UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Exercícios - Espaços Vetoriais

1. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

   i. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x,y)+(s,t)=(x+s+1,y+t-2)$,

   ii. $\alpha\mathbf{u}=\alpha(x,y)=(\alpha x+\alpha-1,\alpha y-2\alpha+2)$,

   (a) Calcule $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\alpha\mathbf{u}$ para $\mathbf{u}=(-2,3),\mathbf{v}=(1,-2)$ e $\alpha=2$

   (b) Mostre que $(0,0)\neq\mathbf{0}$.
   Sugestão: Encontre um vetor $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{u}$ ($\mathbf{w}$ representa o "vetor nulo")

   (c) Quem é $-\mathbf{u}$?

   (d) Mostre que vale o axioma 5, ou seja, que $-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$

   (e) Verifique que são válidos os axiomas 1,2,5,6,7,8 e que portanto **V é um espaço vetorial**.

2. Mostre que o conjunto dos polinômios da forma $a+bx$ com as operações definidas por:

   i. $p(x)+q(x)=(a+bx)+(c+dx)=(a+b)+(c+d)x$,

   ii. $\alpha(a+bx)=(\alpha a)+(\alpha b)x$

   é um espaço vetorial.

3. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

   i. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x,y)+(s,t)=(x+s,0)$,

   ii. $\alpha\mathbf{u}=\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$

   Nessas consições, V é um espaço vetorial?

4. Em cada caso, represente W algebricamente e a seguir verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V dado.

   (a) $V=\mathbb{R}^2$ e W é o conjunto dos pares ordenados pertencentes à curva $y=x^2$.

   (b) $V=M_{2\times 2}$ e W é o conjunto de todas as matrizes simétricas 2×2.

   (c) $V=F(\mathbb{R})$ (Conjunto das funções reais) e W é o conjunto das funções pares.

   (d) $V=F(\mathbb{R})$ e W é o conjunto dos polinômios de grau exatamente igual a 2.

5. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial V.

   (a) $V=\mathbb{R}^3$ e $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y-z=0\}$

   (b) $V=\mathbb{R}^3$ e $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2=1\}$

   (c) $V=P_n$ e $W=\{p\in P_n : p(0)=p(1)\}$

(d) $V = M(2,2)$ e $S = \{X \in M_2 \ / det(X) = 0\}$ (S é o conjunto das matrizes singulares)

(e) $V = M(2,2)$ e $F = \{X \in M_2 \ / AX = XA\}$ (F é o conjunto das matrizes que comutam com a matriz A)

(f) $V = P_1$ e $W = \left\{p(x) \in P_1 : \int_0^1 p(x)dx = 0\right\}$

(g) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0\right\}$

(h) $V = M_{2\times2}$ e $W = \{A \in M_{2\times2} : A^2 = A\}$

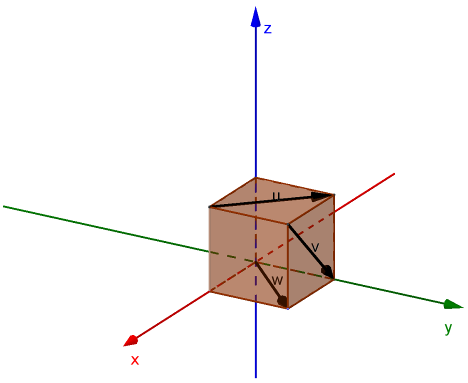
6. **a)** Verifique se o conjunto $S = \{A \in M(3,3); A \ \textit{é uma matriz anti-simétrica}\}$ é um subespaço vetorial de $M(3,3)$.

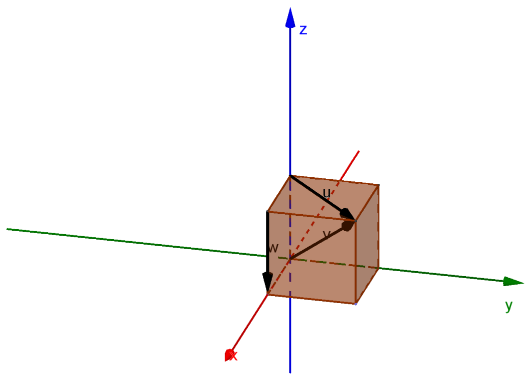
   b) Considere o subconjunto de M_2, dado por

   $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 \ / \ b = a \text{ e } d = -a\right\}$. Verifique se o subconjunto W é um espaço vetorial.

7. Os vetores **u**, **v** e **w** de cada uma das figuras são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Explique.

