^{'}(1) = 0$
Assim $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ é tal que

$$\begin{aligned} (p+q)^{''}(2) + (p+q)^{''}(1) &= p^{''}(2) + q^{''}(2) + p^{'}(1) + q^{'}(1) \\ &= p^{''}(2) + p^{'}(1) + q^{''}(2) + q^{'}(1) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

e então $(p+q)(x) \in W$.
Da mesma forma, $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$ é tal que

$$(\alpha p)^{''}(2) + (\alpha p)^{'}(1) = \alpha p^{''}(2) + \alpha p^{'}(1) = \alpha \left(p^{''}(2) + p^{'}(1) \right) = \alpha .0 = 0$$

e então $(\alpha p)(x) \in W$.
Portanto W é subespaço vetorial de P_3.

2.3 Intersecção de dois Subespaços Vetoriais

Definição 58 *Dados* W_1 *e* W_2 *subespaços de um espaço vetorial* V*, a intersecção* $W_1 \cap W_2$ *ainda é um subespaço de* V*.*

Exemplo 59 $V = \mathbb{R}^3$. *Seja* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ y = 0)$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x = 0)$. $W_1 \cap W_2$ *é a reta de intersecção dos planos* W_1 *e* W_2*, ou seja* $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x = 0 \text{ e } y = 0)$

Exemplo 60 $V = \mathbb{R}^3$. *Seja* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x + y + z = 0)$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x + y - z = 0)$.

Para encontrarmos a intersecção dos dois subespaços devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $z = 0$, $y = -x$. Portanto $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0 \text{ e } y = -x)$

Exemplo 61 *$V = P_3$. Seja $W_1 = \{p \in P_3 \ : \ p'(1) = 0\}$ e $W_2 = \{p \in P_3 \ : \ p''(1) = 0\}$*

Como $p \in P_3$ então $p = a + bx + cx^2 + dx^3$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se $p \in W_1$ então $p'(1) = 0 \Rightarrow b + 2c + 3d = 0$. Se $p \in W_2$ então $p''(1) = 0 \Rightarrow 2c + 6d = 0$. Para que p pertença a $W_1 \cap W_2$ devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} b + 2c + 3d = 0 \\ \quad 2c + 6d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= -3d \\ b &= 3d \end{aligned}$$

Portanto $\quad W_1 \cap W_2 = \{p \in P_3 \ : \ p = a + 3dx - 3dx^2 + dx^3\}$

Exemplo 62 *$V = M(n, n), W_1 = \{$matrizes triangulares superiores$\}$; $W_2 = \{$matrizes triangulares inferiores$\}$. Então $W_1 \cap W_2 = \{$matrizes diagonais$\}$.*

Exemplo 63 *Seja $V = M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e*

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$W = W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V, pois

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 64 *Sejam W_1 e W_2 dados por:*

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

e

$$W_2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$

será que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V?
Solução :

Não. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$,

$u = (1, 1) \in W_2$
$v = (1, -1) \in W_1$
mas $u + v = (1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin W_1 \cup W_2$ (represente graficamente esta soma de vetores)

2.4 Combinação Linear

Definição 65 *Seja V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $a_1, a_{2,........}a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

é um elemento de V ao que chamamos de combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$.

Exemplo 66 *Em $\mathbb{R}^2$ os vetor $v = (10, 16)$ é uma combinação linear dos vetores*

$$v_1 = (1, 2) \;\; v_2 = (3, 4) \qquad \text{pois} \;\; v = 4v_1 + 2v_2.$$

Exemplo 67 *Verifique se o vetor $v = (3, 2, 1)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, -1)$.*

Devemos verificar se existem números a, b, c tais que $v = av_1+bv_2+cv_3$, ou seja,

$$(3, 2, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1).$$

devemos então resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mas esse sistema tem uma única solução $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 1$. Portanto v pode realmente ser escrito como combinação de v_1, v_2 e v_3, da forma $v = \frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3$.

Exemplo 68 *No espaço vetorial P_2 o polinômio $p = 7x^2 + 11x - 26$ é combinação linear dos polinômios: $q_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $q_2 = -2x^2 + 5x - 8$, de fato $p = 3q_1 + 4q_2$ (confira).*

Exemplo 69 *Verifique que em P_2 o polinômio $p(x) = 1+x^2$ é uma combinação dos polinômios $q(x) = 1$, $r(x) = 1 + x$ e $s(x) = 1 + x + x^2$.*

Resolução:
Precisamos encontrar números reais, a_1, a_2 e a_3 tais que:

$$p(x) = a_1q(x) + a_2r(x) + a_3s(x)$$

Ou seja, precisamos encontrar a_1, a_2 e a_3 satisfazendo:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= a_1 + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2) \\ 1.1 + 0x + 1.x^2 &= (a_1 + a_2 + a_3) \;\; + (a_2 + a_3)\, x + a_3x^3 \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ \quad a_2 + a_3 = 0 \\ \qquad a_3 = 1 \end{cases} \quad :\Leftrightarrow a_1 = 1; a_2 = -1 \text{ e } a_3 = 1.$$

Exemplo 70 *Consideremos , no* $\mathbb{R}^3$*, os seguintes vetores:* $v_1 = (1, -3, 2)$ *e* $v_2 = (2, 4, -1)$*. Escreva o vetor* $v = (-4, -18, 7)$ *como combinação linear dos vetores* v_1 *e* v_2*.*

Resolução:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$(-4, -18, 7) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1) = (1a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -1a_2) =$
$= (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$ que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = 2,\ a_2 = -3.$$

Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$. Agora mostre que o vetor $v = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

2.5 Dependência e Independência Linear

Definição 71 *Seja* V *um espaço vetorial e* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$*. Dizemos que o conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é* ***linearmente independente (LI),*** *se a equação:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

implica que

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

No caso, em que exista algum $a_i \neq 0$ *dizemos que* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é* ***linearmente dependente (LD).***

Para determinarmos se um conjunto é L.I. ou L.D. devemos fazer a combinação linear do conjunto de vetores e igualar esta combinação linear ao vetor nulo do espaço. Portanto é muito **importante** ter conhecimento do vetor nulo do espaço em que estamos trabalhando.

Definição 72 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *e os conjunto de vetores:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\} \\ \beta &= \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (3, 5, 7)\} \end{aligned}$$

Os conjuntos α e β acima são L.I ou L.D?

Solução:

Fazendo a combinação linear

$$a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) + c(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ 3a+b &= 0 \end{cases}$$

cuja única solução é $a=b=c=0$. Portanto o conjunto α é L.I

Fazendo a combinação linear

$$a\,(1,2,3)+b(1,1,1)+c(3,5,7)=(0,0,0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} a+b+3c &= 0 \\ 2a+b+5c &= 0 \\ 3a+b+7c &= 0 \end{cases}$$

que possui infinitas soluções (grau de liberdade 1). Portanto além da solução nula (que todo sistema homogêneo tem) este sistema possui outras soluções diferentes da solução nula, logo o conjunto β é L.D.

Teorema 73 *O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LD se, e somente se um dos vetores do conjunto for uma combinação linear dos outros.*

Exemplo 74 *a) Seja $V=\mathbb{R}^3$. Sejam $v_1, v_2 \in V$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LD se e somente se v_1 e v_2 estiverem na* ***mesma reta que passa pela origem*** *(um vetor é múltiplo do outro), $v_1=\lambda v_2$.*

b) Em $V=\mathbb{R}^2$, $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$ são LI, pois:

$$a_1e_1+a_2e_2=0 \Longrightarrow a_1(1,0)+a_2(0,1)=(0,0) \Longrightarrow (a_1,a_2)=(0,0)$$

logo $a_1=0$ e $a_2=0$ portanto, e_1e e_2 são LI.

Exemplo 75 *No espaço Vetorial M_2 o conjunto:*

$$A=\left\{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é LD ?

Examinemos a equação: $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$

$$a_1\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $a_1=-a_3$ e $a_2=-2a_{3.}$ .Como existem soluções $a_i \neq 0$, o conjunto é LD.

Propriedades da Dependência e da Independência Linear

Seja V um E.V

1. Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq \overrightarrow{0}$, então A é LI.
2. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD
3. Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte A_1 de A também é LI.

2.6 Subespaços Gerados

Definição 76 *Seja V um espaço vetorial. Consideramos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V, A \neq \varnothing$.O conjunto W de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço de V. Simbolicamente, o subespaço W é:*

$$W = \{v \in V \ / \ v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n\}$$

O subespaço W diz-se gerado pelos vetores $v_1, v_2, ...v_n.$, ou gerado pelo conjunto A, e representa-se por:

$$W = [v_1, v_2, ...v_n.] \ \ ou \ \ W = G(A)$$

Os vetores $v_1, v_2, ...v_n$.são chamados geradores do subespaço W, enquanto A é o conjunto gerador de W.

Para o caso particular de $A = \varnothing$, define-se $[\varnothing] = \{\overrightarrow{0}\}$

$A \subset G(A)$, ou seja, $\{\ v_1, v_2, ...v_n\} \subset [v_1, v_2, ...v_n]$

Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer $G(A) = V$. Nesse caso, A é um conjunto gerador de V.

Exemplo 77 *Os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois, qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de i e j :*

$$(x, y) = xi + yj = x(0, 1) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Então: $[i, j] = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 78 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1, 2, 3)$.*

Solução: Temos:

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = a(1, 2, 3), a \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade: $(x, y, z) = a(1, 2, 3)$ vem: $x = a$; $y = 2a$; $z = 3a$ donde: $y = 2x$ e $z = 3x$ logo ,

$$[v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x \ \text{ e } z = 3x\} \ ou \ \ [v_1] = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 79 *Encontre o subespaço vetorial de* P_3 *gerado por* $U = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$

Resolução**:**

Note que $t^3 = (t^3 + 1) - 1$. Assim, dado $p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in P_3$ podemos escrever

$$p(t) = (a_0 - a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3(t^3 + 1) \in U$$

Ou seja, qualquer vetor (polinômio) de P_3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores do conjunto U. Logo $P_3 = [U]$.

Exemplo 80 *Encontre o subespaço vetorial gerado de* M_2 *gerado por*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução: Temos que $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in [G]$ se e somente se existirem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ -a + b = y \\ 3b = z \\ a + 4b = t \end{cases}$$

que é possível se:

$$z = x + y \text{ e } t = \frac{5x + 2y}{3}$$

Logo $[G] = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x + y & \frac{5x+2y}{3} \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Exemplo 81 *Encontre um conjunto de geradores para* $W = \{X \in M(4,1) \diagup AX = 0\}$ *onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in W \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&0&1&1\\3&1&0&1\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow,$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-3/2&-1/2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-c}{2}-\frac{d}{2}\\ b=\frac{3c}{2}+\frac{d}{2}\end{cases}$$

isto é,

$$X=\begin{pmatrix}\frac{-c}{2}-\frac{d}{2}\\ \frac{3c}{2}+\frac{d}{2}\\ c\\ d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$portanto,\ W=\left[\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]$$

2.7 Soma de Subespaços

Definição 82 *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Então o conjunto*

$$W_1+W_2=\{v\in V\,/\,v=w_1+w_2, w_1\in W_1\ e\ \ w_2\in W_2\}$$

é um subespaço de V.

Exemplo 83 $W_1=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}\right\}$ *e* $W_2=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\c&d\end{bmatrix}\right\}$*, onde* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$*. Então* $W_1+W_2=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right\}=M_2$.

Exemplo 84 *Sejam os subespaços vetoriais*

$$W_1=\{(a,b,0);a,b\in\mathbb{R}\}\ e\ \ W_2=\{(0,0,c),c\in\mathbb{R}\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. A soma $W_1+W_2=\{(a,b,c);a,b,c\in\mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial, que nesse caso é o próprio $\mathbb{R}^3$.

Proposição 85 *Quando $W_1 \cap W_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado soma direta de W_1 com W_2, e denotado por $W_1 \oplus W_2$.*

Observação 86 *Usando os geradores podemos obter uma caracterização da soma de dois subespaços: Sejam W e U subespaços de V, se $W = [u_1, ..., u_n]$ e $U = [w_1, ..., w_m]$ então $W + U = [u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m]$*

Exemplo 87 *Verifique que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de*

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$$

Resolução:
Note que W_2 é de fato um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (Verifique)
Dado $v \in W_{1,}\ v = (x, y, -x - y)$ e $u \in W_2,\ u = (0, 0, z)$

$$u + v = (x, y, -x - y + z) = \mathbb{R}^3$$

vamos mostrar que $W_1 \cap W_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Seja $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ temos:

$$\left\{\begin{array}{c} -x - y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Exemplo 88 *Encontre os geradores do subespaço $U + W$ onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x + y + z = 0\right\}, \quad e \\ W &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x + y = 0 \text{ } e \text{ } x - z = 0\right\} \end{aligned}$$

Resolução: Se $v \in U \Rightarrow v = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$ logo $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$
Se $v \in W \Rightarrow v = (x, -x, x) = x(1, -1, 1)$ logo $W = [(1, -1, 1)]$
Usando a teoria acima explicada temos que

$$U + W = [(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)]$$

2.8 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

2.8.1 Base

Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do E.V se:

1. β é LI
2. β gera V

Exemplo 89 *$\beta = \{(1,1),(-1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. De fato:*

1. β é LI pois $a(1,1)+b(-1,0)=(0,0) \Longrightarrow a=b=0$
2. β gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se :

$$(x,y) = y(1,1)+(y-x)(-1,0)$$

Realmente , a igualdade $(x,y)=a(1,1)+b(-1,0) \Longrightarrow a=y$ e $b=y-x$.

Exemplo 90 *O conjunto $\{(0,1),(0,2)\}$não é base de $\mathbb{R}^2$ pois é um conjunto LD. Se*

$$(0,0)=a(0,1)+b(0,2)$$

temos $a=-2b$. Assim para cada valor de b conseguimos um valor para a, ou seja, temos infinitas soluções.

Exemplo 91 *Seja $V=\mathbb{R}^3$ então $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ (verifique!).*

Exemplo 92 *O conjunto $\beta=\{1,x,x^2,...,x^n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n. De fato:*

$$a_o+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n=0$$
$$a_o+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n=0+0x+0x^2+.....+0x^n$$
$$\Longrightarrow a_0=a_1=.....=a_n=0$$

portanto, β é LI.

β gera o espaço vetorial $P_{n,}$ pois qualquer polinômio $p \in P_n$ pode ser escrito assim:

$$p=a_o+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$$

que é uma combinação linear de $1,x,x^2,...,x^n$.

Logo, β é uma base de P_n.Essa é a base canônica de P_n e tem $n+1$ vetores.

Exemplo 93 *Encontre uma base para $U+W$ onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \diagup x+y+z=0\right\} \text{ e} \\ W &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \diagup x+y=0 \text{ e } x-z=0\right\} \end{aligned}$$

Resolução: $U=[(1,0,-1),(0,1,-1)]$ e $W=[(1,-1,1)]$ (Já vimos este exemplo)

$$U+W=[(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)].$$

Já temos um conjunto que gera a soma, se este conjunto for L.I. então ele será uma base.

$a(1,0,-1)+b(0,1,-1)+c(1,-1,1)=(0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo o conjunto é L.I e portanto. $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)\}$ é uma base de $U+W$

Exemplo 94 *Encontre uma base para $U+W$ onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x-y+z=0 \text{ } e \text{ } x-y=0\right\}, \text{ } e \\ W &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x+y-z=0 \text{ } e \text{ } x-z=0\right\} \end{aligned}$$

Se $v = (x,y,z) \in U \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow v = (x,x,0) = x(1,1,0)$, portanto $U = [(1,1,0)]$.

Se $u = (x,y,z) \in W \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow u = (x,0,x) = x(1,0,1)$,portanto $W = [(1,0,1)]$

Assim $U+W = [(1,1,0,),(1,0,1)]$. Como o conjunto $\beta = \{(1,1,0,),(1,0,1)\}$ é L.I então ele é uma base para $U+W$.

Como o conjunto $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)\}$ é LI (verifique isto) e gera o espaço $U+W$ então ele é uma base do espaço $U+W$.

Exemplo 95 *Dados:*

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^t\} \quad e \qquad W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \text{ em } M_2$$

encontre uma base para $U, W, U \cap W, W+U$

Resolução:

Para U : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = b$ portanto, $A \in U$ se existirem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pode-se verificar facilmente que as matrizes

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são L.I e portanto, como geram U, formam uma base de U.

Para W: Como a matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gera W, ela serve para base de W

Para $U \cap W$:

$A \in U \cap W \Leftrightarrow A = A^t$ e existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
, isto é, se e somente se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$
que é satisfeita quando $\alpha = 0$, ou seja, $A = \mathbf{0}$.Desse modo $U \cap W = \{0\}$. Uma base para $U \cap W$ é $\beta = \phi$. Veja a observação a seguir para elucidar esse fato.

Observação: Seja V um espaço vetorial e $\overrightarrow{0} \in V$ o vetor nulo de V. Como o conjunto $\beta = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ é LD (mostre isto) temos que este conjunto não pode ser uma base do conjunto $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Este é um caso patológico e para que não seja contrariada a definição de base tomamos $\beta = \phi$ (conjunto vazio) como sendo base para o espaço $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Para $U + W$: Como $U \cap W = \{0\}$ temos $U + W$ é soma direta e, portanto, uma base é :
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Proposição 96 *"Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado ".*

Exemplo 97 *O conjunto* $\beta = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ *é LI e gera o subespaço*
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y - z = 0\}.$$
Então, β *é base de* W*, pois* β *é LI e gera* W*.*

Teorema 98 *Sejam* $v_1, v_2, ...v_n$*, vetores não nulos que geram um espaço vetorial* V*. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de* V*.*

Proposição 99 *Seja um E.V* V *gerado por um conjunto finito de vetores* $v_1, v_2, ...v_n$*. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Exemplo 100 *Sejam* U *e* W *subespaços de* $V = M_2$ *tal que* $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 : b + c = 0\right\}$ *e* $W = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

a. Determine uma base para $U \cap W$

Inicialmente, encontremos o subespaço gerado W :

Seja $A \in W \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz ampliada desse sistema é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & a \\ -1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & -1 & 1 & d \end{pmatrix}, \text{Gaussian elimination: } \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

O sistema só é possível se $d - a = 0$, daí observamos que o subespaço gerado W é dado por $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 : a = d \right\}$

E portanto obtemos $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} ; a, c \in \mathbb{R} \right\}$. Uma base para W é $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Note que as matrizes geram $U \cap W$ e são LI, pois não são múltiplas uma da outra.

b. Encontre uma base para $U + W$.

Obtemos os geradores de $U + W$ unindo os geradores de U e W. Vamos obter os geradores de U :

Seja $A \in U \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

$U + W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Uma base para $U + W$ deve ter no máximo 4 matrizes, então já sabemos que este conjunto é LD e que temos que eliminar no mínimo 2 matrizes para este conjunto se tornar LI. Vejamos quantas e quais matrizes serão eliminadas:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{Gaussian elimination: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - e - f = 0 \\ b - d - f = 0 \\ c - e + f = 0 \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c = e \\ b = d \\ f = 0 \end{cases}$$

Veja que não podemos excluir a última matriz e que existe uma relação entre a 1^a, 3^a e 5^a, então devemos excluir uma dentre estas 3; e ainda a 2^a está relacionada com a 4^a, então temos que excluir uma das duas. Excluindo a 1^a e a 2^a tem-se que

$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para $U + W$.

2.8.2 Dimensão

Seja V um Espaço Vetorial.

Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e denota-se $\dim V = n$.

Se V não possui uma base, ou seja, a base é $\beta = \phi$ então $dimV = 0$

Se V possui uma base com infinitos vetores, então $\dim V$ é infinita e anota-se $\dim V = \infty$

Exemplo 101 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *pois toda base de* $\mathbb{R}^2$ *tem 2 vetores*

Exemplo 102 $\dim M(2,2) = 4$

Exemplo 103 $\dim M(m,n) = m.n$

Exemplo 104 $\dim P_n = n + 1$

Proposição 105 *Seja V um E. V. tal que* $\dim V = n$

Se W é um subespaço de V então $\dim W \leq n$. No caso de $\dim W = n$, tem-se $W = V$. Para permitir uma interpretação geométrica, consideremos o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 (\dim \mathbb{R}^3 = 3)$.

A dimensão de qualquer subespaço W do $\mathbb{R}^3$ só poderá ser $0, 1, 2$ ou 3. Portanto, temos os seguintes casos:

1. $\dim W = 0$, então $W = \{0\}$ é a origem;
2. $\dim W = 1$, então W é uma reta que passa pela origem;
3. $\dim W = 2$, então W é um plano que passa pela origem;
4. $\dim W = 3$ então $W = \mathbb{R}^3$.

Proposição 106 *Seja V um E. V de dimensão n. Então, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é Linearmente Dependente (LD).*

Proposição 107 *Sabemos que o conjunto β é base de um espaço vetorial se β for LI e gera V. No entanto, se soubermos que* $\dim V = n$ *, para obtermos uma base de V basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita.*

Exemplo 108 *O conjunto $\beta = \{(2,1), (-1,3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. De fato, como* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *e os dois vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 109 *Seja* $W = \left\{ p(x) \in P_3 : p^{''}(2) + p^{'}(1) = 0 \right\}$ *um subespaço vetorial de* P_3*. Encontre uma base e a dimensão de* W*.*

Resolução:

Vamos então encontrar uma base, comecemos pelos geradores de W :

Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$ temos que $p^{''}(2) + p^{'}(1) = 0$.Então como $\left\{ \begin{array}{l} p^{'}(1) = 3a + 2b + c \\ p''(2) = 12a + 2b \end{array} \right.$ obtém-se de $p^{''}(2) + p^{'}(1) = 0$ que $c = -15a - 4b$.

Portanto $p(x) \in W$ é da forma $p(x) = a(x^3 - 15x) + b(x^2 - 4x) + d$.

Logo $W = \left[x^3 - 15x, x^2 - 4x, 1 \right]$. Como esse conjunto é LI (fácil de verificar), temos que uma base de W é

$$\alpha = \{x^3 - 15x, x^2 - 4x, 1\}$$

e $\dim W = 3$.

2.8.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Proposição 110 *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita. Se* U *e* W *são subespaços vetoriais de* V *então*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

No exemplo (95) de base , para encontrar a base de $U + W$ podemos usar esta proposição: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim M_2$, portanto, $U + W = M_2$ e uma base pode ser dada por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.8.4 Coordenadas

Seja V um espaço vetorial gerado e β uma base de V formada pelos vetores $u_1, u_2 .... u_n$.

$v \in V$ sendo

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n$$

Os coeficientes $x_1, x_2, ...x_n$ são chamados **componentes** ou **coordenadas** de v em relação a base β e se representa por :

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 111 *No* $\mathbb{R}^2$ *consideremos as bases* $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}, \beta = \{(2, 0), (1, 3)\}$ *e* $\gamma = \{(1, -3), (2, 4)\}$*. Dado o vetor* $v = (8, 6)$ *tem-se:*

$(8,6) = 8(1,0) + 6(0,1)$
$(8,6) = 3(2,0) + 2(1,3)$
$(8,6) = 2(1,-3) + 3(2,4)$

temos: $\quad [v]_\alpha = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $[v]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo 112 *Mostre que os vetores* $(1,1,1), (0,1,1)$ *e* $(0,0,1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Encontre as coordenadas de* $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base* β *formada pelos vetores acima.*

Resolução:

Já sabemos que dim $\mathbb{R}^3 = 3$.Então verificamos se os vetores acima são LI. Os vetores são LI se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto é equivalente a que o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, portanto, os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI.

$$(1,2,0) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = (a, a+b, a+b+c)$$

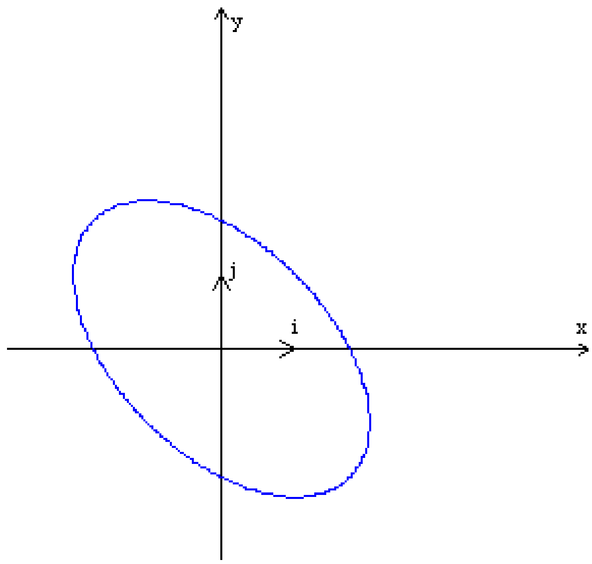
que é equivalente ao sistema:

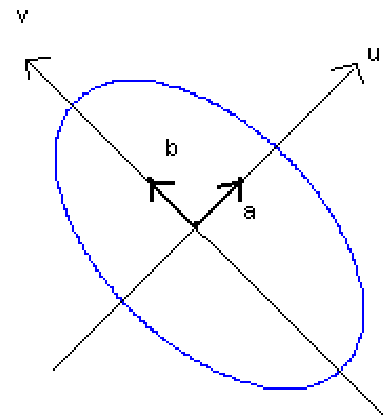
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 1 \ e \ c = -2$$

. Desse modo, as coordenadas de $(1,2,0)$ em relação à base β é dado por $[v]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.9 Mudança de Base

Muitos problemas aplicados podem ser simplificados mudando-se de um sistema de coordenadas para outro. Mudar sistemas de coordenadas em um espaço vetorial é, essencialmente, a mesma coisa que mudar de base. Por exemplo, num problema em que um corpo se move no plano xy, cuja trajetória é uma elipse de equação $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ (ver figura), a descrição do moviemnto torna-se muito simplificada se ao invés de trabalharmos com os eixos x e y utilizarmos um referencial que se apóia nos eixos principais da elipse. Neste novo referencial, a equação da trajetória será mais simples: $3u^2 + 2v^2 = 6$.





