Relações

Lista

1.

a)

$4E0 \Rightarrow 4 - 0 = 4$
 4 é par.

$2E6 \Rightarrow 2 - 6 = -4$
 -4 é par.

$3E - 3 \Rightarrow 3 - (-3) = 6$
 6 é par.

$5E2 \Rightarrow 5 - 2 - 3$
 3 é ímpar.

A resposta então é:
 (V) $4E0$
 (V) $2E6$
 (V) $3E - 3$
 (F) $5E2$

b)

Uma possível resposta é 1, 3, 5, 7, 9. Qualquer número ímpar atende à condição.

c)

Se n é ímpar, então $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$n - 1 = 2k + 1 - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n - 1$ é par.

Com $n - 1$ par, temos $nE1$.

2.

Se $|A| = |B|$, então A e B têm o mesmo número de elementos.

$\{a\}\, J\, \{c\} \Rightarrow |\,\{a\}\,| = 1$ e $|\,\{c\}\,| = 1$, logo $|\,\{a\}\,| = |\,\{c\}\,|$

$\{a, b, c\}\, J\, \{a, c\} \Rightarrow |\,\{a, b, c\}\,| = 3$ e $|\,\{a, c\}\,| = 2$, logo $|\,\{a, b, c\}\,| \neq |\,\{a, c\}\,|$

$\{a, b\}\, J\, \{b, c\} \Rightarrow |\,\{a, b\}\,| = 2$ e $|\,\{b, c\}\,| = 2$, logo $|\,\{a, b\}\,| = |\,\{b, c\}\,|$

A resposta então é:
(V) $\{a\}\, J\, \{c\}$
(F) $\{a, b, c\}\, J\, \{a, c\}$
(V) $\{a, b\}\, J\, \{b, c\}$

3.

$A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$.

Em todo par $\langle a, b\rangle \in R$, temos $a \in A$, $b \in B$ e $a < b$.

Logo, $R = \{\langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$.

Em todo par $\langle b, a\rangle \in R^{-1}$, temos $\langle a, b\rangle \in R$.

Logo, $R^{-1} = \{\langle 4, 3\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 6, 3\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 6, 4\rangle, \langle 6, 5\rangle\}$.

4.

a)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle 2, 2\rangle$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 1, 0\rangle$ e $\langle 0, 3\rangle$, mas não tem $\langle 1, 3\rangle$. Logo, não é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 3\rangle$, mas não tem $\langle 3, 0\rangle$. Logo, não é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 1\rangle$ e $\langle 1, 0\rangle$, e $0 \neq 1$. Logo, não é anti-simétrica.

b)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle 3, 3\rangle$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 1\rangle$ e $\langle 1, 2\rangle$, mas não tem $\langle 0, 2\rangle$. Logo, não é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 1\rangle$ e não tem $\langle 1, 0\rangle$. Logo, não é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Logo, é anti-simétrica.

c)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle a, a\rangle$ para nenhum $a \in A$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 2, 3\rangle$ e $\langle 3, 2\rangle$, mas não tem $\langle 2, 2\rangle$. Logo, não é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \rightarrow bRa$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 2, 3\rangle$ e $\langle 3, 2\rangle$, e $2 \neq 3$. Logo, não é anti-simétrica.

d)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle a, a\rangle$ para nenhum $a \in A$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 1, 2\rangle$ e $\langle 2, 1\rangle$, mas não tem $\langle 1, 1\rangle$. Logo, não é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \rightarrow bRa$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 1, 2\rangle$ e $\langle 2, 1\rangle$, e $1 \neq 2$. Logo, não é anti-simétrica.

e)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle$ e $\langle 3, 3\rangle$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Logo, é transitiva.

- Simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 1\rangle$ e não tem $\langle 1, 0\rangle$. Logo, não é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Logo, é anti-simétrica.

f)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle a, a\rangle$ para nenhum $a \in A$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Logo, é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 1\rangle$ e não tem $\langle 1, 0\rangle$. Logo, não é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Logo, é anti-simétrica.

g)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle a, a\rangle$ para nenhum $a \in A$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Logo, é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ a relação tem $\langle 0, 3\rangle$ e não tem $\langle 3, 0\rangle$. Logo, não é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Logo, é anti-simétrica.

h)

- Reflexiva $\Rightarrow$ a relação não tem $\langle 2, 2\rangle$ e $\langle 3, 3\rangle$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Logo, é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \rightarrow bRa$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ é verdade para a relação que $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Logo, é anti-simétrica.

5.

a)

$R_9 = R_1 \cup R_4 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.
R_9 tem todas as duplas de R_1 e R_4.

b)

$R_{10} = R_5 - R_6 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle\}$.
R_{10} tem todas as duplas de R_5, com exceção das que também estão em R_6.

c)

$R_{11} = \overline{R_2} = \{\langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.
R_{11} tem todas as duplas de $A \times A$, com exceção das que também estão em R_2.

6.

a)

- Reflexiva $\Rightarrow$ não faz sentido dizer que x é mais alto que x. Logo, não é reflexiva. A relação seria reflexiva somente se não houvesse pessoas no conjunto.
- Transitiva $\Rightarrow$ se x é mais alto que y e y é mais alto que z, x é mais alto que z. Logo, é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ se x é mais alto que y, y não é mais alto que x. Logo, não é simétrica. A relação seria simétrica somente se todos tivessem o mesmo tamanho ou se não houvesse nenhuma pessoa no conjunto, pois não haveria x mais alto que y.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ se x é mais alto que y, nunca teremos y mais alto que x. Logo, é anti-simétrica.

b)

- Reflexiva $\Rightarrow$ todo x nasceu no mesmo dia que x. Logo, é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ se x nasceu no mesmo dia que y e y nasceu no mesmo dia que z, x nasceu no mesmo dia que z. Logo, é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ se x nasceu no mesmo dia que y, y nasceu no mesmo dia que x. Logo, é simétrica.

