Introdução a Simulação Discreta

-Parte I-

PROF.DR. PAULO E. MIYAGI

Escola Politrécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos

Texto baseado nas seguintes obras:

- Emilia Villani: *Abordagem Híbrida para Modelagem de Sistemas de Ar Condicionado em Edifícios Inteligentes*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, 2000.
- Fabrício Junqueira: *Modelagem de Sistemas Flexíveis de Movimentação de Materiais através de Redes de Petri Interpretadas*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, 2001.
- Gladys D.B. Gustin: *Aplicação de Redes de Petri Interpretadas na Modelagem de Sistemas de Elevadores em Edifícios Inteligentes*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, 2000.
- Jerry Banks, John S. Carson II & Barry L. Nelson: "*Discrete Event System Simulation*", 2nd Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- Luis A.M. Riascos: *Modelagem do Tratamento de Falhas em Sistemas de Manufatura Através de Redes de Petri Auto-Modificáveis*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1998.

São Paulo, SP

2002

1. INTRODUÇÃO À SIMULAÇÃO

Simulação é, em geral, entendida como a “imitação” de uma operação ou de um processo do mundo real. Independentemente do uso de computadores, a simulação envolve a geração de uma “história artificial” de um sistema para a análise de suas características operacionais.

O comportamento de um sistema é estudado através de um **modelo de simulação**. Este modelo geralmente utiliza diversos parâmetros sobre a operação do sistema. Uma vez desenvolvido e validado, o modelo pode ser usado para investigar uma grande variedade de questões sobre o sistema. Mudanças no sistema podem ser simuladas a fim de prever seu impacto no seu desempenho. A simulação pode também ser usada para estudar sistemas ainda na fase de concepção, antes que sejam efetivamente implementados. Assim, a simulação pode ser usada como uma ferramenta para predizer os efeitos de uma mudança em sistemas existentes e também como uma ferramenta de projeto para avaliar e validar o desempenho de novos sistemas.

Existem casos onde um modelo é baseado em formulações matemáticas. Este modelo é, em geral, desenvolvido através de cálculo diferencial, teoria da probabilidades, métodos algébricos, etc. Entretanto, muitos sistemas na vida real são tão complexos que seus modelos matemáticos são impossíveis de serem adequadamente desenvolvidos. Nestes casos, pode-se utilizar as técnicas de simulação computadorizadas para “imitar” o comportamento do sistema num certo intervalo de tempo. A partir desta simulação, dados são coletados como se um sistema real estivesse sendo observado. Estes dados podem então ser usados para estimar as medidas de desempenho do sistema.

1.1 Quando a simulação é uma ferramenta apropriada?

A maior disponibilidade de **ferramentas de simulação**, a crescente capacidade computacional e os avanços nas metodologias de simulação fizeram da simulação uma das técnicas mais usadas e aceitas em tarefas de análise e desenvolvimento de sistemas.

Considera-se que a simulação pode ser usada principalmente para as seguintes finalidades:

- Estudar as interações internas de um sistema complexo, ou de um subsistema dentro de um sistema complexo.
- Realizar alterações nas informações, na organização e no ambiente do sistema para observar seus efeitos no comportamento do modelo.
- Adquirir maior conhecimento sobre o modelo de simulação e sobre o processo de desenvolvimento do modelo para melhorias do sistema em estudo.
- Identificar as variáveis mais importantes de um sistema e como elas interagem através do estudo das variáveis de entrada e das saídas resultantes.
- Reforçar métodos de solução analítica, sendo neste caso utilizado como um instrumento pedagógico.

- Experimentar novos projetos ou novos procedimentos antes das suas implementações, e assim estar preparado para o que puder acontecer.
- Verificar soluções analíticas, sendo neste caso utilizado como um instrumento de validação.

1.2 Vantagens e desvantagens da simulação

A simulação é vantajosa quando ela "imita" com menor custo e/ou menos recursos o que acontece num sistema real. Os dados de saída de uma simulação devem corresponder diretamente às saídas que seriam obtidas do sistema real. Em contraste com as técnicas analíticas, a simulação de modelos é "**executada**" ao invés de ser resolvida. Dado um conjunto particular de entradas o modelo é executado e o comportamento do sistema é estudado. Este processo de alteração de variáveis do modelo resulta em um conjunto de cenários a serem avaliados. Os cenários resultantes da análise realizada de um sistema definem uma especificação de implementação.

As principais vantagens da simulação são:

- Novas políticas, procedimentos operacionais, regras de decisão, fluxos de informação, procedimentos organizacionais, etc. podem ser estudados sem interferência nas operações do sistema real.
- Novos equipamentos, arranjos físicos, sistemas de transporte, etc. podem ser testados antes de se investir recursos com as aquisições envolvidas.
- Hipóteses de como e por que certos fenômenos ocorrem podem ser avaliados para verificar sua praticidade.
- O tempo pode ser comprimido ou expandido, permitindo que o fenômeno em estudo possa ser acelerado ou retardado.
- Critérios adicionais podem ser derivados em função do estudo da interação entre as variáveis.
- Critérios sobre o papel das variáveis no desempenho do sistema podem ser identificados.
- "Gargalos" onde os processos, informações, ou materiais têm seus fluxos comprometidos podem ser identificados.
- Pode-se conhecer melhor como o sistema opera ao invés de se basear apenas em como as pessoas acham que ele opera.
- Perguntas do tipo "E se...?" podem ser respondidas. Isto é particularmente útil no desenvolvimento de novos sistemas.

As principais desvantagens são:

- A construção de modelos requer um treinamento especial. É considerada uma "arte" que se aprende ao longo do tempo e que envolve o "bom" uso da experiência. Se dois modelos forem construídos por dois indivíduos diferentes, estes poderão ser similares, porem dificilmente iguais.

- Os resultados da simulação podem ser difíceis de interpretar. Como quase todas as saídas da simulação são essencialmente variáveis aleatórias (já que geralmente são baseadas em entradas aleatórias), pode ser difícil determinar se os resultados observados resultam de inter-relações efetivas das partes do sistema ou se são fruto da aleatoriedade do sistema.
- A modelagem e a análise da simulação podem consumir muito tempo e muitos recursos. Por outro lado, economizar demasiadamente tempo e recursos na modelagem e na análise pode resultar em cenários que não sejam suficientes para atender os objetivos.

Na defesa do uso da simulação, as desvantagens acima citadas têm-sido rebatidas com os seguintes argumentos:

- Produtores de *softwares* de simulação têm continuamente desenvolvido pacotes que contêm modelos pré concebidos nos quais é necessário somente entrar com os dados da operação. Estes modelos são chamados de “templates” para facilitar a edição de novos modelos.
- Muitos produtores de software têm desenvolvido pacotes com ferramentas que facilitam a análise detalhada dos dados de saída da simulação.
- Os avanços nas plataformas computacionais permite que a simulação seja realizada mais rapidamente hoje em dia e indicam que será cada vez mais rápida com o passar dos anos.

1.3 Áreas de aplicação

As áreas de aplicação da simulação são muito amplas e variadas. Algumas das áreas de aplicação identificadas pelos trabalhos apresentados em recentes eventos técnico-científicos são:

Sistemas de Manufatura

- Sistemas de manipulação e movimentação de materiais
- Operações de montagem de aeronaves
- Planejamento da interoperação entre sistemas de estoques
- Modelo distribuído para manufatura integrada por computador
- Manufatura ágil (*lean manufacturing*)
- Programação de atividades com limitação de recursos

Sistemas de Saúde

- Previsões de custo e faturamento de produtos farmacêuticos
- Redução de tempo de internamento em departamentos de emergência
- Otimização do atendimento em ambulatórios
- Gerenciamento dos recursos hospitalares

Sistemas envolvendo recursos naturais

- Gerenciamento de sistemas de coleta de lixo
- Operação eficiente de plantas nucleares
- Atividades de restauração do ambiente

Sistemas de Transporte

- Transferências de cargas
- Operações de *containers* em portos
- Postos de pedágio flexíveis de acordo com a demanda

Sistemas de construção

- Processo de montagem de pontes suspensas
- Novos paradigmas do processo construtivo
- Interface para as ferramentas de projeto e construção

Sistemas de restaurantes e entretenimento

- Análise do fluxo de clientes em *fast-foods*
- Determinação do número ideal de funcionários de empresas de serviços
- Atividades em parques temáticos

Reengenharia e processo de negócios

- Integração de sistemas baseado no fluxo de tarefas
- Análise de soluções

Processamento de alimentos

- Operações no processamento de pescados
- Avaliação da capacidade no processamento de cereais

Desempenho de sistemas computacionais

- Sistemas com arquitetura Cliente/Servidor
- Redes heterogêneas

2. SISTEMAS E AMBIENTE DO SISTEMA

Para modelar um sistema, é necessário assimilar o conceito de **sistema** e de **fronteira do sistema**. Um **sistema** é definido como um grupo de objetos que estão agregados de acordo com uma relação de interdependência para atingir certos objetivos. Um exemplo é o sistema de produção de automóveis: as máquinas, peças e operários formam um conjunto que opera com interações entre si, visando um objetivo que poderia ser a fabricação de automóveis de alta qualidade.

Um sistema é muitas vezes afetado por mudanças que ocorrem fora do sistema. Estas mudanças ocorrem, portanto, no chamado ambiente externo do sistema. Em modelagem de sistemas, é necessário definir a fronteira entre o sistema e seu ambiente. Esta definição depende da finalidade do estudo.

No caso de um sistema fabril, por exemplo, os fatores que controlam a chegada de ordens de fabricação podem ser considerados como uma influência externa à fábrica e, portanto, parte do amb iente. Contudo, se o efeito da demanda na variação da produção for um fator decisivo para o processo, haverá claramente uma relação entre a oferta da fábrica e a demanda, e esta relação precisa ser considerada como uma atividade do sistema.

2.1 Componentes de um sistema

Para entender e analisar um sistema, certos termos são pré-definidos.

- Uma **entidade** é um objeto de interesse em um sistema.
- Um **atributo** é uma propriedade da entidade.
- Uma **atividade** representa uma ação.

Por exemplo, se um banco estiver em estudo, os clientes seriam as entidades, os saldos de suas contas seriam os atributos e, a realização de depósitos seria uma atividade.