Nesta seção, vamos discutir o problema de mudar de um sistema de coordenadas para outro.

Sejam $\beta = \{u_{1,...,}u_n\}$ e $\beta' = \{w_{1,....,}w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} v &= x_1u_1 + ... + x_nu_n \\ v &= y_1w_1 + ... + y_nw_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base β

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base β'

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Já que $\{u_{1,...,}u_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores w_i como combinação linear dos u_j, isto é:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Substituindo em (2.1) temos:

$v = y_1w_1 + ... + y_nw_n = y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n) + ... + y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n) =$

$= (a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n)u_1 + ... + (a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n)u_n$

Mas $v = x_1u_1 + ... + x_nu_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Logo ,se usarmos a notação

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos a relação

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada matriz mudança de base β' para a base β.

Compare $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com (2.2) e observe que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i-ésima coluna. Note que uma vez obtida $[I]_{\beta}^{\beta'}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de v na base β' (supostamente conhecida).

Exemplo 113 *Sejam* $\beta = \{(2,-1),(3,4)\}$ *e* $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$. *Procuremos inicialmente* $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$

Isto implica que $a_{11} = \frac{4}{11}$ *e* $a_{21} = \frac{1}{11}$

$w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4)$

Resolvendo, $a_{12} = \frac{-3}{11}$ *e* $a_{22} = \frac{2}{11}$

Portanto, $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

Podemos usar esta matriz para encontrar por exemplo, $[v]_{\beta}$ *para* $v = (5, -8)$

$[(5,-8)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [(5,-8)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \\ -1 \end{bmatrix}$

Isto é, $(5,-8) = 4(2,-1) - 1(3,4)$

Exemplo 114 *Considere as bases em* $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \;\; e \; \acute{\beta} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Encontre$[I]_{\beta}^{\beta'}$.

Resolução:

$(1,0,0) = a_{11}(1,0,1) + a_{21}(1,1,1) + a_{31}(1,1,2)$
$(0,1,0) = a_{12}(1,0,1) + a_{22}(1,1,1) + a_{32}(1,1,2) \Leftrightarrow$
$(0,0,1) = a_{31}(1,0,1) + a_{23}(1,1,1) + a_{33}(1,1,2)$

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{21} + a_{31}, a_{11} + a_{21} + 2a_{31}) &= (1,0,0) \\ (a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{22} + a_{32}, a_{12} + a_{22} + 2a_{32}) &= (0,1,0) \\ (a_{13} + a_{23} + a_{33}, a_{23} + a_{33}, a_{13} + a_{23} + 2a_{33}) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma e o que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a \end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por $x = a - b$, $y = a + b - c$ e $z = c - a$

Tomando $(a,b,c) = (1,0,0)$,obtemos $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (1,1,-1)$

Tomando $(a,b,c) = (0,1,0)$,obtemos $(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (-1,1,0)$

Tomando $(a,b,c) = (0,0,1)$,obtemos $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (0,-1,1)$. Desta forma obtemos:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.10 A Inversa da Matriz de Mudança de Base

Se em (2.1)começarmos escrevendo os u_i em função dos w_j, chegaremos à relação:

$$[v]_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'}\,[v]_{\beta}$$

Um fato importante é que as matrizes $[I]^{\beta'}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\beta'}$ são inversíveis e

$$\left([I]^{\beta'}_{\beta}\right)^{-1} = [I]^{\beta}_{\beta'}$$

Exemplo 115 *No exemplo (113) anterior podemos obter* $[I]^{\beta'}_{\beta}$ *a partir de* $[I]^{\beta}_{\beta'}$

Note que $[I]^{\beta}_{\beta'}$ *é fácil de ser calculada , pois* β' *é a base canônica*

$$\begin{array}{c} (2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1) \\ (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad [I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Exemplo 116 *Seja* $V = P_3$ *e* $\alpha = \left\{2, x, x^2+1, x^3-x\right\}$ *e* $\beta = \left\{3, x+1, x^2, -3x^3\right\}$ *bases de* P_3.

a. Encontre $[I]^{\alpha}_{\beta}$.

Escrevendo os elementos da base α como combinação dos elementos da base β.

$2 = \mathbf{a}.3 + \mathbf{b}(x+1) + \mathbf{c}x^2 + \mathbf{d}(-3x^3)$
$x = \mathbf{e}.3 + \mathbf{f}(x+1) + \mathbf{g}x^2 + \mathbf{h}(-3x^3)$
$x^2 + 1 = \mathbf{i}.3 + \mathbf{j}(x+1) + \mathbf{l}x^2 + \mathbf{m}(-3x^3)$
$x^3 - x = \mathbf{n}.3 + \mathbf{o}(x+1) + \mathbf{p}x^2 + \mathbf{q}(-3x^3)$

Rearranjando os termos à direita de cada igualdade, temos:

$2 = (3\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{b}x + \mathbf{c}x^2 + -3\mathbf{d}x^3$
$x = (3\mathbf{e} + \mathbf{f}) + \mathbf{f}x + \mathbf{g}x^2 + -3\mathbf{h}x^3$
$x^2 + 1 = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{j}x + \mathbf{l}x^2 + -3\mathbf{m}x^3$
$x^3 - x = (3\mathbf{n} + \mathbf{o}) + \mathbf{o}x + \mathbf{p}x^2 + -3\mathbf{q}x^3$

Daí, comparando ambos os lados das igualdades, obtém-se

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b. Encontre $[p]_{\alpha}$ sabendo que $[p]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Devemos usar a relação $[p]_\alpha = [I]^\beta_\alpha [p]_\beta$ onde $[I]^\beta_\alpha = \left([I]^\alpha_\beta\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$[p]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

2.11 Terceira lista de exercícios

1. Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:

   i. $(x, y) + (s, t) = (s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$

   ii. $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   é um espaço vetorial.

2. Moste que $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:

   i. $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$

   ii. $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$.

   é um espaço vetorial **.**

3. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial V. Se for, encontre uma base para cada subespaço.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$

   (c) $V = P_n$ e $W = \{p \in P_n : p(0) = p(1)\}$

   (d) $V = M(2, 2)$ e $S = \{X \in M_2 \ \ / det(X) = 0\}$ (S é o conjunto das matrizes singulares)

   (e) $V = M(2, 2)$ e $F = \{X \in M_n \ \ / AX = XA\}$ (F é o conjunto das matrizes que comutam com a matriz A)

   (f) $V = P_3$ e W é o conjunto dos polinômios de $grau \leq 3$ que passam pelo ponto $P(0, 0)$.

   (g) $V = P_1$ e $W = \left\{p(x) \in P_1 : \int_0^1 p(x)dx = 0\right\}$

   (h) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0\right\}$

   (i) $V = M_{2\times 2}$ e $W = \left\{A \in M_{2\times 2} : A^2 = A\right\}$

4. Dê um exemplo de um subespaço vetorial de P_3 com dimensão 2.

5. **a)** Verifique se o conjunto $S = \{A \in M(3, 3); A\ \textit{é uma matriz anti} - \textit{simétrica}\}$ é um subespaço vetorial de $M(3, 3)$.

   b) Considere o subconjunto de M_2, dado por

   $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 \ / \ b = a \text{ e } d = -a\right\}$. Verifique se o subconjunto W é um espaço vetorial.

6. Verifique se o conjunto $W = \{(1,2,3),(1,3,1),(0,3,1),(1,4,5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I ou L.D.

7. Dado o conjunto $W = \{(1,1,3),(1,2,1),(0,1,3),(1,4,5)\} \subset \mathbb{R}^3$, extrair um subconjunto de vetores L.I.

8. **a)** Se o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto Linearmente Independente então o o conjunto $\alpha = \left\{v_1, \overrightarrow{0}, v_2, ..., v_n\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta.

   b) Considere o subespaço $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Qual é a base e a dimensão de N.

9. Sejam $U = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \ / \ a + b - c + 3d = 0\right\}$ e $W = \{p(x) \in P_3 \ / \ p'(-1) = 0\}$ dois subespaços vetoriais de P_3. Determine $U \cap W$.

10. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2,2,1,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1,0,0,0)$.

    (a) O vetor $(2,-3,2,2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.

    (b) Exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$. Qual é a dimensão deste espaço?

    (c) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = \mathbb{R}^4$? Por quê?

11. Qual o subespaço gerado pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

12. Sejam $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a + b + c = 0\right\}$ e $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ b + 2d = 0\right\}$ dois subespaços vetoriais de M_2. Determine os geradores de $U \cap W$.

13. Considere o espaço vetorial P_3 e o conjunto $W = \{p(x) \in P_3; \ p''(1) = 0\}$.

    (a) Verifique se W é um subespaço vetorial de P_3.

    (b) Obtenha os geradores de W.

14. **a)** Encontre as coordenadas do vetor $p = 1 + t + t^2 + t^3$ em relação base $\alpha = \left\{2, 1+t, t+t^2, t^2+t^3\right\}$ de P_3

    b) O conjunto $\beta = \left\{2, t^2, t + t^2\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta

15. Mostre com um exemplo que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser um subespaço vetorial desse espaço.

16. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$.

    (a) $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \text{ e } a = -b\right\}$

(b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ e } b = d \right\}$

Em caso afirmativo, determine:

i) uma base para $W_1 \cap W_2$

ii) $W_1 + W_2$ é soma direta?

iii) $W_1 + W_2 = M(2,2)$?

17. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^5$, $W_1 = \{(x,y,z,t,w) \diagup x+z+w=0, x+w=0\}$, $W_2 = \{(x,y,z,t,w) \diagup y+z+t=0\}$ e $W_3 = \{(x,y,z,t,w) \diagup 2x+t+2w=0\}$.

    (a) Determine uma base para o subespaço $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

    (b) Determine uma base e a dimensão de $W_1 + W_3$.

    (c) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

    (d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$?

18. Considere os seguintes subespaços de P_3 :

$$U = \left\{ p \in P_3 : p^{''}(1) = 0 \right\}$$
$$\text{e } W = \left\{ p \in P_3 : p^{'}(1) = 0 \right\}$$

    Determine $\dim(U+W)$ e $\dim(U \cap W)$.

19. Considere o subespaço W de P_3 que é gerado pelos polinômios $p_1(x) = 1+2x+x^2$, $p_2(x) = -1+2x^2+3x^3$ e $p_3(x) = -1+4x+8x^2+9x^3$ e o subespaço de P_3, $U = \{p \in P_3 : p(0) = 0\}$

    (a) Determine uma base e a dimensão de W.

    (b) Determine uma base para $U \cap W$.

    (c) Determine uma base para $U + W$.

20. Sejam $U = [(1,0,0),(1,1,1)]$ e $V = [(0,1,0),(0,0,1)]$ subespaços gerados do $\mathbb{R}^3$. Determine:

    (a) uma base e a dimensão de $U \cap W$.

    (b) $U + W = \mathbb{R}^3$?

21. Considere o seguinte subespaço de $M(2,2)$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) : a+b = c+d = 0 \right\}$$

    (a) Determine uma base e indique a dimensão de S.

(b) Construa uma base de $M(2,2)$ que contenha a base de S obtida no ítem **a)**.

22. Determine a dimensão e encontre uma base do espaço-solução do sistema
$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

23. Dê exemplos de dois subespaços do $\mathbb{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. A soma é direta? Justifique sua resposta.

24. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2 e 3, respectivamente. Mostre que a dimensão de $U \cap W$ é pelo menos 1. O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 2 ? Pode ser 3 ? Justifique sua resposta.

25. O conjunto $A = \{(1,0,2), (a^2, a, 0), (1, 0, a)\}$ é uma base para um subespaço do $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 se e somente se $a = 2$.

26. Seja $S = \{X \in M_{3\times 1} : AX = 0\}$ o espaço solução do sistema $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$.
Determine os valores de a para os quais S seja: a própria origem; uma reta que passa pela origem; e, um plano que passa pela origem.

27. Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$, $\beta_2 = \{\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Encontre a matrizes mudança de base:

i. $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ **ii.** $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ **iii.** $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ **iv.** $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.

(b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base

i. β **ii.** β_1 **iii.** β_2 **iv.** β_3.

(c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{u}$ em relação à base β_1 são dadas por $[\mathbf{u}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
Quais as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base: **i.** β **ii.** β_2 **iii.** β_3

28. Sejam $P_4 = \left\{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \diagdown a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\right\}, \alpha = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ e $\beta = \left\{2, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4\right\}$.

(a) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$ ..

(b) Se $[p]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$,determinar $[p]_{\beta}$

(c) Determine o polinômio p cujas coordenadas são dadas no item b) acima.

29. Considere o seguinte subespaço de $M_2 : W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \diagup d = 0 \right\}$. Sejam

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Detemine $[I]^\alpha_\beta$

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

30. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^3$. Determine a base β sabendo que $\alpha = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ e a matriz mudança de base de α para β é

$$[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

31. Seja $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ uma base para um subespaço de $M_{2\times 2}$ e $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ onde β é também uma base para um subespaço de $M_{2\times 2}$

(a) Determine a base β.

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

32. Seja E um espaço vetorial qualquer e $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de E. Considere ainda os vetores $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3$ e $v_3 = -u_2$.

(a) Determine a matriz S de mudança da base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ para a base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $w = v_1 + v_2 - v_3$ na base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

33. Sejam α e β bases de um espaço vetorial V

(a) Mostre que $\det\left([I]^\alpha_\beta \, [I]^\beta_\alpha\right) = 1$

(b) Determine $[I]_\alpha^\alpha$

34. Verifique se as afirmações abaixo são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**. Se forem verdadeiras, demonstre. Se forem falsas, dê um contra-exemplo.

   (a) A interseção de dois subespaços vetoriais nunca é vazia.

   (b) A matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$.

   (c) Se os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI então os vetores $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ são $LI's$.

   (d) $W = [(1,2,0),(2,4,0)]$ é um plano no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

   (e) Se $\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então o conjunto $A = \{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3\}$ é lineramente independente.

   (f) O subespaço $W = \{p \in P_3 : p'(1) = 0 \text{ e } p''(-1) = 0\}$ é gerado pelos polinômios $p_1 = 1$ e $p_2 = -9x + 3x^2 + x^3$.

   (g) O conjunto $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é sempre uma base para o subespaço $[\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3]$.

Capítulo 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição 117 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma Transformação Linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

- *Qualquer que sejam u e v em V ,*

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

- *Qualquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e v em V ,*

$$T(kv) = kT(v)$$

Exemplo 118 *: Um agricultor planta e comercializa três tipos de verduras: Tomate, Batata, Cenoura. Sejam x_1, x_2, x_3 as quantidades em quilos de Tomate, Batata, Cenoura respectivamente. Se o agricultor vende o quilo do tomate a R\$ $2,00$,da batata a R\$ $1,50$ e da cenoura a R\$ $1,90$ então o total de vendas (T_V) é dado por $2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3$. A aplicação que a cada tripla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$associa o total de vendas $T_V(x_1, x_2, x_3)$ é uma aplicação linear. Matematicamente temos uma transformação linear do E.V $\mathbb{R}^3$ no E.V $\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} T_V &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ T_V(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3) \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que de fato esta aplicação é uma transformação linear Chamando $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ temos:

i)

$$\begin{aligned}
T_V(u+v) &= T_V\left((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\right)\\
&= T_V\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right)\\
&= 2(x_1+y_1)+1,5(x_2+y_2)+1,9(x_3+y_3)\\
&= 2x_1+1,5x_2+1,9x_3+2y_1+1,5y_2+1,9y_3\\
&= (2x_1+1,5x_2+1,9x_3)+(2y_1+1,5y_2+1,9y_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_V(u) &= T(x_1,x_2,x_3)=2x_1+1,5x_2+1,9x_3\\
T_V(v) &= T(y_1,y_2,y_3)=2y_1+1,5y_2+1,9y_3\\
T_V(u)+T_V(v) &= (2x_1+1,5x_2+1,9x_3)+(2y_1+1,5y_2+1,9y_3)
\end{aligned}$$

Logo $T_V(u+v)=T_V(u)+T_V(v)$.
ii)

$$\begin{aligned}
T_V(ku) &= T_V(k(x_1,x_2,x_3))\\
&= T_V(kx_1,kx_2,kx_3)\\
&= 2kx_1+1,5kx_2+1,9kx_3\\
&= k\left(2x_1+1,5x_2+1,9x_3\right)\\
&= kT(u)
\end{aligned}$$

Logo $T_V(ku)=kT_V(u)$. De i) e ii) vemos que T_V é uma transformação linear.

Exemplo 119 . *Sejam $V=\mathbb{R}$, $W=\mathbb{R}$ e $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dado $F(u)=u^2$. A aplicação F não é uma transformação linear pois:*

$$\begin{aligned}
F(u+v) &= (u+v)^2=u^2+2uv+v^2\\
F(u)+F(v) &= u^2+v^2\\
F(u+v) &\neq F(u)+F(v)
\end{aligned}$$

Exemplo 120 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(2x,0,x+y)$

T é uma transformação linear pois,
i)

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right)\\
&= T(x_1+x_2,y_1+y_2)\\
&= (2(x_1+x_2),0,(x_1+x_2)+(y_1+y_2))\\
&= (2x_1+2x_2,0+0,(x_1+y_1)+(x_2+y_2))\\
&= (2x_1,0,x_1+y_1)+(2x_2,0,x_2+y_2)\\
&= T(u)+T(v)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} T(ku) &= T\left(k(x_1, y_1)\right) \\ &= T\left(kx_1, ky_1\right) \\ &= (2kx_1, 0, kx_1 + ky_1) \\ &= k\left(2x_1, 0, x_1 + y_1\right) \\ & \quad kT(u) \end{aligned}$$

Portanto T é uma transformação linear.

Exemplo 121 *. $V = W = P_n$ e*

$$\begin{aligned} D &: P_n \to P_{n-1} \\ D(f) &= f' \end{aligned}$$

a aplicação derivada que a cada polinômio associa sua derivada, a qual também é um polinômio é uma aplicação linear. De fato, para quaisquer $f, g \in P_n$ e $k \in \mathbb{R}$,

i)

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' \\ &= f' + g' \\ &= D(f) + D(g) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} D(kf) &= (kf)' \\ &= kf' \\ &= kD(f) \end{aligned}$$

Exemplo 122 $V = P_n, W = P_{n+1}$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$$\begin{aligned} T &: P_n \to P_{n+1} \\ T(p(x)) &= xp(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1} \end{aligned}$$

A aplicação T é uma transformação linear pois

$$\begin{aligned} T(kp) &= x(kp)(x) = xkp(x) = kxp(x) = kT(p) \\ T(p+q) &= x(p+q)(x) = x(p(x)+q(x)) = xp(x) + xq(x) = T(p) + T(q) \end{aligned}$$

Exemplo 123 $V = W = P_n$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ *e*

$$\begin{aligned} T &: P_n \to P_n \\ T(p(x)) &= p(ax+b) = a_0 + a_1\left(ax+b\right) + a_2\left(ax+b\right)^2 + \ldots + a_n\left(ax+b\right)^n \end{aligned}$$

Esta aplicação também é linear pois,

$$\begin{aligned} T(kp) &= (kp)(ax+b) = kp(ax+b) = kT(p) \\ T(p+q) &= (p+q)(ax+b) = p(ax+b)+q(ax+b) = T(p)+T(q) \end{aligned}$$

Exemplo 124 *Uma transformação linear inportante é aquela que se obtém usando-se o produto escalar. Seja* $\mathbb{R}^n$ *com o produto escalar usual* $\langle .,. \rangle$ *e* $v_0 \in \mathbb{R}^n$ *um vetor qualquer fixado. Seja,*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ T(v) &= \langle v, v_0 \rangle \end{aligned}$$

T é uma aplicação linear (mostre isso, use as propriedades do produto escalar)

Exemplo 125 *: Sejam* $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ é contínua}\}$ *. Considere*

$$\begin{aligned} J &: C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ J(f) &= f(0) \end{aligned}$$

Por exemplo se $f(t) = t^2$ *então*

$$J(f) = f(0) = 0^2 = 0$$

J é uma aplicação linear pois, se $f, g \in C(\mathbb{R})$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *então*

$$\begin{aligned} J(f+g) &= (f+g)(0) = f(0)+g(0) = J(f)+J(g) \\ J(kf) &= (kf)(0) = kf(0) = kJ(f) \end{aligned}$$

Exemplo 126 *: Seja,*

$$\begin{aligned} T &: M_2 \to M_2 \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma transformação linear, pois

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & b_1+b_2+c_1+c_2 \\ c_1+c_2+d_1+d_2 & d_1+d_2+a_1+a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ c_1+d_1 & d_1+a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_2+d_2 & d_2+a_1+a_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T\left(k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(k\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} ka+kb & kb+kc \\ kc+kd & kd+ka \end{bmatrix} \\
&= k\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \\
&= kT\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 127 *: Seja,*

$$
\begin{aligned}
T &: M_n \to \mathbb{R} \\
T(A) &= \det(A)
\end{aligned}
$$

Esta aplicação não é uma transformação linear, pois, em geral

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

3.1 Propriedades das Transformações Lineares

Teorema 128 *Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de V. Sejam $w_1, \cdots, w_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma única aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, \cdots, T(v_n) = w_n$. Esta aplicação é dada por: Se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, então*

$$
\begin{aligned}
T(v) &= T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n), \text{ como } T \text{ é linear} \\
T(v) &= a_1T(v_1) + \cdots a_nT(v_n) \\
T(v) &= a_1w_1 + \cdots a_nw_n
\end{aligned}
$$

$a_1, a_{2,\ldots,}a_n$ devem ser determinados.

Exemplo 129 *Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(1,1) = (0,0,1)$?*

Solução: Temos neste caso $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$ base de $\mathbb{R}^2$ e $w_1 = (2,-1,0)$ e $w_2 = (0,0,1)$.

Dado $v = (x,y)$ arbitrário,

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= a(1,0) + b(1,1) \\
(x,y) &= (x-y)(1,0) + y(1,1) \\
T(x,y) &= T\left((x-y)(1,0) + y(1,1)\right) \\
T(x,y) &= (x-y)T(1,0) + yT(1,1) \\
T(x,y) &= (x-y)(2,-1,0) + y(0,0,1) \\
T(x,y) &= (2x-2y, -x+y, y)
\end{aligned}
$$

Exemplo 130 *Qual a transformação linear $T : M_2 \to P_4$ tal que*

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^4 + x \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^3 + x^2 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^2 + x^3 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= x + x^4 \end{aligned}$$

Solução

Uma matriz $A \in M_2$ é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Podemos escrever:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, portanto

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= a\left(x^4 + x\right) + b\left(x^3 + x^2\right) + c\left(x^2 + x^3\right) + d\left(x + x^4\right) \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= (a+d)x + (b+c)x^2 + (b+c)x^3 + (a+d)x^4 \end{aligned}$$

Definição 131 *: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto de vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja*

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \ \ / \ \ T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Observação 132 *Note que* $\mathrm{Im}(T)$ *é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W.*

Exemplo 133 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - y, -10x + y)$. Qual dos vetores abaixo pertence a imagem de T*

a) $u = (1, 2)$
b) $w = (-1, 2)$

Solução: a) Para que $u \in \text{Im}(T)$ deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = u$, ou seja, $T(x, y) = (1, 2)$; temos então:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (1,2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (1,2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{3}{8}$ e $y = -\frac{7}{4}$, logo u pertence a imagem de T pois $T(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{4}) = u$.

b) Analogamente deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = w$, ou seja

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (-1,2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (-1,2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{1}{8}$ e $y = \frac{3}{4}$ logo w pertence a imagem de T pois $T(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}) = w$

Exemplo 134 *Determine a imagem da transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y - z, x - y - z, x + y - z)$.

