Álgebra de Conjuntos

Lista 1

1.

$A = \{1, 2, 3, \ldots 8, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 3, 5, 7, 9\}, D = \{3, 4, 5\}$

a) X e B são disjuntos

Se X e B são disjuntos, não possuem nenhum elemento em comum.

Algumas possibilidades são $X = C$ ou $X = \{1, 3, 5\}$.

X pode ser qualquer conjunto tal que $X \cap B = \varnothing$.

b) $X \subseteq D$ e $X \not\subseteq B$

Se $X \subseteq D$, todos os seus elementos estão em D. E se $X \not\subseteq B$, deve conter ao menos um elemento que não esteja em B.

As possibilidades são $X = \{3\}, X = \{5\}, X = \{3, 4\}, X = \{3, 5\}, X = \{4, 5\}, X = D$.

c) $X \subseteq A$ e $X \not\subseteq C$

Se $X \subseteq A$, todos os seus elementos estão em A. E se $X \not\subseteq C$, deve conter ao menos um elemento que não esteja em C.

Algumas possibilidades são $X = B, X = D, X = \{1, 3, 4\}$.

c) $X \subseteq C$ e $X \not\subseteq A$

Se $X \subseteq C$, todos os seus elementos estão em C. E se $X \not\subseteq A$, deve conter ao menos um elemento que não esteja em A.

Porém, $C \subseteq A$, logo, todos os elementos de C estão em A. Portanto, X não existe.

(Não confundir com $X = \varnothing$. Nesse caso, X <u>não é</u> vazio. X <u>não existe</u>.)

2.

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$

(1) $A \subseteq B \rightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$

Supondo $A \subseteq B$ a $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$, ou seja, existe $x \in A \cap \overline{B}$:

Seja $x \in A \cap \overline{B}$, então $x \in A \land x \in \overline{B}$, logo, pela definição de complemento, $x \in A \land x \notin B$.

Se $A \subseteq B$, temos $a \in A \to a \in B$. Como $x \in A$, temos, por essa definição, que $x \in B$.

Mas já temos que $x \notin B$. Chegamos em um absurdo, portanto, não existe $x \in A \cap \overline{B}$, ou seja, $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Provado que $A \subseteq B \to A \cap \overline{B} = \varnothing$

(2) $A \cap \overline{B} = \varnothing \to A \subseteq B$

Supondo $A \cap \overline{B} = \varnothing$:

Seja $x \in A$. Como nada pertence ao vazio, temos que $x \notin \varnothing$, ou seja, $x \notin A \cap \overline{B}$.
Reescrevendo essa expressão:

$$\neg(x \in A \cap \overline{B})$$

Pela definição de interseção:

$$\neg(x \in A \land x \in \overline{B})$$

Por De Morgan:

$$\neg(x \in A) \lor \neg(x \in \overline{B})$$

Reescrevendo:

$$x \notin A \lor x \notin \overline{B}$$

Ao menos uma das condições acima deve ser verdadeira. Como já temos que $x \in A$, então

$$x \notin \overline{B}$$

Reescrevendo:

$$\neg(x \in \overline{B})$$

Pela definição de complemento:

$$\neg(x \notin B)$$

Reescrevendo:

$$x \in B$$

Logo, $x \in A \to x \in B$, ou seja, $A \subseteq B$.

Provado que $A \cap \overline{B} = \varnothing \to A \subseteq B$

b) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

(1) $A \subseteq B \to \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Supondo $A \subseteq B$:

Seja $x \in \overline{B}$, ou seja, $x \notin B$.

Se $A \subseteq B$, temos que $a \in A \rightarrow a \in B$. Como $x \notin B$, temos, por essa definição, que $x \notin A$, ou seja, $x \in \overline{A}$.

Temos então $x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}$, ou seja, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Provado que $A \subseteq B \rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

(2) $\overline{B} \subseteq \overline{A} \rightarrow A \subseteq B$.

Supondo $\overline{B} \subseteq \overline{A}$:

Seja $x \in A$, ou seja, $x \notin \overline{A}$.

Se $\overline{\mathrm{B}} \subseteq \overline{A}$, temos que $b \in \overline{B} \rightarrow b \in \overline{A}$. Como $x \notin \overline{A}$, temos, por essa definição, que $x \notin \overline{B}$, ou seja, $x \in B$.

Temos então $x \in A \rightarrow x \in B$, ou seja, $A \subseteq B$.

