Indução Matemática

Lista

1.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- Base:

Com $n = 0$:

$$n \cdot n! = 0 \cdot 0! = 0 \cdot 1 = 0$$
$$(n+1)! - 1 = (0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$$

Como $0 = 0$, a proposição funciona para $n = 0$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1 \to \sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = (k+2)! - 1$$

Analisando a expressão para $k+1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = \sum_{i=0}^{k} i \cdot i! + (k+1) \cdot (k+1)!$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=0}^{k} i \cdot i!$:

$$= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)!$$

$$= (k+1)! + (k+1) \cdot (k+1)! - 1$$

Colocando $(k+1)!$ em evidência nos dois primeiros termos:

$$= (k=1)! \cdot [(k+1) + 1] - 1$$

$$= (k+1)!(k+2) - 1$$
$$= (k+2)! - 1$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = (k+2)! - 1$$

2.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$

$1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

- Base:

Com $n = 0$:

$$n^3 = 0^3 = 0$$
$$(0)^2 = 0$$

Como $0 = 0$, está provado que funciona para $n = 0$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = (1 + \cdots + k)^2 \to \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = (1 + \cdots + (k+1))^2$$

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=0}^{k} i^3$:

$$= (1 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3$$

Precisamos lembrar que a fórmula de Gauss nos diz que:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Utilizando-a na igualdade acima, temos:

$$= (1 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1)^3}{4}$$

Abrindo a expressão $(k+1)^3$:

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1) \cdot (k+2)^2}{4}$$

Colocando $(k+1)^2$ em evidência:

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4 \cdot (k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4 \cdot k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}\right)^2$$

Retornando à expressão com a fórmula de Gauss:

$$= (1 + \cdots + (k+1))^2$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = (1 + \cdots + (k+1))^2$$

3.

$\forall\ n > 6, n \in \mathbb{N}$

$n^2 > 5n + 10$

- Base:

Com $n = 7$:

$$n^2 = 7^2 = 49$$

$$5n + 10 = 5 \cdot 7 + 10 = 35 + 10 = 45$$

Como $49 > 45$, está provado que funciona para $n = 7$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$k^2 > 5k + 10 \to (k+1)^2 > 5 \cdot (k+1) + 10$$

Temos que:

$$5 \cdot (k+1) + 10 = 5k + 15$$

Guardaremos essa informação para mais tarde.

Analisando a expressão para $k+1$:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Já temos que $k^2 > 5k + 10$. Resta analisar a expressão $(2k+1)$:

$$n \geq 7 \Rightarrow 2k + 1 \geq 2.7 + 1$$

$$2k + 1 \geq 15$$

Juntando as informações ($k^2 > 5k + 10$ e $2k + 1 \geq 15$):

$$k^2 + 2k + 1 > 5k + 10 + 15$$

$$k^2 + 2k + 1 > 5k + 25$$

Como $25 > 15$, temos:

$$5k + 25 > 5k + 15$$

$$k^2 + 2k + 1 > 5k + 25 > 5k + 15$$

Logo:

$$k^2 + 2k + 1 > 5k + 15$$

Já temos que $5k + 15 = 5 \cdot (k+1) + 10$. Portanto, provamos que:

$$(k+1)^2 > 5 \cdot (k+1) + 10$$

4.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$

$2^n + (-1)^{n+1}$ é divisível por 3

- Base:

Com $n = 0$:

$$2^n + (-1)^{n+1} = 2^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$

Como 0 é divisível por 3, está provado que funciona para $n = 0$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \rightarrow p(k+1)$$

$$2^k + (-1)^{k+1} = 3n \rightarrow 2^{k+1} + (-1)^{k+2} = 3m$$

Com $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Manipulando $p(k)$:

$$2^k + (-1)^{k+1} = 3n$$

$$2^k = 3n - (-1)^{k+1}$$

Guardaremos essa informação para mais tarde.