Solução: Se $w \in \text{Im}(T)$ então $w = T(x, y, z)$, ou seja,

$$\begin{aligned} w &= (2x - y - z, x - y - z, x + y - z) \\ &= x(2,1,1) + y(-1,-1,1) + z(-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Logo todo vetor que pertence a imagem de T é gerado pelos vetores $w_1 = (2, 1, 1), w_2 = (-1, -1, 1)$ e $w_3 = (-1, -1, -1)$. Podemos então escrever que $\text{Im}(T) = [(2, 1, 1),\ (-1, -1, 1),\ (-1, -1, -1)]$.

Como o conjunto $\beta = \{(2, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\}$ é LI (verifique isto) temos que β é uma base para a $\text{Im}(T)$, mas β é base para $\mathbb{R}^3$, logo concluimos que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

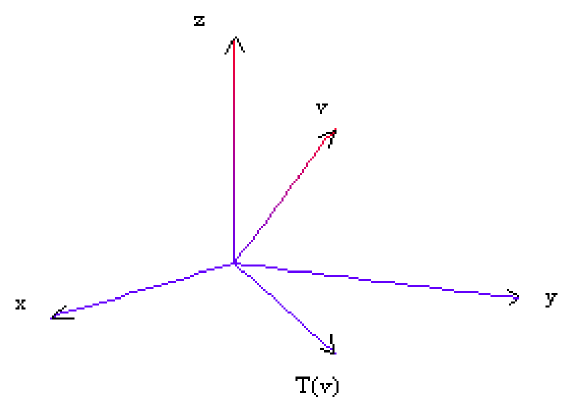
Definição 135 *Seja* $T : V \to W$*, uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores* $v \in V$ *tais que* $T(v) = \overrightarrow{0}$ *é chamado* ***núcleo*** *de* T*, sendo denotado por* $Ker(T)$*. Isto é,*

$$Ker(T) = \left\{ v \in V \ / \ T(v) = \overrightarrow{0} \right\}$$

Observação 136 *Observe que* $Ker(T) \subset V$ *é um subconjunto de* V *e, ainda mais, é um subespaço vetorial de* V*. Alguns autores denotam o núcleo de* T *por* $N(T)$*.*

Exemplo 137 *Seja $T : V \to W$, dada por $T(v) = \overrightarrow{0}$. Neste caso todo vetor de V é levado no vetor nulo pela transformação T, assim temos que $Ker(T) = V$*

Exemplo 138 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano xy. Neste caso temos $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$. Como nada é dito sobre a variável z, temos que z é qualquer, logo $Ker(T) = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z \in \mathbb{R}\right\}$, ou seja o núcleo de T são todos os vetores que estão sobre o eixo z.*



Exemplo 139 *Encontre o núcleo da transformação linear:*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z, t) &= (x + y + z - t, 2x + z - t, 2y - t) \end{aligned}$$

Solução: Devemos encontrar os vetores $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que $T(v) = T(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$. Neste caso temos que resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$p_a = p_c = 3$ e $p = 3 < n = 4$ logo o sistema é compatível e indeterminado com grau de liberdade 1.

Logo,

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ -2y-z+t=0 \\ -z=0 \end{cases}$$

o que nos fornece,

$$\begin{aligned} x &= y \\ z &= 0 \\ t &= 2y \end{aligned}$$

Portanto $Ker(T) = \left\{(y, y, 0, 2y) \ \in \mathbb{R}^4 \diagup \ y \in \mathbb{R}\right\} = [(1,1,0,2)]$

Exemplo 140 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que é a projeção ortogonal sobre a reta cujas equações paramétricas são:*

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

Encontre o Núcleo de T.

Solução: Projetar um vetor sobre uma reta é o mesmo que encontrar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor dessa mesma reta. No nosso caso, o vetor diretor é $u = (2, -2, 1)$, logo

$$\begin{aligned} T(v) &= proj_u v = \left(\frac{v.u}{u.u}\right) u \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{(x,y,z).(2,-2,1)}{(2,-2,1).(2,-2,1)}\right)(2,-2,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{2x-2y+z}{9}\right)(2,-2,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{4x-4y+2z}{9}, \frac{-4x+4y-2z}{9}, \frac{2x-2y+z}{9}\right) \end{aligned}$$

Para encontrar o núcleo devemos ter,

$$T(x,y,z) = \left(\frac{4x-4y+2z}{9}, \frac{-4x+4y-2z}{9}, \frac{2x-2y+z}{9}\right) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 4x-4y+2z &= 0 \\ -4x+4y-2z &= 0 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, fazendo o escalonamento temos $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, assim

$$\begin{aligned} 4x - 4y + 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z &= -4x + 4y \\ z &= -2x + 2y \end{aligned}$$

Portanto $Ker(T) = \left\{(x, y, -2x + 2y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \in \mathbb{R}\right\} = [(1, 0, -2), (0, 1, 2)]$

Definição 141 *Dada uma aplicação $T : V \to W$, diremos que T é* ***injetora*** *se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.*

Definição 142 *Uma aplicação $T : V \to W$ será* ***sobrejetora*** *se a imagem de T coincidir com W, ou seja, $T(V) = W$.*

Observação 143 *Da definição acima vemos que uma função será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.*

Teorema 144 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. então $\ker(T) = \{0\}$, se e somente se T é injetora.*

Proof. *a) Vamos mostrar que se T é injetora, então $\ker(T) = \{0\}$*

Seja $v \in Ker(T) \Rightarrow T(v) = 0$. Por outro lado, como T é linear tem-se que $T(0) = 0$.Logo, $T(v) = T(0)$. Como por hipótese T é injetora então $v = 0$. Portanto, o vetor nulo é o único elemento do núcleo, isto é, $\ker(T) = \{0\}$.

b) Vamos mostrar que se $\ker(T) = \{0\}$, então T é injetora.

Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Então $T(v_1) - T(v_2) = 0$ ou $T(v_1 - v_2) = 0$ e, portanto, $v_1 - v_2 \in \ker(T)$. Mas por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor nulo, logo $v_1 - v_2 = 0$ e portanto $v_1 = v_2$. Como $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$, T é injetora. ■

Teorema 145 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. Então*

$$\dim Ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V$$

Corolário 146 *Se $\dim V = \dim W$, então a transformação linear $T : V \to W$ é injetora se e somente se T é sobrejetora.*

Proof. *Exercício.* ■

Corolário 147 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.*

Proof. *Exercício.* ■

Exemplo 148 *Seja $T : P_n \to P_{n+1}$, dada por $T(p(x)) = xp(x)$. Verifique se T é bijetora.*

Solução: Devemos verificar se T é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Usando o teorema (144) devemos apenas calcular o núcleo de T :

$$
\begin{aligned}
T(p(x)) &= xp(x) \\
T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= x(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \\
T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= (a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1})
\end{aligned}
$$

Se

$$
\begin{aligned}
T(p(x)) &= 0 \\
a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1} &= 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^{n+1}
\end{aligned}
$$

logo $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ ($p(x)$ é o polinômio nulo) $\Rightarrow Ker(T) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ (observe que neste caso o vetor nulo de P_n é o polinômio nulo de grau n). Portanto T é injetora.

Como $\dim P_n = n + 1$, $\dim P_{n+1} = n + 2$ e $\dim Ker(T) = 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
\dim Ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) &= n + 1 \\
0 + \dim \operatorname{Im}(T) &= n + 1 \\
\dim \operatorname{Im}(T) &= n + 1
\end{aligned}
$$

Note que $\dim \operatorname{Im}(T) = n+1 \neq n+2 = \dim P_{n+1} \Rightarrow \operatorname{Im}(T) \neq P_{n+1}$. Portanto T não é sobrejetora e assim T não é bijetora

3.2 Transformações Lineares e Matrizes

3.2.1 Transformação linear associada a uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Associada a matriz A definimos a transformação linear:

$$
\begin{aligned}
L_A : \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\
& v \to A.v
\end{aligned}
$$

onde v é tomado como vetor coluna,

$$
v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

$$\begin{aligned}
L_A(v) &= A.v \\
L_A(v) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
L_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Das propriedades de operações de matrizes:

$$\begin{aligned}
L_A(u+v) &= A.(u+v) = A.u + A.v = L_A(u) + L_A(v) \\
L_A(ku) &= A.(ku) = kA.u = kL_A(u)
\end{aligned}$$

e portanto L_A é uma transformação linear.

Exemplo 149 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A tem ordem 3×4 e portanto ela induzirá uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$\begin{aligned}
L_A &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\
L_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x+y+z-t \\ 2x+z-t \\ 2y-t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Note que a transformação acima está escrita em forma matricial, mas podemos escreve-la também na forma vetorial que estamos acostumados:

$$L_A(x,y,z,t) = (x+y+z-t, 2x+z-t, 2y-t)$$

Surpresa!! Esta é a mesma transformação do exemplo (139)

Exemplo 150 *Dada a transformação linear:*

$$\begin{aligned}
T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\
T(x,y,z) &= (10x-20y-30z, x-2y-3z)
\end{aligned}$$

Encontre a matriz da transformação T (Isto é, encontre a matriz A cuja transformação associada a ela é exatamente a transformação T)

Solução: Passando da forma vetorial para a forma matricial temos:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 10x-20y-30z \\ x-2y-3z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto a matriz de T, que denotaremos por $[T]$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação 151 *Ao obtermos a transformação associada a uma matriz A (ou, caso contrário, a matriz de uma transformação T), não mencionamos as bases dos espaços envolvidos. De fato, ao obtermos a matriz de uma transformação estamos levando em conta as bases associadas aos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ mas neste caso em particular estamos considerando as bases canônicas. Isto ficará claro na exposição a seguir.*

De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$, à matriz

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

podemos associar

$$\begin{aligned} T_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ &v \to T_A(v) \end{aligned}$$

da seguinte maneira: Seja

$$X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A.X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

então

$$T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$$

onde $y_i = A_i.X$ e A_i é a i-ésima linha de A.

Em geral, dada uma matriz $A_{m\times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

3.2.2 Matriz de uma transformação linear

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \to W$ linear, $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W. Então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{array}{ccccccc} T(v_1) & = & a_{11}w_1 & + & \cdots & + & a_{m1}w_m \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ T(v_n) & & a_{1n}w_1 & + & \cdots & + & a_{mn}w_m \end{array}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^{\beta}_{\beta'}$ é chamada matriz de T em relação às bases β e β' :

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação 152 *Note que se* $A = [T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *a transformação linear T passa a ser a transformação linear associada à matriz A e bases β e β', iste é, $T = T_A$*

Exemplo 153 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.*

Sejam $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.
Procuremos $[T]^{\beta}_{\beta'}$
$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$

$$\begin{array}{rcl} T(1,1,1) & = & (2,5) = a(1,3) + b(1,4) \\ T(1,1,0) & = & (3,1) = c(1,3) + d(1,4) \\ T(1,0,0) & = & (2,3) = e(1,3) + f(1,4) \end{array}$$

Portanto temos os sistemas:

$$\left[\left\{ \begin{array}{c} a + b = 2 \\ 3a + 4b = 5 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{c} c + d = 3 \\ 3c + 4d = 1 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{c} e + f = 2 \\ 3e + 4f = 3 \end{array} \right. \right]$$

Resolvendo os sistemas temos:

$$\left[a = 3 \quad b = -1 \quad , \quad c = 11 \quad , \quad d = -8 \quad e = 5 \quad f = -3 \right]$$

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 154 *: Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:*

$$[T(v)]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [v]_{\alpha}$$

Definição 155 *Dada uma base β e tranformação linear $T : V \to V$ denotaremos a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$ apenas por $[T]_{\beta}$ e ela será chamada de matriz de T em relação a base β.*

Definição 156 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e α a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então a matriz de T em relação a base canônica α, $[T]^{\alpha}_{\alpha}$, será denotada simplesmente por $[T]$.*

Exemplo 157 *Seja $T : P_2 \to P_2$ definido por $T(p(x)) = p(3x - 5)$. Determine a matriz de T em relação a base $\beta = \{1, x, x^2\}$*

Devemos calcular $[T]_{\beta} = [T]^{\beta}_{\beta}$

$$\begin{aligned} T(p) &= p(3x-5) \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + a_1(3x-5) + a_2(3x-5)^2 \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + 3a_1x - 5a_1 + a_2(9x^2 - 30x + 25) \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= (a_0 - 5a_1 + 25a_2) + (3a_1 - 30a_2)x + 9a_2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= T(1 + 0x + 0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 \\ T(x) &= T(0 + 1x + 0x^2) = -5 + 3x = -5 + 3x + 0x^2 \\ T(x^2) &= T(0 + 0x + 1x^2) = 25 - 30x + 9x^2 \end{aligned}$$

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 158 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2x - 3y - 2z, x - y - z, 2x - y + z)$ e sejam $\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ e $\beta = \{(-1,-1,0), (-1,0,-1), (0,-1,-1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$*

a) Determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$, $[T]_{\alpha}^{\beta}$

b) Se $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ determine $[T(v)]_{\beta}$.

c) Calcule a multiplicação das matrizes: $[T]_{\beta}^{\alpha} . [T]_{\alpha}^{\beta}$. Que conclusão você pode tirar em relação as duas matrizes, ou que relação há entre as duas matrizes?

Solução: a) Cálculo de $[T]_{\beta}^{\alpha}$

$$T(x, y, z) = (2x - 3y - 2z, x - y - z, 2x - y + z)$$

$T(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \end{pmatrix} = a_1(-1, -1, 0) + b_1(-1, 0, -1) + c_1(0, -1, -1)$
$T(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \end{pmatrix} = a_2(-1, -1, 0) + b_2(-1, 0, -1) + c_2(0, -1, -1)$
$T(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 2 \end{pmatrix} = a_3(-1, -1, 0) + b_3(-1, 0, -1) + c_3(0, -1, -1)$

Devemos resolver os tres sistemas resultantes: Denotando por A a matriz dos coeficientes do sistema,temos:

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Vamos resolver os sistemas por matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora voce já está em condições de calcular $[T]_{\alpha}^{\beta}$. Faça esse cálculo como exercício

b) Vamos usar a relação $[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} . [v]_{\alpha}$

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\beta} &= [T]_{\beta}^{\alpha} . [v]_{\alpha} \\ [T(v)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [T(v)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Faça você este item e tire suas conclusões. Mais adiante voce poderá verificar se suas conclusões estavam corretas.

Teorema 159 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W, respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(T) &= \textit{posto de } [T]_{\beta}^{\alpha} \\ \dim Ker(T) &= \textit{nulidade de } [T]_{\beta}^{\alpha} = \textit{número de colunas de } [T]_{\beta}^{\alpha} - \textit{posto}\, [T]_{\beta}^{\alpha} \end{aligned}$$

Exemplo 160 *Seja $T : P_2 \to M(2,2)$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p^{'}(0) & 2p(1) \\ 0 & p^{''}(3) \end{bmatrix}$ onde $p^{'}$ é a derivada de p. Sejam $.\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base para $M(2,2)$ e $\beta = \{1, x, x^2\}$ base para P_2.*

a) Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$.
b) Determine uma base para $N(T)$.
c) Determine uma base para $\operatorname{Im}(T)$.
d) T é injetora? E sobrejetora? Justifique.
SOLUÇÃO:
a)

$$\begin{aligned} \text{Note que } T(a + bx + cx^2) &= \begin{bmatrix} b & 2a + 2b + 2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \\ \text{Determinando } [T]_{\alpha}^{\beta} &: \\ T(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T(x^2) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Logo, } [T]_{\alpha}^{\beta} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Seja } p(x) &\in N(T) \Rightarrow T(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b & 2a + 2b + 2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0 \\ \text{Logo, } p(x) &= 0 + 0x + 0x^2 \in N(T) \Rightarrow N(T) = \{0\} \end{aligned}$$

c) Seja $A \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Portanto,

$\mathrm{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right]$

Como os geradores da $\mathrm{Im}(T)$ formam um conjunto $L.I.$ (Verifique!) tem-se que

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

d) T é injetora pois $N(T) = \{0\}$, mas não é sobrejetora pois $\dim \mathrm{Im}(T) = 3 \neq \dim M(2,2)$

3.3 Composição de transformações lineares

Definição 161 *Se $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ são duas transformações lineares a composta das duas transformações lineares é definida do mesmo modo que a composição de funcões (lembre-se que um transformação linear é uma função com a propriedade adicional de ser linear) da seguinte forma*

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 &: V \to U \\ (T_2 \circ T_1)(v) &= T_2(T_1(v)) \end{aligned}$$

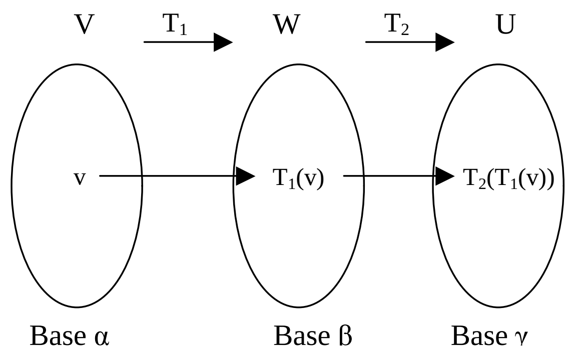
Exemplo 162 *Se $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x,y) = (x-y, y-x, y-x)$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T_2(x,y,z) = x-y-z$ então $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e*

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x,y) &= T_2(T_1(x,y)) \\ &= T_2(x-y, y-x, y-x) \\ &= (x-y) - (y-x) - (y-x) \\ &= x-y-y+x-y+x \\ &= 3x-3y \end{aligned}$$

Teorema 163 *Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ transformações lineares e α, β, γ bases de V, W, U respectivamente. Então a composta de T_2 com $T_1, T_2 \circ T_1 : V \to U$ é linear e*

$$[T_2 \circ T_1]^\alpha_\gamma = [T_2]^\beta_\gamma \cdot [T_1]^\alpha_\beta$$

Proof.



■

Proposição 164 *Seja $T: V \to W$ uma transformação linear . Sejam α e α' bases de V e β e β' bases de W. Então vale a relação:*

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I_W \circ T \circ I_V]_{\beta'}^{\alpha'} = [I_W]_{\beta'}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} [I_V]_{\alpha}^{\alpha'}$$

onde I_W e I_V são as aplicações identidades de W e V respectivamente.

3.4 A Inversa de uma transformação linear

Definição 165 *Dá-se o nome de **isomorfismo** a uma transformação linear $T: V \to W$ que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Quando há um isomorfismo entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são **Isomorfos.***

Definição 166 *Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Se existe uma transformação linear $S: W \to V$ tal que $T \circ S = I_W$, onde $I_W: W \to W$ é a identidade em W, dizemos que S é a inversa a direita de T. Se existe uma transformação $R: W \to V$, tal que $R \circ T = I_V$, onde $I_V: V \to V$ é a identidade em V, dizemos que R é a inversa a esquerda de T.*

Definição 167 *Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Se existe uma aplicação $T^{-1}: W \to V$, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$ então dizemos que T é inversível e que T^{-1} é a inversa de T*

Proposição 168 *Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Se existe a inversa de T, T^{-1}, então T^{-1} é uma transformação linear*

Proposição 169 *Se $T: V \to W$ é um isomomorfismo, então T é inversível e além disso T^{-1} também é um isomorfismo.*

Proposição 170 *Se $T: V \to W$ uma transformação linear invertível (T é um isomorfismo) e α e β são bases de V e W, então:*

$$\left[T^{-1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}$$

Observação: Quando estamos trabalhando com o espaço $\mathbb{R}^n$ e a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por simplicidade omitimos as bases e a matriz de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,em relação a base canônica, é denotada simplesmente por $[T]$. Neste caso a proposição acima é escrita na forma mais conveniente: "Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é inversível então $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$"

Proposição 171 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, com* $\dim V = \dim W$, *e α e β bases de V e W respectivamente. Então T é inversível se, e somente se det* $[T]_{\beta}^{\alpha} \neq 0$.

Observação 172 *Se na proposição acima tivermos $V = W = \mathbb{R}^n$ podemos escrever: Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, então T é invertível se* $\det [T] \neq 0$

Exemplo 173 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por* $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + 3z, x + 2y + z)$, *determine a transformação inversa T^{-1}.*

Solução: Facilmente podemos ver que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[T^{-1}\right] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo $T^{-1}(x, y, z) = (-5x + 2y + 4z, 2x - y - z, x - z)$. Como exercício verifique que vale $\left(T \circ T^{-1}\right)(x, y, z) = (x, y, z)$

Podemos também neste caso calcular a inversa usando diretamente a difinição de transformação inversa da seguinte forma

Sabemos que $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T^{-1} \circ T = I$ ou $T \circ T^{-1} = I$. Suponhamos que $T^{-1}(x, y, z) = (m, n, s)$, devemos encontrar m, n e s tais que $T \circ T^{-1} = I$ (devemos usar esta igualdade pois com a outra não funciona, tente e veja o que acontece). Portanto

$$\begin{aligned} \left(T \circ T^{-1}\right)(x, y, z) &= I(x, y, z) = (x, y, z) \\ T(T^{-1}(x, y, z)) &= (x, y, z) \\ T(m, n, s) &= (x, y, z) \\ (m + 2n + 2s, m + n + 3s, m + 2n + s) &= (x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m + 2n + 2s &= x \\ m + n + 3s &= y \\ m + 2n + s &= z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & x\\ 1 & 1 & 3 & y\\ 1 & 2 & 1 & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}escalonando\\ \Longrightarrow\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & x\\ 0 & 1 & -1 & x-y\\ 0 & 0 & 1 & x-z\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s &= x-z\\ n &= x-y+x-z = 2x-y-z\\ m &= x-2(2x-y-z)-2(x-z) = -5x+2y+4z \end{aligned}$$

Logo

$$T^{-1}(x,y,z) = (-5x+2y+4z, 2x-y-z, x-z)$$

Exemplo 174 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2T}$ *(*M_{2T} *é o espaço das matrizes triangulares superiores) definida por* $T(1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $T(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ *e* $T(1,-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. *Encontre a inversa da transformação* T.

Solução: Sabemos que:

$$T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = (1,1,0),\ T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} = (0,1,-1) \text{ e } T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = (1,-1,1)$$

e, seja

$$\begin{bmatrix} x & y\\ 0 & z\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a+b = x\\ a+b-c = y\\ 2b+c = z\end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & | & x\\ 1 & 1 & -1 & | & y\\ 0 & 2 & 1 & | & z\end{bmatrix}$$

realizando o escalonamento da matriz encontramos:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & \frac{3x-y-z}{2}\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-x+y+z}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & x-y\end{bmatrix}$$

Agora, procedendo as substituições, obtemos:

$$\begin{aligned} T^{-1}\begin{bmatrix} x & y\\ 0 & z\end{bmatrix} &= \left(\frac{3x-y-z}{2}\right)T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} + (x-y)\,T^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ T^{-1}\begin{bmatrix} x & y\\ 0 & z\end{bmatrix} &= \left(\frac{3x-y-z}{2}\right)(1,1,0) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)(0,1,-1) + (x-y)\,(1,-1,1)\\ T^{-1}\begin{bmatrix} x & y\\ 0 & z\end{bmatrix} &= \left(\frac{5x-3y-z}{2}, -y, \frac{3x-3y-z}{2}\right), \text{ que é a transformação procurada.} \end{aligned}$$

Matricialmente, temos:

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.5 Quarta lista de exercícios

1. Verifique se as funções dadas abaixo são transformações lineares. Em cada caso, justifique sua afirmação:

   (a) $T : \Re^4 \to \Re^3$ dada por $T(x,y,z,t) = (x+y, 0, z+t)$

   (b) $L : \Re^2 \to \Re$ dada por $L(x,y) = xy$

   (c) $S : M(2,2) \to \Re^2$, $S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, 0)$

   (d) $G : M(5,5) \to M(5,5)$, $G(A) = AB + I_5$, onde $B = diag(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ é uma matriz diagonal e I_5 é a matriz identidade de ordem 5.

