Reticulados e Álgebra Booleana

Lista

1.

a)

Considerando $x = a \mapsdown (b \mapsdown c)$, temos, pela definição de ínfimo:

- (1) xRa
- (2) $xR(b \mapsdown c)$
- (3) $\forall y \in P\ (yRa \land yR(b \mapsdown c) \to yRx)$

Também pela definição de ínfimo, temos $(b \mapsdown c)Rb$ e $(b \mapsdown c)Rc$. Como temos (2) e R é transitiva, temos xRb e xRc.

Tendo (1) e xRb, pela definição de ínfimo, temos $xR(a \mapsdown b)$. Como, além disso, temos xRc, pela definição de ínfimo, temos $xR((a \mapsdown b) \mapsdown c)$.

Considerando $w = ((a \mapsdown b) \mapsdown c)$, temos, pela definição de ínfimo:

- (4) $wR(a \mapsdown b)$
- (5) wRc
- (6) $\forall y \in P\ (yR(a \mapsdown b) \land yRc \to yRw)$

Também pela definição de ínfimo, temos $(a \mapsdown b)Ra$ e $(a \mapsdown b)Rb$. Como temos (4) e R é transitiva, temos wRa e wRb.

Tendo (5) e wRb, pela definição de ínfimo, $wR(b \mapsdown c)$. Como, além disso, temos wRa, pela definição de ínfimo, temos $wR(a \mapsdown (b \mapsdown c))$, ou seja, wRx.

Temos, então xRw e wRx, ou seja, $(a \mapsdown (b \mapsdown c))R((a \mapsdown b) \mapsdown c)$ e $((a \mapsdown b) \mapsdown c)R(a \mapsdown (b \mapsdown c))$, mas R é anti-simétrica, portanto $a \mapsdown (b \mapsdown c) = (a \mapsdown b) \mapsdown c$.

b)

Considerando $x = a \uparrow (b \uparrow c)$, temos, pela definição de supremo:

- (1) aRx
- (2) $(b \uparrow c)Rx$
- (3) $\forall y \in P\ (aRy \wedge (b \uparrow c)Ry \to xRy)$

Também pela definição de supremo, temos $bR(b \uparrow c)$ e $cR(b \uparrow c)$. Como temos (2) e R é transitiva, temos bRx e cRx.

Tendo (1) e bRx, pela definição de supremo, temos $(a \uparrow b)Rx$. Como, além disso, temos cRx, pela definição de supremo, temos $((a \uparrow b) \uparrow c)Rx$.

Considerando $w = (a \uparrow b) \uparrow c$, temos, pela definição de supremo:

- (4) $(a \uparrow b)Rw$
- (5) cRw
- (6) $\forall y \in P\ ((a \uparrow b)Ry \wedge cRy \to wRy)$

Também pela definição de supremo, temos $aR(a \uparrow b)$ e $bR(a \uparrow b)$. Como temos (4) e R é transitiva, temos aRw e bRw.

Tendo (5) e bRw, então, pela definição de supremo, temos $(b \uparrow c)Rw$. Como temos também aRw, então, pela definição de supremo, temos $(a \uparrow (b \uparrow c))Rw$, ou seja, xRw.

Temos, então, xRw e wRx, ou seja, $(a \uparrow (b \uparrow c))R((a \uparrow b) \uparrow c)$ e $((a \uparrow b) \uparrow c)R(a \uparrow (b \uparrow c))$, mas R é anti-simétrica, portanto, $a \uparrow (b \uparrow c) = (a \uparrow b) \uparrow c$.

c)

Considerando $x = a \downarrow b$, temos, pela definição de ínfimo:

- (1) xRa
- (2) xRb
- (3) $\forall y \in P\ (yRa \wedge yRb \to yRx)$

Considerando $w = b \mapsdown a$, temos, pela definição de ínfimo:

- (4) wRb
- (5) wRa
- (6) $\forall y \in P\ (yRb \wedge yRa \rightarrow yRw)$

Como temos (2) e (1), por (6), conclui-se que xRw.

Como temos (5) e (4), por (3), conclui-se que wRx.

Assim, xRw e wRx, ou seja, $(a \mapsdown b)R(b \mapsdown a)$ e $(b \mapsdown a)R(a \mapsdown b)$, mas R é anti-simétrica, portanto, $a \mapsdown b = b \mapsdown a$.

d)

Considerando $x = a \mapsup b$, temos, pela definição de supremo:

- (1) aRx
- (2) bRx
- (3) $\forall y \in P\ (aRy \wedge bRy \rightarrow xRy)$

Considerando $w = b \mapsdown a$, temos, pela definição de supremo:

- (4) bRw
- (5) aRw
- (6) $\forall y \in P\ (bRy \wedge aRy \rightarrow wRy)$

Como temos (2) e (1), por (6), conclui-se que wRx.

