Álgebra de Conjuntos

Lista 2

I)

1. $A \cup B = B \cup A$

Para provar que $A \cup B = B \cup A$, devemos provar separadamente que $A \cup B \subseteq B \cup A$ e $B \cup A \subseteq A \cup B$.

(1) $A \cup B \subseteq B \cup A$

Seja $x \in (A \cup B)$.

Pela definição de união:

$$x \in A \vee x \in B$$

Por comutatividade da disjunção:

$$x \in B \vee x \in A$$

Pela definição de união:

$$x \in (B \cup A)$$

Logo, $x \in (A \cup B) \rightarrow x \in (B \cup A)$, ou seja, $A \cup B \subseteq B \cup A$.

Provado que $A \cup B \subseteq B \cup A$.

(2) $B \cup A \subseteq A \cup B$

Seja $x \in (B \cup A)$.

Pela definição de união:

$$x \in B \vee x \in A$$

Por comutatividade da disjunção:

$$x \in A \vee x \in B$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup B)$$

Logo, $x \in (B \cup A) \to x \in (A \cup B)$, ou seja, $B \cup A \subseteq A \cup B$.

Provado que $B \cup A \subseteq A \cup B$.

2. $A \cup A = A$

Para provar que $A \cup A = A$, devemos provar separadamente que $A \cup A \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup A$.

(1) $A \cup A \subseteq A$

Seja $x \in (A \cup A)$.

Pela definição de união:

$$x \in A \vee x \in A$$

Por idempotência da disjunção ($p \vee p = p$):

$$x \in A$$

Logo, $x \in (A \cup A) \to x \in A$, ou seja, $A \cup A \subseteq A$.

Provado que $A \cup A \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A \cup A$

Seja $x \in A$.

Por adição lógica (se $p = V, p \vee q = V$):

$$x \in A \vee x \in A$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup A)$$

Logo, $x \in A \to x \in (A \cup A)$, ou seja, $A \subseteq A \cup A$.

Provado que $A \subseteq A \cup A$.

3. $A \cup \varnothing = A$

Para provar que $A \cup \varnothing = A$, devemos provar separadamente que $A \cup \varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup \varnothing$.

(1) $A \cup \varnothing \subseteq A$

Seja $x \in A \cup \varnothing$.

Pela definição de união:

$$x \in A \vee x \in \varnothing$$

É impossível $x \in \varnothing$, logo:

$$x \in A \vee \Box$$

Por propriedade de identidade da disjunção ($p \vee \Box = p$):

$$x \in A$$

Logo, $x \in A \cup \varnothing \to x \in A$, ou seja, $A \cup \varnothing \subseteq A$.

Provado que $A \cup \varnothing \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A \cup \varnothing$

Seja $x \in A$.

Por propriedade de identidade da disjunção ($p \vee \Box = p$):

$$x \in A \vee \Box$$

Como $x \in \varnothing = \Box$:

$$x \in A \vee x \in \varnothing$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup \varnothing)$$

Logo, $x \in A \to x \in (A \cup \varnothing)$, ou seja, $A \subseteq A \cup \varnothing$.

Provado que $A \subseteq A \cup \varnothing$.

4. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Para provar que $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$, devemos provar separadamente que $A \cup \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subseteq A \cup \mathcal{U}$.

(1) $A \cup \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$

Seja $x \in (A \cup \mathcal{U})$.

Pela definição de união:
$$x \in A \vee x \in \mathcal{U}$$

Como $x \in \mathcal{U} = \blacksquare$:
$$x \in A \vee \blacksquare$$

Por propriedade de identidade da disjunção ($p \vee \blacksquare = \blacksquare$):
$$\blacksquare$$

Como $x \in \mathcal{U} = \blacksquare$:
$$x \in \mathcal{U}$$

Logo, $x \in (A \cup \mathcal{U}) \rightarrow x \in \mathcal{U}$, ou seja, $A \cup \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

Provado que $A \cup \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

(2) $\mathcal{U} \subseteq A \cup \mathcal{U}$

Seja $x \in \mathcal{U}$.