   (e) $F : P_2 \to P_2$ tal que $F(p) = p + q$, $p \in P_2$ e $q(t) = t^2 + 1$, $t \in \Re$

   (f) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x,y) = (x+y, x-y)$

   (g) $T : M(2,2) \to \mathbb{R}$ dada por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   (h) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; T(x) = |x|$.

   (i) $T : M_2 \to P_1, \;\; T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + dt$

   (j) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S(x,y,z) = (3x, a, 5z)$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

   (k) $T : P_n \to P_n$ tal que $T(p(x)) = p^{'}(x) + x^2 p^{''}(x)$

2. Seja $T : P_2 \to P_2$ um operador linear tal que
   $T(p_0)(t) = 1+t, \quad T(p_1)(t) = t+t^2, \quad T(p_2)(t) = 1+t-2t^2$ onde $p_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$.

   (a) Encontre $T(p)$

   (b) T é injetora? Justifique sua resposta.

   (c) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

   (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

3. a) Encontre a transformação $T : \Re^2 \to M(2,2)$ tal que
   $T(-1,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T(0,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   b) Usando a transformação T encontrada no item a) , calcule $T(1000, 999)$

   c) A transformação é bijetora? Justifique sua resposta.

4. Seja $T : \Re^3 \to \Re^3$ uma transformação linear definida por $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,2)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

(a) $N(T)$

(b) $N(T) \cap \operatorname{Im}(T)$

(c) $N(T) + \operatorname{Im}(T)$

5. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\Re^2$ e $\Re^3$, respectivamente e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) Encontre a transformação linear T.

   (b) Enconte uma base para $Ker(T)$ e uma base para $\operatorname{Im}(T)$.

   (c) Encontre uma base γ de $\Re^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Encontre a transformação linear $T : \Re^2 \to \Re^2$ que é a projeção sobre a reta dada por $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$

   Determine $\dim \operatorname{Im}(t)$ e dim $Ker(T)$. T é inversível ? Se for, determine T^{-1}.

7. Considere o operador linear em $\Re^3$ tal que $T(1,0,0) = (1,1,1)$, $T(0,0,1) = (1,0,1)$, $T(0,1,2) = (0,0,4)$.

   T é isomorfismo? Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

8. Considere a transformação linear $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1) = (1,0,1)$, $T(x + x^2) = (1,2,-2)$ e $T(1-x) = (0,-1,1)$. Encontre T^{-1}.

9. Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação definida por $T(p(x)) = xp(x-3)$. Encontre $[T]^{\gamma}_{\beta}$ em relação às bases $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\gamma = \{1, x, x^2\}$.

10. Encontre a transformação linear $T : \Re^3 \to \Re^3$ cujo núcleo é gerado por $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ e a imagem gerada pelo vetor $(1,-1,1)$.

11. Encontre a transformação linear $T : \Re^4 \to \Re^4$ cujo núcleo é gerado por $(1,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$.

12. Mostre que se a matriz transformação $[T]$ é inversível então $N(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

13. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear tal que $T(w) = T(u) + T(v)$ então $w = u + v$?

14. Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear $T : P_2 \to M_2$ satisfazendo **simultaneamente** as seguintes condições:

(i) o elemento $p(x) = 1 + x^2$ pertence ao $N(T)$;

(ii) o elemento $q(x) = 1 - x + x^2$ não pertence ao $N(T)$;

(iii) o elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ pertence à $\mathrm{Im}(T)$.

15. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

    (a) Mostre que o núcleo de T é um subespaço de V.

    (b) Mostre que a imagem de T é um subespaço de W.

16. Seja $T : P_2 \to P_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp^{'}(x)$

    (a) Quais dos seguintes polinômios pertencem ao $N(T)$?

    i. 2

    ii. x^2

    iii. $1 - x$

    (b) Quais dos polinômios do item a) pertencem a $\mathrm{Im}(T)$?

    (c) Descreva $N(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

17. Quando possível, dê exemplos de transformações lineares satisfazendo:

    (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim N(T) = 1$

    (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$

    (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \{(0, 0, 0)\}$

    (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \Re^3 : z = -x\}$

    (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; y = 2x - z\right\}$.

18. Seja $T : P_3 \to P_2$ definida por $T(p) = p^{'}$. Determine a matriz T em relação às bases $\alpha = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}$ e $\beta = \left\{1, 1 + t, -1 + t^2\right\}$, isto é, $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

19. Mostre que se uma transfomação linear é injetora então $N(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

20. Seja β a base canônica de M_2. Se $T : M_2 \to P_3$ é dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b + c)x + (c - d)x^2 + dx^3$

    (a) Encontre $[T]^{\beta}_{\alpha}$ onde $\alpha = \left\{2, 2 + x, 2 + x^2, 2 + x^3\right\}$ é base de P_3

    (b) Faça o escalonamento da matriz $[T]^{\beta}_{\alpha}$

    (c) Detemine $\dim Ker(T)$

    (d) Determine $\dim \mathrm{Im}(T)$.

21. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é inversível então:

(a) $\dim N(A) =$ ______

(b) $\dim \mathrm{Im}(T) =$ ______

22. Determine $\dim N(T)$ sabendo que:

    (a) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^8$ com $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$;

    (b) $T : V \to W$ com T sobrejetiva, $\dim V = 5$, $\dim W = 3$;

    (c) $T : V \to W$ com T injetiva;

    (d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sabendo que existe a inversa de T.

23. Explique em cada caso abaixo porque **não** existe uma transformação linear:

    (a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a origem;

    (b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ que seja sobrejetiva;

    (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetiva;

    (d) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ tal que $\dim N(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$;

    (e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ com $N(T) = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [(1,1,2),(2,2,4)]$.

24. Responda as seguintes questões:

    (a) Se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ é uma transformação linear, podemos ter dim $\mathrm{Im}(T) > 6$? Justifique sua resposta

    (b) Existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (2,2)$ e $T(2,2) = (3,1)$? Justifique sua resposta.

    (c) A transformação $T : P_1 \to P_2$ definida por $T(p(t)) = tp(t) + p(0)p'(1)$ é linear?

    (d) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}3$ é um operador linear e se a imagem de T é um plano que passa pela origem, que tipo de objeto geométrico é o núcleo de T ?

25. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre os vetores u e v tais que

    (a) $T(u) = 2u$

    (b) $T(v) = -v$

26. Sejam $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares dadas por $F(x,y,z) = (x+y, z+y, z)$ e $G(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$.

    (a) Determine $F \circ G$

    (b) Determine uma base para $N(F \circ G)$

    (c) Determine uma base para $\mathrm{Im}(F \circ G)$

(d) $F \circ G$ é isomorfismo? Justifique sua resposta.

27. Seja $T : \Re^3 \to \Re^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Mostre que $(T^2 - I)\circ\, (T^2 - 9I) = 0$.

28. Sejam R, S, T tres transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Se

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

encontre T tal que $R = S \circ T$.

29. Sejam as transformações lineares $S : P_1 \to P_2$ e $T : P_2 \to P_1$ definidas por

$$\begin{aligned} S(a + bx) &= a + (a + b)x + 2bx^2 \\ T(a + bx + cx^2) &= b + 2cx \end{aligned}$$

(a) Determine $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$

(b) É possível calcular $(T \circ S)(a + bx)$? Em caso afirmativo calcule $(T \circ S)(\pi + \pi x)$.

30. Considere o operador $T : P_2 \to P_2$ definida por $T(p(x)) = p'(x) + p(x)$ e a transformação linear $S : P_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $S(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b)$.

(a) Verifique se S é isomorfismo. Se for, determine S^{-1}.

(b) Determine uma base para $N(S \circ T)$ e uma base para $\mathrm{Im}(S \circ T)$.

(c) Seja $\beta = \{1+x, x-x^2, 1\}$ uma base de P_2 e $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$. Determine $[S \circ T]^{\beta}_{\alpha}$.

31. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to M_2$ definida por $T(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & a + b \\ b + c & d \end{bmatrix}$ e a transformação linear $S : M_2 \to M_2$ definida por $S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - c & c - b \\ b & a + d \end{bmatrix}$.Verifique se $S \circ T$ é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $(S \circ T)^{-1}$.

Capítulo 4

OPERADORES LINEARES

Definição 175 *Uma transformação linear $T : V \to V$ é chamada de operador linear.*

Observação 176 *Todas as propriedades já vistas para transformações lineares em geral vale para um operador linear*

4.1 Transformações especiais no plano e no espaço

Os operadores lineares que veremos a seguir são chamados de transformações especiais do plano e do espaço por serem bastantes usados em aplicações práticas e também em aplicações numéricas.

Transformações no Plano

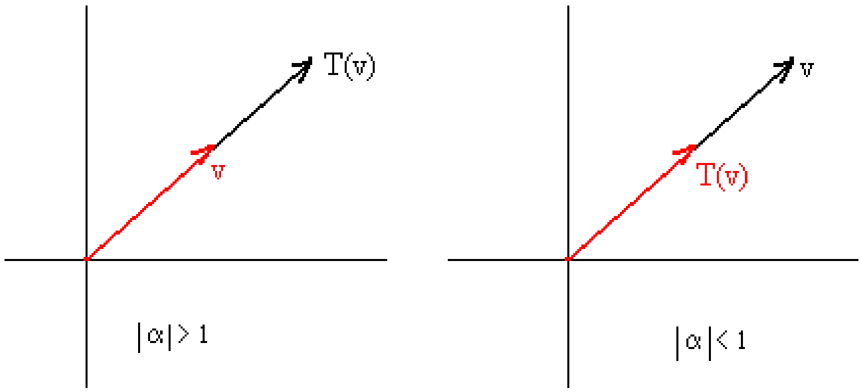
a) Dilatação ou contração

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= \alpha(x,y) \end{aligned}$$

Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor
Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor
Se $\alpha = 1$, T é a identidade
Se $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor
Se $\alpha > 0$, T mantém o mesmo sentido do vetor
Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente, para $\alpha > 0$ temos:



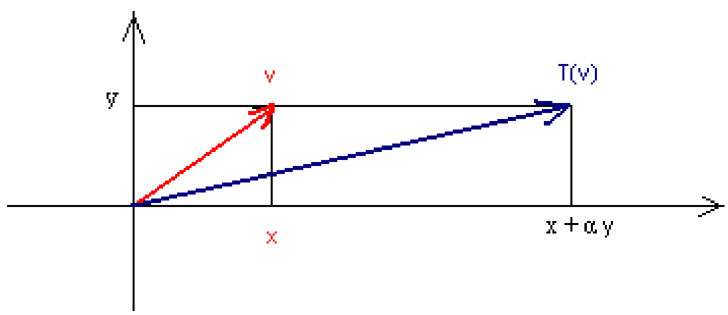
b) Cisalhamento na direção do eixo dos x

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) \quad &= \quad (x + \alpha y, y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



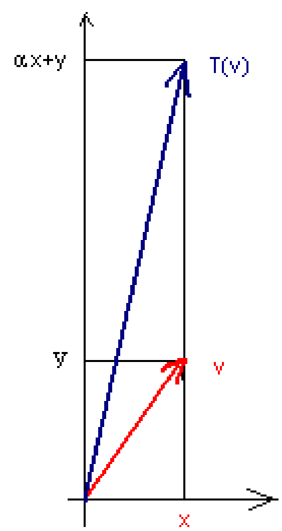
c) Cisalhamento na direção do eixo dos y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (x, \alpha x + y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



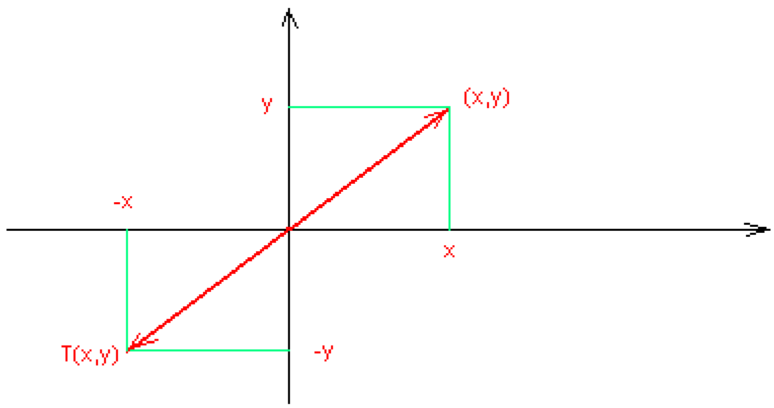
d) Reflexão na origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (-x, -y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

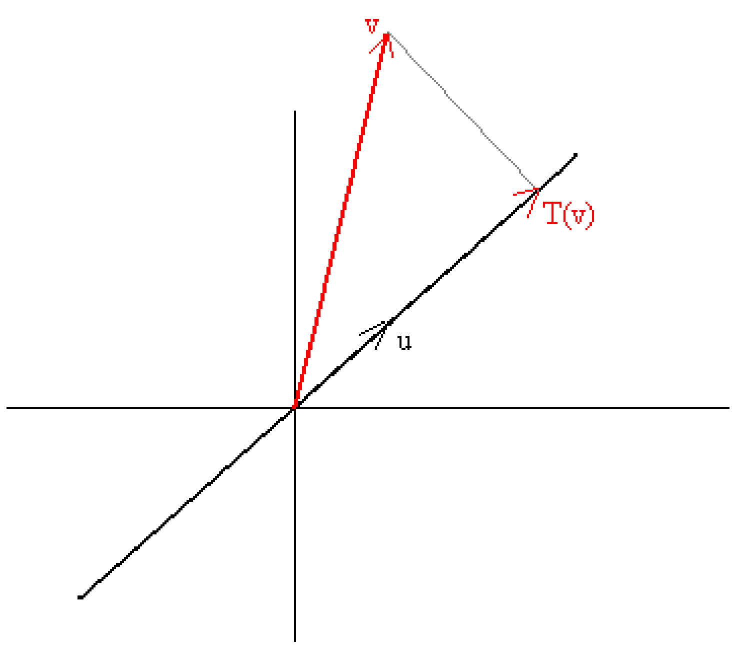
Geometricamente:



Observação 177 *Observe que este é um caso particular da contração quando* $\alpha = -1$

e) Projeção sobre uma reta no plano

Definição 178 *Definimos como sendo Projeção sobre uma reta* r*, que passa pela origem, no plano o operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $T(v) = proj_u v$*, onde* u *é o vetor diretor da reta* r*.*



Definição 179 ***Exemplo 180*** *Determinar o operdor linear que a projeção sobre a reta* $y = -6x$

A reta $y = -6x$ pode ser parametrizada por

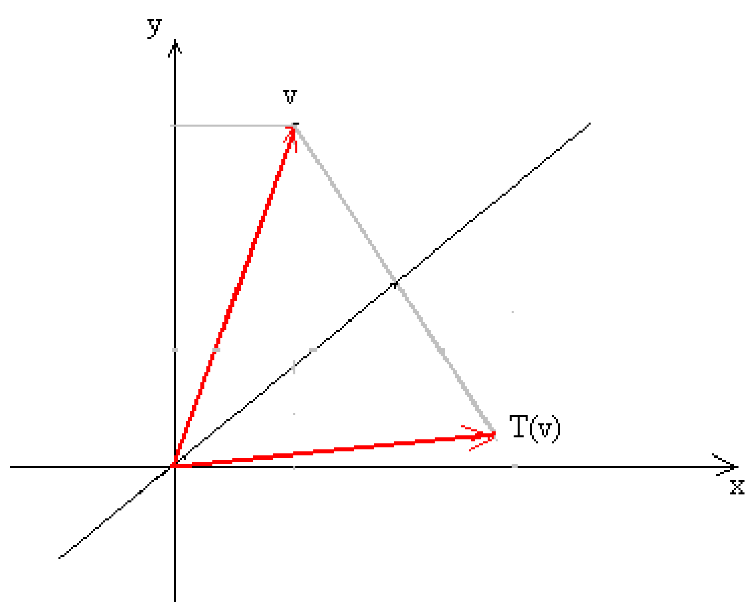
$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -6t \end{aligned}$$

logo um vetor diretor da reta é $u = (1, -6)$.

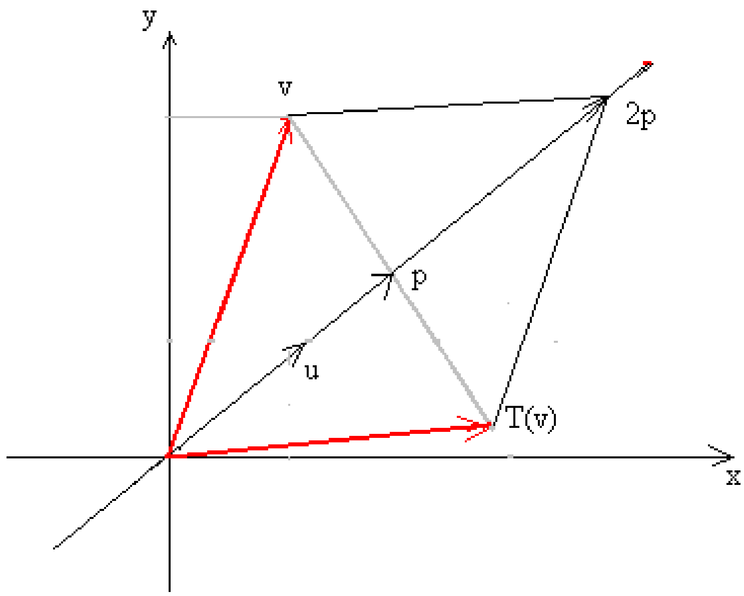
$$\begin{aligned} T(v) &= proj_u v \\ T(v) &= \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) u \\ T(x,y) &= \left(\frac{(1,-6) \bullet (x,y)}{(1,-6) \bullet (1,-6)}\right)(1,-6) \\ T(x,y) &= \left(\frac{x-6y}{37}, \frac{-6x+36y}{37}\right) \end{aligned}$$

f) Reflexão através de uma reta no plano

Definição 181 *Definimos como sendo Reflexão através da reta r, que passa pela origem, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $|T(v)| = |v|$ e $proj_u v = proj_u T(v)$ onde u é o vetor diretor da reta r.*



Para obter a expressão pata a traformação T , considere a figura abaixo que representa a reflexão em torno de uma reta no plano onde estão mostrados o vetor diretor diretor, u , da reta, o vetor p, a projeção de v na direção do vetor u,e o vetor $T(v)$.



Da definição de reflexão podemos observar que

$$\begin{aligned} T(v)+v &= 2p \\ T(v) &= 2p-v \\ T(v) &= 2proj_u v - v \end{aligned}$$

Portanto a reflexão em torno de uma reta no plano é dada por

$$T(v) = 2proj_u v - v$$

onde $proj_u v$ é a projeção do vetor v na direção do vetor u

Casos Particulares

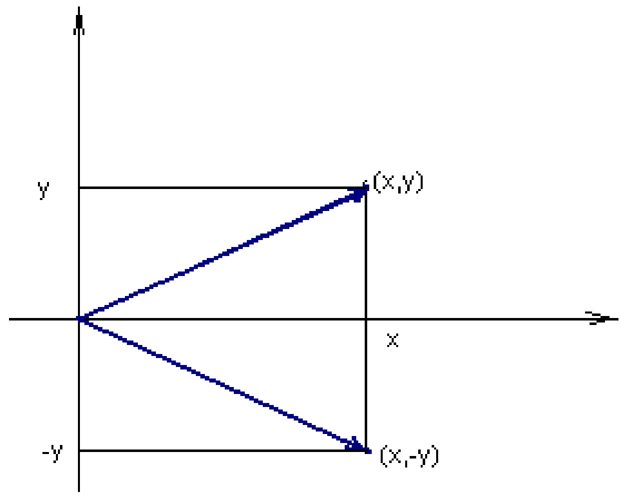
f.1) Reflexão em torno do eixo dos x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (x,-y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



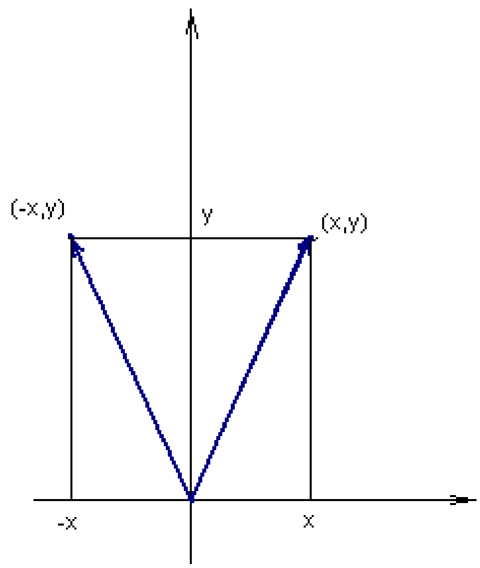
f.2) Reflexão em torno do eixo dos y

$$
\begin{aligned}
T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
T(x,y) &= (-x,y)
\end{aligned}
$$

Matricialmente

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

Geometricamente:



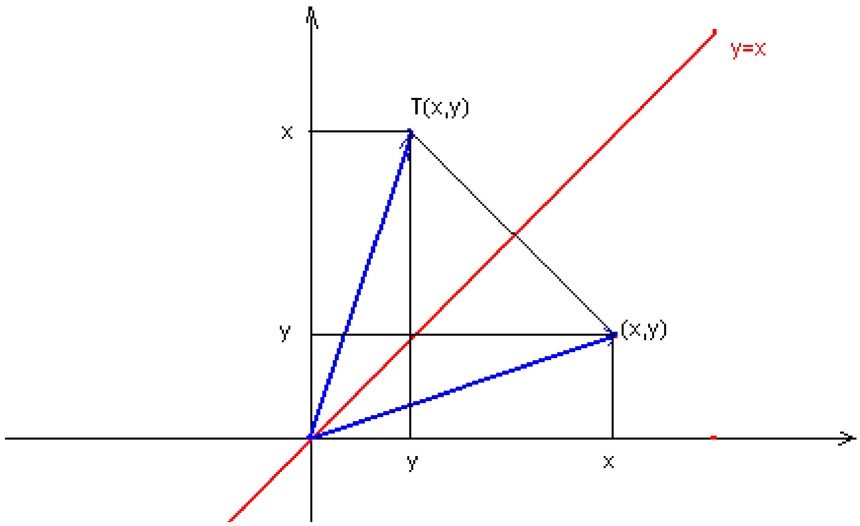
f.3) Reflexão em torno da reta $y = x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (y,x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



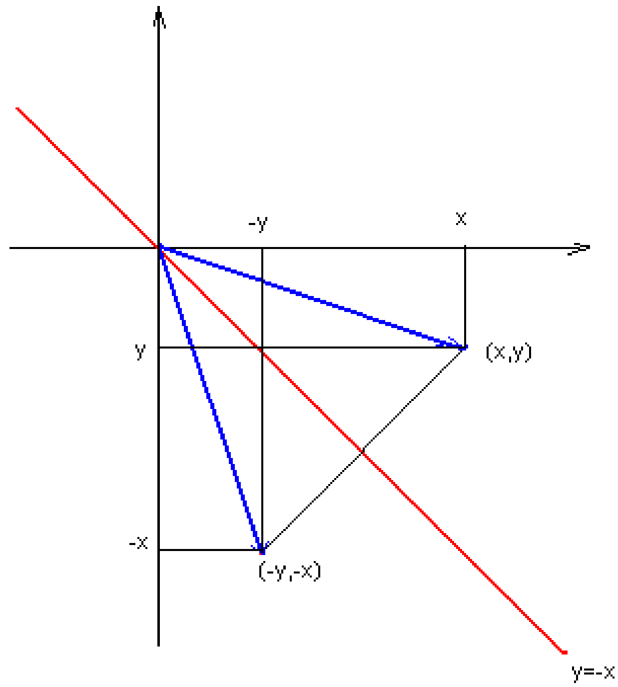
f.4) Reflexão em torno da reta $y = -x$

$$\begin{array}{rcl} T & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) & = & (-y,-x) \end{array}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

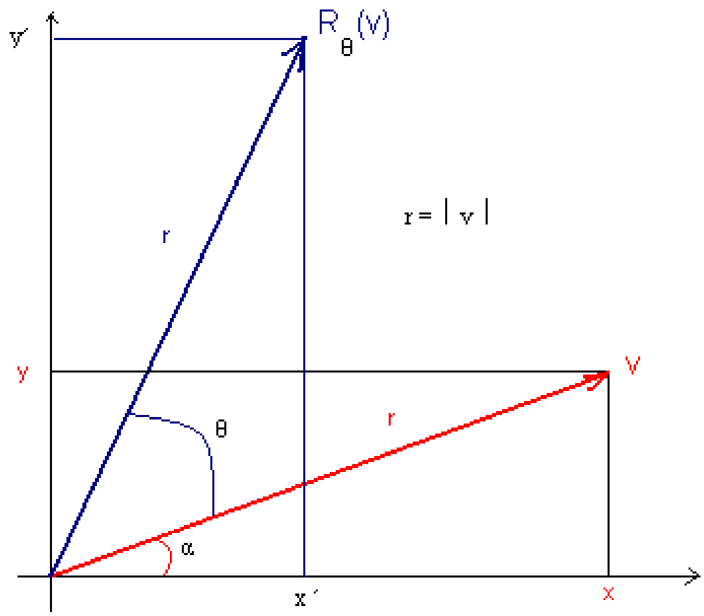
Geometricamente:



g) Rotação de um ângulo θ

Definimos Rotação no plano de um ângulo θ a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $|T(v)| = |v|$ e o ângulo entre os vetores $T(v)$ e v é θ.