O conjunto de entidades de um sistema (para um certo estudo) pode ser um subconjunto de um sistema mais geral (para outro estudo). Por exemplo, se o caso do banco mencionado acima está sendo estudado para se determinar o número de atendentes necessários para atividades de depósitos e saques, o sistema seria definido como a porção do banco composta pelos funcionários e pela fila de espera de clientes. Se o objetivo do estudo for expandido para se determinar também o número de funcionários adicionais necessários (para funções extras, como por exemplo venda de cheques de viagem), a definição de sistema teria que ser expandida.

- **estado** de um sistema é definido como um conjunto de variáveis necessárias para descrever o sistema num determinado instante.

No estudo do banco citado, as possíveis variáveis de estado são o número de funcionários, o número de clientes esperando na fila ou sendo atendidos e, o tempo de chegada de um novo cliente.

- Um **evento** é definido pela sua ocorrência e, que altera o estado do sistema (o evento pode ser entendido como uma atividade primária e instantânea que não admite decomposição).

O termo *endogenia* é usado para descrever atividades e eventos que ocorrem dentro do sistema, e o termo *exogenia* é usado para descrever atividades e eventos no ambiente externo que afetam o sistema. No estudo do banco citado, a chegada de um cliente é um evento *exógeno*, e o término do atendimento de um cliente é um evento *endógeno*.

A Tabela 2.1 lista exemplos de entidades, atributos, atividades, eventos e estado das variáveis de diversos sistemas. Somente uma listagem parcial dos componentes do sistema é mostrado pois, uma lista completa depende do objetivo do estudo. De acordo com o objetivo, identificam-se os aspectos do sistema que são de interesse, e então a listagem dos componentes pode ser completada.

Tabela 2.1 Exemplos de sistemas e seus componentes

Sistema	*Entidades*	*Atributos*	*Atividades*	*Eventos*	*Variáveis de estado*
Bancos	*Clientes*	*Conta corrente*	*depósito, retirada*	*Chegada ao banco, saída do banco*	*número de caixas ocupados, número de clientes esperando*
Transporte	*Veículos transportadores*	*Malha viária, destino*	*Transporte (movimentação)*	*Chegada na estação, saída da estação*	*número de veículos esperando em cada estação, número de veículos em transito*
Manufatura	*Máquinas*	*Velocidade, capacidade, taxa de falhas*	*Usinagem, estampagem, soldagem*	*falha, quebra*	*estado da máquina (ocupado, livre, quebrada)*
Comunicações	*Mensagens*	*Comprimento, destino*	*Transmissão de mensagens*	*Chegada da mensagem ao destino*	*número de mensagens esperando para serem transmitidos*
Inventário	*Almoxarifado, estoque*	*Capacidade*	*retirada de partes*	*Pedido*	*Nível do estoque, demanda prevista*

2.2 Sistemas discretos e contínuos

Os sistemas podem ser classificados como discretos ou contínuos. De fato, poucos sistemas na prática são completamente discretos ou contínuos, mas em geral, na maioria dos sistemas existe uma predominância do comportamento de um dos tipos. Assim, em geral, é possível considerar um sistema como sendo discreto ou contínuo.

Num **sistema discreto** o estado das variáveis é discreto e é alterado somente em instantes específicos. Um banco é um exemplo de sistema discreto, já que o estado da variável <número de clientes no banco>, é alterada somente quando eventos do tipo <chegada de cliente> ou <finalização do serviço do cliente> ocorrem. A Figura 2.1 ilustra como o número de clientes é alterado com a ocorrência de eventos.

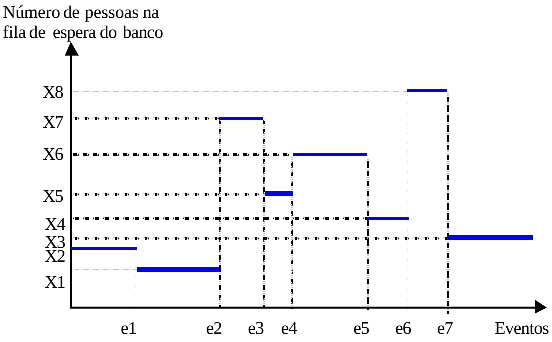

Figura 2.1 Variáveis de estado num sistema discreto

Num **sistema contínuo** o estado das variáveis é alterado continuamente ao longo do tempo. Um exemplo é o nível de água em uma represa. Este nível pode aumentar, por exemplo, devido a chuvas e a operação de outras represas na cabeceira dos rios. O nível pode abaixar, por exemplo quando as comportas da represa são abertas, quando o volume de água é usado para geração de eletricidade, pela evaporação natural, etc. A Figura 2.2 ilustra como o estado da variável <nível d'água> pode se comportar neste sistema contínuo.

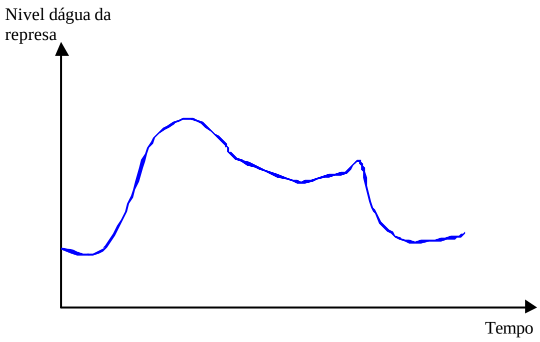

Figura 2.2 Variáveis de estado num sistema contínuo

2.3 Modelo de um sistema

Muitas vezes existe interesse no estudo das relações entre os componentes de um sistema ou então na previsão de como este se comportarão diante de certas mudanças. Em alguns casos é possível experimentar o próprio sistema real. Porém, em outros casos, estando o sistema em concepção ou sendo ele já existente, pode ser impraticável experimentá-lo. Por exemplo, não seria aceito um teste de duplicar a taxa de desemprego para verificar o seu efeito na inflação. No caso de um banco, a redução do número de atendentes para estudar o efeito nas filas de espera pode gerar um descontentamento nos clientes a ponto deles trocarem de banco. Conseqüentemente, o estudo de sistema é geralmente realizado com base num modelo.

Um **modelo** (em engenharia) pode ser definido como uma representação de um sistema com o intuito de estudá-lo. Para a maioria dos casos, é necessário somente considerar os aspectos do sistema que afetam esse estudo.

Estes aspectos são representados no modelo do sistema, e este modelo, por definição, é uma simplificação do sistema. Por outro lado, o modelo deve ser suficientemente detalhado para permitir conclusões válidas sobre o sistema real. Diferentes modelos de um mesmo sistema podem ser necessários de acordo com o objetivo do estudo.

Os modelos devem considerar a representação de todos os componentes de um sistema como as entidades, atributos, atividades, eventos e estados. Contudo, o modelo para um estudo específico em geral deve conter somente os componentes que são relevantes para o caso.

2.4 Tipos de modelos

Modelos podem ser classificados como sendo matemáticos ou físicos. Um modelo matemático usa notação simbólica e relações matemáticas para representar um sistema. Um modelo de simulação é um tipo particular de modelo matemático de um sistema.

Modelos podem ser ainda classificados como determinísticos ou estocásticos e, discretos ou contínuos.

Modelos que não contêm variáveis aleatórias são classificados como determinísticos. Modelos determinísticos têm um conjunto conhecido de entradas, os quais resultarão em um único conjunto de saídas. Um modelo estocástico possui uma ou mais variáveis aleatórias como entrada que levam a saídas aleatórias. Assim, as saídas da simulação estocástica devem ser tratadas como estimativas estatísticas das características reais de um sistema.

Modelos discretos e contínuos são definidos de acordo com as mesmas considerações que definem se um sistema é discreto ou contínuo. Contudo, um modelo de **simulação discreta** não é usado apenas para modelar um sistema discreto, nem um modelo de **simulação contínua** é exclusivo para modelar sistemas contínuos. Modelos de simulação são de fato muito úteis para análise em conjunto de fenômenos discretos e contínuos. A escolha de qual deles usar é função das características do sistema e do objetivo do estudo. Assim, um canal de comunicação pode ser modelado discretamente se as características da transmissão de cada mensagem for importante. Porém, se o fluxo geral de mensagens no canal for mais importante, é mais apropriado usar a abordagem contínua.

2.5 Simulação de sistemas a eventos discretos

A simulação de sistemas a eventos discretos é própria para a análise de sistemas no qual o estado (discreto) das variáveis muda apenas com a ocorrência de eventos (instantâneos). Os modelos de simulação são analisados por **métodos numéricos** ao invés de métodos analíticos.

Métodos analíticos empregam o raciocínio dedutivo/matemático para resolver um modelo. Por exemplo, o cálculo diferencial pode ser usado para determinar a política de custo mínimo para um modelo de inventário.

Métodos numéricos empregam procedimentos computacionais para resolver modelos matemáticos. No caso de modelos de simulação, que empregam métodos numéricos, modelos são executados ao invés de resolvidos; isto é, uma história artificial do sistema é gerada baseada nas suposições assumidas para o modelo. Resultados e observações são colhidas para serem analisadas e estimadas para medir o desempenho do sistema real.

Como os modelos de simulação do mundo real são relativamente complexos, e a quantidade de informações manipuladas é muito grande, geralmente utilizam-se computadores para executar a simulação.

2.6 Procedimento básico para uma simulação

A Figura 2.3 ilustra o procedimento básico para uma análise de sistemas por simulação.

Os passos neste procedimento são os seguintes:

- **Formulação do problema**: Todo estudo deve começar pela definição do problema. Se as definições são realizadas pelo usuário que está com o problema, o analista deve se assegurar de que o problema foi efetivamente entendido. Se as definições do problema são desenvolvidas pelo analista, é importante que o usuário também entenda e esteja de acordo com a formulação. Apesar de não estar indicado na Figura 2.3, há ocasiões em que o problema precisa ser reformulado à medida que o estudo evolui.
- **Definição dos objetivos e planejamento geral**: Os objetivos envolvem as questões que precisam ser respondidas pela simulação. Neste ponto deve-se confirmar que a simulação é a técnica adequada para tratar o problema e, como se planeja atingir os objetivos previstos. Assumindo que a simulação é apropriada, o planejamento geral deve incluir uma indicação das alternativas que devem ser consideradas, e um critério para avaliar a efetividade dessas alternativas. Deve indicar também as estratégias para o estudo em termos do número de pessoas envolvidas, o custo do estudo, o número de dias necessários para completar cada fase e, os resultados previstos no final de cada estágio.

