MDI0001
MATEMÁTICA DISCRETA
UDESC - Centro de Ciências Tecnológicas
Bacharelado em Ciência da Computação

Exercícios
Relações e Funções

---

1. Liste os pares ordenados na relação R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ para $B = \{0, 1, 2, 3\}$ onde $(a, b) \in R$ se e somente se:
   (a) $a = b$
   (b) $a + b = 4$
   (c) $a > b$
   (d) a é divisível por b

2. Determine se as relações seguintes sobre $\mathbb{R}$ são reflexivas, simétricas, transitivas e/ou anti-simétricas
   (a) xSy sse $x + y = 0$
   (b) xQy sse $x = |y|$
   (c) xZy sse $xy \geq 0$
   (d) xHy sse $x = 1 \vee y = 1$

3. Mostre que a relação $R = \varnothing$ sobre um conjunto não vazio A é simétrica e transitiva, porém não é reflexiva.

   As relações a seguir, sobre $\mathbb{R}$, serão usadas nos próximos dois exercícios:
   $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$
   $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\}$
   $R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\}$
   $R_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$
   $R_5 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}$
   $R_6 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\}$

4. Encontre:
   (a) $R_1 \cup R_3$
   (b) $R_3 \cap R_5$
   (c) $R_1 - R_2$
   (d) $R_2 \cup R_4$
   (e) $R_6 - R_3$

5. Encontre:
   (a) $R_1 \circ R_1$
   (b) $R_1 \circ R_6$

(c) $R_2 \circ R_1$

(d) $R_5 \circ R_3$

6. Liste as 16 diferentes relações sobre o conjunto $\{0, 1\}$

7. Mostre que a relação R sobre A é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$, onde R^{-1} é a relação inversa de R.

8. Sejam $A = \{a\}, B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Para cada item:

   - justifique por que são ou não são funções parciais
   - determine o tipo da relação (injetora, sobrejetora, total, bijetora, ...)

   (a) $\varnothing : A \to B$

   (b) $<: C \to C$

   (c) $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$

   (d) $=: A \to B$

   (e) $A \times B : A \to B$

   (f) $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

   (g) $ad : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $ad\langle a, b\rangle = a + b$

   (h) $div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $div\langle x, y\rangle = x/y$

9. Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Usando diagramas de Venn e setas, determine todas as composições possíveis entre as seguintes funções parciais:

   - $\varnothing : A \to C$
   - $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$
   - $=: B \to A$

10. Em que condições o conjunto vazio é:

    (a) Uma função parcial?

    (b) Uma função total?

11. Sejam $A = \{a\}, B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Para cada item:

    - justifique por que são ou não são funções totais
    - determine o tipo da função (injetora, sobrejetora, bijetora)

    (a) $=: A \to B$

    (b) $id_B : B \to B$ tal que $id_B(x) = x$

    (c) $\varnothing : A \to B$

    (d) $\varnothing : \varnothing \to \varnothing$

    (e) $A \times B : A \to B$

12. Dê um exemplo de função total de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ que seja

    (a) injetora, porém não sobrejetora;

    (b) sobrejetora, porém não injetora;

    (c) tanto injetora quanto sobrejetora, porém não a função identidade ($f(n) = n$);

(d) nem injetora, nem sobrejetora.

13. Suponha $g : A \to B$ e $f : B \to C$ funções totais.

    (a) Mostre que se tanto f e g forem injetoras, então $f \circ g$ também o é.
    (b) Mostre que se tanto f e g forem sobrejetoras, então $f \circ g$ também o é.

14. Seja $f : A \to B$ uma função total e $S, T \subseteq A$. Mostre que

    (a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
    (b) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

15. Seja $f : A \to B$ uma função total e $S, T \subseteq B$. Mostre que

    (a) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
    (b) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

16. Suponha que f é uma função total de A para B sendo que A e B são conjuntos finitos com mesma cardinalidade. Mostre que f é injetora se e somente se f for sobrejetora.

17. Indique as duas afirmações abaixo que são INCORRETAS com relação a uma função total f ser sobrejetora.

    (a) f é sobrejetora SSE todo elemento do seu co-domínio é a imagem de algum elemento do domínio.
    (b) f é sobrejetora SSE todo elemento do seu domínio tem uma imagem correspondente no co-domínio
    (c) f é sobrejetora SSE $\forall y \in Y \exists x \in X(f(x) = y)$
    (d) f é sobrejetora SSE $\forall x \in X \exists y \in Y(f(x) = y)$
    (e) f é sobrejetora SSE a imagem de f for igual ao co-domínio de f