1 lista espacos vetoriais.png 2 lista espacos vetoriais.png





8. Verifique se o conjunto $W = \{(1,2,3),(1,3,1),(0,3,1),(1,4,5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I ou L.D.

9. Determine se as colunas da seguinte matriz formam um conjunto linearmente dependente ou independente: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$. Qual o número de soluções do sistema $AX = \mathbf{0}$, onde $X = [x,y,z,t]^T$?
   Existe alguma relação entre a dependência e independência linear das colunas da matriz A e o número de soluções de um sistema do tipo $AX = \mathbf{0}$?

10. Dado o conjunto $W = \{(1,1,3),(1,2,1),(0,1,3),(1,4,5)\} \subset \mathbb{R}^3$, extrair um subconjunto de vetores L.I.

11. Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto L.I. de vetores de um espaço vetorial V. Verifique se o conjunto $\{u+v-3w, u+3v-w, v+w\}$ é um conjunto L.I ou L.D.

12. **a)** Se o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto Linearmente Independente então o o conjunto $\alpha = \left\{v_1, \overrightarrow{0}, v_2, ..., v_n\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta.

    b) Considere o subespaço $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Qual é a base e a dimensão de N.

13. Considere o subespaço vetorial $H = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

    (a) Interprete geometricamente o conjunto H.

    (b) Determine um conjunto de vetores geradores de H.

    (c) Verifique se o subespaço vetorial H é gerado pelos vetores $(2, 2, 0)$ e $(-1, 1, 0)$.

14. Mostre que $\mathbb{R}^3 = ger\{(1, 2, 3), (-1, -1, 0), (2, 1, -1)\}$.

15. Sejam $U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \ / \ a + b - c + 3d = 0\}$ e $W = \{p(x) \in P_3 \ / \ p'(-1) = 0\}$ dois subespaços vetoriais de P_3. Determine $U \cap W$.

16. Qual o subespaço gerado pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

17. P_2 é gerado por $1 + x, x + x^2, 1 + x^2$?

18. Sejam $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a + b + c = 0\right\}$ e $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ b + 2d = 0\right\}$ dois subespaços vetoriais de M_2. Determine os geradores de $U \cap W$.

19. Considere o espaço vetorial P_3 e o conjunto $W = \{p(x) \in P_3; \ p''(1) = 0\}$.

    (a) Verifique se W é um subespaço vetorial de P_3.

    (b) Obtenha os geradores de W.

20. Mostre com um exemplo que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser um subespaço vetorial desse espaço.

21. Considere o subespaço Sde $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

    (a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in S = ger\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$? Justifique.

    (b) Exiba uma base para $S = ger\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Qual é a dimensão deste espaço?

    (c) $S = ger\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$? Por quê?

22. Estenda $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ a uma base de $M(2, 2)$.

23. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$.

    (a) $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \text{ e } a = -b\right\}$

(b) $V = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \text{ com } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ e } b = d \right\}$

Em caso afirmativo, determine:

i) uma base para $W_1 \cap W_2$

ii) $W_1 + W_2$ é soma direta?

iii) $W_1 + W_2 = M(2,2)$?

24. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^5$, $W_1 = \{(x,y,z,t,w)\diagup x+z+w=0, x+w=0\}$, $W_2 = \{(x,y,z,t,w)\diagup y+z+t=0\}$ e $W_3 = \{(x,y,z,t,w)\diagup 2x+t+2w=0\}$.

   (a) Determine uma base para o subespaço $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

   (b) Determine uma base e a dimensão de $W_1 + W_3$.

   (c) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

   (d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$?

25. Seja $B \in M(n,n)$ uma matriz fixada e considere $W = \{A \in M(n,n)/A^T + AB = 0\}$

   (a) Mostre que W é subespaço de $M(n,n)$

   (b) Considerando $n = 2$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ determine uma base e a dimensão de W.

26. Para que valores de k os vetores $\{(1,2,0,k),(0,-1,k,1),(0,2,1,0),(1,0,2,3k)\}$ geram um subespaço de dimensão 3?

27. Considere os seguintes subespaços de P_3 :

$$U = \left\{p \in P_3 : p''(1) = 0\right\}$$
$$\text{e } W = \left\{p \in P_3 : p'(1) = 0\right\}$$

   Determine $\dim(U+W)$ e $\dim(U \cap W)$.

28. Considere o subespaço W de P_3 que é gerado pelos polinômios $p_1(x) = 1 + 2x + x^2$, $p_2(x) = -1 + 2x^2 + 3x^3$ e $p_3(x) = -1 + 4x + 8x^2 + 9x^3$ e o subespaço de P_3, $U = \{p \in P_3 : p(0) = 0\}$

   (a) Determine uma base e a dimensão de W.