Geometricamente



Vamos agora determinar a matriz da transformação linear rotação de um ângulo θ e a expressão de R_θ em função de x e y. Seja

$$\begin{aligned} R_\theta &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ R_\theta(x,y) &= (x',y') \end{aligned}$$

Quando rotacionamos um vetor, pela própria definição de rotação, o comprimento (módulo) do vetor não se altera. Seja $r = |v|$, onde $v = (x, y)$.

Da figura acima e usando relações trigonométricas temos;

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

Mas

$$\begin{aligned} r\cos\alpha &= x \\ r\sin\alpha &= y \end{aligned}$$

então

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

Analogamente

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta + x\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Assim

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Matricialmente
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Podemos ver neste caso que matriz de uma rotação é:

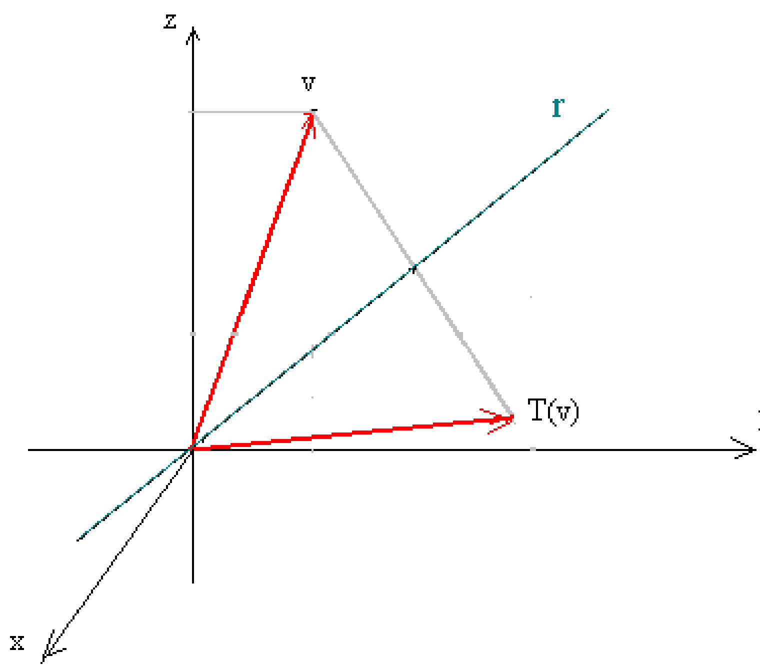
$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Transformações no Espaço

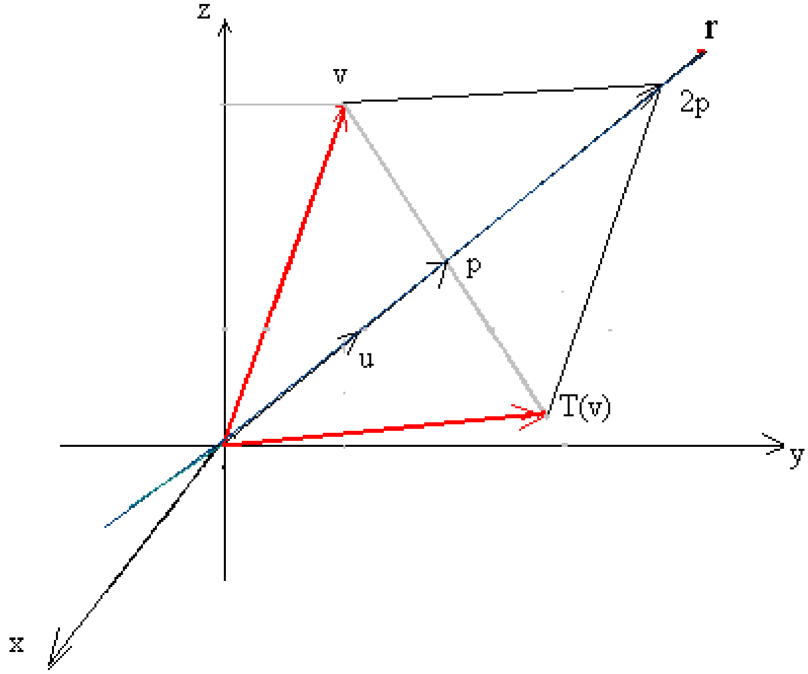
a) Reflexão através de uma reta no espaço

Definição 182 *Definimos como sendo Reflexão através da reta r, que passa pela origem, no espaço a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|T(v)| = |v|$ e $proj_u v = proj_u T(v)$ onde u é o vetor diretor da reta r.*

Geometricamente



Para obter a expressão pata a traformação T , considere a figura abaixo que representa a reflexão em torno de uma reta no plano onde estão mostrados o vetor diretor diretor, u , da reta, o vetor p, a projeção de v na direção do vetor u,e o vetor $T(v)$.



Da definição de reflexão podemos observar que

$$
\begin{aligned}
T(v) + v &= 2p \\
T(v) &= 2p - v \\
T(v) &= 2proj_u v - v
\end{aligned}
$$

Portanto a reflexão em torno de uma reta no espaço é dada por

$$T(v) = 2p - v$$

ond $p = proj_u v$ é a projeção do vetor v na direção do vetor u

Casos Particulares: Reflexão em relação aos eixos coordenados

a.1) Reflexão através do eixo x

$$
\begin{aligned}
T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\
T(x, y, z) &= (x, -y, -z)
\end{aligned}
$$

Matricialmente

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

a.2) Reflexão através do eixo y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a.3) Reflexão através do eixo z

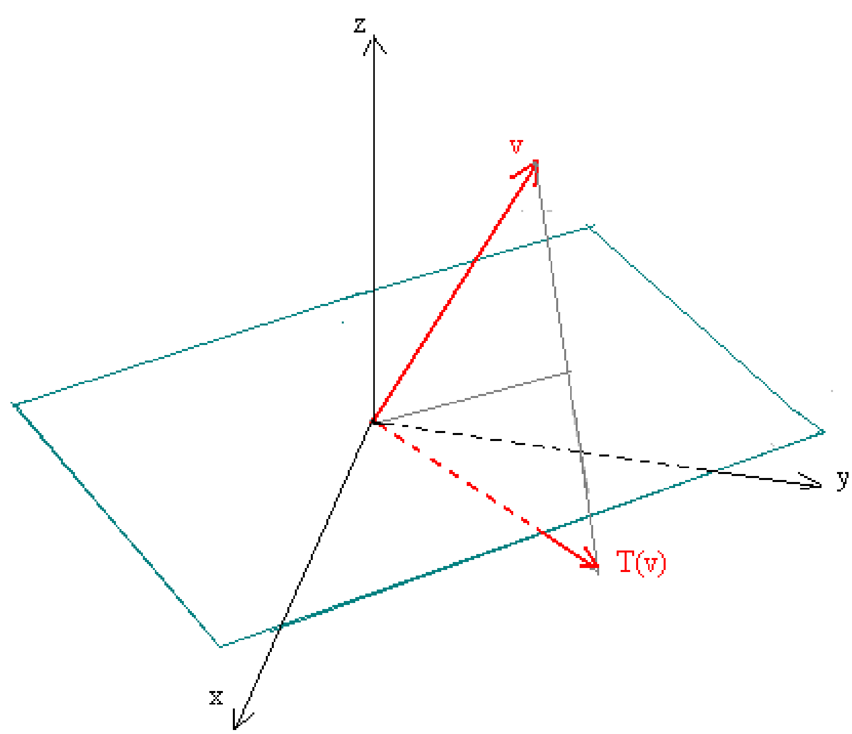
$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,-y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente

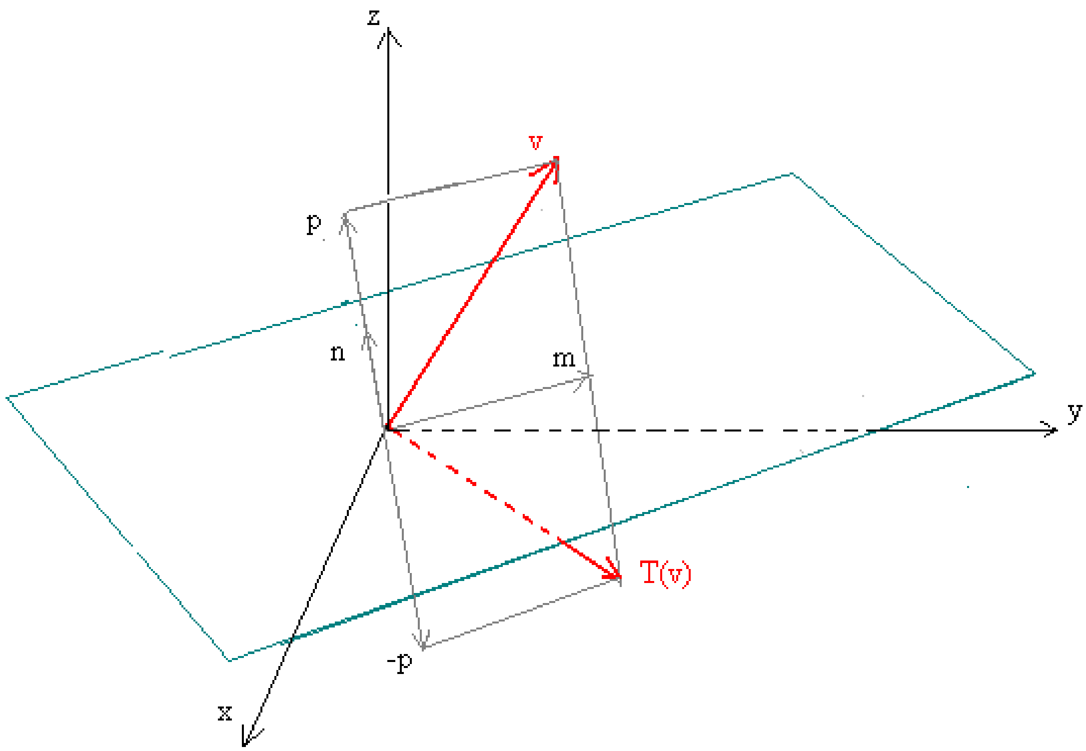
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) Reflexão através de um plano

Definição 183 *Definimos Reflexão através de um plano, que passa pela origem, no espaço ao operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $|T(v)| = |v|$ *e* $proj_n v = -proj_n T(v)$, *onde* n *o vetor normal do plano.*



Para obter a expressão para a transformação T , considere a figura abaixo que representa a reflexão em torno de um plano no espaço onde estão mostrados o vetor normal do plano, vetor n , o vetor projeção de v na direção do vetor n, vetor p, o vetor projeção sobre o plano, vetor m, e o vetor $T(v)$.



Da definição de Reflexão através de uma plano podemos deduzir que

$$\begin{cases} p + m = v \\ m - p = T(v) \end{cases}$$

Portanto

$$T(v) = v - 2p$$

onde $p = proj_n v$ é a projeção de v na direção do vetor normal n do plano.

Casos particulares: Reflexão através dos planos coordenados

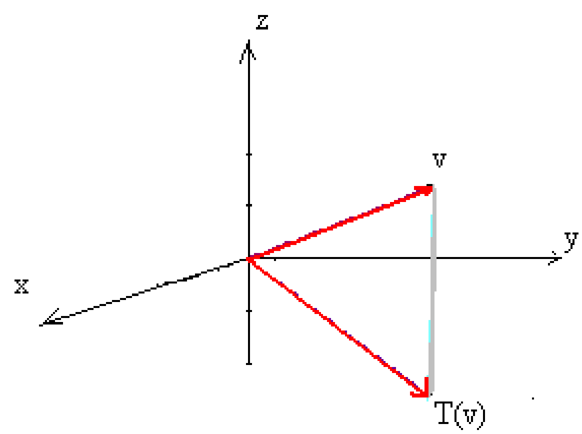
b.1) Reflexão através do plano xy

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (x, y, -z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



b.2) Reflexão através do plano xz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (x,-y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

b.3) Reflexão através do plano yz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

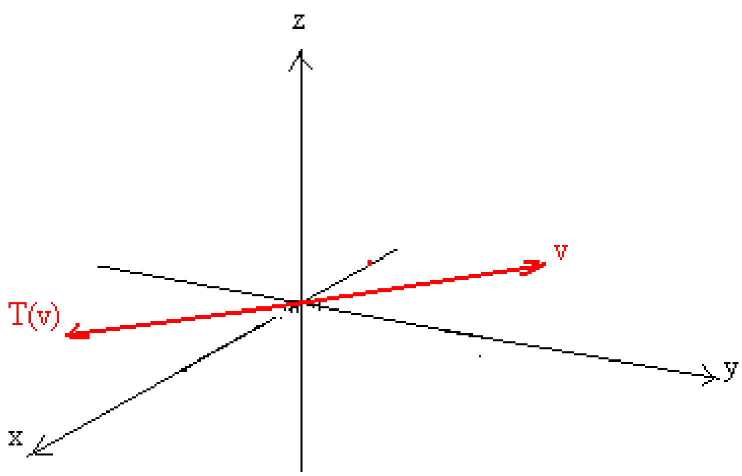
c) Reflexão no origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,-y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

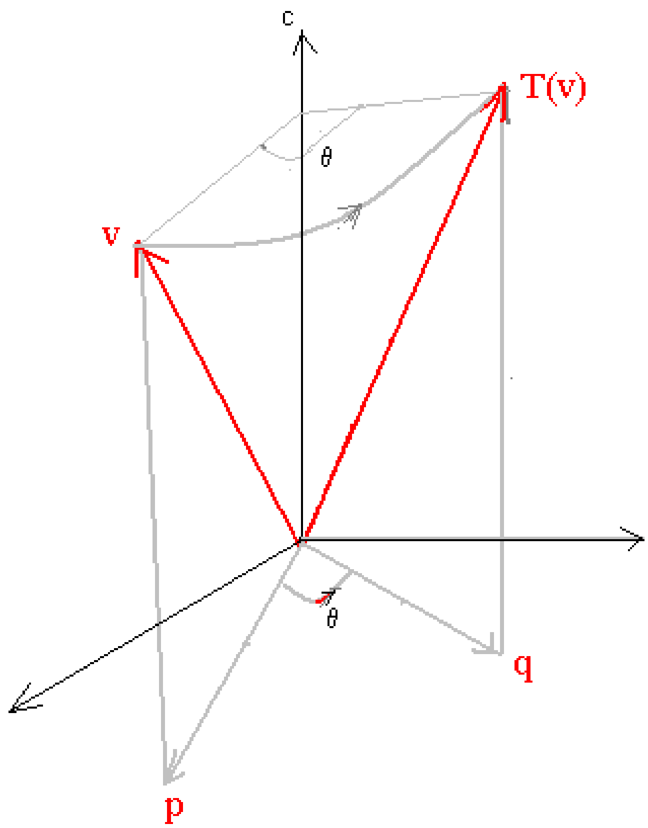
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



d) Rotação no Espaço.

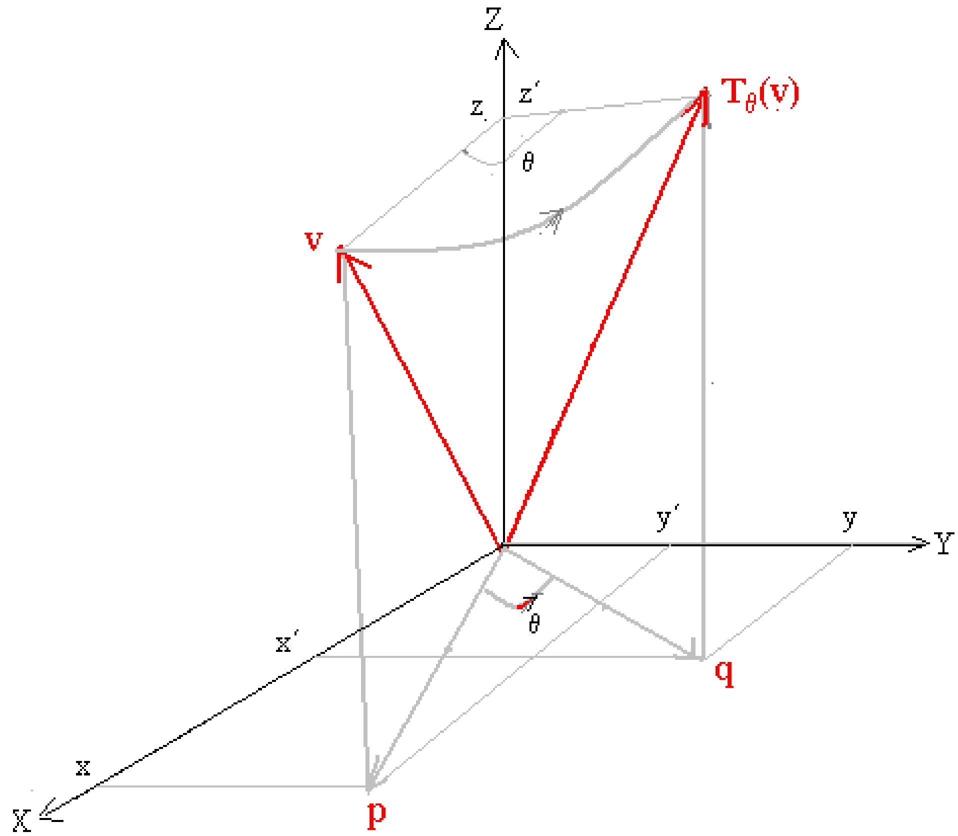
Definição 184 *Definimos Rotação de um ângulo θ em torno de um eixo coordenado c ao operador linear $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|T_\theta(v)| = |v|$ e o ângulo entre a projeção de v no plano ortogonal a c e a projeção de $T_\theta(v)$ no plano ortogonal a c é o ângulo θ medido no sentido anti-horário a partir da projeção de v no plano ortogonal a c.*



d.1) Rotação em torno do eixo z

Para obter a expressão da transformação que é uma rotação em torno do eixo z vamos considerar:

$$
\begin{aligned}
p &= \text{projeção de } v \text{ no plano } xy \\
q &= \text{projeção de } T(v) \text{ no plano xy}
\end{aligned}
$$



$$T_\theta(x, y, z) = (x', y', z')$$

Observe que $z' = z$

Como $|T(v)| = |v|$ então $|p| = |q|$. Além disso o vetor q é obtido pela rotação do vetor p no plano xy por um ângulo θ, ou seja, $q = R_\theta(p)$. Como já visto em rotação no plano (item g) de Transformações no plano) temos que

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Portanto

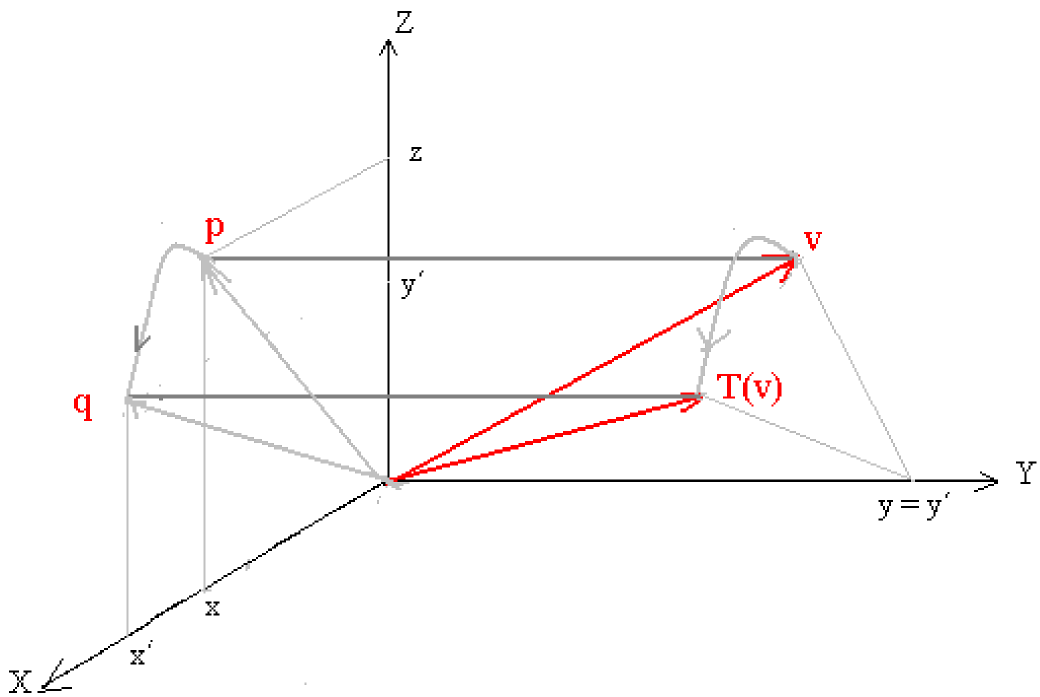
$$\begin{aligned} T_\theta &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T_\theta(x, y, z) &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

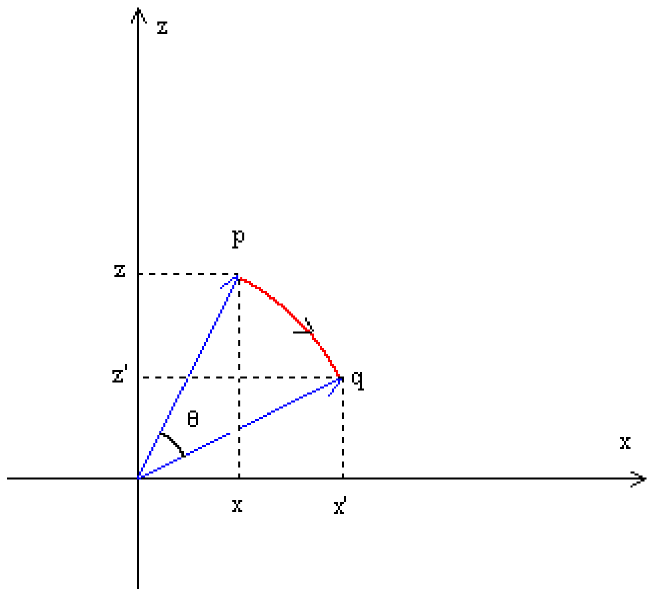
$$[T_\theta]_Z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.2) Rotação em torno do eixo y



$$T_\theta(x, y, z) = (x', y', z')$$

Como a rotação é em torno do eixo y temos $y' = y$. No plano xz vemos que o vetor q é obtido a partir do vetor p pela rotação do ângulo θ no **SENTIDO HORÁRIO.**



Portanto podemos considerar o vetor p obtido a partir do vetor q por uma rotação no sentido anti-horário, ou seja, $R_\theta(p) = q$. Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + z\sin\theta \\ z' &= z\cos\theta - x\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_\theta(x, y, z) &= (x', y', z') \\ T_\theta(x, y, z) &= (x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta) \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$[T_\theta]_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

d.3) Rotação em torno do eixo x

A matriz da Rotação em torno do eixo x é dada por

$$[T_\theta]_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Exemplo 185 *Determinar o ângulo formado entre v e $T(v)$ quando o vetor $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ gira em torno do eixo z de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad*

Solução:

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'$$

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'$$

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'$$

Como desejamos o ângulo entre v e $T(v)$,vamos usar a fórmula do cosseno do ângulo entre dois vetores:

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot T(v)}{|v|\,|T(v)|} = \frac{1}{2}$$

Portanto o ângulo entre v e $T(v)$ é $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

4.2 Propriedades dos operadores inversíveis

Definição 186 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existir um operador $T^{-1} : V \to V$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (neste caso $I : V \to V$ é a identidade em V) então dizemos que o operador T é inversível e T^{-1} é o operador inverso de T.*

Observação 187 *Um operador é inversível se, e somente se, ele é um isomorfismo*

Seja $T : V \to V$ um operador linear:

I) Se T é inversível e T^{-1} sua inversa, então $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$

II) O operador T é inversível se, e somente se, $Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

III) O operador T é inversível se, e somente se, $\det[T] \neq 0$

IV) Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V então $\beta = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é base de V.