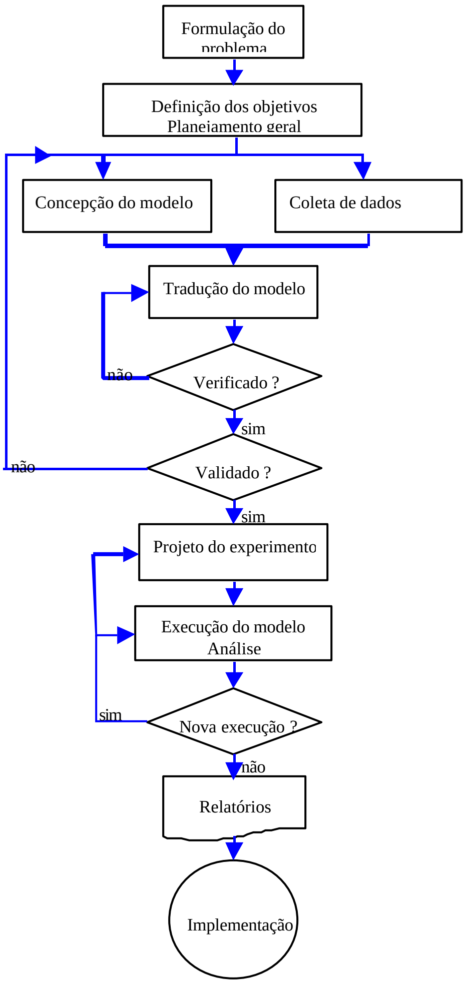

Figura 2.3 Procedimento básico para análise de sistemas por simulação

- **Concepção do modelo**: Apesar de não ser possível definir um conjunto de regras para a construção bem sucedida de modelos, existem algumas informações úteis. A tarefa de modelagem é evidenciada pela necessidade de certa habilidade para abstrair as características essenciais de um problema, para selecionar e modificar as suposições que caracterizam o sistema, e para realçar a descrição dos resultados obtidos. Em geral, é melhor começar com um modelo simples, e então, a partir deste, chegar a modelos mais complexos. A complexidade do modelo não deve ser maior que aquela requerida para alcançar os objetivos do estudo. A violação deste princípio aumenta os custos de construção do modelo e de execução do modelo. Não é necessário ter uma correspondência biunívoca entre o modelo e o sistema real. Apenas a essência do sistema real é necessária no modelo. É aconselhável envolver o usuário na concepção do modelo. Isto aumenta a qualidade do modelo resultante e a confiança deste usuário na aplicação do modelo.
- **Coleta de dados**: Há uma constante inter-relação entre a concepção do modelo e os dados de entrada necessários. Ao variar a complexidade do modelo, os dados necessários também podem mudar. Como a coleta de dados pode dispender muito tempo, é recomendável iniciar esta fase o quanto antes,

geralmente junto com as etapas iniciais da construção do modelo. Os objetivos do estudo definem o tipo de dados a serem coletados. No estudo de um banco, por exemplo, se o desejo é avaliar o comprimento de filas de espera em função do número de atendentes, os dados necessários seriam: a distribuição de tempos de chegada de clientes, os tempos necessários para realizar os serviços de cada atendente, etc.

- **Tradução do modelo**: Os sistemas do mundo real podem resultar em modelos que necessitam de uma grande quantidade de informações e recursos computacionais assim, o modelo precisa ser traduzido para um formato adequado para os programas de computador. Utiliza-se aqui o termo “programa”, mesmo que seja possível obter o resultado desejado com pouco ou até mesmo nenhuma codificação para computador. O modelador precisa decidir se editará o modelo em uma linguagem de simulação como o SIMSCRIPT, SIMAN, SLAMSYSTEM, etc. ou então se usará pacotes de *softwares* específicos como o ProModel, ARENA, AutoMod, etc.. As linguagens de simulação são geralmente mais poderosas e mais flexíveis que os pacotes de *softwares* para fins específicos. Contudo, se o problema é passível de resolução com o uso de pacotes de *softwares*, o tempo de desenvolvimento de modelo será reduzido consideravelmente. Além disso, a maioria dos pacotes de *softwares* tem acrescentado características que aumentam sua flexibilidade.
- **Verificado?** : A verificação em geral faz parte do processo de edição do modelo e programação do computador preparando-o para a simulação. Deve-se verificar se o programa de computador está executando o modelo conforme o esperado. Modelos complexos, envolvem maiores riscos na sua tradução para o computador e por isso deve-se ter maior cuidado nestes casos.
- **Validado?** : Validação é a confirmação de que um modelo é uma representação adequada do sistema real. Validação é geralmente resultante da calibração do modelo, isto é, um processo iterativo de comparar o modelo ao comportamento do sistema real, usando as discrepâncias entre os dois e as conclusões obtidas para melhorar o modelo. Este processo é repetido até que o modelo seja julgado aceitável. Um meio de validar o modelo é verificar se o modelo de simulação gera resultados coerentes com os dados coletados.
- **Projeto do Experimento**: As alternativas que serão simuladas devem ser determinadas. Em geral, a decisão de quais alternativas serão simuladas é função dos resultados da simulação que foram previamente obtidos e analisados. Para cada projeto de sistema que é simulado, decisões precisam ser tomadas sobre a magnitude dos valores de inicialização, do tempo de simulação, e o número de repetições que devem ser feitas.
- **Execução do modelo e análise**: A execução do modelo e sua subseqüente análise são realizadas e utilizadas para estimar medidas de desempenho para o sistema que está sendo simulado.
- **Nova execução?**: Baseado na análise das execuções que foram completadas, determina-se se são necessários experimentos adicionais e se novas especificações devem ser consideradas.
- **Relatórios**: Existem dois tipos de documentação: do programa e do experimento. A documentação do programa (do modelo de simulação) é imprescindível quando o programa é usado novamente e, é

fundamental para a confiança no programa de modo que os usuários do modelo possam tomar decisões baseados na análise dos dados gerados. Outra razão para documentar um modelo é o fato de que os usuários podem alterar parâmetros do modelo. Os relatórios dos experimentos fornecem a “história” do projeto de simulação. Os relatórios de progresso explicitam a cronologia do trabalho realizado e das decisões tomadas. Relatórios periódicos, são efetivos mesmo para aqueles que não estejam envolvidos no dia a dia do projeto para identificação de problemas quando estes ainda podem ser reparados. Um “histórico” do projeto deve fornecer uma lista compreensiva de realizações, mudanças, decisões e outros itens de importância. Nos relatórios intermediários, devem estar as especificações do modelo, demonstrações do protótipo, animações, resultados de treinamentos, análises intermediárias, documentação do programa, relatórios de progresso e apresentações. Os resultados das análises devem ser apresentados de forma clara e concisa em um relatório final. Isto permitirá que os usuários do modelo revejam a formulação final, os critérios pelos quais alternativas de sistemas foram comparadas, os resultados de experimentos, e a solução recomendada.

- **Implementação**: O sucesso da fase de implementação depende de como foram conduzidos os passos anteriores. É também dependente de quão bem o usuário do sistema foi envolvido durante o processo de modelagem e simulação. Se o usuário esteve envolvido durante o processo de edição do modelo e entende a natureza do modelo e suas saídas este poderá contribuir efetivamente para a fase de implementação.

A simulação é uma abordagem poderosa que pode ser usada para analisar muitos problemas complexos. Entretanto, antes da simulação ser escolhida como um método de solução, deve-se avaliar se o problema pode ser resolvido matematicamente, eventualmente através de teoria de filas, ou de outras técnicas. O desenvolvimento de modelos para simulação podem levar muito tempo, e se já existe uma solução analítica, esta poderá ser mais efetiva.

3. EXEMPLOS DE SIMULAÇÃO

Este capítulo apresenta exemplos relativamente simples mas que ilustram alguns procedimentos específicos para as simulações de sistemas a eventos discretos. As simulações neste capítulo seguem os seguintes passos:

- Determinação das características dos dados de entrada da simulação. Freqüentemente, estes dados podem ser modelados matematicamente como distribuições probabilísticas, variáveis contínuas ou discretas.
- Elaboração de uma estratégia de casos de simulação. Cada caso de simulação é diferente, isto é, para cada um existe um desenvolvimento específico. Um exemplo de caso de simulação é ilustrado na Tabela 3.1. neste exemplo existem p dados de entrada, x_{ij}, $j = 1,2,...,p$, e uma resposta y_i, para cada uma das situações simuladas $i = 1,2,... n$.
- Análise dos resultados em função das respostas y_i relativas a cada situação i e as correspondentes entradas x_{ij}.

Tabela 3.1 Tabela de casos (situações) de simulações:

	Entradas						Resposta
Casos	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{ip}	y_i
1							
2							
3							
…							
…							
…							
N							

3.1 Simulação de sistemas de filas

Um sistema de filas é caracterizado por uma população de elementos que desejam um serviço, pela natureza das chegadas dos elementos para execução dos serviços, pela natureza dos serviços a serem realizados, pela capacidade do sistema e pela disciplina de fila. Um sistema discreto de filas é ilustrado na Figura 3.1.

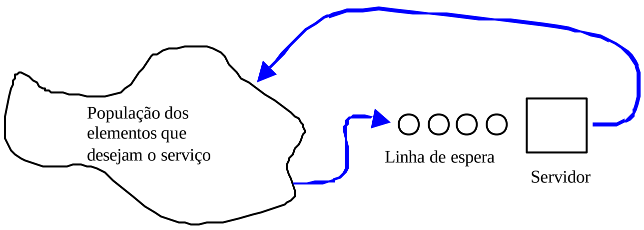

Figura 3.1 Sistema de filas.

Neste sistema considera-se que a população é infinita, isto é, se um elemento desta população for para a fila de espera do serviço, não existe alteração na taxa de chegada de outros elementos que estejam precisando deste serviço. A chegada dos elementos para os serviços ocorre de uma forma individual e estocástica através da fila de espera, de onde serão atendidos pelo servidor. O tempo de serviço é definido de acordo com uma distribuição de probabilidades que é considerada constante. A capacidade do sistema é considerada infinita (o sistema inclui o elemento que está no servidor mais aqueles que estão esperando na fila).Os elementos são atendidos pelo servidor na ordem de chegada (num procedimento conhecido como FIFO: *first in, first out*).