Como temos (5) e (4), por (3), conclui-se que xRw.

Assim, wRx e xRw, ou seja, $(b \mapsup a)R(a \mapsup b)$ e $(a \mapsup b)R(b \mapsup a)$, mas R é anti-simétrica, portanto $a \mapsup b = b \mapsup a$.

e)

Considerando $x = a ↧ (a ↥ b)$, temos, pela definição de ínfimo:

- (1) xRa
- (2) $xR(a ↥ b)$
- (3) $\forall y \in P \ (yRa \land yR(a ↥ b) \to yRx)$

Pela definição de supremo, temos $aR(a ↥ b)$. Como R é reflexiva, temos aRa. Tendo, então, aRa e $aR(a ↥ b)$, por (3), temos aRx.

Por (1), temos xRa. Então, xRa e aRx, ou seja, $(a ↧ (a ↥ b))Ra$ e $aR(a ↧ (a ↥ b))$, mas R é anti-simétrica, portanto $a ↧ (a ↥ b) = a$.

f)

Considerando $x = a ↥ (a ↧ b)$, temos, pela definição de supremo:

- (1) aRx
- (2) $(a ↧ b)Rx$
- (3) $\forall y \in P \ (aRy \land (a ↧ b)Ry \to xRy)$

Pela definição de ínfimo, temos $(a ↧ b)Ra$. Como R é reflexiva, temos aRa. Tendo, então, aRa e $(a ↧ b)Ra$, por (3), temos xRa.

Por (1), temos aRx. Então, xRa e aRx, ou seja, $(a ↥ (a ↧ b))Ra$ e $aR(a ↥ (a ↧ b))$, mas R é anti-simétrica, portanto $a ↥ (a ↧ b) = a$.

g)

Pela definição de ínfimo, temos:

- (1) $(a ↧ a)Ra$
- (2) $(a ↧ a)Ra$
- (3) $\forall y \in P \ (yRa \land yRa \to yR(a ↧ a))$

Como R é reflexiva, aRa e aRa, então, por (3), $aR(a ↧ a)$. Por (1), também temos $(a ↧ a)Ra$. Mas R é anti-simétrica, portanto $a ↧ a = a$.

h)

Pela definição de supremo, temos:

- (1) $aR(a \mapsup a)$
- (2) $aR(a \mapsup a)$
- (3) $\forall y \in P\ (aRy \wedge aRy \rightarrow (a \mapsup a)Ry)$

Como R é reflexiva, aRa e aRa, então, por (3), $(a \mapsup a)Ra$. Por (1), também temos $aR(a \mapsup a)$. Mas R é anti-simétrica, portanto $a \mapsup a = a$.

2.

a)

Pela definição de ínfimo, temos:

- (1) $(a \mapsdown 1)Ra$
- (2) $(a \mapsdown 1)R1$
- (3) $\forall y \in P\ (yRa \wedge yR1 \rightarrow yR(a \mapsdown 1))$

Como R é reflexiva, aRa. Como 1 é elemento terminal, $aR1$. Então, por (3), $aR(a \mapsdown 1)$. Por (1), também temos $(a \mapsdown 1)Ra$. Mas R é anti-simétrica, portanto $a \mapsdown 1 = a$.

b)

Pela definição de supremo, temos:

- (1) $aR(a \mapsup 0)$
- (2) $0R(a \mapsup 0)$
- (3) $\forall y \in P\ (aRy \wedge 0Ry \rightarrow (a \mapsup 0)Ry)$

Como R é relfexiva, aRa. Como 0 é elemento inicial, $0Ra$. Então, por (3), $(a \mapsup 0)Ra$. Por (1), também temos $aR(a \mapsup 0)$. Mas R é anti-simétrica, portanto $a \mapsup 0 = a$.

c)

Pela definição de ínfimo, temos:

- (1) $(a \downarrow 0)Ra$
- (2) $(a \downarrow 0)R0$
- (3) $\forall y \in P\ (yRa \wedge yR0 \rightarrow yR(a \downarrow 0))$

Como 0 é o elemento inicial, $0Ra$. Como R é reflexiva, $0R0$. Então, por (3), $0R(a \downarrow 0)$. Por (2), também temos $(a \downarrow 0)R0$. Mas R é anti-simétrica, portanto $a \downarrow 0 = 0$.