Se T é inversível e β uma base de V então $T^{-1} : V \to V$ é linear $\left[T^{-1}\right]_{\beta}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\beta}\right)^{-1}$. Quando β é a base canônica temos a forma mais simples $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$ e portanto $\left[T^{-1}\right] \cdot [T]^{-1} = \left[T^{-1} \circ T\right] = [I]$. Com isso vemos que T é inversível se e somente se $\det[T] \neq 0$.

Exemplo 188 *Considere o operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por*

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

verifique se T é inversível e em caso afirmativo encontre T^{-1}

Solução: Como $det\,[R_\theta] = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$, temos que R_θ é inversível. Como $\left[R_\theta^{-1}\right] = [R_\theta]^{-1}$, basta calcular a inversa da matriz deR_θ

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} & \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\ -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} & \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Note que $[R_\theta]^{-1} = [R_\theta]^T$, ou seja, $[R_\theta]$ é uma matriz ortogonal, logo $R_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ y\cos\theta - x\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^{-1}(x, y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta - x\sin\theta)$$

Exemplo 189 *Seja T o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é a projeção ortogonal do vetor $v = (x, y, z)$ na direção da reta dada pela interseção dos planos $y = x$ e $z = y$. Verifique se T é inversível e em caso afirmativo determine T^{-1}.*

Solução: Para determinar a projeção na direção da reta basta determinar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor da reta. Devemos inicialmente determinar o vetor diretor da reta:

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \end{cases}$$

Para obter a equações paramétricas fazemos $x = t$, logo

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

portando o vetor diretor da reta é $u = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
T(v) &= proj_u v = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\right) u \\
T(x, y, z) &= \left(\frac{(x, y, z) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}\right) (1, 1, 1) \\
T(x, y, z) &= \left(\frac{x + y + z}{3}\right) (1, 1, 1) \\
T(x, y, z) &= \left(\frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$\det [T] = 0$$

Como $\det [T] = 0$ temos que T não é inversível.

Exemplo 190 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma rotação de $\frac{\pi}{4}rad$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma reflexão em torno da reta $y = -2x$. Determine a transformação $R = S \circ T$.*

Solução

$$\begin{aligned}
R &= S \circ T \\
[R] &= [S] [T]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \\
[T] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(v) &= 2p - v \\
S(x, y) &= 2\left(\frac{(x, y) \cdot (1, -2)}{(1, -2) \cdot (1, -2)}\right) (1, -2) - (x, y) \\
S(x, y) &= \left(\frac{-3x - 4y}{5}, \frac{-4x + 3y}{5}\right)
\end{aligned}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [R] &= [S]\,[T] \\ [R] &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ [R] &= \begin{bmatrix} -\frac{7}{10}\sqrt{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{2} & \frac{7}{10}\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R(x,y) = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}x - \frac{\sqrt{2}}{10}y, -\frac{\sqrt{2}}{10}x + \frac{7\sqrt{2}}{10}y \right)$$

4.3 Operadores autoadjuntos e ortogonais

Definição 191 *Seja $V = \mathbb{R}^n$. Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V é* ***ortonormal*** *se para todos os vetores de β tem-se:*

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Definição 192 *Seja $V = \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial com produto escalar definido, α uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear. Então:*

a) T é chamado um *operador auto-adjunto* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica
b) T é chamado um *operador ortogonal* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal

Portanto podemos dizer que um operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *operador auto-adjunto se* $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz simétrica. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *operador ortogonal se* $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz ortogonal.

Exemplo 193 *Consideremos a transformação* $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z.*

$$T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

A matriz da transformação T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esta é uma matriz ortogonal, T é um operador ortogonal

Exemplo 194 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *onde* $T(x, .y) = (2x-2y, -2x+5y)$. *A matriz de* T *é*

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de T *é simétrica, então* T *é um operador auto-adjunto.*

Teorema 195 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linear. Se* T *é um operador auto-adjunto então*

$$T(v) \cdot w = v \cdot T(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 196 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações*

a) T é ortogonal

b) T preserva o produto escalar, isto é, $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w, \ \forall v, w \in \mathbb{R}$

c) T preserva o módulo, isto é, $|T(v)| = |v|$

d) T transforma bases ortonornais em bases ortonormais. Isto é, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonornal então $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base ortonornal

4.4 Quinta lista de exercícios

1. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que os vetores $u = (1, 2, 0)$ e $v = (0, 1, -1)$ pertençam ao núcleo de T e que $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$

2. Seja $T : M_2 \to M_2$ definida por $T(A) = AB - BA$, onde $B_{2\times 2}$ é uma matriz fixa.

   (a) Mostre que T é um operador linear.

   (b) Sabendo que $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, encontre uma base para $N(T)$ e uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

3. Seja T a reflexão no origem dada por

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) \quad &= \quad (-x, -y, -z) \end{aligned}$$

   Determine a inversa T^{-1} da transformação T.

4. Defina operador simétrico e operador ortogonal. Dê um exemplo para cada um dos casos, justificando sua escolha.

5. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $A = G \circ L$ onde G é a rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y e L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z.. Determine a matriz de A em relação a base canônica , isto é, determine $[A]$. O operador A é ortogonal? E auto-adjunto?

6. Determine a transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão da reta $y = -x$,seguida de uma dilatação de fator 2 na direção ox e, um cisalhamento de fator 3 na direção vertical.

7. Usando inversão matricial mostre o seguinte:

   (a) A transformação inversa de uma reflexão em torno da reta $y = x$ é a reflexão em torno da reta $y = x$.

   (b) A transformação inversa de uma reflexão em torno de um eixo coordenado é a reflexão em torno daquele eixo.

8. a) Encontre a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = 6x$.

   b) Escreva-a em forma matricial.

9. No plano, uma rotação anti-horária de 45^0 é seguida por uma dilatação de $\sqrt{3}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

10. Analise se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma rotação de um ângulo θ (em sentido anti-horário) em torno da origem, seguida de uma dilatação de fator 3 então T^{-1} é uma contração de fator $\frac{1}{3}$ seguida de uma rotação de um ângulo $-\theta$ em torno da origem".

11. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela rotação de $\frac{\pi}{6}$ (sentido anti-horário) seguida de uma reflexão através da reta $y = 2x$. A seguir, faça um esboço da Im(T) se a transformação T for aplicada ao retângulo de vértices $(0,0),(1,0),(1,2)$ e $(0,2)$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a projeção de vetor v no plano $x+y+z = 0$. Encontre $T(x,y,z)$.

13. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $x + y + z = 0$. Encontre $L(x,y,z)$.

14. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y. Encontre $A(x,y,z)$.

15. Seja A é uma matriz de ordem n fixada. Seja $T : M_n \to M_n$ definida por $T(N) = AN - NA$. Mostre que T não é inversível.

16. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup y = 2x - z\right\}$

17. Determine se a transformação $T(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ é uma transformação auto-adjunta ou ortogonal. Justifique sua resposta.

18. O operador linear $T(x,y,z) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}z, y, \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}z)$ é a rotação de um ângulo θ em torno do eixo y. Determine o valor do ângulo θ.

19. Considere o triângulo de vértices $(1,1)$, $(-3,-3)$ e $(2,-1)$. Determine a ima-gem de T aplicada sobre este triângulo segundo uma rotação anti-horária de 60°. Faça um desenho da Imagem.

20. Seja o operador $T : P_3 \to P_3$ definido por $T(p) = x^3 p(\frac{1}{x})$:
    (a) Mostre T é inversível.
    (b) Calcule a inversa T^{-1} do operador T

21. Seja $T : M(2,2) \to M(2,2)$ um operador linear tal que $T(A) = A + A^T$. Verifique se o operador T é inversível.

Capítulo 5

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dado um operador linear $T : V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$. Neste caso $T(v)$ será um vetor de mesma direção que v. Por vetor de mesma direção estaremos entendendo vetores sobre a mesma reta suporte. Como $v = \overrightarrow{0}$ satisfaz a equação para todo λ, estaremos interessados em determinar vetores $v \neq \overrightarrow{0}$ satisfazendo a condição acima.

Definição 197 *Seja $T : V \to V$, um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq \overrightarrow{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v é um autovetor de T associado a λ.*

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo.

Exemplo 198 *$T : V \to V$ dado por $T(v) = kv$, onde k é uma constante*

Neste caso todo vetor de V é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = k$

Exemplo 199

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{(Reflexão no eixo x)} \\ & T(x,y) = (x,-y) \end{aligned}$$

Neste caso observamos que os vetores que serão levados em múltiplos dele mesmo serão os vetores que estão no eixo x, pois $v = (x,0) \Rightarrow T(v) = T(x,0) = (x,0) = v$. Os vetores que estão no eixo y também são levados em múltiplos de si mesmo pois estes vetores tem a forma $w = (0,y) \Rightarrow T(w) = T(0,y) = (0,-y) = -1(0,y)$. Podemos concluir então que os vetores do tipo $v = (x,0)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ e os vetores da forma $w = (0,y)$ são autovetores associados a $\lambda_2 = -1$, da tranformação linear reflexão no eixo x.

Exemplo 200

$$R_{\frac{\pi}{2}}: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{(Rotação de um ângulo } \tfrac{\pi}{2}\textit{)}$$
$$R_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = (-y,x)$$

Observe que na rotação de $\frac{\pi}{2}$ nenhum vetor é levado em um múltiplo de si mesmo, a direção de todos vetores de $\mathbb{R}^2$ são alterados pela rotação. Portanto a rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ não possui autovetores e autovalores.

Teorema 201 *Dada uma transformação linear* $T: V \to V$ *e um autovetor* v *associado a um autovalor* λ*, qualquer vetor* $w = \alpha v$ $(\alpha \neq 0)$ *também é um autovetor de* T *associado a* λ*.*

Observação 202 *Note que se um vetor* v *é autovetor de uma transformação* T *associado ao autovalor* λ *então todos os múltiplos de* v *também serão autovetores associados a* λ*. O Conjunto formado por todos os autovetores associados a um mesmo autovalor é um conjunto infinito.*

Teorema 203 *Seja* $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um operador auto-adjunto e* λ_1, λ_2 *autovalores distintos de* T *e* v_1 *e* v_2 *os autovetores associados a* λ_1 *e* λ_2*, respectivamente. Então* v_1 *é perpendicular a* v_2*.*

Definição 204 *O subespaço* $V_\lambda = \{v \in V \diagup T(v) = \lambda v\}$ *é chamado o subespaço associado ao autovalor* λ*.*

Como vimos na nota acima o conjunto V_λ contém todos os autovetores de T associados ao autovalor λ, contém também o vetor nulo $\overrightarrow{0}$ de V já que o vetor $\overrightarrow{0}$ satifaz a relação $T(\overrightarrow{0}) = \lambda\overrightarrow{0}$. O conjunto V_λ pode ser escrito como V_λ $= \{$Todos os autovetores de T associados a $\lambda\} \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

5.1 Autovalores e autovetores de uma matriz

Agora vamos obter uma forma de calcular os autovalores e autovetores de uma transformação usando sua matriz em relação as bases canônicas. Inicialmente definiremos autovalores e autovetores de uma matriz A.

Dada uma matriz quadrada, A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A o autovalor e autovetor da transformação $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é $T_A(v) = A \cdot v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq \overrightarrow{0}$.

5.1.1 Polinômio Característico.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar os autovalores e autovetores de A, devemos resolver a equação:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av &= \lambda I v \\ Av - \lambda I v &= \overrightarrow{0} \\ (A - \lambda I)v &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Escrevendo esta equação explicitamente,temos

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$B = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn}-\lambda \end{bmatrix}$$

temos o sistema

$$B \cdot v = \overrightarrow{0}$$

Este sistema é um sistema homogêneo e possui ao menos a solução $v = \overrightarrow{0}$. Mas como estamos procurando autovetores, queremos encontrar vetores $v \neq \overrightarrow{0}$ que satisfaçam a equação $B \cdot v = \overrightarrow{0}$. Sendo assim queremos que o sistema $B \cdot v = \overrightarrow{0}$ seja compatível e indeterminado (tenha além da solução trivial, outras soluções não triviais). Pela regra de Cramer se $\det B = 0$ então o sistema homogêneo terá infinitas soluções. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores v (soluções não nulas da equação $B \cdot v = \overrightarrow{0}$) é termos $\det B = 0$, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn}-\lambda \end{vmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n.

Definição 205 *O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado polinômio característico da matriz A*

Observe que as raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz A. Note também que o autovalor pode ser o número zero (quando o polinômio característico tem raízes zero), embora o autovetor v associado a λ não possa ser o vetor nulo.

Exemplo 206 *Vamos agora calcular os autovetores e autovalores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2$

$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Necessitamos calcular os autovetores de A e para isso basta resolvermos o sistema:

$$Av = \lambda v$$

onde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e λ é cada um dos autovalores já encontrados.

Para $\lambda_1 = 1$ temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3-1 & 4 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos um sistema homogêneo cuja matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\Rightarrow}{\textit{escalonando}} \begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$-4x + 4y = 0 \Rightarrow y = x$$

Portando os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma $v = (x, x) = x(1, 1)$ e assim podemos concluir que o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $V_1 = [(1, 1)]$.

Para $\lambda_1 = -2$ temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3-(-2) & 4 \\ -1 & 2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos um sistema homogêneo cuja matriz ampliada é

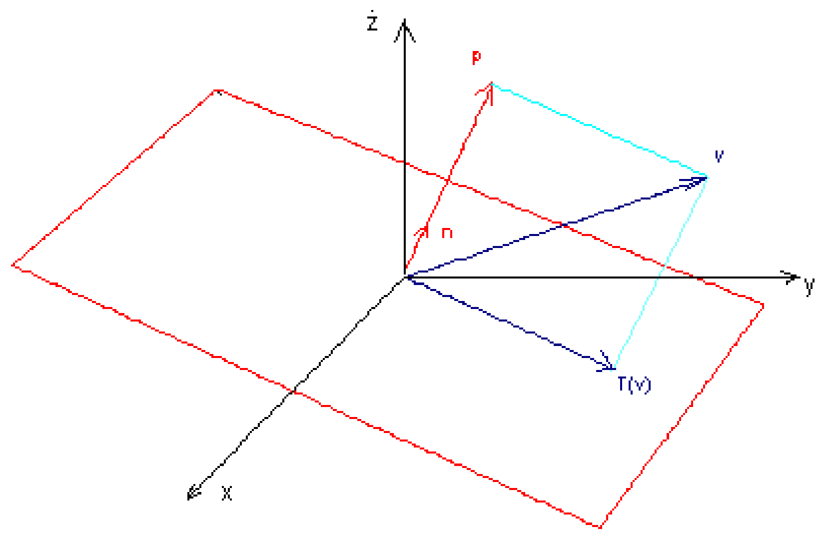
$$\left[\begin{array}{ccc} -1 & 4 & | & 0 \\ -1 & 4 & | & 0 \end{array}\right] \overset{escalonando}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right]$$

$$-x + 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{4}$$

Portando os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = -2$ são da forma $v = (x, \frac{x}{4}) = x(1, \frac{1}{4})$ e assim podemos concluir que o subespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$ é $V_{-2} = \left[(1, \frac{1}{4})\right]$.

Exemplo 207 *Encontre os autovalores e autovetores da transformação linear que a cada vetor* $v \in \mathbb{R}^3$ *associa a sua projeção ortogonal no plano* $x+y-z = 0$.

Solução: Devemos encontrar a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) =$ projeção de v no plano $x + y - z = 0$.



Da figura acima vemos que para obtermos a projeção sobre o plano devemos inicialmente fazer a projeção do vetor v na direção do vetor normal n para obter o vetor $p = proj_n v$.Com isso temos,

$$\begin{aligned} T(v) + p &= v \\ T(v) &= v - p \\ T(v) &= v - proj_n v \end{aligned}$$

Um vetor normal do plano $x+y-z=0$ é $n=(1,1,-1)$, logo, como $v=(x,y,z)$ temos

$$\begin{aligned}
p &= proj_n v \\
p &= \left(\frac{v\cdot n}{n\cdot n}\right)n \\
p &= \left(\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,-1)}{(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)}\right)(1,1,-1) \\
p &= \left(\frac{x+y-z}{3}\right)(1,1,-1) \\
p &= \left(\frac{x+y-z}{3},\frac{x+y-z}{3},-\frac{x+y-z}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(v) &= v-p \\
T(x,y,z) &= (x,y,z)-\left(\frac{x+y-z}{3},\frac{x+y-z}{3},-\frac{x+y-z}{3}\right) \\
T(x,y,z) &= \left(\frac{2x-y+z}{3},\frac{-x+2y+z}{3},\frac{x+y+2z}{3}\right)
\end{aligned}$$

Para calcular os autovalores de T devemos encontrar a matriz de T. Neste caso,

$$[T]=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)=\det([T]-\lambda I)=0$$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$p(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=0$$

As raizes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1=\lambda_2=0$ e $\lambda_3=1$.

Para $\lambda_1=0$ vamos calcular os autovalores associados resolvendo o sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja matriz ampliada é,

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\Longrightarrow}{escalonando} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

e então:

$$\begin{aligned} y &= -z \\ x &= -z \end{aligned}$$

Portanto os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são da forma $v = (-z, -z, z)$

Observação 208 *Note que acima damos a forma geral dos autovetores, no caso acima temos $v = x(-1, -1, 1)$ assim um autovetor é $v = (-1, -1, 1)$ como todo autovetor é um múltiplo de $v = (-1, -1, 1)$ temos que $V_0 = [(-1, -1, 1)]$, isto é, o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é gerado pelo vetor $v = (-1, -1, 1)$. Note que geometricamente o subespaço $V_0 = [(-1, -1, 1)]$ é formado pelos vetores que são múltiplos do vetor normal ao plano, ou seja, por todos os vetores ortogonais ao plano.*

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ vamos calular os autovalores associados resolvendo o sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \underset{\Longrightarrow}{escalonando} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=0 \implies -x=-y+z$$

Portanto os autovalores associados ao autovalor $\lambda_2=\lambda_3=1$ são da forma $v=(-y+z,y,z)=y(-1,1,0)+z(1,0,1)$. Logo $V_2=[(-1,1,0)]$ e $V_3=[(1,0,1)]$.

Exemplo 209 *Encontre todos os autovalores e autovetores do operador linear* $T:P_2\to P_2$ *definido por* $T(a+bx+cx^2)=-2c+(a+2b+c)x+(a+3c)x^2$.

Solução: A matriz que representa o operador T é dada por:

$$[T]=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$$

Para encontrar os autovetores resolver $([T]-\lambda I)v=0$, isto é,

$$\begin{bmatrix}0-\lambda&0&-2\\1&2-\lambda&1\\1&0&3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Para obtermos uma solução não nula para este sistema devemos impor:

$$\det([T]-\lambda I)=-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)+2(2-\lambda)=0$$

Obtemos então os autovalores $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=\lambda_3=2$.

Vamos agora encontrar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=\lambda_3=2$:

Para $\lambda_1=1$

$$\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\ \underset{\Rightarrow}{Escalonando}\ \begin{bmatrix}-1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \overrightarrow{p}=(-2c,c,c)$$

Portanto, $\overrightarrow{p}=-2c+cx+cx^2$ é autovetor associado a $\lambda_1=1$

Para $\lambda_1=1\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\ \underset{\Rightarrow}{Escalonando}\ \begin{bmatrix}-2&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{p}=(c,b,c)$$

Portanto $\overrightarrow{p}=c+bx+cx^2$ é autovetor associado a $\lambda_1=2$.

5.1.2 Matrizes Semelhantes

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Sejam α e β bases de V e $[T]_\alpha^\alpha$, $[T]_\beta^\beta$ matrizes de T em relação as bases α e β respectivamente, então:

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\alpha^\alpha \, [I]_\alpha^\beta$$

Lembrando que $[I]_\alpha^\beta = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$ temos que

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\alpha^\alpha \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$

Chamando $[I]_\beta^\alpha = A$:

$$[T]_\beta^\beta = A \, [T]_\alpha^\alpha \, A^{-1}$$

De fato:

Pelo conceito de matriz de uma transformação linear podemos escrever:

$$[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha \qquad (I)$$

e

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\beta [v]_\beta \qquad (II)$$

Sendo $[I]_\beta^\alpha$ a matriz mudança de base de α para β, tem-se:

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta [v]_\beta \text{ e } [T(v)]_\alpha = [I]_\alpha^\beta [T(v)]_\beta$$

Substituindo $[v]_\alpha$ e $[T(v)]_\alpha$ em (I), resulta:

$$[I]_\alpha^\beta [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta [v]_\beta$$

ou,

$$[T(v)]_\beta = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta [v]_\beta$$

Comparando essa igualdade com (II) , tem-se

$$[T]_\beta^\beta = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta$$

ou, como $[I]_\beta^\alpha = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}$, podemos escvrever

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha \, [T]_\alpha^\alpha \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$

As matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são chamadas **semelhantes**.

Definição 210 *Dadas as matrizes A e B, se existe uma matriz P inversível tal que*

$$A = PBP^{-1}$$

então dizemos que as matrizes A e B são semelhantes.

Observação 211 *Se A e B são semelhantes então $detA = detB$, mas não vale a recíproca.*

5.2 Diagonalização de Operadores

Nosso objetivo aqui será encontrar uma base do espaço vetorial V na qual a matriz de um determinado operador linear $T : V \to V$ seja a mais simples possível. Veremos que a melhor situação possível é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada a um operador.

Dado um operador linear $T : V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base β , para V, na qual a matriz do operador nesta base ($[T]_\beta^\beta$) seja uma matriz diagonal. Esta é a forma mais simples de se representar um operador e a base β , nesse caso, é uma base cujos vetores são autovetores de T. Observemos inicialmente o exemplo que segue.

Exemplo 212 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o operador linear definido por* $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$, *cuja matriz, em relação à base canônica é* $[T] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ com autovetores associados $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (4, 1)$, respectivamente. Notemos que os autovetores formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja, então, $\beta = \{(1, 1), (4, 1)\}$ a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos autovetores de T e encontremos $[T]_\beta^\beta$. Para tal, aplicamos T em cada vetor da base β e escrevemos a imagem obtida como combinação linear dos vetores da base β:
$T(1, 1) = (1, 1) = a(1, 1) + b(4, 1) = 1(1, 1) + 0(4, 1)$
$T(4, 1) = (-8, -2) = c(1, 1) + d(4, 1) = 0(1, 1) - 2(4, 1)$
Assim, $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.
Notemos que $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz **diagonal** e representa o operador T na base β de autovetores.

Na verdade, quando a base de autovetores existe, a matriz que representa um operador linear nesta base será sempre uma matriz diagonal que, como já citado, é a forma mais simples de se representar o operador. O problema, então, é saber em que condições a base de autovetores existe, pois veremos adiante que em muitos casos tal base não existe.
Consideremos, para elucidar o problema citado, as propriedades que seguem:

Propriedades

Propriedade 1: *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Proof. Exercício! ∎

Propriedade 2: *Se* $T : V \to V$ *é um operador linear tal que* $\dim V = n$ *e* T *possui* n *autovalores distintos, então o conjunto* $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, *formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de* V.

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Definição 213 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base β de V cujos elementos são autovetores de T.*

Neste caso, a matriz que representa T na base β é uma matriz diagonal cujos elementos são autovalores de T, ou seja,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Aqui supomos que $\dim V = n$.