“Chegadas de elementos” são descritas por uma distribuição do tempo entre os instantes de chegada. “Serviços” são descritos por uma distribuição do tempo de serviço. O total das taxas de chegadas efetivas deve ser menor do que a taxa máxima de serviço, ou a fila de espera crescerá indefinidamente (em alguns sistemas onde filas de entrada formam ciclos reentrantes, apesar da condição ser necessária, esta pode não ser suficiente). Quando as filas crescem indefinidamente, elas são chamadas de instáveis. Uma situação excepcional seria a taxa de chegada ser maior do que a taxa de serviço por um curto período de tempo.

Antes de apresentar os vários casos de simulação de sistemas de filas, é necessário entender o conceito de estado do sistema, eventos e relógio (*clock*). O **estado** do sistema é definido em função do número de elementos no sistema e da situação do servidor: ocupado ou disponível. Um **evento** é uma mudança instantânea no estado do sistema. No caso de uma fila única existem somente dois eventos que podem afetar o estado do sistema: a entrada de um elemento dentro do sistema (evento de chegada) e a finalização de um serviço sobre um elemento (evento de saída).

Quando um serviço é completado, a simulação é segue o fluxograma da Figura 3.2.

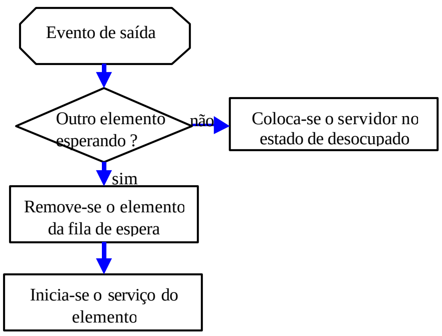

Figura 3.2. Fluxograma das atividades do servidor

O segundo evento ocorre quando um elemento entra no sistema. O fluxograma está na Figura 3.3. O elemento pode encontrar o servidor ocupado ou disponível, assim, ou o elemento vai ao servidor ou entra na fila para ser atendido.

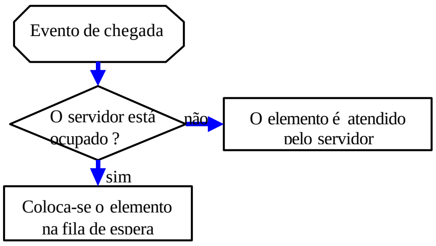

Figura 3.3 Fluxograma quando um elemento entra no sistema

Se o servidor está disponível e a fila vazia, o elemento que chega é imediatamente atendido pelo servidor. Considera-se impossível a situação onde o servidor está disponível e a fila não vazia.

Depois de completar um serviço, o servidor pode ficar disponível ou permanecer ocupado com o próximo elemento. Se a fila não estiver vazia, outro elemento entrará no servidor e este ficará ocupado. Se a fila estiver vazia, o servidor ficará disponivel depois que o serviço for completado. Após o serviço ser completado é impossível ao servidor ficar ocupado se a fila estiver vazia. Analogamente, é impossível ao servidor estar disponível quando a fila não está vazia.

A simulações de um sistema de filas requer a manutenção de uma lista de eventos para determinar como o sistema se comporta. A **lista de eventos** indica a seqüência em que os eventos ocorrem no sistema. Esta sequência é interpretada de acordo com um **relógio** (tempo de simulação) que define os instantes da ocorrência dos eventos. Numa simulação, os eventos podem também ocorrer de modo aleatório. Este fato, imita a vida real quanto aos aspectos de incerteza. Por exemplo, não se conhece com certeza quando o próximo cliente entrará numa doceria, ou quanto tempo será gasto para completar uma transação.

A aleatoriedade para imitar a vida real pode ser implementada na simulação discreta através do uso de tabela de dígitos aleatórios. Isto é, considera-se um conjunto de dígitos aleatórios $\{0,1,2,...9\}$ uniformemente distribuídos que são utilizados para formar números aleatórios pela seleção apropriada do número de dígitos e colocando o ponto decimal à esquerda do valor obtido. O número de dígitos define a precisão dos dados para a simulação. Se a distribuição dos valores de entrada possue 2 casas decimais, 2 dígitos devem ser extraídos de uma tabela de dígitos aleatórios e o ponto decimal colocado a esquerda do número resultante.

Quando números são gerados através de um conjunto de procedimentos obtêm-se os chamados números pseudo-aleatórios. Isto é, como o método é conhecido, é sempre possível prever a seqüência de números utilizados na simulação.

Num sistema de fila única, os tempos entre chegadas e os tempos de serviço são determinados (gerados) com base numa distribuição destes números aleatórios. Os exemplos a seguir ilustram como tais tempos podem ser gerados. Para simplificar esta apresentação, assume-se que os tempos entre chegadas são gerados jogando-se cinco vezes um dado de 10 faces. A Tabela 3.2 contém um conjunto de 5 tempos entre chegadas geradas desta forma. Estes 5 tempos entre chegadas são utilizados para computar o tempo de chegada de 6 elementos no sistema de fila.

Tabela 3.2 Tempos entre chegadas e horário de chegada

Elemento (cliente)	*Tempo entre chegadas*	*Instante de chegada pelo relógio*
1	*-*	*0*
2	*2*	*2*
3	*4*	*6*
4	*1*	*7*
5	*2*	*9*
6	*6*	*15*

Assume-se que o primeiro elemento (cliente) chega no instante *0* (do relógio). Isto dispara o relógio. O segundo cliente chega *2* unidades de tempo depois (relógio = *2*). O terceiro cliente chega *4* unidades de tempo depois (relógio = *6*), e assim por diante.

O segundo tempo de interesse é o tempo de serviço. A Tabela 3.3 contém os tempos de serviço de cada elemento (cliente). Considera-se que os tempos de serviço possíveis são: *1*, *2*, *3*, e *4* unidades de tempo. Assumindo que todos os quatro valores têm a mesma probabilidade de ocorrer, estes valores podem ser gerados através de sorteio de uma bola - dentre 4 bolas (devidamente numeradas) dentro de um cesto - não esquecendo de repor a bola retirada no cesto a cada sorteio.

Tabela 3.3 Tempos de serviço

Elemento (cliente)	*Tempo de serviço*
1	*2*
2	*1*
3	*3*
4	*2*
5	*1*
6	*4*

Os intervalos entre chegadas e os tempos de serviço podem agora ser combinados para simular a dinâmica do sistema de fila única. Como indicado na Tabela 3.4, o primeiro elemento ("cliente") chega no instante *0* do relógio, e imediatamente o serviço é iniciado, o que dispende *2* unidades de tempo. O serviço é completado no instante *2* do relógio. O segundo elemento chega no instante *2* e seu serviço é concluído no instante *3*. Note que o quarto elemento chega no instante *7*, mas o serviço não pode começar antes do instante *9* do relógio. Isto ocorreu porque o serviço relativo ao terceiro elemento vai terminar apenas no instante *9*.

Tabela 3.4 Tempos de serviço

Elemento (cliente)	*Instante de chegada (tempo do relógio)*	*Início do serviço (tempo do relógio)*	*Tempo de serviço (duração)*	*Fim do serviço (tempo do relógio)*
1	*0*	*0*	*2*	*2*
2	*2*	*2*	*1*	*3*
3	*6*	*6*	*3*	*9*
4	*7*	*9*	*2*	*11*
5	*9*	*11*	*1*	*12*
6	*15*	*15*	*4*	*19*

A Tabela 3.4 apresenta um conjunto de dados de um sistema de fila única para elementos atendidos com base numa política de FIFO (o primeiro que entra é o primeiro que sai). A tabela indica os instantes no tempo de relógio que cada evento ocorre. A segunda coluna indica os instantes de cada evento de chegada (elemento entrando na fila), enquanto que a última coluna indica os instantes de cada evento de saída (finalização de serviço). O que ocorre entre estes dois tipos de eventos são indicados em ordem cronológica na Tabela 3.5 e na Figura 3.4.

Tabela 3.5 Ordem cronológica dos eventos

Tipo do evento	*Identificação do elementos (cliente)*	*Tempo do relógio*
chegada	*1*	*1*
saída	*1*	*2*
chegada	*2*	*2*
saída	*2*	*3*
chegada	*3*	*6*
chegada	*4*	*7*
saída	*3*	*9*
chegada	*5*	*9*
saída	*4*	*11*
saída	*5*	*12*
chegada	*6*	*15*
saída	*6*	*19*

A Tabela 3.5 é ordenada pelo tempo do relógio e pelo número de identificação do cliente. A ordem cronológica do evento é a base para o estudo por simulações a eventos discretos.

A Figura 3.4 indica quando e quais elementos estão na fila. É uma representação dos resultados das ocorrências dos eventos listados na Tabela 3.5. O primeiro elemento está no sistema do instante *0* até o instante *2* do relógio. O segundo elemento entra na fila no instante *2* e sai no instante *3* do relógio. Nenhum elemento está na fila do instante *3* ao instante *6*. Durante alguns períodos dois elementos estão na fila, como no instante *8*, quando o terceiro e quarto elementos estão esperando o servidor. Também, existem situações onde eventos ocorrem simultaneamente, como no instante *9*, quando o terceiro elemento sai e o quinto elemento entra na fila.

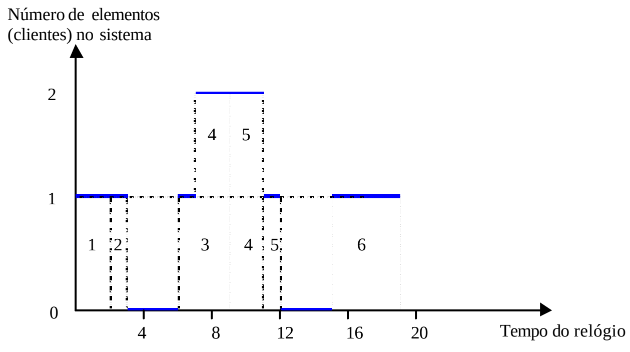

Figura 3.4 Número de elementos (clientes) no sistema

Exemplo 3.1 Fila única com um único servidor

Considera-se uma loja de roupas com somente um caixa. Clientes chegam no caixa e costumam esperar de *1* a *8* minutos. Cada possível intervalo de chegada tem a mesma probabilidade de ocorrer, como ilustrado na Tabela 3.6. O tempo de serviço varia de *1* a *6* minutos de acordo com as probabilidades indicadas na Tabela 3.7.