Provado que $\overline{B} \subseteq \overline{A} \rightarrow A \subseteq B$.

c) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

Pela definição de diferença de conjuntos, $A - B = A \cap \overline{B}$. Assim, a prova é exatamente a mesma do item a).

d) $A \cup (A \cap B) = A$

Para provar que $A \cup (A \cap B) = A$, devemos provar separadamente que $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

(1) $A \cup (A \cap B) \subseteq A$

Seja $x \in A \cup (A \cap B)$.
Pela definição de união:

$$x \in A \vee x \in A \cap B$$

Pela definição de interseção:

$$\underbrace{x \in A}_{\text{(I)}} \vee \underbrace{(x \in A \wedge x \in B)}_{\text{(II)}}$$

Ao menos uma das condições acima deve ser verdadeira.
Se (I) for verdadeira: $x \in A$.
Se (II) for verdadeira, $x \in A \wedge x \in B$, ou seja, $x \in A$.
De qualquer jeito,

$$x \in A$$

Logo, $x \in A \cup (A \cap B) \to x \in A$, ou seja, $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

Provado que $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A \cup (A \cap B)$

Seja $x \in A$.
Se isso é verdadeiro, então, por definição lógica de adição (se $p =$ V, $p \lor q =$ V), também é verdadeiro que

$$x \in A \lor x \in A \cap B$$

Então, por definição de união,

$$x \in A \cup (A \cap B)$$

Logo, $x \in A \to x \in A \cup (A \cap B)$, ou seja, $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

Provado que $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

e) $A \cap (A \cup B) = A$

Para provar que $A \cap (A \cup B) = A$, devemos provar separadamente que $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

(1) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$

Seja $x \in A \cap (A \cup B)$.
Pela definição de interseção:

$$x \in A \land x \in A \cup B$$

Ambas as condições acima devem ser verdadeiras, ou seja,

$$x \in A$$

Logo, $x \in A \cap (A \cup B) \to x \in A$, ou seja, $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

Provado que $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A \cap (A \cup B)$

Seja $x \in A$.
Por definição lógica de adição:

$$x \in A \lor x \in B$$

Por definição de união:

$$x \in A \cup B$$

Já temos que $x \in A$, então:

$$x \in A \land x \in A \cup B$$

Por definição de interseção:

$$x \in A \cap (A \cup B)$$

Logo, $x \in A \to x \in A \cap (A \cup B)$, ou seja, $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

Provado que $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

3.

O complemento de $A \cup B$ é dado por $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Pela proriedade de reversibilidade do complemento, em que $\overline{\overline{A}} = A$, temos que $\overline{\overline{(A \cup B)}} = A \cup B$, ou seja, $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$.

A fórmula, então, é $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$.

4.

a) $A = (\overline{B} \cap A) \cup (A \cap B)$

Manipulando a expressão $(\overline{B} \cap A) \cup (A \cap B)$:
Pelo processo inverso da distributiva:

$$A \cap (\overline{B} \cup B)$$

Por propriedade do complemento:

$$A \cap \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ = elemento neutro da interseção:

$$A$$

Demonstrado que $(\overline{B} \cap A) \cup (A \cap B) = A$.

b) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathcal{U}$

Manipulando a expressão $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$:
Pelo processo inverso da distributiva:

$$(B \cap (A \cup \overline{A})) \cup (\overline{B} \cap (A \cup \overline{A}))$$

Por propriedade do complemento:

$$(B \cap \mathcal{U}) \cup (\overline{B} \cap \mathcal{U})$$

$\mathcal{U}$ = elemento neutro da interseção:

$$B \cup \overline{B}$$

Por propriedade do complemento:

$$\mathcal{U}$$

Demonstrado que $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathcal{U}$.

c) $(A \cap B) - B = \varnothing$

Manipulando a expressão $(A \cap B) - B$:
Pela definição de diferença:

$$(A \cap B) \cap \overline{B}$$

Pela propriedade associativa da interseção:

$$A \cap (B \cap \overline{B})$$

Por propriedade do complemento:

$$A \cap \varnothing$$

$\varnothing$ = elemento absorvente da interseção:

$$\varnothing$$

Demonstrado que $(A \cap B) - B = \varnothing$.

d) $(A \cup B) - B = A - B$

Manipulando a expressão $(A \cup B) - B$:
Pela definição de diferença:

$$(A \cup B) \cap \overline{B}$$

Pela propriedade distributiva:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})$$

Por propriedade do complemento:

$$(A \cap \overline{B}) \cup \varnothing$$

$\varnothing$ = elemento neutro da união:

$$A \cap \overline{B}$$

Pela definição de diferença:

$$A - B$$

Demonstrado que $(A \cup B) - B = A - B$.

5.

$A \subseteq B \rightarrow 2^A \subseteq 2^B$

Se $X \in 2^A$, então $X \subseteq A$.

Se $X \subseteq A$, como $A \subseteq B$, $X \subseteq B$.

Se $X \subseteq B$, então $X \in 2^B$.

Logo, temos $X \in 2^A \rightarrow X \in 2^B$, ou seja, $2^A \subseteq 2^B$.

Provado que $A \subseteq B \rightarrow 2^A \subseteq 2^B$.

