Operações

Lista

1.

A operação de subtração no conjunto dos números reais possui um elemento neutro à direita, o 0, $(x - 0 = x)$, porém, não possui elemento neutro à esquerda.

2.

a)

É fechada pois é total. Todo par de A^2 está definido na operação.

b)

É preciso testar com todos os trios possíveis.

$(a \oplus a) \oplus a = a \oplus a = a;\ a \oplus (a \oplus a) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus a) \oplus b = a \oplus b = a;\ a \oplus (a \oplus b) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus a) \oplus c = a \oplus c = a;\ a \oplus (a \oplus c) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus b) \oplus a = a \oplus a = a;\ a \oplus (b \oplus a) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus b) \oplus b = a \oplus b = a;\ a \oplus (b \oplus b) = a \oplus b = a\ \surd$

$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus c = a;\ a \oplus (b \oplus c) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus c) \oplus a = a \oplus a = a;\ a \oplus (c \oplus a) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus c) \oplus b = a \oplus b = a;\ a \oplus (c \oplus b) = a \oplus a = a\ \surd$

$(a \oplus c) \oplus c = a \oplus c = a;\ a \oplus (c \oplus c) = a \oplus c = a\ \surd$

$(b \oplus a) \oplus a = a \oplus a = a;\ b \oplus (a \oplus a) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus a) \oplus b = a \oplus b = a;\ b \oplus (a \oplus b) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus a) \oplus c = a \oplus c = a;\ b \oplus (a \oplus c) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus b) \oplus a = b \oplus a = a;\ b \oplus (b \oplus a) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus b) \oplus b = b \oplus b = b;\ b \oplus (b \oplus b) = b \oplus b = b\ \surd$

$(b \oplus b) \oplus c = b \oplus c = a;\ b \oplus (b \oplus c) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus c) \oplus a = a \oplus a = a;\ b \oplus (c \oplus a) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus c) \oplus b = a \oplus b = a;\ b \oplus (c \oplus b) = b \oplus a = a\ \surd$

$(b \oplus c) \oplus c = a \oplus c = a;\ b \oplus (c \oplus c) = b \oplus c = a\ \surd$

$(c \oplus a) \oplus a = a \oplus a = a;\ c \oplus (a \oplus a) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus a) \oplus b = a \oplus b = a;\ c \oplus (a \oplus b) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus a) \oplus c = a \oplus c = a;\ c \oplus (a \oplus c) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus b) \oplus a = a \oplus a = a;\ c \oplus (b \oplus a) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus b) \oplus b = a \oplus b = a;\ c \oplus (b \oplus b) = c \oplus b = a\ \surd$

$(c \oplus b) \oplus c = a \oplus c = a;\ c \oplus (b \oplus c) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus c) \oplus a = c \oplus a = a;\ c \oplus (c \oplus a) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus c) \oplus b = c \oplus b = a;\ c \oplus (c \oplus b) = c \oplus a = a\ \surd$

$(c \oplus c) \oplus c = c \oplus c = c;\ c \oplus (c \oplus c) = c \oplus c = c\ \surd$

Então, para quaisquer $x, y, z \in A$, temos que $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$. Logo, é associativa.

c)

Condição para ter elemento neutro: $\exists e \in A \; \forall x \in A \; (e \oplus x = x \oplus e = x)$

Testando possíveis valores de e com $x = a$:

Temos que $a \oplus a = a$; $a \oplus b = b \oplus a = a$; $a \oplus c = c \oplus a = a$. Logo, se existir elemento neturo, este deve ser a, b ou c.

Testando com $x = b$:

Temos que $b \oplus a = a \oplus b = a$ e $b \oplus c = c \oplus b = a$. Logo, a e c já não são mais possíveis elementos neutros da operação, pois funcionam para a mas não funcionam para b.

Porém, temos que $b \oplus b = b$. O b funciona para a e b, logo, é possível que ele seja o elemento neutro. Resta testar se ele funciona também para o c.

Testando com $x = c$:

Temos que $c \oplus b = b \oplus c = a$. Ou seja, b não é elemento neutro, pois funciona para a e b, mas não funciona para c.

Não é necessário testar se a e c funcionam, pois estes já não funcionam para b.

Portanto, não existe elemento neutro na operação. Nenhum elemento satisfaz a condição para a, b e c simultaneamente.

d)

A operação não tem elemento neutro, logo, não tem elemento inverso.

e)

A matriz da operação é simétrica, logo, ela é comutativa.