   (b) Determine uma base para $U \cap W$.

   (c) Determine uma base para $U + W$.

29. Sejam $U = ger\{(1,0,0),(1,1,1)\}$ e $V = ger\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ subespaços gerados do $\mathbb{R}^3$. Determine:

   (a) uma base e a dimensão de $U \cap W$.

   (b) $U + W = \mathbb{R}^3$?

30. Considere o seguinte subespaço de $M(2,2)$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) : a+b = c+d = 0 \right\}$$

(a) Determine uma base e indique a dimensão de S.

(b) Construa uma base de $M(2,2)$ que contenha a base de S obtida no ítem **a)**.

31. Determine a dimensão e encontre uma base do espaço-solução do sistema

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

32. Dê exemplos de dois subespaços do $\mathbb{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. A soma é direta? Justifique sua resposta.

33. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2 e 3, respectivamente. Mostre que a dimensão de $U \cap W$ é pelo menos 1. O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 2 ? Pode ser 3 ? Justifique sua resposta.

34. O conjunto $A = \{(1,0,2), (a^2, a, 0), (1, 0, a)\}$ é uma base para um subespaço do $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 se e somente se $a = 2$?

35. Seja $S = \{X \in M_{3\times 1} : AX = 0\}$ o espaço solução do sistema $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$.
Determine os valores de a para os quais S seja: a própria origem; uma reta que passa pela origem; e, um plano que passa pela origem.

36. Considere os conjuntos $U = \{A \in M(2,2)/tr(A) = 0\}$ e
$W = ger\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ subespaços do espaço vetorial V. Determine uma base e a dimensão de $U + W$ e $U \cap W$

37. Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$, $\beta_2 = \{\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

    (a) Encontre a matrizes mudança de base:

    i. $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ **ii.** $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ **iii.** $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ **iv.** $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.

    (b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base

    i. β **ii.** β_1 **iii.** β_2 **iv.** β_3.

    (c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{u}$ em relação à base β_1 são dadas por $[\mathbf{u}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

    Quais as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base: **i.** β **ii.** β_2 **iii.** β_3

38. **a)** Encontre as coordenadas do vetor $p = 1 + t + t^2 + t^3$ em relação base $\alpha = \{2, 1+t, t+t^2, t^2+t^3\}$ de P_3

    b) O conjunto $\beta = \{2, t^2, t + t^2\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta

39. Sejam $P_4 = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \diagdown a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$, $\alpha = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e $\beta = \{2, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4\}$.

    (a) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$..

(b) Se $[p]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$,determinar $[p]_\beta$

(c) Determine o polinômio p cujas coordenadas são dadas no item b) acima.

40. Considere o seguinte subespaço de $M_2 : W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \diagup d = 0 \right\}$. Sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \beta &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(a) Detemine $[I]^\alpha_\beta$

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

41. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^3$. Determine a base β sabendo que $\alpha = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ e a matriz mudança de base de α para β é

$$[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

42. Seja $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ uma base para um subespaço de $M_{2\times 2}$ e $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ onde β é também uma base para um subespaço de $M_{2\times 2}$

(a) Determine a base β.

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

43. Seja E um espaço vetorial qualquer e $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de E. Considere ainda os vetores $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3$ e $v_3 = -u_2$.

(a) Determine a matriz S de mudança da base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ para a base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $w = v_1 + v_2 - v_3$ na base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

44. Sejam α e β bases de um espaço vetorial V

(a) Mostre que $\det \left([I]^\alpha_\beta \, [I]^\beta_\alpha \right) = 1$

(b) Determine $[I]^\alpha_\alpha$

45. Verifique se as afirmações abaixo são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**. Se forem verdadeiras, demonstre. Se forem falsas, dê um contra-exemplo.

    (a) A interseção de dois subespaços vetoriais nunca é vazia.

    (b) A matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço $W = ger\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

    (c) Se os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI então os vetores $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ são $LI's$.

    (d) $W = ger\{(1,2,0),(2,4,0)\}$ é um plano no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

    (e) Se $\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então o conjunto $A = \{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3\}$ é lineramente independente.

    (f) O subespaço $W = \{p \in P_3 : p'(1) = 0 \text{ e } p''(-1) = 0\}$ é gerado pelos polinômios $p_1 = 1$ e $p_2 = -9x + 3x^2 + x^3$.

    (g) O conjunto $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é sempre uma base para o subespaço $ger\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$.