Exemplo 214 *Observemos os autovalores e respectivos autovetores associados a um operador linear T, representados pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.*

Os Autovalores e autovetores de A são:
$\lambda_1 = 1 \Rightarrow v_1 = (-z, 4z, z) = z(-1, 4, 1)$
$\lambda_2 = -2 \Rightarrow v_2 = (-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$
$\lambda_3 = 3 \Rightarrow v_3 = (x, 2x, x) = x(1, 2, 1)$
Logo o conjunto $\beta = \{(-1, 4, 1), (-1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, pela *propriedade 2,* e, portanto o operador T representado pela matriz A, é **diagonalizável**. Então, como a base β é formada pelos autovetores de A ou de T, o operador T é representado por uma matriz diagonal D que é a matriz $[T]_\beta^\beta$. A construção da matriz D pode ser acompanhada conforme segue:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= Av_1 = (-1, 4, 1) \\ T(v_2) &= Av_2 = (2, -2, -2) \\ T(v_3) &= Av_3 = (3, 6, 3) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} (-1, 4, 1) &= a(-1, 4, 1) + b(-1, 1, 1) + c(1, 2, 1) \\ (2, -2, -2) &= d(-1, 4, 1) + e(-1, 1, 1) + f(1, 2, 1) \\ (3, 6, 3) &= g(-1, 4, 1) + h(-1, 1, 1) + i(1, 2, 1) \end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [T]_\beta^\beta$$

Exemplo 215 *Considere agora o operador* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *representado pela matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Autovalores e autovetores de A :
$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow v_1 = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$
$\lambda_3 = 3 \Rightarrow v_3 = (-2, 1, 1)$
Observe que A não pode ser diagonalizada, pois não é possível encontrar uma base de autovetores para o $\mathbb{R}^3$; só é possível obter dois autovetores L.I.

5.2.1 Matriz Diagonalizadora

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Sejam A a matriz canônica do operador T, isto é, $[T] = A$ e D a matriz de T na base β de autovetores. As matrizes A e D são semelhantes, pois representam o mesmo operador T em bases diferentes. Logo, a relação de matrizes semelhantes 210 permite escrever:

$$D = P^{-1}AP$$

onde P é a matriz mudança da base β para a base canônica α, isto é, $P = [I]^{\beta}_{\alpha}$.

Note que, pela definição da matriz P, podemos concluir que ela é uma matriz cujas colunas são os autovetores do operador T. Observamos que a matriz D é obtida pela "atuação"da matriz P, quando ela existe, sobre a matriz A. Dizemos então que a matriz P diagonaliza A ou que P é a **matriz diagonalizadora.**

Exemplo 216 *Sendo possível, encontre a matriz que diagonaliza* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:
Temos que determinar uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$. Vamos seguir os seguintes passos:

Passo1: Determinar aos autovalores de A:

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$
Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 1$

Passo 2: Determinar os autovetores:

Serão necessários 3 autovetores porque a matriz é 3×3, caso contrário a matriz não poderá ser diagonalizada.
Calculando os autovetores por meio do sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obteremos:

Para $\lambda = -2$ uma base para o subespaço associado é $v_1 = (-1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$

Para $\lambda = 1$ uma base para o subespaço associado é $v_3 = (1, -1, 1)$

Note que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente. (*Verifique*)

Passo 3: Monte P a partir dos vetores do passo 2:

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Monte D a partir dos autovalores associados.:

É essencial que a ordem dos autovalores seja igual à ordem escolhida para as colunas de P.

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 5: Verifique que $D = P^{-1}AP$ ou que $AP = PD$.

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 217 *Se A é uma matriz $n \times n$ com n autovalores distintos entre si, então A é diagonalizável.*

Proof. Exercício. ■

Exemplo 218 *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *tem autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -1$. Como esses são três autovalores distintos de uma matriz 3×3, A é diagonalizável.*

Definição 219 *i) Se λ é autovalor de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então a dimensão do subespaço associado a λ é chamada* ***multiplicidade geométrica*** *de λ.*

ii) O número de vezes que λ aparece como autovalor de A é chamado de ***multiplicidade algébrica*** *de λ.*

Teorema 220 *Se A é uma matriz quadrada, então:*

i) Para cada autovalor de A, a multiplicidade geométrica é menor do que ou igual à multiplicidade algébrica.

ii) A é diagonalizável se, e somente se, para cada autovalor, a multiplicidade geométrica é igual a multiplicidade algébrica.

Exemplo 221 *Diagonalize a seguinte matriz, se possível.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução:

Vamos calcular $\det(A - \lambda I) = 0$ para encontrar os autovalores de A.

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = \lambda_4 = -3 \end{array} \right.$$

$\lambda = 5$ e $\lambda = -3$, ambos tem multiplicidade 2.

Calculando os autovetores por meio do sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos

Para $\lambda = 5$ uma base para o subespaço associado é $v_1 = (-8, 4, 1, 0)$ e $v_2 = (-16, 4, 0, 1)$.

Para $\lambda = -3$ uma base para o subespaço associado é $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $v_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Note que para ambos os autovalores a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica, logo pelo teorema anterior, concluímos que A é diagonalizável.

Então existe P tal que $A = P^{-1}DP$, onde $P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

5.3 Calculando potências de uma matriz

Nesta seção, veremos como a diagonalização de matrizes pode ajudar no cálculo de potências de matrizes.

Teorema 222 *Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ e k um número inteiro. Se v é autovetor de A associado ao autovalor λ então v também é autovetor de A^k associado ao autovalor λ^k.*

Proof. Por definição, se v é autovetor de A associado ao autovalor λ então

$$Av = \lambda v.$$

Multiplicando por A ambos os lados da igualdade, tem-se

$$A^2 v = A\lambda v = \lambda(Av) = \lambda^2 v.$$

Novamente, multiplicando por A ambos os lados

$$A^3 v = A\lambda^2 v = \lambda^2(Av) = \lambda^3 v.$$

Generalizando esta idéia para k vezes, obtemos

$$(\underbrace{A.A.A.....A}_{k-1 \text{ vezes}})Av = (\underbrace{A.A.A.....A}_{k-1 \text{ vezes}})\lambda v \implies A^k v = \lambda^k v,$$

concluindo assim nossa demonstração.

■

Assim, todo autovetor de A é também autovetor de A^k e portanto, se a matriz A é diagonalizável, A e A^k possuem a mesma matriz diagonalizadora P. O próximo teorema nos diz como obter a matriz A^k para todo k inteiro.

Teorema 223 *Se A é uma matriz quadrada $n \times n$ **diagonalizável** então existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A^k = PD^kP^{-1}$, para todo k inteiro.*

Proof. Se A é diagonalizável, então existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} A^k &= A.A.A.....A \\ &= \left(PDP^{-1}\right).\left(PDP^{-1}\right).\left(PDP^{-1}\right).....\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D.....\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

■

Isso sugere que para calcularmos A^k podemos diagonalizar A, obtendo P e D, depois calcular D^k, e o resultado será igual a PD^kP^{-1}. Como D é diagonal e sua diagonal é formada pelos autovalores de A, pelo teorema anterior tem-se

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Exemplo 224 *Calcule A^{20} onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Solução: Os autovalores dessa matriz são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Para $\lambda_1 = 1$ encontramos o autovetor $v_1 = (1, 0, 0)$ e para $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ encontramos os autovetores $v_2 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)$ e $v_3 = \left(-\frac{8}{3}, 0, 1\right)$. Segue que a matriz A é diagonalizável. As matrizes P e D são

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} A^{20} &= PD^{20}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1^{20} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{20} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{20} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 699\,050 & -2796\,200 \\ 0 & 1048\,576 & 0 \\ 0 & 0 & 1048\,576 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.4 Sexta lista de exercícios

1. Encontre os autovalores e autovetores das transformações lineares dadas:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

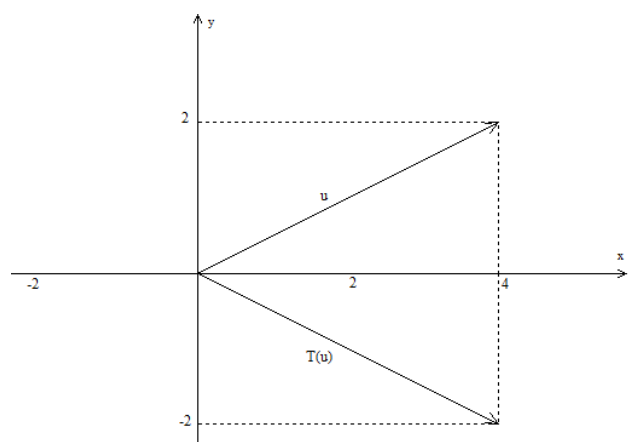
   (d) $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

   (e) $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ tal que $A \to A^T$

2. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma reflexão em relação ao eixo horizontal, conforme mostrado na figura a seguir.



   Essa transformação T

   a) é dada por $T(x, y) = (-x, y)$.

   b) tem autovetor $(0, -1)$ com autovetor associado igual a 2.

   c) tem autovetor $(2, 0)$ com autovetor associado igual a 1.

   d) tem autovetor de multiplicidade 2.

   e) não é inversível.

4. Construa uma matriz $2x2$ **não diagonal** com autovalores 1 e -1 .

5. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

6. Que vetores **não nulos** do plano, quando cisalhados por $C(x, y) = (y - 3x, y)$ e em seguida girados de 45^o (no sentido anti-horário) ficam **ampliados / reduzidos** (na mesma direção) ? Em **quantas** vezes ?

7. Determine os autovalores e autovetores, se existirem, do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtido quando se faz uma rotação de $\pi\ rad$ em torno do eixo x, seguida de uma contração de $\frac{1}{2}$.

8. Seja $T : \Re^2 \to \Re^2$ um operador linear que dobra o comprimento do vetor $(1, -3)$ e triplica e muda o sentido do vetor $(3, -1)$.

   (a) Determine $T(x, y)$

   (b) Calcule $T(0, 2)$

   (c) Qual a matriz do operador T na base $\{(2, 1), (1, 2)\}$

9. Seja $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ com autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0$, respectivamente. Determine $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

10. Dada a transformação linear $T : \Re^2 \to \Re^2$ que é a projeção sobre a reta $y = \frac{x}{2}$. Encontre os autovalores e autovetores da transformação T.

11. Considere P_1 = conjunto dos polinômios de grau ≤ 1.

    Seja o operador linear $D : P_1 \to P_1$ dado por $D(p) = x.p' + p'$ .Determine os autovalores e autovetores de D.

12. Seja A uma matriz quadrada e A^T sua transposta. As matrizes A e A^T possuem os mesmos autovalores e autovetores? Justifique sua resposta.

13. Encontre os autovalores e autovetores da transformação linear que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ associa a sua projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

14. Seja $T : V \to V$ linear

    (a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.

    (b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

    (c) Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação $D : P_2 \to P_2$, $D(p) = p'$.

15. Sejam $A, B \in M(n, n)$ matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus autovalores? Qual?

16. Mostre que o conjunto de todos os autovetores de um operador linear $T : V \to V$ associados a um autovalor λ é um **subespaço vetorial** de V.

17. Discuta a veracidade da afirmação: Se λ **não** é um autovalor de A, então o sistema linear $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

18. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz P que realiza esta semelhança.

19. Verifique se as matrizes dadas são semelhantes

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

20. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se B é semelhante a A, então as duas matrizes tem o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.

21. Se $B = R^{-1}AR$ e $\overrightarrow{v}$ é um autovetor de B associado a um autovalor λ então $R\overrightarrow{v}$ é autovetor de A associado a λ.

22. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que:

    (a) $A - I$ e $B - I$ são semelhantes.

    (b) A^k e B^k são semelhantes, para cada inteiro positivo k.

    (c) Se A e B são inversíveis, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

23. Seja T o operador linear em $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ e considere a base usual α do $\mathbb{R}^3$ e a base $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

    (a) Mostre que as matrizes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$ são semelhantes.

    (b) T é inversível? Se for determine a lei que define T^{-1}.

24. Sejam $T : V \to V$ é um operador linear e α e β bases distintas de V. Mostre que se $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são matrizes semelhantes então $\det [T]_\alpha^\alpha = \det [T]_\beta^\beta$.

25. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$

    (a) Determinar uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

    (b) Dar a matriz de T nessa base.

26. Considere uma transformação linear $T : V \to V$ abaixo. Se possível, encontre uma base β para V tal que a matriz $[T]_\beta^\beta$ de T, em relação à base β, seja diagonal.

(a) $T : P_2 \to P_2$ definida por $T(a + bx) = (4a + 2b) + (a + 3b)x$.

(b) $T : P_2 \to P_2$ definida por $T(p(x)) = p(x + 1)$.

27. Verificar se a matriz A é diagonalizável. Caso seja, determinar uma matriz P que diagonaliza A e calcular $P^{-1}AP$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

28. Determine o valor de k para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ seja diagonalizável.

29. Determine **a** de modo que a matriz A seja diagonalizável. Para o valor de a encontrado, determine uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

30. Encontre os autovalores de A^9 se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

31. Calcule A^{10} para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Seja T um operador linear que preserva o comprimento do vetor $v_1 = (1, 0, 0)$, duplica o comprimento do vetor $v_2 = (0, 2, 0)$ e inverte o sentido do vetor $v_3 = (0, 2, 1)$. Determine o operador linear T^{20}.

33. Seja $T : V \to V$ o operador linear que tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \cdots, \lambda_n = n$ associados aos autovetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ respectivamente.

Sabendo que $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$, determinar $[T(v)]_\beta$.

34. Seja A uma matriz inversível. Prove que, se A é diagonalizável, A^{-1} também é.

35. Seja A uma matriz 4×4 e seja λ um autovalor de multiplicidade 3. Se $A - \lambda I$ tem posto 1, A é diagonalizável ? Explique.

36. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.

    (a) Se A é diagonalizável, então A tem n autovalores distintos.

    (b) Se A é inversível então A é diagonalizável.

    (c) Uma matriz quadrada com vetores-coluna linearmente independentes é diagonalizável.

    (d) Se A é diagonalizável, então cada um de seus autovalores tem multiplicidade 1.

    (e) Se nenhum dos autovalores de A é nulo, então $\det A \neq 0$.

    (f) Se u e v são autovetores de A associados, respectivamente, aos autovaloes distintos λ_1 e λ_2, então $u + v$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 + \lambda_2$.

    (g) Se v é autovetor dos operadores $T : V \to V$ e $S : V \to V$ então v é autovetor do operador $T + S$.

ALGUMAS RESPOSTAS

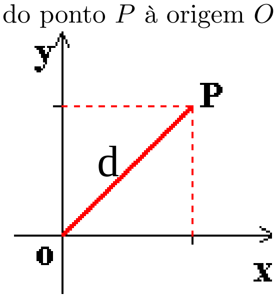
12. Para calcular os autovalores de A, basta determinar as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.Para calcular os autovalores de A^T, basta determinar as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(A^T - \lambda I)$. Portanto basta verificar que $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.

Capítulo 6

PRODUTO INTERNO

Estamos interessados neste capítulo em formalizar os conceitos de comprimento de um vetor e de ângulo entre dois vetores. Esses conceitos permitirão uma melhor compreensão do que seja uma base ortogonal e uma base ortonormal em um espaço vetorial e, principalmente, nos darão a noção de "medida"que nos leva a precisar conceitos como o de área, volume, distância, etc...

Consideremos inicialmente o plano $\mathbb{R}^2$, munido de um referencial cartesiano ortogonal (eixos perpendiculares) e um ponto $P(x, y)$. Vamos calcular a distância do ponto P à origem $O(0, 0)$.



Observando a figura e utilizando o teorema de pitágoras, temos que $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Podemos também, interpretar este resultado dizendo que o comprimento(que passaremos a chamar de **norma**) do vetor (x, y) é

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por outro lado, se tivermos dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, podemos definir um "produto"de u por v assim:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

produto este chamado de produto escalar ou produto interno usual e que tem uma relação importante com a norma de um vetor $v = (x, y)$:

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x.x + y.y} = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se, ao invés de trabalharmos no $\mathbb{R}^2$, estivéssemos trabalhando no $\mathbb{R}^3$ (munidos de um referencial cartesiano ortogonal), teríamos encontrado uma expressão similar para o produto escalar:

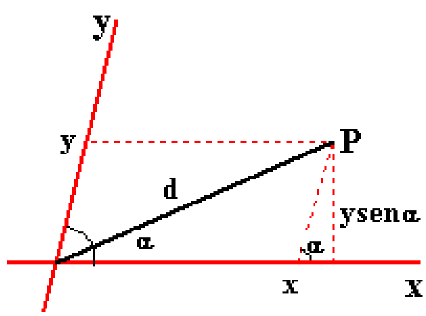
$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

e a mesma relação com a norma de um vetor $v = (x, y, z)$

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Voltando ao caso do plano, se tivéssemos trabalhando com um referencial não ortogonal (eixos não perpendiculares), e quiséssemos calcular a distância da origem até um ponto P (cujas coordenadas em relação ao referencial fossem (x, y)), teríamos, usando o teorema de Pitágoras,

$$d = \|(x, y)\| = \sqrt{(x + y\cos\alpha)^2 + (y \sin\alpha)^2} = \sqrt{x^2 + (2\cos\alpha)xy + y^2}$$



Observe, que se usássemos o produto escalar $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$, neste caso não haveria a relação $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$,mas ela passaria a valer se usássemos a seguinte regra para o produto:

$$\begin{aligned} \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle &= x_1 x_2 + (\cos\alpha) x_1 y_2 + (\cos\alpha) x_2 y_1 + y_1 y_2, \text{ pois} \\ \langle v, v \rangle &= \langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + (\cos\alpha)xy + (\cos\alpha)yx + y^2 = \|v\|^2 \end{aligned}$$

Portanto, novamente a noção de distância poderia ser dada a partir de um produto interno de vetores.

Concluímos destes exemplos, que o processo usado para se determinar "medidas"num espaço pode variar e, em cada caso, precisamos ser bem claros sobre qual produto interno estamos trabalhando.

Definição 225 *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função $f : V \times V \to R$ que a cada par de vetores u e v, associa um número real, denotado por $\langle u, v \rangle$, e que satisfaz as seguintes propriedades:*

a. $\langle v, v \rangle \geqslant 0$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

b. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

c. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

d. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle, \forall\ k \in \mathbb{R}$

Exemplo 226 *$V = \mathbb{R}^2$; $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$ é um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$.*

Para mostrar a veracidade da afirmação devemos provar as propriedades da definição de produto Interno. Sejam, então, $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$ e $k \in \mathbb{R}$:

a. $\langle u, u\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1^2 + 5y_1^2 \geqslant 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + 5y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ou $y_1 = 0 \Leftrightarrow u = (0, 0)$.

b. $\langle u, v\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 + 5y_1y_2 = 2x_2x_1 + 5y_2y_1 = \langle v, u\rangle$

c. $\langle u + v, w\rangle = \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3)\rangle = 2(x_1 + x_2)x_3 + 5(y_1 + y_2)y_3$

$$= (2x_1x_3 + 5y_1y_3) + (2x_2x_3 + 5y_2y_3)$$
$$= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

d. $\langle ku, v\rangle = \langle (kx_1, ky_1), (x_2, y_2)\rangle = 2kx_1x_2 + 5ky_1y_2 = k(2x_1x_2 + 5y_1y_2) = k\langle u, v\rangle$

Exemplo 227 *Verifique que $\langle u, v\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ onde $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.*

Para mostrar a veracidade da afirmação devemos provar as propriedades da definição de produto Interno. Sejam, então, $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$ e $k \in \mathbb{R}$:

a. $\langle u, u\rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(2x_1^2\right) + \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) = \left(2x_1^2\right) + (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$. Então $\langle u, u\rangle = 0$ se e somente se $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, isto é, $u = (0, 0)$.

b. $\langle u, v\rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 = 3y_1x_1 - y_2x_1 - y_1x_2 + y_2x_2 = \langle v, u\rangle$

c. $\langle u + v, w\rangle = \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)\rangle = 3(x_1 + y_1)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1 + (x_2 + y_2)z_2$

$= (3x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + x_2z_2) + (3y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_1 + y_2z_2)$

$= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

d. $\langle ku, v\rangle = \langle (kx_1, kx_2), (y_1, y_2)\rangle = 3kx_1y_1 - kx_1y_2 - kx_2y_1 + kx_2y_2$

$= k(3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2) = k\langle u, v\rangle$

Exercício 228 *Verifique que $\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1^2y_2^2$ onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, não define um produto interno no $\mathbb{R}^2$.*

Observe que a terceira propriedade da definição de Produto Interno falha, vejamos:

Sejam, então, $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$.

$\langle u + v, w\rangle = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)^2 y_3^2 = \left(x_1x_3 + y_1^2y_3^2\right) + \left(x_2x_3 + y_2^2y_3^2\right) + 2y_1y_2y_3^2 = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle + 2y_1y_2y_3^2$

Portanto, $\langle u + v, w\rangle \neq \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

Exemplo 229 *Em $\mathbb{R}^n$, o produto interno usual (ou escalar) é definido por:*

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Nota: Quando não há referência sobre o produto interno definido num espaço vetorial V, entendemos que sobre ele fica definido o produto interno usual.

Exemplo 230 *Seja $V = P_2$, $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ vetores quaisquer de P_2. A fórmula*

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

define um produto interno em P_2.

Note que

$$\langle p, q\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

não define, sobre V, um produto interno, pois falha a propriedade a) da definição de produto intermo. Veja que existem polinômios $p \in V$ tais que $\langle p, p\rangle = 0$, sem que $p = 0$. Por exemplo, $p = 2 + 0x + 0x^2$.

Exemplo 231 *Seja V o espaço da funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Se f e g pertencem a V, então*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define sobre V um produto interno.

Como exercício, mostre que as quatro propriedades do produto interno são válidas para este caso.

Exemplo 232 *Se A e B são duas matrizes quaisquer de $V = M_2$ então, definimos*

$$\langle A, B\rangle = tr\left(A^TB\right) \tag{6.1}$$

onde tr é o traço de uma matriz quadrada definido por

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplo 233 *Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Então,* $\langle A, B\rangle = tr\left(A^TB\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}\right) = 16.$

6.1 Normas, Distâncias e Ângulos em Espaços com Produto Interno

Definição 234 *Se V é um espaço com produto interno, então a **norma** (ou comprimento) de um vetor $v \in V$ é dada por*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

A distância entre dois pontos (vetores) u e v é dada por

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Definição 235 *Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v\rangle = 1$, dizemos que o vetor v está **normalizado,** o que significa que seu comprimento é igual a 1 unidade.*

Definição 236 *Todo vetor não-nulo $v \in V$ pode ser* normalizado, *fazendo:*

$$u = \frac{v}{\|v\|}.$$

Exemplo 237 *Considerando $v = (1, -2, 3)$ e não havendo referência a algum produto interno em $\mathbb{R}^3$, temos:*

$$\|v\| = \|(1, -2, 3)\| = \sqrt{\langle(1, -2, 3), (1, -2, 3)\rangle} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14},$$

ou seja, o comprimento de v, em relação ao produto interno usual, é $\sqrt{14}$ unidades.

Exemplo 238 *A norma do vetor $v = (3, -1)$ em relação ao produto interno definido no exemplo 226, é:*

$\|(3, -1)\| = \sqrt{\langle(3, -1), (3, -1)\rangle} = \sqrt{2.3.3 + 5.(-1).(-1)} = \sqrt{23}$,
e, em relação ao produto interno usual é:
$\|(3, -1)\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

Para normalizar o vetor $(3, -1)$, em relação ao primeiro produto (exemplo 226), fazemos
$u = \dfrac{v}{\|v\|} = \frac{(3,-1)}{\sqrt{23}} = \left(\frac{3\sqrt{23}}{23}, -\frac{\sqrt{23}}{23}\right)$
Verifique que o comprimento de u é 1.

Observação 239 *a) Se $v \in \mathbb{R}^2$, então o conjunto dos pontos que satisfazem $\|v\| = 1$ pertencem a um círculo de raio 1 centrado na origem.*

b) Se $v \in \mathbb{R}^3$, então o conjunto dos pontos que satisfazem $\|v\| = 1$ pertencem a uma esfera de raio 1 centrada na origem.