Tabela 3.6 Probabilidade dos tempos entre chegadas

Tempo entre chegadas (minutos)	*Probabilidade*
1	*0,125*
2	*0,125*
3	*0,125*
4	*0,125*
5	*0,125*
6	*0,125*
7	*0,125*
8	*0,125*

Tabela 3.7 Probabilidade dos tempos de serviço

Tempo de Serviço (minutos)	*Probabilidade*
1	*0,10*
2	*0,20*
3	*0,30*
4	*0,25*
5	*0,10*
6	*0,05*

O problema é analisar o sistema através da simulação de chegada de clientes e finalização dos serviços para *20* clientes.

De fato, *20* clientes é uma amostra muito pequena para se chegar a alguma conclusão final pois, a exatidão dos resultados está relacionada com o tamanho da amostra. O exemplo é assim apenas um modo de demonstrar como as simulações manuais podem ser conduzidas. Um outro ponto são as condições inicias: a simulação de uma loja que começa com um sistema vazio não é uma realidade, a menos que a intenção seja estudar o sistema no início de sua operação ou numa situação anterior ao ambiente de operação estável.

Neste exemplo será considerada uma tabela de dígitos aleatórios que podem ser utilizadas como base para a geração de números aleatórios. Dígitos aleatórios são convertidos em números aleatórios pela manipulação dos decimais no ponto apropriado. Por exemplo no caso dos tempos entre chegadas (Tabela 3.6), números com três dígitos são suficientes. É necessário listar somente *19* números aleatórios para os tempos entre chegadas, pois a primeira chegada é assumida como ocorrendo no instante *0*, e assim somente *19* outras unidades de tempo para as chegadas são necessárias para completar os *20* clientes.

A Tabela 3.6 e a Tabela 3.7 são assim complementadas com dados da probabilidade cumulativa da distribuição e dos dígitos aleatórios considerados.(Tabela 3.8 e Tabela 3.9)

Tabela 3.8 Distribuição dos tempos entre chegadas

Tempo entre chegadas (minutos)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
1	*0,125*	*0,125*	*001-125*
2	*0,125*	*0,250*	*126-250*
3	*0,125*	*0,375*	*251-375*
4	*0,125*	*0,500*	*376-500*
5	*0,125*	*0,625*	*501-625*
6	*0,125*	*0,750*	*626-750*
7	*0,125*	*0,875*	*751-875*
8	*0,125*	*1,000*	*876-1000*

Tabela 3.9 Distribuição dos tempos de serviço

Tempo de Serviço (minutos)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
1	*0,10*	*0,10*	*01-10*
2	*0,20*	*0,30*	*11-30*
3	*0,30*	*0,60*	*31-60*
4	*0,25*	*0,85*	*61-85*
5	*0,10*	*0,95*	*86-95*
6	*0,05*	*1,00*	*95-100*

O tempo entre chegadas para os clientes são gerados por uma lista de *19* valores de três dígitos de uma tabela de números aleatórios e comparados com os dígitos aleatórios da Tabela 3.8.

Considera-se uma "boa" prática iniciar o processo numa posição qualquer dentro da tabela de dígitos aleatórios e a partir daí ir seguindo numa direção específica, nunca reutilizando a mesma seqüência de dígitos de dados em um problema. Se o mesmo padrão é usado repetidamente, as mesmas seqüências poderão ser geradas comprometendo a aleatoriedade desejada. A determinação entre os tempos de chegada são ilustrados na Tabela 3.10. Note que o primeiro dígito aleatório é *913*. Através de uma comparação com os dados da quarta coluna na Tabela 3.8 deriva-se que o tempo entre chegadas correspondente é de *8* minutos (primeira coluna da Tabela 3.8).

Tabela 3.10 Determinação dos tempos entre chegadas

Cliente	*Dígitos aleatórios*	*Tempo entre chegadas (minutos)*
1	-	-
2	*913*	*8*
3	*727*	*6*
4	*015*	*1*
5	*948*	*8*
6	*309*	*3*
7	*922*	*8*
8	*752*	*7*
9	*353*	*2*
10	*302*	*3*
11	*109*	*1*
12	*093*	*1*
13	*607*	*5*
14	*738*	*6*
15	*359*	*3*
16	*888*	*8*
17	*106*	*1*
18	*212*	*2*
19	*493*	*4*
20	*535*	*5*

Os tempos de serviço para os *20* clientes são ilustrados na Tabela 3.11. Estes tempos de serviços são gerados baseados na metodologia anteriormente descrita, juntamente com a ajuda da Tabela 3.9. O primeiro tempo de serviço é de *4* minutos porque os dígitos aleatórios *84* estão no intervalo de *61-85*.

Tabela 3.11 Determinação dos tempos de serviço

Cliente	*Dígitos aleatórios*	*Tempo de serviço (minutos)*
1	84	4
2	10	1
3	74	4
4	53	3
5	17	2
6	79	4
7	91	5
8	67	4
9	89	5
10	38	3
11	32	3
12	94	5
13	79	4
14	05	1
15	79	5
16	84	4
17	52	3
18	55	3
19	30	2
20	50	3

A ferramenta básica da simulação manual é a tabela de simulação. Estas tabelas são desenvolvidas para uma situação e posteriormente manuseadas e estruturadas para responder às questões colocadas.

A tabela de simulação para este problema é uma extensão do tipo de tabela apresentada anteriormente (Tabela 3.4). Considera-se que o primeiro cliente chega no instante *0*. O serviço começa imediatamente e termina no instante *4*. Este cliente ficou no sistema por *4* minutos. O segundo cliente chega no instante *8* e o servidor ficou disponível por *4* minutos. No caso do quarto cliente, este chega no instante *15*, mas não poderá ser atendido antes do instante *18*. Assim, este cliente espera na fila por *3* minutos. Este processo continua para todos os *20* clientes. O desempenho geral do sistema é avaliado com base nos tempos de serviço, tempos que os clientes gastam dentro do sistema, tempos de disponibilidade do servidor e tempos que o cliente espera na fila.

Alguns destes valores são calculados como segue:

- O tempo médio de espera para os clientes:

$$\textit{Tempo médio de espera (minutos)} = \frac{\textit{Tempo total que os clientes esperam na fila (minutos)}}{\textit{Número total de clientes}} = \frac{56}{20} = 2{,}8 \textit{ minutos}$$

- A probabilidade que o cliente tem de esperar na fila:

$$\textit{Probabilidade (espera)} = \frac{\textit{Número de clientes que ficam na fila de espera}}{\textit{Número total de clientes}} = \frac{13}{20} = 0{,}65$$

- A proporção de tempo disponível do servidor:

$$\textit{Probabilidade de tempo disponível} = \frac{\textit{Tempo tolal em serviço serviço (minutos)}}{\textit{Tempo total de simulação (minutos)}} = \frac{18}{86} = 0{,}21$$

A probabilidade de um servidor estar ocupado é o complemento de *0,21*, isto é, *0,79*.

- O tempo médio de serviço:

$$\text{Tempo médio de serviço} = \frac{\text{Tempo total de serviço (minutos)}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{68}{20} = 3{,}4 \text{ minutos}$$

Este resultado pode ser comparado com o tempo esperado de serviço determinando-se a média da distribuição de tempo usando a equação:

$$E(S) = \sum_{s=0}^{\infty} s\,p(s)$$

Aplicando o valor desta equação para a distribuição na Tabela 3.9 temos que:

Tempo esperado de serviço = 1(0,10) + 2(0,20) +3(0,30) + 4(0,25) + 5(0,10) + 6(0,05) = 3,2 min.

O tempo esperado de serviço é um pouco menor que o tempo médio de serviço na simulação mas, quanto mais longa a simulação, mais o tempo médio se aproximará de *E(s)*.

- O tempo médio entre as chegadas:

$$\text{Tempo médio entre chegadas (minutos)} = \frac{\text{Somatória de todos os tempos entre chegadas (minutos)}}{\text{Números de chegadas} - 1} = \frac{82}{19} = 4{,}3 \text{ minutos}$$

1 é subtraído do denominador já que a primeira chegada é considerada como ocorrendo no instante 0. Este resultado pode ser comparado com a média da distribuição, cujos limites são $a = 1$ e $b = 8$:

$$E(A) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+8}{2} = 4{,}5 \text{ minutos}$$

Quanto mais longa a simulação mais a média dos tempos entre chegadas deverá se aproximar da média teórica, *E(A)*.

- O tempo médio de espera:

$$\text{Tempo médio de espera(minutos)} = \frac{\text{Tempo total dos clientes na fila de espera (minutos)}}{\text{Número de clientes que ficam na fila de espera}} = \frac{56}{13} = 4{,}3 \text{ minutos}$$

- O tempo médio que um cliente espera pode ser determinado em duas maneiras.

Primeira forma:

$$\text{Tempo médio que um cliente espera (minutos)} = \frac{\text{Tempo total que os clientes esperam no sistema (min)}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{124}{20} = 6{,}2 \text{ minutos}$$

Segunda forma:

$$\text{Tempo médio que um cliente espera (minutos)} = \text{Tempo médio que os clientes esperam na fila (minutos)} + \text{Tempo médio de serviço (minutos)}$$

Isto é:

$$\text{Tempo médio que um cliente espera (minutos)} = 2{,}8 + 3{,}4 = 6{,}2 \text{ minutos}$$

A tomada de uma decisão sobre o sistema pode ser baseada nestes resultados, mas com maior tempo de simulação pode-se aumentar a precisão dos dados obtidos. De qualquer modo, algumas observações podem ser realizadas. A maioria dos clientes tem que esperar na fila do caixa apesar do tempo médio de espera não ser muito grande. O servidor não fica muito tempo ocioso. Os objetivos considerados com base em tais resultados dependem de uma avaliação dos custos com servidores adicionais (simulações que envolvem variações das variáveis de chegada e de distribuição dos serviços são apresentados posteriormente)

Exemplo 3.2 Fila única com 2 servidores

O objetivo deste exemplo é ilustrar o procedimento de simulação quando existem vários canais. Considere uma lanchonete tipo *drive-thru* onde motoristas (clientes) fazem os pedidos e funcionários levam comida aos carros. Os clientes chegam de acordo com o indicado na Tabela 3.12.