d)

Pela definição de supremo, temos:

- (1) $aR(a \uparrow 1)$
- (2) $1R(a \uparrow 1)$
- (3) $\forall y \in P\ (aRy \wedge 1Ry \rightarrow (a \uparrow 1)Ry)$

Como 1 é o elemento terminal, $aR1$. Como R é reflexiva, $1R1$. Então, por (3), $(a \uparrow 1)R1$. Por (2) também temos $1R(a \uparrow 1)$. Mas R é anti-simétrica, portanto $a \uparrow 1 = 1$.

e)

Pela definição de complemento, a relação de a com seu complemento é: $a \downarrow \overline{a} = 0$ e $a \uparrow \overline{a} = 1$.

Da mesma forma, a relação de $\overline{a}$ com seu complemento é: $\overline{\overline{a}} \downarrow \overline{a} = 0$ e $\overline{\overline{a}} \uparrow \overline{a} = 1$.

Como, em uma álgebra booleana, o complemento é único, $\overline{a}$ não pode ter tal relação com dois elementos distintos. Então $a = \overline{\overline{a}}$.

f)

Provar que $\overline{a ↧ b} = \overline{a} ↥ \overline{b}$ é provar que $\overline{a} ↥ \overline{b}$ é complementar a $a ↧ b$. Para isso, é preciso mostrar que:

- (1) $(a ↧ b) ↧ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 0$
- (2) $(a ↧ b) ↥ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 1$

Prova de (1):

Pelo conceito de complementar, temos $a ↧ \overline{a} = 0$ e $b ↧ \overline{b} = 0$. Então $(a ↧ \overline{a}) ↥ (b ↧ \overline{b}) = 0 ↥ 0 = 0$.

$$(a ↧ \overline{a}) ↥ (b ↧ \overline{b}) = 0$$

Como álgebras booleanas são distributivas, podemos escrever a equação acima como:

$$((a ↧ \overline{a}) ↥ b) ↧ ((a ↧ \overline{a}) ↥ \overline{b}) = 0$$

Novamente, por distributividade:

$$(a ↥ b) ↧ (\overline{a} ↥ b) ↧ (a ↥ \overline{b}) ↧ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 0$$

Por idempotência, $(a ↥ b) = (a ↥ b) ↧ (a ↥ b)$:

$$(a ↥ b) ↧ (a ↥ b) ↧ (\overline{a} ↥ b) ↧ (a ↥ \overline{b}) ↧ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 0$$

Por comutatividade, podemos trocar a ordem dos termos:

$$(a ↥ b) ↧ (a ↥ \overline{b}) ↧ (a ↥ b) ↧ (\overline{a} ↥ b) ↧ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 0$$

Por distributividade:

$$(a ↥ (b ↧ \overline{b})) ↧ (b ↥ (a ↧ \overline{a})) ↧ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 0$$

Por propriedade de complemento, $b ↧ \overline{b} = 0$ e $a ↧ \overline{a} = 0$:

$$(a ↥ 0) ↧ (b ↥ 0) ↧ (\overline{a} ↥ \overline{b}) = 0$$

$a \mathbin{\uparrow} 0 = a$ e $b \mathbin{\uparrow} 0 = b$:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\downarrow} (\overline{a} \mathbin{\uparrow} \overline{b}) = 0$$

Prova de (2):

Pelo conceito de complementar, $a \mathbin{\uparrow} \overline{a} = 1$ e $b \mathbin{\uparrow} \overline{b} = 1$. Então $(a \mathbin{\uparrow} \overline{a}) \mathbin{\downarrow} (b \mathbin{\uparrow} \overline{b}) = 1 \mathbin{\downarrow} 1 = 1$.

$$(a \mathbin{\uparrow} \overline{a}) \mathbin{\downarrow} (b \mathbin{\uparrow} \overline{b}) = 1$$

Por distributividade:

$$((a \mathbin{\uparrow} \overline{a}) \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} ((a \mathbin{\uparrow} \overline{a}) \mathbin{\downarrow} \overline{b}) = 1$$

Novamente por distributividade:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (a \mathbin{\downarrow} \overline{b}) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) = 1$$

Por idempotência, $(\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) = (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b})$:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (a \mathbin{\downarrow} \overline{b}) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) = 1$$

Por comutatividade, podemos trocar a ordem dos termos:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) \mathbin{\uparrow} (a \mathbin{\downarrow} \overline{b}) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} \overline{b}) = 1$$