ALGUMAS RESPOSTAS:

1.

2.

3. Não

4. (a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$ ou $W = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$. W não é subespaço de $V = \mathbb{R}^2$.

    (b) $W = \{A \in M_{2\times2} | A^T = A\}$. W é subespaço de $V = M_{2\times2}$

    (c) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) | f(-x) = f(x)\}$. W é subespaço de $V = F(\mathbb{R})$

    (d) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) | f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0\}$. W não é subespaço de $V = F(\mathbb{R})$.

5. (a) Sim. (c) Sim. (e) Sim. (g) Sim.

    (b) Não (d) Não (f) Sim. (h) Não.

6. a) Sim b) Sim

7. a) Os vetores são LI's, pois u, v e w não são coplanares quando colocados com seus pontos iniciais na origem

    b) Os vetores são LD's, pois u, v e w são coplanares quando colocados com seus pontos iniciais na origem

8. É LD.

9. As colunas da matriz formam um conjunto L.D.; o sistema é possível e determinado.

10. Um exemplo é $W_1 = \{(1,1,3),(1,2,1),(0,1,3)\}$

11. É L.D.

12.

13. (a) a) É plano no $\mathbb{R}^3$ $(y = x)$ que passa pela origem.

    (b) $H = ger(1,1,0),(0,0,1)$

(c) $(2,2,0),(-1,1,0)$ geram o subespaço $(x,y,0), x,y \in \mathbb{R} \neq H$

14.

15. Uma possibilidade de expressar $U \cap W$ é $U \cap W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \ / \ c = -a \ \text{ e } b = 2c - 3d\}$ ou $U \cap W = \{p(x) = a + (-2a - 3d)x - ax^2 + dx^3; \ a, d \in \mathbb{R}\}$.

16. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 : a + b - 2c + 2d = 0 \right\}$

17. Sim

18. Uma das possibilidades é: $U \cap W = \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$

19. a) Sim b) $W = ger\,\{1, x, x^3 - 3x^2\}$

20.

21. b) $\beta = \{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,1),(1,0,0,0)\}$ e $\dim W = 3$

22. A base de $M(2,2)$ deve conter quatro matrizes LI's incluindo as matrizes dadas. Não esqueça de mostrar que as quatro matrizes geram $M(2,2)$.

23. i) $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ii) Não iii) Sim

24. a) Uma das bases é: $\beta = \{(1,0,0,0,-1)\}$

    b) Uma das bases é: $\beta = \{(1,0,0,0,-1),(0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(1,0,0,-2,0),(0,0,1,0,0)\}$

25. $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

26. $k = 1$ ou $k = -\dfrac{3}{2}$

27. $\dim(U + W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 2$

28. a) Uma das bases é: $\beta = \{1 + 2x + x^2, -1 + 2x^2 + 3x^3\}$, $\dim W = 2$

    b) Uma das bases é: $\beta = \left\{\frac{2}{3}x + x^2 + x^3\right\}$

    c) Uma das bases é: $\beta = \{1 + 2x + x^2, -1 + 2x^2 + 3x^3, x, x^2\}$

29. a) Uma das bases é: $\beta = \{(0,1,1)\}, \dim(U \cap W) = 1$

30. a)Uma base é $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim S = 2$.

    b) Um exemplo é: $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

31. Uma base é $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim W = 2$.

32.

33.

34. Falso. $a = 0$ ou $a = 2$

35. i) $a \neq 1, a \neq -2$ b) $a \neq 1, a = -2$ c) $a = 1$

36. Uma possibilidade é: $\beta_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\beta_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \left(\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right. \right.$

37. a) i) $[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **ii.** $[I]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **iii.** $[I]_{\beta_2}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **iv.** $[I]_{\beta_3}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) i) $[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **ii.** $[v]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **iii.** $[v]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$ **iv.** $[v]_{\beta_3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

c) i) $[u]_{\beta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ **ii.** $[u]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2 \end{pmatrix}$ iii) $[u]_{\beta_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

38. a) $[p]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) Linearmente independente.

39. a) $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$ b) $[p]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}$ c) $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

40. a) $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -11 \end{bmatrix}$ b) $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\pi + \frac{11}{12}e \\ \frac{1}{2}\pi \\ \frac{e}{12} \end{bmatrix}$

41. $\beta = \{(1, -2, -2), (0, 1, 1), (0, -1, -2)\}$

42. a) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

43. a) $[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[w]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

44. b) $[I]_{\alpha}^{\alpha} = I_n$

45. a) V b) V c) F d) F e) V f) V g) F