6.

a) $A = (A - B) \uplus (A \cap B)$

Manipulando a expressão $(A - B) \uplus (A \cap B)$:

Pela definição de diferença:

$$(A \cap \overline{B}) \uplus (A \cap B)$$

Pelo processo inverso da distributiva:

$$A \cap (\overline{B} \uplus B)$$

Por propriedade do complemento:

$$A \cap \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ = elemento neutro da interseção:

$$A$$

Demonstrado que $A = (A - B) \uplus (A \cap B)$.

b) $A \cup B = (A - B) \uplus (A \cap B) \uplus (B - A)$

Analisando a expressão $(A - B) \uplus (A \cap B) \uplus (B - A)$:

Pela definição de diferença:

$$(A \cap \overline{B}) \uplus (A \cap B) \uplus (B \cap \overline{A})$$

Pelo processo inverso da distributiva:

$$(A \cap (\overline{B} \uplus B)) \uplus (B \cap \overline{A})$$

Por propriedade do complemento:

$$(A \cap \mathcal{U}) \uplus (B \cap \overline{A})$$

$\mathcal{U}$ = elemento neutro da interseção:

$$A \uplus (B \cap \overline{A})$$

Pela propriedade distributiva:

$$(A \uplus B) \cap (A \uplus \overline{A})$$

Por propriedade do complemento:

$$(A \uplus B) \cap \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ = elemento neutro da interseção:

$$A \uplus B$$

Considerando A e B disjuntos:

$$A \cup B$$

Demonstrado que $A \cup B = (A - B) \uplus (A \cap B) \uplus (B - A)$.

7.

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 5\}, C = \{2, 7\}$

Temos $A \cap B = \{2\}$ e $A \cap C = \{2\}$, enquanto $B \neq C$.

8.

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Para provar que $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$, devemos provar separadamente que $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$ e $(A - B) \cup (B - A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$.

(1) $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$

Seja $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$.

Pela definição de diferença:

$$x \in (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cup B) \wedge x \in (\overline{A \cap B})$$

Por De Morgan:

$$x \in (A \cup B) \wedge x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$$

Pela definição de união:

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})$$

Pela propriedade distributiva:

$$((x \in A \vee x \in B) \wedge x \in \overline{A}) \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \in \overline{B})$$

Pela propriedade distributiva:

$$((x \in A \wedge x \in \overline{A}) \vee (x \in B \wedge x \in \overline{A})) \vee ((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee (x \in B \wedge x \in \overline{B}))$$

$(x \in A \wedge x \in \overline{A})$ e $(x \in B \wedge x \in \overline{B})$ são contradições:

$$(\Box \vee (x \in B \wedge x \in \overline{A})) \vee ((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee \Box)$$

Pela propriedade de identidade da disjunção $(p \vee \Box = p)$:

$$(x \in B \wedge x \in \overline{A}) \vee (x \in A \wedge x \in \overline{B})$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (B \cap \overline{A}) \vee x \in (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de diferença:

$$x \in (B - A) \vee x \in (A - B)$$

Pela definição de união:

$$x \in (B - A) \cup (A - B)$$

Por comutatividade da união:

$$x \in (A - B) \cup (B - A)$$

Logo, $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$, ou seja, $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$.

Provado que $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$.

(2) $(A - B) \cup (B - A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$

Seja $x \in (A - B) \cup (B - A)$.
Pela definição de união:

$$x \in (A - B) \vee x \in (B - A)$$

Pela definição de diferença:

$$x \in (A \cap \overline{B}) \vee x \in (B \cap \overline{A})$$

Pela definição de interseção:

$$(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee (x \in B \wedge x \in \overline{A})$$

Pela propriedade distributiva:

$$((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee x \in B) \wedge ((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee x \in \overline{A})$$

Pela propriedade distributiva:

$$((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in B)) \wedge ((x \in A \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in \overline{A}))$$

$(x \in \overline{B} \vee x \in B)$ e $(x \in A \vee x \in \overline{A})$ são tautologias:

$$((x \in A \vee x \in B) \wedge \blacksquare) \wedge (\blacksquare \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in \overline{A}))$$

Pela propriedade de identidade da conjunção ($p \wedge \blacksquare = p$):

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in \overline{A})$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup B) \wedge x \in (\overline{B} \cup \overline{A})$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$$

Por comutatividade da união:

$$x \in (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

Pela propriedade do duplo complemento ($\overline{\overline{A}} = A$):

$$x \in (A \cup B) \cap \overline{\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}}$$

Por De Morgan:

$$x \in (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$

Pela definição de diferença:

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$$

Logo, $x \in (A - B) \cup (B - A) \rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, ou seja, $(A - B) \cup (B - A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$.

Provado que $(A - B) \cup (B - A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$.