Por distributividade:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} (b \mathbin{\uparrow} \overline{b})) \mathbin{\uparrow} (\overline{b} \mathbin{\downarrow} (a \mathbin{\uparrow} \overline{a})) = 1$$

Por propriedade de complemento, $b \mathbin{\uparrow} \overline{b} = 1$ e $a \mathbin{\uparrow} \overline{a} = 1$:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\downarrow} 1) \mathbin{\uparrow} (\overline{b} \mathbin{\downarrow} 1) = 1$$

$\overline{a} \mathbin{\downarrow} 1 = \overline{a}$ e $\overline{b} \mathbin{\downarrow} 1 = \overline{b}$:

$$(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\uparrow} \overline{b}) = 1$$

Temos, então, que $(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\downarrow} (\overline{a} \mathbin{\uparrow} \overline{b}) = 0$ e $(a \mathbin{\downarrow} b) \mathbin{\uparrow} (\overline{a} \mathbin{\uparrow} \overline{b}) = 1$, ou seja, $\overline{a \mathbin{\downarrow} b} = \overline{a} \mathbin{\uparrow} \overline{b}$.

g)

Provar que $\overline{a \mapsup b} = \overline{a} \mapsdown \overline{b}$ é provar que $\overline{a} \mapsdown \overline{b}$ é complementar a $a \mapsup b$. Para isso, é preciso mostrar que:

- (1) $(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 0$
- (2) $(a \mapsup b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$

Prova de (1):

Pelo conceito de complementar, temos $a \mapsdown \overline{a} = 0$ e $b \mapsdown \overline{b} = 0$. Então $(a \mapsdown \overline{a}) \mapsup (b \mapsdown \overline{b}) = 0 \mapsup 0 = 0$.

$$(a \mapsdown \overline{a}) \mapsup (b \mapsdown \overline{b}) = 0$$

Como álgebras booleanas são distributivas, podemos escrever a equação acima como:

$$((a \mapsdown \overline{a}) \mapsup b) \mapsdown ((a \mapsdown \overline{a}) \mapsup \overline{b}) = 0$$

Novamente, por distributividade:

$$(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsup b) \mapsdown (a \mapsup \overline{b}) \mapsdown (\overline{a} \mapsup \overline{b}) = 0$$

Por idempotência, $(\overline{a} \mapsup \overline{b}) = (\overline{a} \mapsup \overline{b}) \mapsdown (\overline{a} \mapsup \overline{b})$:

$$(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsup b) \mapsdown (a \mapsup \overline{b}) \mapsdown (\overline{a} \mapsup \overline{b}) \mapsdown (\overline{a} \mapsup \overline{b}) = 0$$

Por comutatividade, podemos trocar a ordem dos termos:

$$(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsup \overline{b}) \mapsdown (a \mapsup \overline{b}) \mapsdown (\overline{a} \mapsup \overline{b}) = 0$$

Por distributividade:

$$(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsup (b \mapsdown \overline{b})) \mapsdown (\overline{b} \mapsup (a \mapsdown \overline{a})) = 0$$

Por propriedade de complemento, $b \mapsdown \overline{b} = 0$ e $a \mapsdown \overline{a} = 0$:

$$(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsup 0) \mapsdown (\overline{b} \mapsup 0) = 0$$

$\overline{a} \mapsup 0 = \overline{a}$ e $\overline{b} \mapsup 0 = \overline{b}$:

$$(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 0$$

Prova de (2):

Pelo conceito de complementar, $a \mapsup \overline{a} = 1$ e $b \mapsup \overline{b} = 1$. Então $(a \mapsup \overline{a}) \mapsdown (b \mapsup \overline{b}) = 1 \mapsdown 1 = 1$.

$$(a \mapsup \overline{a}) \mapsdown (b \mapsup \overline{b}) = 1$$

Por distributividade:

$$((a \mapsup \overline{a}) \mapsdown b) \mapsup ((a \mapsup \overline{a}) \mapsdown \overline{b} = 1$$

Novamente por distributividade:

$$(a \mapsdown b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown b) \mapsup (a \mapsdown \overline{b}) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$$

Por idempotência, $(a \mapsdown b) = (a \mapsdown b) \mapsup (a \mapsdown b)$:

$$(a \mapsdown b) \mapsup (a \mapsdown b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown b) \mapsup (a \mapsdown \overline{b}) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$$