- Anti-simétrica $\Rightarrow$ se temos x nascido no mesmo dia que y, sempre teremos y nascido no mesmo dia que x. Logo, não é anti-simétrica. A relação seria anti-simétrica somente se ninguém tivesse nascido no mesmo dia.

c)

- Reflexiva $\Rightarrow$ x sempre tem o mesmo nome que x. Logo, é reflexiva.
- Transitiva $\Rightarrow$ se x tem o mesmo nome que y e y tem o mesmo nome que z, x tem o mesmo nome que z. Logo, é transitiva.
- Simétrica $\Rightarrow$ se x tem o mesmo nome que y, y tem o mesmo nome que x. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ se temos x com o mesmo nome que y, sempre teremos y com o mesmo nome que x. Logo, não é anti-simétrica. A relação seria anti-simétrica somente se não houvesse nomes repetidos.

7.

a)

- Reflexiva $\Rightarrow$ não faz sentido dizer que $x \neq x$. Logo, não é reflexiva. A relação seria reflexiva somente se não houvesse números no conjunto.
- Transitiva $\Rightarrow$ é possível ter $x \neq y$ e $y \neq z$ com $x = z$. Assim, temos xSy e ySz, mas não temos xSz. Logo, não é transitiva. A relação seria transitiva somente se não houvesse números diferentes no conjunto, pois nunca haveria $x \neq y$ e $y \neq z$.
- Simétrica $\Rightarrow$ se $x \neq y$, então $y \neq x$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica $\Rightarrow$ se temos xSy, sempre temos ySx. Logo, não é anti-simétrica. A relação seria anti-simétrica somente se não houvesse números diferentes no conjunto.

b)

- Reflexiva $\Rightarrow$ se $x = y = 0$, temos $x \cdot y = 0 < 1$. Assim, não temos $0T0$. Logo, não é reflexiva. Para todos os demais valores de $x = y$, teremos $x \cdot y = x^2 \geq 1$, logo, a relação seria reflexiva somente se não houvesse o 0 no conjunto.
- Transitiva $\Rightarrow$ se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $x \cdot y \geq 1$, x e y têm o mesmo sinal e são diferentes de 0. Se $y, z \in \mathbb{Z}$ e $y \cdot z \geq 1$, y e z têm o mesmo sinal e são diferentes de 0. Assim, $x, z \in \mathbb{Z}$ têm o mesmo sinal e são diferentes de 0, então, $x \cdot z \geq 1$. Logo, é transitiva.

- Simétrica $\Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$, então, se $x \cdot y \geq 1$, $y \cdot x \geq 1$. Logo, é simétrica.

- Anti-simétrica $\Rightarrow$ se temos $x \cdot y \geq 1$, também temos $y \cdot x \geq 1$. Logo, não é anti-simétrica. A relação só seria anti-simétrica se os únicos pares x, y do conjunto que resultassem em $x \cdot y \geq 1$ fossem com $x = y$ ou se nenhum par x, y do conjunto resultasse em $x \cdot y \geq 1$.

c)

- Reflexiva $\Rightarrow x$ é sempre múltiplo de x. Logo, é reflexiva.

- Transitiva $\Rightarrow$ se x é múltiplo de y, então $x = ky, k \in \mathbb{Z}$. Se y é mútiplo de z, então $y = nz, n \in \mathbb{Z}$. Assim, $x = ky = k(nz) = (kn)z$, com $kn = m \in \mathbb{Z}$, ou seja, x é múltiplo de z. Logo, é transitiva.

- Simétrica $\Rightarrow$ se x é múltiplo de y e $x \neq y$, y não é múltiplo de x. Logo, não é simétrica. A relação seria simétrica somente se nenhum número no conjunto fosse múltiplo de outro.

- Anti-simétrica $\Rightarrow$ se x é múltiplo de y e y é múltiplo de x, então $x = y$. Logo, é anti-simétrica.

d)

- Reflexiva $\Rightarrow$ para $x \in \mathbb{Z}$, a condição $x \geq x^2$ não é satisfeita para valores de x maiores que 1. Logo, não é simétrica. A relação seria simétrica somente se não houvesse elementos no conjunto diferentes de 0 e 1 ou se não houvesse elementos no conjunto.

- Transitiva $\Rightarrow$ se $x \geq y^2$ e $y \geq z^2$, como, para $y \in \mathbb{Z}$, $y^2 \geq y$, temos $x \geq y^2 \geq y \geq z^2$. Assim, $x \geq z^2$. Logo, é transitiva.

- Simétrica $\Rightarrow$ se $x \geq y^2$, como, para $x, y \in \mathbb{Z}$, $x^2 \geq x$ e $y^2 \geq y$, temos $x^2 \geq x \geq y^2 \geq y$. Assim, $x^2 \geq y$, então não podemos escrever que $y \geq x^2$. Logo, não é simétrica. A relação seria simétrica somente se não houvesse elementos no conjunto diferentes de 0 e 1 ou se não houvesse pares x, y no conjunto tais que $x \geq y^2$.

- Anti-simétrica $\Rightarrow$ os únicos casos em que $x \geq y^2$ e $y \geq x^2$ são com $x = y = 0$ e $x = y = 1$, ou seja, se xPy e yPx, então $x = y$. Logo, é anti-simétrica.