Tabela 3.12 Distribuição dos tempos de entre chegadas dos clientes

Tempo entre chegadas (minutos)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
1	*0,25*	*0,25*	*01-25*
2	*0,40*	*0,65*	*26-65*
3	*0,20*	*0,85*	*66-85*
4	*0,15*	*1,00*	*86-100*

Existem 2 funcionários para atendimento: "*Able*" e "*Baker*". "*Able*" é mais trabalhador e habilidoso além de mais rápido que "*Baker*". A distribuição dos tempos de serviços são indicados na Tabela 3.13 e na Tabela 3.14.

Tabela 3.13 Distribuição dos tempos de serviço de "*Able*"

Tempo de serviço (minutos)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
2	*0,30*	*0,30*	*01-30*
3	*0,28*	*0,58*	*31-58*
4	*0,25*	*0,83*	*59-83*
5	*0,17*	*1,00*	*84-100*

Tabela 3.14 Distribuição dos tempos de serviço de "*Baker*"

Tempo de serviço (minutos)	*Probabilidade)*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
3	*0,35*	*0,35*	*01-35*
4	*0,25*	*0,60*	*36-60*
5	*0,20*	*0,80*	*61-80*
6	*0,20*	*1,00*	*81-100*

A simulação é realizada de modo similar ao exemplo 3.1. A regra de simplificação é que "*Able*" sempre atende os clientes quando ambos os funcionários estão disponíveis, isto é, considera-se que, "*Able*" tem maior iniciativa e motivação para este trabalho (a solução teria que ser diferente se a decisão de atendimento for aleatória, escolhendo-se quem atenderá o carro quando ambos estiverem disponíveis).

O problema é avaliar o desempenho do sistema e para estimar as medidas de desempenho do sistema, é necessário definir quanto tempo deseja-se simular. Quanto mais extensa a simulação, mais precisos são os resultados entretanto, para fins ilustrativos será considerado um caso de *26* clientes.

Os possíveis eventos incluem: chegada de cliente, cliente começando a ser atendido por "*Able*", cliente completando o serviço com "*Able*", cliente começando a ser atendido por "*Baker*", cliente completando o serviço com "*Baker*". Os resultados da simulação são ilustrados na Tabela 3.15.

A análise da Tabela 3.15 resulta nas seguintes observações:

- Até o instante de *62* minutos "*Able*" estava ocupado *90*% do tempo e "*Baker*" estava ocupado apenas *69*% do tempo. Existe um desequilíbrio que indica que "*Baker*"tem muito tempo livre.
- *9* das *26* chegadas de clientes (cerca de *35*%) envolvem espera. A média de tempo de espera para todos os clientes é de *0,42* minutos (*25* segundos) que é relativamente baixa.
- Dos *9* casos que envolvem espera, esta foi na média de *1,22* minutos, o que é relativamente baixo.
- Em suma, este sistema parece bem dimensionado para atendimento aos clientes. *1* servidor não pode atender todos os clientes, e provavelmente *3* servidores seria demasiado. O acréscimo de mais um servidor, certamente reduzirá o tempo de espera para zero. Contudo, o custo de espera teria de ser relativamente alto para justificar este servidor adicional.

Tabela 3.15 Tabela de simulação para o exemplo do *drive-thru*

					”Able”			“Baker”			
Identificador do cliente	Dígito aleatório para ao tempo entre chegadas	Tempo entre chegadas	Instante de chegada	Dígito aleatório para o tempo de serviço	Início do serviço	Tempo de serviço	Fim do serviço	Início do serviço	Tempo de serviço	Início do serviço	Tempo na fila
1	-	-	0	95	0	5	5				0
2	26	2	2	21				2	3	5	0
3	98	4	6	51	6	3	9				0
4	90	4	10	92	10	5	15				0
5	26	2	12	89				12	6	18	0
6	42	2	14	38	15	3	18				1
7	74	3	17	14	18	2	20				1
8	80	3	20	61	20	4	24				0
9	68	3	23	50				23	4	27	0
10	22	1	24	49	24	3	27				0
11	48	2	26	39	27	3	30				1
12	34	2	28	53				28	4	32	0
13	45	2	30	88	30	5	35				0
14	24	1	31	01				32	3	35	1
15	34	2	33	81	35	4	39				2
16	63	2	35	53				35	4	39	0
17	38	2	37	81	39	4	43				2
18	80	3	40	64				40	5	45	0
19	42	2	42	01	43	2	45				1
20	56	2	44	67	45	4	49				1
21	89	4	48	01				48	3	51	0
22	18	1	49	47	49	3	52				0
23	51	2	51	75				51	5	56	0
24	71	3	34	57	54	3	57				0
25	16	1	55	87				56	6	62	1
26	92	4	59	47	59	3	62				0
						56			43		11

3.2 Simulação de sistemas de estoque

Uma importante classe de problemas de simulação envolve sistemas de estoque. O comportamento de dados de simulação de um sistema de estoque relativamente simples é ilustrado na Figura 3.5.

Este sistema tem uma verificação periódica do nível de estoque a cada intervalo de tempo = N. Se nestas verificações o nível em estoque é inferior a M, uma ordem de reposição de Q partes é efetivada para que o nível retorne ao valor M.

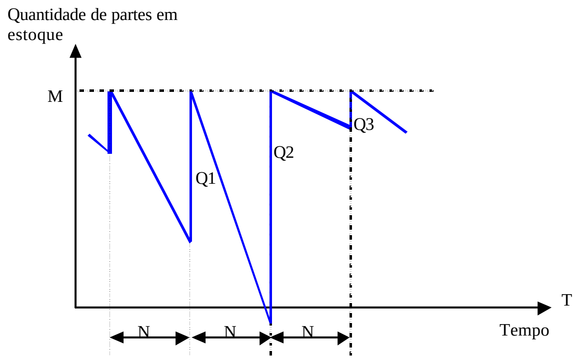

Figura 3.5 Nível de estoque de um sistema de estoque de partes

Neste sistema, o *lead time* (isto é, o intervalo de tempo entre a emissão da ordem de reposição e a reposição efetiva das partes) é considerada como zero. Em geral, como a demanda não é conhecida com certeza, a quantidade envolvida nas ordens de reposição são probabilísticas. Neste caso, a demanda é considerada como sendo uniforme em cada período de tempo indicado na Figura 3.5. De fato, demandas não são em geral uniformes e têm flutuações com o tempo. Uma possibilidade é considerar que toda a demanda ocorre no início de cada ciclo. Outra possibilidade realística é que o *lead time* não é zero, isto é, é um valor associado a uma variação probabilística.

Nota-se na Figura 3.5 que existe uma situação onde a quantidade em estoque cai abaixo de zero, indicando uma falta e se considera que quando a ordem de reposição é efetivada, a demanda das partes faltantes é atendida. Para evitar estas faltas, e por segurança, em geral considera-se uma quantidade de estoque de reserva e/ou de segurança.

Aumentar as partes em estoque tem evidentemente custos que estão relacionados com a aquisição de tais partes (que também pode ser considerado como uma perda quando não se dispõe de fundos para os outros investimentos propostos), uso de um espaço físico, contratação de segurança, e assim por diante. Uma alternativa para evitar estes custos é fazer verificações e reposições com maior freqüência. Isto também tem um custo associado que é o custo de efetivação da ordem de reposição. Outros custos a serem considerados envolvem a rapidez no atendimento dos clientes e a reação destes (custos) com a falta de partes. Estoques maiores podem diminuir a possibilidades de faltas mas isto deve ser devidamente dimensionado para minimizar os custos envolvidos.

O custo total de um sistema de estoque é a medida de desempenho deste sistema. Este pode ser afetado por decisões políticas. Por exemplo, na Figura 3.5, a pessoa que decide pode controlar o nível máximo *M* de estoque, e o intervalo *N* das verificações periódicas.

Num sistema de estoque (*M*,*N*), os eventos que podem ocorrer são: a demanda por partes em estoque, a verificação do nível de estoque, a recepção de partes de acordo com uma ordem ao final de cada período de verificação.

Exemplo 3.3 Simulação de um sistema de estoques (*M,N*)

Este exemplo segue o padrão de funcionamento do sistema de estoque ilustrado na Figura 3.5. Considera-se que o nível máximo de estoque *M*, é de *11* unidades e o período de verificação *N*, é de *5* dias. O problema é estimar, através de simulações, o número médio de unidades em estoque e se for o caso o número de dias com falta de unidades em estoque. A distribuição da demanda por dia é indicada na Tabela 3.16.

Tabela 3.16 Demanda diária

Demanda	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
0	*0,10*	*0,10*	*01-10*
1	*0,25*	*0,35*	*11-35*
2	*0,35*	*0,70*	*36-70*
3	*0,21*	*0,91*	*71-91*
4	*0,09*	*1,00*	*92-100*

Neste exemplo, o *lead time* é uma variável aleatória, como indicada na Tabela 3.17. Considera-se que as ordens de reposição são geradas ao final de cada verificação e o material solicitado é recebido e entra no sistema de acordo com o *lead time*.

Tabela 3.17 *Lead time*

Lead time (dias)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
1	*0,6*	*0,6*	*1-6*
2	*0,3*	*0,9*	*7-9*
3	*0,1*	*1,0*	*10*

Para fazer uma estimativa do número médio de unidades em estoque, deve-se simular vários ciclos. Neste exemplo, somente cinco ciclos serão realizados para ilustrar o procedimento.

Os dígitos aleatórios considerados para a demanda diária e para o *lead time* estão na coluna direita da Tabela 3.16 e Tabela 3.17. A Tabela 3.18 sintetiza o resultado da simulação. A simulação é iniciada com um nível de estoque de 3 unidades e uma ordem de reposição de *8* unidades agendadas para serem recebidas no prazo de *2* dias.

A seguir, a tabela de simulação é completada com várias datas devidamente selecionadas para descrever a operação do processo. As *8* unidades de reposição estão disponíveis no estoque na manhã do terceiro dia do primeiro ciclo, elevando o nível de estoque de *1* para *9* unidades. A demanda no primeiro ciclo reduziu o nível final do estoque para *2* unidades (final do quinto dia). Assim, é emitida a ordem de reposição de *9* unidades. Neste caso o *lead time* é de *1* dia. As *9* unidades são incluídas no estoque na manhã do dia *2* do segundo ciclo.