Por comutatividade, podemos trocar a ordem dos termos:

$$(a \mapsdown b) \mapsup (a \mapsdown \overline{b}) \mapsup (a \mapsdown b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$$

Por distributividade:

$$(a \mapsdown (b \mapsup \overline{b})) \mapsup (b \mapsdown (a \mapsup \overline{a})) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$$

Por propriedade de complemento, $b \mapsup \overline{b} = 1$ e $a \mapsup \overline{a} = 1$:

$$(a \mapsdown 1) \mapsup (b \mapsdown 1) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$$

$a \mapsdown 1 = a$ e $b \mapsdown 1 = b$:

$$(a \mapsup b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$$

Temos, então, que $(a \mapsup b) \mapsdown (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 0$ e $(a \mapsup b) \mapsup (\overline{a} \mapsdown \overline{b}) = 1$, ou seja, $\overline{a \mapsup b} = \overline{a} \mapsdown \overline{b}$.

3.

Uma relação de ordem é transitiva, logo, se temos bRc e cRa, então também temos bRa. Mas, segundo o diagrama, temos aRb. Como uma relação de ordem é anti-simétrica, a configuração mostrada é impossível com $a \neq b$.

4.

a)

Não existe elemento inicial e terminal, pois $\{a, b, c\}$ só se relaciona consigo mesmo e nenhum outro elemento se relaciona com ele.

b)

(i) $\{a\} \wedge \{b\} = \varnothing$ e $\{a\} \vee \{b\} = \{a, b\}$

(ii) $\{a, b\} \wedge \{a, c\} = \{a\}$ e $\{a, b\} \vee \{a, c\}$ não existe

(iii) $\varnothing \wedge \{a, b, c\}$ não existe e $\varnothing \vee \{a, b, c\}$ não existe

5.

Se o reticulado for distributivo, teremos $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$

Como $a \neq 1$, o reticulado não é distributivo.

6.

a)

Pela propriedade da absorção:

$$b \wedge (a \vee b) = b$$

Como $a \uparrow b = a \uparrow c$:

$$b \downarrow (a \uparrow c) = b$$

Por distributividade:

$$(b \downarrow a) \uparrow (b \downarrow c) = b$$

Como $b \downarrow a = c \downarrow a$:

$$(c \downarrow a) \uparrow (b \downarrow c) = b$$

Por distributividade:

$$c \downarrow (a \uparrow b) = b$$

Como $a \uparrow b = a \uparrow c$:

$$c \downarrow (a \uparrow c) = b$$

Por absorção:

$$c = b$$

b)

(1) Provar que $(a \downarrow b) = a \Rightarrow aRb$:

Pela definição de ínfimo, temos que $(a \downarrow b)Rb$. Mas $(a \downarrow b) = a$. Então aRb.

Ou seja, se $(a \downarrow b) = a$, temos aRb.

(2) Provar que $aRb \Rightarrow (a \downarrow b) = a$:

Pela definição de ínfimo, temos $(a \downarrow b)Ra$ e $\forall c \in P\ (cRa \land cRb \to cR(a \downarrow b))$.

Por reflexividade, temos aRa. Então, tendo aRa e aRb, temos $aR(a \downarrow b)$. Mas já temos $(a \downarrow b)Ra$ e R é anti-simétrica, portanto, $a = (a \downarrow b)$.

Ou seja, se aRb, temos $(a \downarrow b) = a$.

c)

(1) Provar que $(a \uparrow b) = b \Rightarrow aRb$:

Pela definição de supremo, temos que $aR(a \uparrow b)$. Mas $(a \uparrow b) = b$. Então aRb.

Ou seja, se $(a \uparrow b) = b$, temos aRb.

(2) Provar que $aRb \Rightarrow (a \uparrow b) = b$:

Pela definição de supremo, temos $bR(a \uparrow b)$ e $\forall c \in P \ (aRc \land bRc \to (a \uparrow b)Rc)$.

Por reflexividade, temos bRb. Então, tendo aRb e bRb, temos $(a \uparrow b)Rb$. Mas já temos $bR(a \uparrow b)$ e R é anti-simétrica, portanto, $b = (a \uparrow b)$.

Ou seja, se aRb, temos $(a \uparrow b) = b$.

d)

Já foi provado nos itens b e c que, se aRb, então $(a \uparrow b) = b$ e $(a \downarrow b) = a$.

Nesse caso, $(a \uparrow b) \downarrow (a \downarrow b) = b \downarrow a = a$.

Ou seja, se aRb, temos $(a \uparrow b) \downarrow (a \downarrow b) = a$