a) $v_1 = (-1,1) \to T(v_1) = (1,1) \to A \to A'$

$v_2 = (-1,3) \to T(v_2) = (5,3) \to D \to D'$

I. $(x,y) = a(v_1) + b(v_2)$

II. $T(x,y) = aT(v_1) + bT(v_2)$

(I) $(x,y) = a(-1,1) + b(-1,3)$

$(x,y) = (-a-b, a+3b)$

$$\begin{cases} -a-b = x \\ a+3b = y \end{cases}$$

$b = -a - x$

$a + 3(-a-x) = y$

$a - 3a - 3x = y$

$-2a - 3x = y$

$-2a = y + 3x$

$a = -\left(\frac{y+3x}{2}\right)$

$a = \frac{-y-3x}{2}$

$b = -\left(\frac{-y-3x}{2}\right) - x$

$b = \frac{y+3x}{2} - x$

$b = \frac{y+3x-2x}{2}$

$b = \frac{y+x}{2}$

II) $T(x,y) = a\,T(v_1) + b\,T(v_2)$

$$T(x,y) = \frac{-y-3x}{2}(1,1) + \frac{y+x}{2}(5,3)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{-y-3x}{2} + \frac{5y+5x}{2}, \frac{-y-3x}{2} + \frac{3y+3x}{2}\right)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{-y-3x+5y+5x}{2}, \frac{-y-3x+3y+3x}{2}\right)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{4y+2x}{2}, \frac{2y}{2}\right)$$

$$T(x,y) = (2y+x, y)$$

$T(x,y) = (2y + x, y)$

* Testando a regra para os pontos marcados

$A \to A'$

$T(1,1) = (2y + x, y) \qquad T(1,1) = (3,1)$

$B \to B'$

$T(3,1) = (2y + x, y) \qquad T(3,1) = (5, 1)$

$C \to C'$

$T(3,3) = (2y + x, y) \qquad T(3,3) = (9, 3)$

$D \to D'$

$T(-1,3) = (2y + x, y) \qquad T(-1,3) = (5, 3)$

Para que seja linear, deve possuir as seguintes propriedades

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ $\forall$ v_1 e v_2 $\in V$

ii) $T(av) = aT(v)$ $\forall$ $v \in V$ e $a \in \mathbb{R}$

i) Desenvolvendo $T(v_1 + v_2)$. Seja $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$

$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(y_1 + y_2) + x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2y_1 + 2y_2 + x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2y_1 + x_1, y_1) + (2y_2 + x_2, y_2)$

Provando que $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

ii) Desenvolvendo $aT(v)$. Seja $v = (x_1, y_1)$

$aT(v) = aT(x_1, y_1) = a(2y_1 + x_1, y_1)$

$= (2y_1a + x_1a, y_1a) = (a(2y_1 + x_1), y_1a)$

$= a(2y_1 + x_1, y_1) = aT(v_1)$

Provando assim $T(av_1) = aT(v_1)$

b) Pontos pertencentes a reta $P_1(3,0)$ $P_2(0,1)$

Transformação $F_1 \to F_2$

Reta → Ponto

T(Reta) → Ponto

· $T(3,2) = (0,0)$

· $T(0,0) = (0,0)$

I. $(x,y) = a(v_1) + b(v_2)$ → Domínio

II. $T(x,y) = aT(v_1) + bT(v_2)$ → Contra Domínio

(I) $(x,y) = a(3,2) + b(0,0)$

$(x,y) = (3a, 2a) + (0,0)$

$\begin{cases} 3a = x \\ 2a = y \end{cases}$ $a = \frac{x}{3}$ e $a = \frac{y}{2}$

$T(x,y) = \frac{x}{3} T(3,2)$ $T(x,y) = \frac{x}{3}(0,0)$

$T(x,y) = (0,0)$

Para que a item b seja linear, deve possuir as seguintes propriedades

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \ \forall \ v_1 \text{ e } v_2 \in V$

ii) $T(av) = aT(v) \ \forall \ v \in V$ e $a \in \mathbb{R}$

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

Seja $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$

$T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (0,0) = T(v_1) + T(v_2)$

$(0,0) = T(v_1) + T(v_2)$

$(0,0) = (0,0) + (0,0)$ $\qquad (0,0) = (0,0)$

Provando assim que $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

ii) $T(av) = aT(v)$. Seja $v = (x, y)$

$T(a(x,y)) = T(ax, ay) = (0,0)$

$(0,0) = aT(v)$

$(0,0) = a(0,0)$

$(0,0) = (0,0)$

Provando assim que $T(av) = aT(v)$

c) $V_1 = (0,0) \rightarrow T(V_1) = (3,3)$

$V_2 = (3,0) \rightarrow T(V_2) = (6,3)$

I. $(x,y) = a(v_1) + b(v_2)$

II. $T(x,y) = aT(v_1) + bT(v_2)$

I) $(x,y) = a(0,0) + b(3,0)$

$(x,y) = (3b,0)$

$x = 3b \qquad b = \frac{x}{3}$

$y = 0$

II) $T(x,y) = \overset{0}{a}T(v_1) + bT(v_2)$

$T(x,y) = bT(v_2)$

$T(x,y) = \frac{x}{3}(6,3)$

$T(x,y) = \left(\frac{6x}{3}, \frac{3x}{3}\right) \qquad T(x,y) = (2x, x)$

* Testando os pontos em destaque

$A = (0,0) \rightarrow T(A) = (0,0) \neq (3,3)$.

Poderíamos perceber que a transformação não é linear pois o ponto (0,0) que pertence a figura, está sendo levado em um ponto ≠ do (0,0).