Tabela 3.18 Tabela de simulação para um sistema de estoque (*M*,*N*)

Ciclo	*Dia*	*Estoque inicial*	*Dígito aleatório para a demanda*	*Demanda*	*Estoque final*	*Falta*	*Ordem de reposição*	*Dígito aleatório para o lead time*	*Dias para a chegada da reposição*
1	1	3	24	1	2	0			1
	2	2	35	1	1	0			0
	3	9	65	2	7	0			
	4	7	81	3	4	0			
	5	4	54	2	2	0	9	5	1
2	1	2	03	0	2	0			0
	2	11	87	3	8	0			
	3	8	27	1	7	0			
	4	7	73	3	4	0			
	5	4	70	2	2	0	9	0	3
3	1	2	47	2	0	0			2
	2	0	45	2	0	2			1
	3	0	48	2	0	4			0
	4	9	17	1	4	0			
	5	4	09	0	4	0	7	3	1
4	1	4	42	2	2	0			0
	2	9	87	3	6	0			
	3	6	26	1	5	0			
	4	5	36	2	3	0			
	5	3	40	2	1	0	10	4	1
5	1	1	07	0	1	0			0
	2	11	63	2	9	0			
	3	9	19	1	8	0			
	4	8	88	3	5	0			
	5	5	94	4	1	0	10	8	2
					87				

Nota-se que no início do dia 2 do terceiro ciclo o estoque é zero. Um pedido de *2* unidades neste dia leva a uma situação de falta. Estes pedidos ficam agendados para quando houver unidades suficientes em estoque, isto é, os pedidos continuam a ser considerados naquele dia e no próximo também quando ocorre um novo pedido de mais *2* unidades. No início do dia *4* do terceiro ciclo estão disponíveis no estoque *9* unidades. Assim, as *4* unidades que foram pedidas anteriormente e mais *1* unidade solicitada neste dia reduzem o estoque para *4* unidades.

Baseado nos cinco ciclos da simulação, a média de unidades em estoque no final dos dias é de aproximadamente *3,5* (*87/25*) unidades. Em *2* dos *25* dias existe uma situação de falta de unidades para atendimento aos pedidos.

Exemplo 3.4 Problema do jornaleiro

O problema clássico trata-se da compra e venda de jornais. O jornaleiro compra os jornais por $*0,33* cada e vende-os por $*0,50* cada. Jornais não vendidos no final do dia são entregues de volta às empresas por $*0,05* cada. Os jornais são adquiridos em pacotes com 10 unidades. Existem três níveis de vendagem: *alta*, *média* e *baixa*, com probabilidades de ocorrência de *0,35; 0,45; 0,20* respectivamente. A distribuição da demanda de jornal para cada nível de vendagem é ilustrada na Tabela 3.19.

Tabela 3.19 Distribuição da demanda de jornais

	Distribuição probabilística da demanda		
Demanda	*Dia de alta vendagem)*	*Dia de vendagem média*	*Dia de baixa vendagem*
40	*0,03*	*0,10*	*0,44*
50	*0,05*	*0,18*	*0,22*
60	*0,15*	*0,40*	*0,16*
70	*0,20*	*0,20*	*0,12*
80	*0,35*	*0,08*	*0,06*
90	*0,15*	*0,04*	*0,00*
100	*0,07*	*0,00*	*0,00*

Os lucros são dados pela seguinte relação:

Lucro = Rendimentos da venda - Custo dos jornais - Perda por excesso de demanda + venda da sobra de jornais

Pelos dados apresentados, o rendimento por venda é de $*0,50* para cada jornal vendido. O custo do jornal é de $*0,33* para cada jornal. A perda por excesso de demanda é de $*0,17* para cada pedido de jornal não atendido (evidentemente este custo é controverso pois pode representar a perda de cliente). A venda de cada jornal que sobra retorna $*0,05*.

A Tabela 3.20 e Tabela 3.21 indicam os dígitos aleatórios para cada tipo de dia de venda de jornais e a demanda correspondente.

Tabela 3.20 Definição dos dígitos aleatórios para cada tipo de dia de vendagem de jornais

Tipo de dia de vendagem	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígito aleatório considerados*
Alta	*0,35*	*0,35*	*01-35*
Média	*0,45*	*0,80*	*36-80*
Baixa	*0,20*	*1,00*	*81-100*

Tabela 3.21 Definição dos dígitos aleatórios para a demanda de jornais

	Distribuição cumulativa			*Dígitos aleatórios considerados*		
Demanda	*Alta*	*Média*	*Baixa*	*Alta*	*Média*	*Baixa*
40	*0,03*	*0,10*	*0,44*	*01-03*	*01-10*	*01-44*
50	*0,08*	*0,28*	*0,66*	*04-08*	*11-28*	*45-66*
60	*0,23*	*0,68*	*0,82*	*09-23*	*29-68*	*67-82*
70	*0,43*	*0,88*	*0,94*	*24-43*	*69-88*	*83-94*
80	*0,78*	*0,96*	*1,00*	*44-78*	*89-96*	*95-100*
90	*0,93*	*1,00*	*1,00*	*79-93*	*97-100*	
100	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*94-100*		

Para resolver este problema por simulação é necessário definir inicialmente uma política de compra de certo número de jornais em cada dia e, depois realizar as simulações considerando um certo período para determinar o saldo final.

Neste caso considera-se um período de *20* dias e a compra de *70* jornais por dia. Neste experimento, pode-se com isto avaliar os lucros diários e assim obter uma estimativa para o número de jornais vendidos. Os resultados desta simulação estão apresentados na Tabela 3.22.

Tabela 3.22 Tabela de simulação para compra de jornais

Dia	Dígito aleatório por tipo de dia de venda	Tipo de dia de venda	Dígito aleatório para a demanda	Demanda	Vendas	Perda por excesso de demanda	Retorno de jornais não vendidos	Lucro do dia
1	94	Baixa	80	60	$30,00		$0,50	$7,40
2	77	Média	20	50	25,00		1,00	2,90
3	49	Média	15	50	25,00		1,00	2,90
4	45	Média	88	70	35,00			11,90
5	43	Média	98	90	35,00	$3,40		8,50
6	32	Alta	65	80	35,00	1,70		10,20
7	49	Média	86	70	35,00			11,90
8	00	Baixa	73	60	30,00		0,50	7,40
9	16	Alta	24	70	35,00			11,90
10	24	Alta	60	80	35,00	1,70		10,20
11	31	Alta	60	80	35,00	1,70		10,20
12	14	Alta	29	70	35,00			11,90
13	41	Média	18	50	25,00		1,00	2,90
14	61	Média	90	80	35,00	1,70		10,20
15	85	Baixa	93	70	35,00			11,90
16	08	Alta	73	80	35,00	1,70		10,20
17	15	Alta	21	60	30,00		0,50	7,40
18	97	Baixa	45	50	25,00		1,00	2,90
19	52	Média	76	70	35,00			11,90
20	78	Média	96	80	35,00	1,70		10,20
					$645,00	$13,60	$5,50	$174,90

No dia *1* a demanda é de *60* jornais. A venda de *60* jornais gera uma entrada de $*30,00*. Sobram *10* jornais no final do dia e com o valor de $*0,05* cada, tem-se a recuperação de $*0,50*. O lucro para o primeiro dia é determinado da seguinte maneira:

Lucro = $30,00 – $23,10 - 0 + $0,50 = $7,40

No dia *5* a demanda é maior do que o número de jornais adquirido. As vendas geram $*35,00* pois somente *70* jornais são disponíveis neste caso. Poderiam ser vendidos mais *20* jornais que não foram atendidos e assim se tem uma perda por excesso de demanda de $*3,40* (*20* x $*0,17*). O lucro do dia é calculado como se segue:

Lucro = $35,00 - $23,10 - $3,40 + 0 = $8,50.

Depois do dia *20* é realizada a soma dos lucros diários com o total de $*174,90*. Este pode, também, ser computado como um total de *20* dias de simulação, como se segue abaixo:

Lucro total = $645,00 - $13,60 + $5,50 = $174,90

Qual é o número ótimo de jornais que o jornaleiro deve adquirir ?

3.3 Outros exemplos de simulação

Esta seção inclui outros exemplos clássicos de simulação.

Exemplo 3.5- Um problema de confiabilidade

Uma máquina de usinagem de grande porte possui *3* diferentes rolamentos que eventualmente podem apresentar falhas durante um serviço. A expectativa de vida útil de cada rolamento comporta-se de acordo com uma distribuição cumulativa indicada na Tabela 3.23.

Tabela 3.23 Tempo de vida útil dos rolamentos

Vida útil do rolamento (horas)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
1000	*0,10*	*0,10*	*01-10*
1100	*0,13*	*0,23*	*11-23*
1200	*0,25*	*0,48*	*24-48*
1300	*0,13*	*0,61*	*49-61*
1400	*0,09*	*0,70*	*62-70*
1500	*0,12*	*0,82*	*71-82*
1600	*0,02*	*0,84*	*83-84*
1700	*0,06*	*0,90*	*85-90*
1800	*0,05*	*0,95*	*91-95*
1900	*0,05*	*1,00*	*96-100*

Quando um rolamento falha, a máquina pára e a equipe de manutenção é acionada para a instalação de um novo rolamento. O tempo de atendimento da manutenção ao pedido da máquina é uma variável aleatória com uma distribuição indicada na Tabela 3.24.

Tabela 3.24 Tempo para atendimento pela manutenção

Tempo para atendimento (min)	*Probabilidade*	*Probabilidade cumulativa*	*Dígitos aleatórios considerados*
5	*0,6*	*0,6*	*1-6*
10	*0,3*	*0,9*	*7-9*
15	*0,1*	*1,00*	*0*

O custo para a máquina parada é estimada em $*5,00* por minuto. O custo direto da manutenção é de $*15,00* por hora. Esta manutenção dispende *20* minutos para a substituição de um rolamento, *30* minutos para a substituição de *2* rolamentos e *40* minutos para a substituição de *3* rolamentos. Cada rolamento custa $*16,00*.

Além do pocedimento tradicional de substituir apenas do rolamento com problema existe a opção de substituir todos os *3* rolamentos sempre que alguma falha ocorrer. Assim o objetivo aqui é estudar estas opções.

A Tabela 3.25 representa a simulação de *20.000* horas de operação da máquina. Note que existem momentos onde mais de um rolamento apresenta falha. Isto de fato não ocorre na prática mas, ocorre quando se está fazendo um estudo onde a precisão é de *100* horas.