Teorema 240 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Se u e v são vetores de um espaço com produto interno real, então*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

Ângulo entre dois vetores: Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\| .$$

Elevando ao quadrado ambos os lados

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

Agora, dividindo ambos os lados por $\|u\|^2 \|v\|^2$, obtém-se

$$\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|}\right)^2 \leq 1$$

ou, equivalentemente,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1.$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, então $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, daí,

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|} \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi$$

6.2 Ortogonalidade

Definição 241 *Seja V um espaço com produto interno. Os vetores u, $v \in V$ dizem-se mutuamente* ortogonais*, e u é* ortogonal *a v, se $\langle u, v\rangle = 0$.*

Note que u e v são ortogonais se e somente se $\cos\theta = 0$, onde θ é o ângulo entre u e v, e isto é verdade se e somente se u e v são "perpendiculares", isto é, $\theta = 90°$.

Observação 242 *A ortogonalidade depende do produto interno, isto é, dois vetores podem ser ortogonais em relação a um produto interno mas não em relação a outro.*

Exemplo 243 *As matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são ortogonais, pois*

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Exemplo 244 *Seja $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ um produto interno em P_2. Se $p = x^2$ e $q = x^3$ então $\left\langle x^2, x^3\right\rangle = \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0$. Portanto, os vetores $p = x^2$ e $q = x^3$ são ortogonais em P_2.*

6.2.1 Conjunto Ortogonal de Vetores

Seja V um espaço vetorial com produto interno definido.

Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é *ortogonal* se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Teorema 245 *Se $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não-nulos de um espaço com produto interno, então A é linearmente independente.*

Proof. Temos que mostrar que a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$$

tem apenas a solução nula.

Para isso, façamos o produto interno de ambos os membros da igualdade por v_i :

$$\begin{aligned} \langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n, v_i \rangle &= \langle 0, v_i \rangle \\ a_1 \langle v_1, v_i \rangle + a_2 \langle v_2, v_i \rangle + \ldots + a_n \langle v_n, v_i \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Como A é ortogonal, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, pois $v_i \neq 0$. Daí, resulta a equação

$$a_i \langle v_i, v_i \rangle = 0 \Rightarrow a_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Logo, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI. ■

6.2.2 Base ortogonal

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V é *ortogonal* se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Observação 246 *Se $\dim V = n$, qualquer conjunto de n vetores não-nulos e dois a dois ortogonais, constitui uma base ortogonal para V.*

Exercício 247 *Mostre que o conjunto $\{(2, -1, 3), (-3, 0, 2), (2, 13, 3)\}$ é uma base ortogonal para o $\mathbb{R}^3$.*

6.2.3 Base ortonormal

Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é *ortonormal* se β é ortogonal e todos os seus vetores tem norma 1, isto é,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Exercício 248 *A partir do conjunto $\{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)\}$ obtenha uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$.*

6.2.4 Coordenadas em relação a Bases Ortonormais

Teorema 249 *Se* $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é uma base ortonormal de um espaço com produto interno* V *e* $v \in V$, *então*

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \ldots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

Proof. Como $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base, então $\forall\ v \in V$ podemos escrever

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

Temos que mostrar que $\langle v, v_i \rangle = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Na equação acima , aplicando o produto interno em ambos os lados com v_i :

$$\langle v, v_i \rangle = a_1 \langle v_1, v_i \rangle + a_2 \langle v_2, v_i \rangle + \ldots + a_n \langle v_n, v_i \rangle$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base ortonormal, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle v_i, v_i \rangle = 1$.

Logo $\langle v, v_i \rangle = a_i$ e portanto, $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \langle v_2, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, v \rangle \end{bmatrix}$ é o vetor de coordenadas de v em relação a base β. ■

Exemplo 250 *Encontre as coordenadas do vetor* $v = (1,1,1)$ *em relação à base* $\beta = \left\{(0,1,0), \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)\right\}$.

Note que β é uma base ortonormal (mostre!), portanto podemos usar o teorema 249 para encontrar $[v]_\beta$.

$$\begin{aligned}
(1,1,1) &= \langle (1,1,1), (0,1,0) \rangle (0,1,0) + \left\langle (1,1,1), \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \right\rangle \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \\
&\quad + \left\langle (1,1,1), \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \right\rangle \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \\
(1,1,1) &= (0,1,0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \\
[v]_\beta &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

6.2.5 Coordenadas em relação a Bases Ortogonais

Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base ortogonal de um espaço com produto interno V,então a normalização de cada um desses vetores produz a base ortonormal $\beta' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$.

Assim, se $v \in V$, segue do teorema 249 que

$$v = \left\langle v, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \left\langle v, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle \frac{v_2}{\|v_2\|} + \ldots + \left\langle v, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

ou,

$$u = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \ldots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Exercício 251 *Expresse o vetor* $\left(13, \frac{1}{2}, 4, \frac{3}{2}\right)$ *como combinação linear dos vetores* $v_1 = (1, -2, 3, -4)$, $v_2 = (2, 1, -4, -3)$, $v_3 = (-3, 4, 1, -2)$ *e* $v_4 = (4, 3, 2, 1)$.

6.3 Complementos Ortogonais

Seja W um subespaço de um espaço vetorial V com produto interno. Se um vetor $v \in V$ é ortogonal a todos os vetores de W então dizemos que v é ortogonal a W.

O conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a W é chamado de **complemento ortogonal de** W.

Notação: O complemento ortogonal de W é denotado por $W^\perp$.

Exemplo 252 *Seja* $V = \mathbb{R}^4$ *e* W *um subespaço do* $\mathbb{R}^4$. *Seja* $\beta = \{(1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1)\}$ *uma base para* W. *Encontre uma base para* $W^\perp$.

Seja $v = (x, y, z, t) \in W^\perp$, então

$$\begin{cases} \langle (x, y, z, t), (1, 1, 0, 1) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z, t), (0, -1, 1, 1) \rangle = 0 \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -y + z + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z + 2t \\ y = z + t \end{cases}$$

Logo, $v = (-z - 2t, z + t, z, t) = z(-1, 1, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$.

Como $v \in W^\perp$, segue que $W^\perp = [(-1, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)]$ e como este conjunto é LI (pois os vetores não são múltiplos), tem-se que $\beta = \{(-1, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$ é uma base para $W^\perp$.

Propriedades

Se W é um subespaço de um espaço com produto interno V, então:

a. $W^\perp$ é um subespaço de V.

b. $W \cap W^\perp = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

c. $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.

Exercício 253 *Faça como exercício a demonstração das três propriedades do complemento ortogonal.*

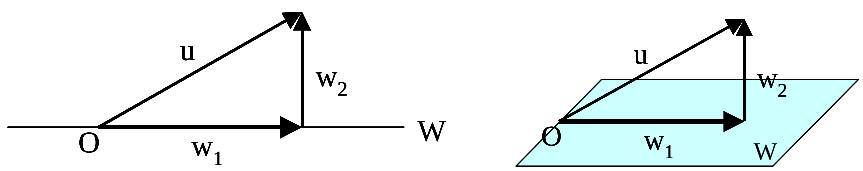
6.4 Projeções Ortogonais

Vamos agora desenvolver alguns resultados que serão úteis para construir bases ortogonais e ortonormais de espaços com produto interno.

É geometricamente evidente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ que se W é uma reta ou um plano pela origem, então cada vetor u do espaço pode ser escrito como uma soma

$$u = w_1 + w_2$$

onde w_1 está em W e w_2 é perpendicular a W.



Teorema 254 *(Teorema da Decomposição Ortogonal) Se W é um subespaço de um espaço com produto interno V, então todo $u \in V$ pode ser expresso por*

$$u = w_1 + w_2$$

tal que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

O vetor w_1 do teorema precedente é chamado **projeção ortogonal de u em W** e é denotado por $proj_W^u$. O vetor w_2 é chamado **componente de u ortogonal a** W e é denotada por $proj_{W^\perp}^u$. Daí, podemos escrever

$$u = proj_W^u + proj_{W^\perp}^u.$$

Teorema 255 *Seja V um espaço vetorial com produto interno definido e seja W um subespaço de V.*

a. *Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de W e $u \in V$, então*

$$proj_W^u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \ldots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

b. *Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de W e $v \in V$, então*

$$proj_W^u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \ldots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Exemplo 256 *Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left[(0,1,0), \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)\right]$ um subespaço de V. Obtenha $proj_W^u$ e $proj_{W^\perp}^u$ para $u = (1,1,1)$.*

Note que $\beta = \left\{(0,1,0), \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)\right\}$ é base ortonormal para W.Então:

$$\begin{aligned} proj_W^u &= \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 \\ &= 1(0,1,0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \end{aligned}$$

O componente de u que é ortogonal a W é

$$proj_{W^\perp}^u = u - proj_W^u = (1,1,1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)$$

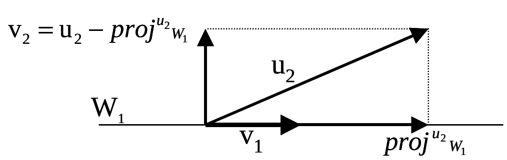
6.5 Encontrando Bases Ortogonais e Ortonormais: Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V um espaço vetorial com produto interno definido e $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de V. Através do processo que descreveremos abaixo, obteremos uma base **ortogonal** $\beta^{'} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para V.

Passo 1. Fixe $v_1 = u_1$.

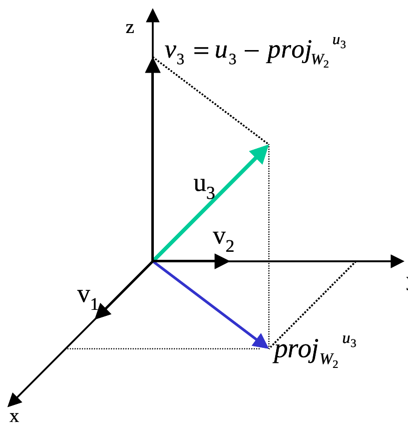
Passo 2. Obter v_2 de forma que v_2 seja ortogonal a v_1 tomando a componente de u_2 que é ortogonal a $W_1 = [v_1]$

$$v_2 = u_2 - proj_{W_1}^{u_2} = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$



Passo 3. Obter v_3 de forma que seja ortogonal a ambos v_1 e v_2, tomando a componente de u_3 que é ortogonal a $W_2 = [v_1, v_2]$

$$v_3 = u_3 - proj_{W_2}^{u_3} = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$



Procedendo desta forma, iremos obter, depois de n passos, a base ortogonal $\beta' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Feito isso, para obter uma base ortonormal de vetores para V, $\alpha = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, basta normalizar os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Exemplo 257 *Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar os vetores de base* $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$ *e* $u_3 = (0, 0, 2, 1)$ *em uma base ortonormal para um subespaço* W *do* $\mathbb{R}^4$.

Note que:

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= 1 \\ \langle u_1, u_3 \rangle &= -2 \\ \langle u_2, u_3 \rangle &= -2 \end{aligned}$$

Logo os vetores acima não formam uma base ortogonal, portanto temos que usar o processo de Gram-Schmidt para transformar em uma base ortogonal e em seguida, normalizar estes vetores, obtendo assim a base ortonormal procurada.

Passo 1. Fixe $v_1 = u_1 = (1, 0, -1, 0)$

Passo 2. $v_2 = u_2 - proj_{W_1}^{u_2} = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (0, 1, -1, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Passo 3. $v_3 = u_3 - proj_{W_2}^{u_3} = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$

$$= (0, 0, 2, 1) + (1, 0, -1, 0) + \tfrac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

Logo, $\beta' = \left\{(1, 0, -1, 0), \left(-\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}, 0\right), \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 1\right)\right\}$ é base ortogonal para $\mathbb{R}^4$. Normalizemos estes vetores para obter a base ortonormal $\alpha = \{q_1, q_2, q_3\}$:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,-1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\\
q_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2},0\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)\\
q_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{3}{\sqrt{22}}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}}\right)
\end{aligned}
$$

6.6 Fatoração QR

Se A é uma matriz $m \times n$ $(m \geqslant n)$ com colunas linearmente independentes, aplicar o Processo de Gram-Schmidt a essas colunas implica uma fatoração muito útil da matriz A em um produto de uma matriz $Q, m \times n$ $(m \geqslant n)$, com vetores-coluna ortonormais, por uma matriz triangular superior R. Essa é a fatoração QR.

Nos últimos anos a fatoração QR tem assumido importância crescente como fundamento matemático de uma grande variedade de algoritmos numéricos práticos, incluindo algoritmos largamente usados para computar autovalores de matrizes grandes.

Para ver como surge a fatoração QR, considere $u_1, u_2, \ldots, u_n$ como os vetores-coluna de A e $q_1, q_2, \ldots, q_n$ como os vetores ortonormais obtidos pela aplicação do Processo de Gram-Schmidt à matriz A com normalizações; assim,

$$A = [u_1|\ u_2|\ldots|\ u_n] \text{ e } Q = [q_1\ |\ q_2|\ldots|\ q_n]$$

Os vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ podem ser escitos em termos dos vetores $q_1, q_2, \ldots, q_n$ como

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \langle u_1, q_1\rangle\, q_1 + \langle u_1, q_2\rangle\, q_2 + \ldots + \langle u_1, q_n\rangle\, q_n\\
u_2 &= \langle u_2, q_1\rangle\, q_1 + \langle u_2, q_2\rangle\, q_2 + \ldots + \langle u_2, q_n\rangle\, q_n\\
&\ \vdots\\
u_n &= \langle u_n, q_1\rangle\, q_1 + \langle u_n, q_2\rangle\, q_2 + \ldots + \langle u_n, q_n\rangle\, q_n
\end{aligned}
$$

Na forma matricial, tem-se:

$$[u_1|\ u_2|\ldots|\ u_n] = [q_1\ |\ q_2|\ldots|\ q_n]\begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \ldots & \langle u_n, q_1\rangle\\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & \ldots & \langle u_n, q_2\rangle\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \ldots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

ou, mais concisamente, por

$$A = QR$$

No entanto, é uma propriedade de processo de Gram-Schmidt que, para $j \geqslant 2$, o vetor q_j é ortogonal a $u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}$; assim, todas as entradas abaixo da diagonal principal de R são nulas,

$$R=\begin{bmatrix}\langle u_1,q_1\rangle & \langle u_2,q_1\rangle & \dots & \langle u_n,q_1\rangle\\ 0 & \langle u_2,q_2\rangle & \dots & \langle u_n,q_2\rangle\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \langle u_n,q_n\rangle\end{bmatrix}$$

Resumindo, temos o seguinte teorema:

Teorema 258 *Se A é uma matriz $m\times n$ $(m\geqslant n)$ com colunas linearmente independentes, então A pode ser fatorada como*

$$A=QR$$

onde Q é uma matriz $m\times n$ com colunas ortonormais e R é uma matriz $n\times n$ triangular superior invertível.

Exemplo 259 *Encontre a decomposição QR de* $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&1&2\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}$.

Os vetores coluna de A são $u_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ e $u_3=\begin{bmatrix}2\\2\\1\\2\end{bmatrix}$.

O processo de Gram-Schmidt com normalização subsequente aplicado a estes vetores-coluna produz os vetores ortonormais $q_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $q_2=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{5}}{10}\\\frac{3\sqrt{5}}{10}\\\frac{\sqrt{5}}{10}\\\frac{\sqrt{5}}{10}\end{bmatrix}$, $q_3=$ $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\0\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}$

de modo que $\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&1&2\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3\sqrt{5}}{10}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{3\sqrt{5}}{10}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{5}}{10}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{5}}{10}&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&\frac{1}{2}\\0&\sqrt{5}&\frac{3\sqrt{5}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}}_{R}$

6.6.1 Aplicação da fatoração QR

Se A é uma matriz $m\times n$ de posto n, então a solução para o sistema linear $AX=B$ é obtida da seguinte forma:

A equação $AX = B$ pode ser escrita na forma

$$QRX = B$$

Multiplicando ambos os lados (à esquerda) da equação por Q^T, obtemos

$$Q^TQRX = Q^TB$$

Como Q é ortogonal, $Q^TQ = I$, então

$$RX = Q^TB$$

Como R é inversível, tem-se

$$X = R^{-1}Q^TB$$

Exemplo 260 *Resolva o sistema* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Como a matriz dos coeficientes é a mesma do exemplo anterior, diretamente temos que:

$$X = R^{-1}Q^TB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{2}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{15} \\ \frac{9}{10} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

6.7 Sétima lista de exercícios:

1. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ e $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

   (a) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2$

   (b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 4x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_2$

   (c) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_2$

2. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Identifique os casos em que temos um produto interno no $\mathbb{R}^3$. Nos casos que falham, identifique as propriedades que não verificam.

   (a) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1x_2 + z_1z_2$

   (b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2$

   (c) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_2z_1 + y_1x_2z_2$

3. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ e $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2)$. A expressão $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

4. No espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2, determine se
$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$$
é um produto interno, e, em caso negativo, indique quais dos axiomas da definição de produto interno são violados.

5. Utilize os produtos internos do exercício 1 para calcular:
   (a) $\|u\|$ com $u = (-1, 3)$
   (b) $d(u, v)$ com $v = (3, 5)$

6. Em P_2, considere o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ e os polinômios $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$. Mostre que f e g são ortogonais e a seguir, determine $\overline{g}$ um múltiplo de g tal que $\|\overline{g}\| = 1$.

7. Considere $V = M(2, 2)$, com o produto interno usual. Determine a projeção ortogonal de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Considere $V = P_2$, com o produto interno usual. Qual é o menor ângulo entre $p(t) = 1 - t + \sqrt{2}t^2$ e $q(t) = 1 + \sqrt{2}t^2$?

9. Seja V um espaço vetorial com produto interno definido, e sejam u, v vetores ortogonais de V, tais que $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 2$. Mostre que $d(u, v) = \sqrt{5}$. Interprete este resultado geometricamente quando $u, v \in \mathbb{R}^2$.

10. Seja V o espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$. Defina em V o seguinte produto interno:
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
   a) Calcule $\|f(x)\|$ quando $f(x) = x^3 - x - 1$.
   b) Calcule a $d(f, g)$ se $f(x) = 1$ e $g(x) = x$.

11. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^{\perp}$ e a distância entre $v = (1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^{\perp}$.

12. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ munido do seguinte produto interno:$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1x_2 - y_1x_2 - x_1y_2 + 4y_1y_2$, em que $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{u} = (x_2, y_2)$ são vetores do $\mathbb{R}^2$. Considere $T : V \to V$ o operador linear dado por $T(x, y) = \left(2y, \frac{x}{2}\right)$. Com relação ao produto interno dado e ao operador T, assinale a opção correta.

a) Os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ são ortogonais em relação ao produto interno dado.

b) O operador T preserva o produto interno, isto é, $\langle T(\overrightarrow{u}), T(\overrightarrow{v})\rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$.

c) $T(x,y) = T(y,x)$,para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d) O vetor $\overrightarrow{v} = (2,0)$ pertence ao $N(T)$.

e) Existe um vetor $\overrightarrow{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ e $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine uma base para o complemento ortogonal do $N(T)$.

    (b) Determine uma base para o complemento ortogonal da $\mathrm{Im}(T)$.

14. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left[(0,1,0), \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right]$. Exprima $w = (1,2,3)$ na forma $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

15. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e $W = [(-1,0,1,2),(0,1,0,1)]$. Expresse $w = (-1,2,6,0)$ na forma $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

16. Seja $V = M(2,2)$. determine uma base para o complemento ortogonal do:

    (a) subespaço das matrizes diagonais

    (b) subespaço das matrizes simétricas.

17. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(\overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$ é linear? Se for, determine seu núcleo e sua imagem.

18. Considere a base ortonormal $\alpha = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), (0,1,0)\right\}$ para $\mathbb{R}^3$. Encontre $[\overrightarrow{v}]_\beta$ para $\overrightarrow{v} = (2,-3,1)$.**(Não resolva nenhum sistema linear.)**

19. Suponha que S consiste dos seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$:

    $u_1 = (1,1,0,-1),\ u_2 = (1,2,1,3),\ u_3 = (1,1,-9,2)$ e $u_4 = (16,-13,1,3)$

    (a) Mostre que S é ortogonal e é uma base de $\mathbb{R}^4$.

    (b) Ache as coordenadas do vetor $v = (1,0,2,3)$ em relação à base S.**(Não resolva nenhum sistema linear.)**

20. Qual é a base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ obtida pelo processo de Gram-Schmidt a partir da base $\{(2,6,3),(-5,6,24),(9,-1,-4)\}$?

21. Use o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal para um subespaço W de um espaço vetorial V, para cada um dos seguintes casos:

   (a) $V = \mathbb{R}^4$ tal que $W = [(1,1,0,0),(2,-1,0,1),(3,-3,0,-2),(1,-2,0,-3)]$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ tal que $W = \{(x, x+y, y); x, y \in \mathbb{R}\}$

   (c) $V = M(3,1)$ tal que W é o conjunto solução do sistema homogêneo
   $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

22. Seja W um subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t,\ y = -5t,\ z = 4t,\ t \in \mathbb{R}$. Determine $W^{\perp}$. Qual a distância do vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$ aos subespaços W e $W^{\perp}$, respectivamente ?

23. Seja V o espaço das funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Defina em V o seguinte produto interno:
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   a) Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{1, t, t^2\}$ para obter um conjunto ortonormal $\{f_0, f_1, f_2\}$.

   b) Achar o complemento ortogonal do subespaço $W = [5, 1+t]$.

24. Seja $V = P_3$, $p = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3$ e $q = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$ e $\langle p, q\rangle = a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1 + d_0d_1$ um produto interno em P_3. Ache uma base ortonormal para o subespaço W de P_3 gerado pelos vetores $\overrightarrow{v}_1 = 1 + x + x^2 + x^3$, $\overrightarrow{v}_2 = 1 + x + 2x^2 + 4x^3$ e $\overrightarrow{v}_3 = 1 + 2x - 4x^2 - 3x^3$.

25. Seja $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas do vetor $v = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$ em relação à base **ortonormal** obtida a partir da base $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

26. Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$ um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}$. Determine uma base **ortonormal** de $U^{\perp}$, usando o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(A^TB)$.

27. Seja $V = P_2$, com produto interno usual.

   (a) Determine uma base ortonormal para o subespaço W de P_2 gerado por $4t + 3t^2$ e por $12 + t + 7t^2$.

   (b) Determine a projeção ortogonal de $p(t) = t^2$ sobre W.

28. Encontre a projeção ortogonal de $v = (1,2,3)$ sobre o subespaço W gerados pelos vetores $u_1 = (2,-2,1)$ e $u_2 = (-1,1,4)$.

29. Encontre a decomposição ortogonal de $v = (4, -2, 3)$ em relação a $W = [(1, 2, 1), (1, -1, 1)]$.

30. Ache uma matriz ortogonal P cuja primeira linha é $u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Obs.: a matriz P não é única.

31. Encontre a fatoração QR da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

32. Utilize a fatoração QR para resolver o sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$.

33. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa:

    (a) Todo conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortogonal.

    (b) Se A é uma matriz quadrada, cujas colunas são ortonormais então A é inversível e $A^{-1} = A^T$.

    (c) Se W é um subespaço de um espaço com produto interno V então o vetor nulo pertence a $W^{\perp}$.

    (d) Qualque matriz com determinante não- nulo tem uma decomposição QR.

    (e) Se $\overrightarrow{x}$ é ortogonal a ambos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então x é ortogonal a $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

    (f) Todo conjunto ortogonal é ortonormal.

    (g) Todo vetor pode ser normalizado.

34. No assunto **Diagonalização de Operadores**, vimos que: "Se A é a matriz canônica de um operador linear T e D a matriz de T na base β de autovetores, temos
$$D = P^{-1}AP$$
onde P é a matriz cujas colunas são os autovetores de T. Dizemos que a matriz P diagonaliza A ou que P é a matriz diagonalizadora".

    No caso de A ser uma matriz simétrica, e portanto sempre diagonalizável, podemos obter uma base ortogonal de autovetores que, após a normalização, será uma base ortonormal. A matriz, acima citada, por ter suas colunas formadas por vetores ortonormais, é uma matriz ortogonal, ou seja, é tal que $P^{-1} = P^T$. A matriz D, nesse caso, é obtida pela relação
$$D = P^TAP$$

e, dizemos que P diagonaliza A ortogonalmente.

Seja $T : R^3 \rightarrow R^3$ a transformação linear definida por: $T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)$.Encontre uma matriz P que diagonalize ortogonalmente a matriz canônica de T.