Analisando a expressão para $k+1$:

$$2^{k+1} + (-1)^{k+2} = 2^k \cdot 2^1 + (-1)^{k+2}$$
$$= 2 \cdot 2^k + (-1)^{k+2}$$

Substituindo o valor que encontramos para 2^k:

$$= 2 \cdot (3n - (-1)^{k+1}) + (-1)^{k+2}$$
$$= 2 \cdot (3n + (-1)(-1)^{k+1}) + (-1)^{k+2}$$

Somando os expoentes das potências de (-1):

$$= 2 \cdot (3n + (-1)^{k+2}) + (-1)^{k+2}$$
$$= 6n + 2 \cdot (-1)^{k+2} + (-1)^{k+2}$$
$$= 6n + 3 \cdot (-1)^{k+2}$$

Colocando o 3 em evidência:

$$= 3 \cdot (2n + (-1)^{k+2})$$

Consideramos que $2n + (-1)^{k+2} = m \in \mathbb{Z}$.

Logo, provamos que:

$$2^{k+1} + (-1)^{k+2} = 3m$$

ou seja, $2^{k+1} + (-1)^{k+2}$ é divisível por 3.

5.

- $2 \in B, 3 \in B$
- se $b \in B$, então $2b \in B$ e $3b \in B$

Incluindo 2 e 3 em B:
$B = \{2, 3\}$

Como $2 \in B$ e $3 \in B$, $2 \cdot 2 \in B, 3 \cdot 2 \in B$ e $3 \cdot 3 \in B$:
$B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$

Agora que 4, 6 e 9 estão em B, as mesmas condições devem ser seguidas para eles:
$2 \cdot 4 \in B, 3 \cdot 4 \in B, 2 \cdot 6 \in B, 3 \cdot 6 \in B, 2 \cdot 9 \in B, 3 \cdot 9 \in B$
$B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 27, \dots\}$

O conjunto, portanto, é infinito.

6.

a)

- $x^0 = 1$
- $x^n = x \cdot x^{n-1}$, se $n > 0$

b)

$$x^4 = x \cdot x^3$$

Calculando x^3:

$$x^3 = x \cdot x^2$$

Calculando x^2:

$$x^2 = x \cdot x^1$$

Calculando x^1:

$$x^1 = x \cdot x^0$$

Calculando x^0:

$$x^0 = 1$$

Retornando para x^1:

$$x^1 = x \cdot 1 = x$$

Retornando para x^2:

$$x^2 = x \cdot x$$

Retornando para x^3:

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

Por fim, retornando para x^4:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

7.

a)

- $x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot n = x \cdot (n-1) + x$, se $n > 0$

b)

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1 + 3$$

Calculando $3 \cdot 1$:

$$3 \cdot 1 = 3 \cdot 0 + 3$$

Calculando $3 \cdot 0$:

$$3 \cdot 0 = 0$$

Retornando para $3 \cdot 1$:

$$3 \cdot 1 = 0 + 3 = 3$$

Retornando para $3 \cdot 2$:

$$3 \cdot 2 = 3 + 3$$

8.

$\forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

- Base:

Com $n = 1$:

$$k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$
$$1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$$
$$1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$$
$$1 = \frac{4}{4}$$
$$1 = 1$$

Portanto, provamos que a proposição vale para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} \to \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=1}^{k} i^3$:

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1)^3}{4}$$

Abrindo a expressão $(k + 1)^3$:

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1) \cdot (k+2)^2}{4}$$

Colocando $(k + 1)^2$ em evidência:

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4 \cdot (k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4 \cdot k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

Provamos então que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

:

9.

$\forall\ n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

n é primo ou um produto de números primos

- Base:

Com $n = 2$:

n é primo, portanto, a proposição funciona para $n = 2$.

- Passo:

Utilizando o segundo princípio da indução:

Dado $k \geq 2$ qualquer, supomos $p(r)$ para todo r tal que $2 \leq r \leq k$. Ou seja, todos os números antes de k são primos ou um produto de números primos.

caso 1: k+1 é primo
Se $k+1$ é primo, então vale $p(k+1)$.

caso 2: k+1 não é primo
Se $k+1$ não é primo, ele possui divisores diferentes de $k+1$ e 1; portanto, pode ser escrito como $k+1 = a \cdot b$, tal que $1 < a < k+1$ e $1 < b < k+1$.
Tanto a quanto b são possíveis valores de r. Logo, sabemos pela hipótese que $p(a)$ e $p(b)$ funcionam.
Se a e b são primos ou produto de números primos e $k+1 = a \cdot b$, então $k+1$ é um produto de números primos. Assim, vale $p(k+1)$.

10.

Nessa demonstração, a base não foi provada.

Se testássemos a base, encontraríamos $0 = 1$. Como isso não é verdade, não se pode continuar a demonstração. A proposição é falsa.