Tabela 3.25 Substituição de rolamentos de acordo com o procedimento tradicional

	Rolamento 1					*Rolamento 2*					*Rolamento 3*				
	Dígito aleatório	*Vida útil (h)*	*Vida acumulada (h)*	*Dígito aleatório*	*Tempo para atendimento (min)*	*Dígito aleatório*	*Vida útil (h)*	*Vida acumulada (h)*	*Dígito aleatório*	*Tempo para atendimento (min)*	*Dígito aleatório*	*Vida útil (h)*	*Vida acumulada (h)*	*Dígito aleatório*	*Tempo para atendimento (min)*
1	67	1400	1400	2	5	70	1500	1500	0	15	76	1500	1500	0	15
2	08	1000	2400	3	5	43	1200	2700	7	10	65	1400	2900	2	5
3	49	1300	3700	1	5	86	1700	4400	3	5	61	1400	4300	7	10
4	84	1600	5300	7	10	93	1800	6200	1	5	96	1900	6200	1	5
5	44	1200	6500	8	10	81	1600	7800	2	5	65	1400	7600	3	5
6	30	1200	7700	1	5	44	1200	9000	8	10	56	1300	8900	3	5
7	19	1000	8700	2	5	19	1100	10100	1	5	11	1100	10000	6	5
8	63	1400	10.100	8	10	51	1300	11400	1	5	86	1700	11700	3	5
9	02	1000	11100	3	5	45	1300	12700	7	10	57	1300	13000	1	5
10	02	1000	12100	8	10	12	1100	13800	8	5	49	1300	14300	4	5
11	77	1500	13600	7	10	48	1300	15100	0	15	36	1200	15500	8	10
12	59	1300	14900	5	5	09	1000	16100	8	10	44	1200	16700	2	5
13	23	1100	16000	5	5	44	1200	17300	1	5	94	1800	18500	1	5
14	53	1300	17300	9	10	46	1200	18500	2	5	78	1500	20000	7	10
15	85	1700	19000	6	5	40	1200	19700	8	10					
16	75	1500	20500	4	5	52	1300	21000	5	5					
					110					125					95

Considera-se neste caso que os tempos nunca são exatamente os mesmos e também que apenas um rolamento é substituído em cada ocorrência de falha. Dezesseis substituições são realizadas para os rolamentos *1* e *2*, mas somente quatorze substituições são requeridas para o rolamento *3*. O custo do sistema é estimado como se segue:

Custo do rolamento = 46 rolamentos x $16,00/rolamento = $736,00

Custo do tempo para atendimento = (110 + 125 + 95) minutos x $5/minuto = $1.650

Custo do tempo durante o reparo = 46 rolam. x 20 min/rolam. x $15,00/60 minutos = $4.600,00

Custo da manutenção = 46 rolamentos x 20 minutos/rolamentos x $15,00/60 minutos = $230,00

Custo total = $736,00 + $1.650,00 + $4.600,00 + $230,00 = $7.216,00

Tabela 3.26 é uma simulação usando o procedimento proposto de substituição simultânea de *3* rolamentos a cada ocorrência de falha. Nota-se que o mesmo tempo de vida útil acaba sendo estabelecido para os 3 rolamentos. Considera-se que os rolamentos estão dispostos em ordem numa prateleira e, são tirados seqüencialmente e devidamente instalados na máquina. Os dígitos aleatórios que definem a vida útil dos rolamentos nos casos adicionais são indicados a esquerda da barra (|) na décima quinta substituição do rolamento *3*. Quando o novo procedimento é adotado, são necessários mais *18* conjuntos de rolamentos. Nesta simulação, o tempo para o atendimento é repetido mas gerado novamente de modo independente do primeiro estudo. O custo total do novo procedimento é computado como se segue:

Custo do rolamento = 54 rolamentos x $16,00/rolamento = $864,00

Custo do tempo para atendimento = 125 minutos x $5,00/minuto = $625,00

Custo do tempo durante o reparo = 18 conj. x 40 min/conj. x $5,00/ minutos = $3.600,00

Custo da manutenção = 18 conj. x 40 minutos/conj. x $15,00/60 minutos = $180,00

Custo total = $864,00 + $625,00 + $3.600,00 + $180,00 = $5.269,00.

O novo procedimento representa uma economia de $*1.947,00* nas *20.000* horas de simulação. Se a máquina operar continuamente, o tempo de simulação representa cerca de *2 ¼* anos. Assim, a economia é de aproximadamente $*865,00* por ano.

Tabela 3.26 Substituição de rolamentos de acordo com o novo procedimento proposto

	Rolamento 1 Vida útil (horas)	*Rolamento 2 Vida útil (horas)*	*Rolamento 3 Vida útil (horas)*	*Primeira falha (horas)*	*Tempo de vida acumulada (horas)*	*Dígito aleatório*	*Tempo para atendimento (min)*
1	1400	1500	1500	1400	1400	3	5
2	1000	1200	1400	1000	2400	7	10
3	1300	1700	1400	1300	3700	5	5
4	1600	1800	1900	1600	5300	1	5
5	1200	1600	1400	1200	6500	4	5
6	1200	1200	1300	1200	7700	3	5
7	1000	1100	1100	1000	8700	7	10
8	1400	1300	1700	1300	10000	8	10
9	1000	1300	1300	1000	11000	8	10
10	1000	1100	1300	1000	12000	3	5
11	1500	1300	1200	1200	13200	2	5
12	1300	1000	1200	1000	14200	4	5
13	1100	1200	1800	1100	15300	1	5
14	1300	1200	1500	1200	16500	6	5
15	1700	1200	63|1400	1200	17700	2	5
16	1500	1300	21|1100	1100	18800	7	10
17	85|1700	53|1300	23|1100	1100	19900	0	15
18	05|1000	29|1200	51|1300	1000	20900	5	5
							125

Exemplo 3.6. Números aleatórios com distribuição normal

Um problema clássico de simulação é o de bombardeiros tentando destruir um depósito de munição como ilustrado na Figura 3.6. Se a bomba cair em qualquer parte do depósito, considera-se que o alvo é atingido caso contrário é uma perda. Considera-se que os bombardeiros voam sempre na direção horizontal. O alvo principal, isto é, o centro do depósito de munições é indicado por um pequeno círculo (verde) na figura. O ponto de impacto das bombas é considerado como tendo uma distribuição normal ao redor do alvo principal com um desvio padrão de *600* metros na direção horizontal e *300* metros na vertical. O problema é simular a operação e analisar o número de bombas que atingem o alvo.

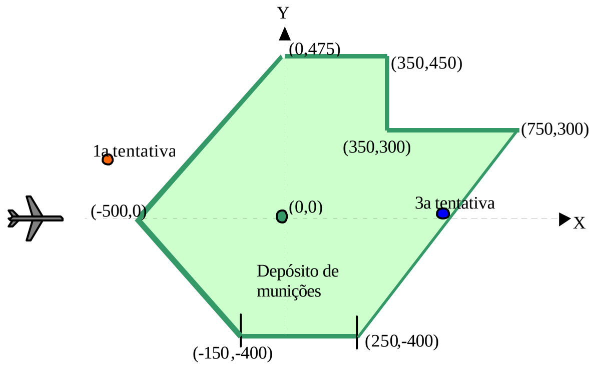

Figura 3.6 Depósito de munições

Lembramos que a variável padronizada *Z* de uma distribuição normal é definida como:

$$Z = \frac{X - m}{s}$$

onde X é a variável normal aleatória, m é o valor médio da distribuição de X, e s é o desvio padrão de X. Assim,

$$X = Zs + m.$$

Neste exemplo, o alvo principal pode ser considerado como sendo $(0,0)$, isto é, o valor m é 0 tanto na direção horizontal como na direção vertical. Então,

$$X = Z_{sx}$$

$$Y = Z_{sy}$$

onde (X,Y) são as coordenadas obtidas por simulação do local de queda da bomba. Se $s_x = 600$ e $s_y = 300$. Então:

$$X = 600\ Zi$$

$$Y = 300\ Zj.$$

O i e o j subscritos são adicionados para identificar os valores de Z nas direções horizontal e vertical respectivamente. Os valores de Z são números aleatórios com distribuição normal. Estes podem ser gerados através de uma distribuição uniforme de números aleatórios. Alternativamente, tabelas de números aleatórios com distribuição normal também podem ser utilizados.

Para entender o que acontece, de fato, neste caso deveriam ser conduzidas simulações de pelo menos *10* ou *20* ciclos. Entretanto, aqui apresentaremos apenas a simulação de 1 ciclo. A tabela de números aleatórios com distribuição normal é utilizada da mesma forma como a tabela de números aleatórios, isto é, escolhe-se aleatoriamente um ponto de entrada na tabela e segue-se sistematicamente uma única direção evitando ciclos. A Tabela 3.27 apresenta os resultados desta simulação.

Tabela 3.27 Simulação dos bombardeios

Identificação da aeronave	*RNNx*	*Coordenada x (600 RNNx)*	*RNNy*	*Coordenada y (300x RNNy)*	*Resultado*
1	*-0,84*	*-504*	*0,66*	*198*	*perda*
2	*1,03*	*618*	*-0,13*	*-39*	*perda*
3	*0,92*	*552*	*0,06*	*18*	*acerto*
4	*-1,87*	*-1092*	*-1,40*	*-420*	*perda*
5	*-0,16*	*-96*	*0,23*	*69*	*acerto*
6	*-1,78*	*-1068*	*1,33*	*399*	*perda*
7	*2,04*	*1224*	*0,69*	*207*	*perda*
8	*1,08*	*648*	*-1,10*	*-330*	*perda*
9	*-1,50*	*-900*	*-0,72*	*-216*	*perda*
10	*-0,42*	*-252*	*-0,60*	*-180*	*acerto*

Obs.: RNNi = número aleatórion com distribuição normal considerado para calcular o valor da coordenada i

O primeiro número aleatório com distribuição normal considerado é *–0,84*, gerando uma coordenada $x = 600*(-0.84) = -504$. O número aleatório com distribuição normal usado para gerar a coordenada y é *0,66* que resulta na coordenada $y = 300*0,66 = 198$. Analisando-se a coordenada (*-504, 198*) verifica-se que se trata de uma perda, por não atingir o depósito de munições. Esta coordenada e o resultante do terceiro lançamento de bomba são indicados na Figura 3.6. Os *10* bombardeios simulados resultam em *3* casos de sucesso e *7* de perdas. Muitos mais ciclos são necessários para avaliar o potencial de destruição do depósito. Este é um exemplo de simulação de Monte Carlo, ou simulação estática onde o tempo não está envolvido na solução.