Também pode-se atestar isso mostrando que a condição de comutatividade se satisfaz para todos os pares de $x, y \in A$ distintos:

$a \oplus b = a; \; b \oplus a = a \; \surd$

$a \oplus c = a; \; c \oplus a = a \; \surd$

$b \oplus c = a; \; c \oplus b = a \; \surd$

3.

Um monóide é uma operação fechada, associativa e com elemento neutro.

Para ser fechada, deve estar definida para qualquer par $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. Sendo a, b e c números reais, a operação já está definida para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$.

Para ser associativa, é preciso ter $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
Aplicando a operação:

$$(ax + by + cxy) \cdot z = x \cdot (ay + bz + cyz)$$

Aplicando novamente:

$$a(ax+by+cxy)+bz+cz(ax+by+cxy) = ax+b(ay+bz+cyz)+cx(ay+bz+cyz)$$

Distribuindo as multiplicações:

$$a^2x+aby+acxy+bz+acxz+bcyz+c^2xyz = ax+aby+b^2z+bcyz+acxy+bcxz+c^2xyz$$

Cancelando os termos que aparecem em ambos os lados:

$$a^2x+\cancel{aby}+\cancel{acxy}+bz+acxz+\cancel{bcyz}+\cancel{c^2xyz} = ax+\cancel{aby}+b^2z+\cancel{bcyz}+\cancel{acxy}+bcxz+\cancel{c^2xyz}$$

$$a^2x + bz + acxz = ax + b^2z + bcxz$$

Igualando os termos que aparecem multiplicando as mesmas variáveis:

$$a^2x + bz + acxz = ax + b^2z + bcxz$$

$$1)\ a^2 = a \Rightarrow a = 0\ ou\ a = 1$$

$$2)\ b^2 = b \Rightarrow b = 0\ ou\ b = 1$$

$$3)\ ac = bc \Rightarrow a = b$$

Logo, devemos ter $a = b = 0$ ou $a = b = 1$.

Para possuir elemento neutro, é preciso ter $e \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot e = e \cdot x = x$.
Aplicando a operação:

$$ax + be + cxe = ae + bx + cxe = x$$

Já sabemos que temos $a = b = 0$ ou $a = b = 1$.
Se tivermos $a = b = 0$, teremos:

$$cxe = cxe = x$$

Ou seja:

$$cxe = x$$

$$\cancel{x}ce = \cancel{x}$$
$$ce = 1$$
$$e = \frac{1}{c}$$

Ou seja, para $a = b = 0$, temos $c \neq 0$.

Se tivermos $a = b = 1$, teremos:

$$x + e + cxe = e + x + cxe = x$$

Ou seja:

$$x + e + cxe = x$$

Subtraindo x dos dois lados:

$$e + cxe = 0$$

Colocando e em evidência:

$$e(1 + cx) = 0$$

Se a expressão é igual a 0, temos $e = 0$ ou $1 + cx = 0$ (que é o mesmo que dizer que $x = -\frac{1}{c}$).

x é uma variável que pode assumir qualquer valor real; logo, o segundo termo só será zerado no caso específico em que tivermos $x = -\frac{1}{c}$. Porém, precisamos ter $e(1 + cx) = 0$ também para os casos em que $x \neq -\frac{1}{c}$.

Por isso, deduzimos que $e = 0$. O elemento neutro tem um valor fixo que independe do valor de c. Logo, c pode ser qualquer número real.

Ou seja, para $a = b = 1$, temos $c \in \mathbb{R}$.

Portanto, para que $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ constitua um monóide, a, b e c devem atender a uma dessas condições:

- $a = b = 0$ e $c \neq 0$
- $a = b = 1$ e $c \in \mathbb{R}$

4.

a)

Para ser semi-grupo, a operação deve ser fechada e associativa. Todas as operações da tabela são fechadas, pois são grupóides. Conforme assinalado, as operação associativas e, portanto, os semi-grupos, são a, b, d, f, g, h, i, j e p.

b)

Para ser monóide, a operação deve ser um semi-grupo e ter elemento neutro. Dentre os semi-grupos, os que têm elemento neutro e são, portanto, monóides, são $b\ (e = V),\ g\ (e = F),\ h\ (e = F)$ e $j\ (e = V)$.

c)

Para ser grupo, a operação deve ser um monóide e ter elemento inverso. Dentre os monóides, os que têm elemento inverso e são, portanto, grupos, são $g\ (\overline{V} = V;\ \overline{F} = F)$ e $j\ (\overline{V} = V;\ \overline{F} = F)$.