Por adição lógica (se $p = V, p \vee q = V$):
$$x \in A \vee x \in \mathcal{U}$$

Pela definição de união:
$$x \in (A \cup \mathcal{U})$$

Logo, $x \in \mathcal{U} \rightarrow x \in (A \cup \mathcal{U})$, ou seja, $\mathcal{U} \subseteq A \cup \mathcal{U}$.

Provado que $\mathcal{U} \subseteq A \cup \mathcal{U}$.

5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Para provar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, devemos provar separadamente que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ e $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

(1) $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

Seja $x \in A \cup (B \cup C)$.

Pela definição de união:

$$x \in A \vee x \in (B \cup C)$$

Pela definição de união:

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

Por associatividade da disjunção:

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup B) \vee x \in C$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup B) \cup C$$

Logo, $x \in A \cup (B \cup C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$, ou seja, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

Provado que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

(2) $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

Seja $x \in (A \cup B) \cup C$.

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup B) \vee x \in C$$

Pela definição de união:

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$

Por associatividade da disjunção:

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

Pela definição de união:

$$x \in A \vee x \in (B \cup C)$$

Pela definição de união:

$$x \in A \cup (B \cup C)$$

Logo, $x \in (A \cup B) \cup C \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$, ou seja, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

Provado que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

II)

1. $A \cap B = B \cap A$

Para provar que $A \cap B = B \cap A$, devemos provar separadamente que $A \cap B \subseteq B \cap A$ e $B \cap A \subseteq A \cap B$.

(1) $A \cap B \subseteq B \cap A$

Seja $x \in A \cap B$.

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in B$$

Por comutatividade da conjunção:

$$x \in B \wedge x \in A$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (B \cap A)$$

Logo, $x \in A \cap B \to x \in (B \cap A)$, ou seja, $A \cap B \subseteq B \cap A$.

Provado que $A \cap B \subseteq B \cap A$.

(2) $B \cap A \subseteq A \cap B$

Seja $x \in (B \cap A)$.

Pela definição de interseção:

$$x \in B \wedge x \in A$$

Por comutatividade da conjunção:

$$x \in A \wedge x \in B$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap B)$$

Logo, $x \in (B \cap A) \to x \in (A \cap B)$, ou seja, $B \cap A \subseteq A \cap B$.

Provado que $B \cap A \subseteq A \cap B$.

2. $A \cap A = A$

Para provar que $A \cap A = A$, devemos provar separadamente que $A \cap A \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap A$.

(1) $A \cap A \subseteq A$

Seja $x \in (A \cap A)$.

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in A$$

Por idempotência da conjunção ($p \wedge p = p$):

$$x \in A$$

Logo, $x \in (A \cap A) \rightarrow x \in A$, ou seja, $A \cap A \subseteq A$.

Provado que $A \cap A \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A \cap A$

Seja $x \in A$.

Por idempotência da conjunção ($p \wedge p = p$):

$$x \in A \wedge x \in A$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap A)$$

Logo, $x \in A \rightarrow x \in (A \cap A)$, ou seja, $A \subseteq A \cap A$.

Provado que $A \subseteq A \cap A$.

3. $A \cap \mathcal{U} = A$

Para provar que $A \cap \mathcal{U} = A$, devemos provar separadamente que $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap \mathcal{U}$.

(1) $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$

Seja $x \in (A \cap \mathcal{U})$.

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in \mathcal{U}$$

Como $x \in \mathcal{U} = \blacksquare$:

$$x \in A \wedge \blacksquare$$

Por propriedade de identidade da conjunção ($p \wedge \blacksquare = p$):

$$x \in A$$

Logo $x \in (A \cap \mathbf{U}) \rightarrow x \in A$, ou seja, $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$.

Provado que $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A \cap \mathcal{U}$

Seja $x \in A$.

Por propriedade de identidade da conjunção ($p \wedge \blacksquare = p$):

$$x \in A \wedge \blacksquare$$

Como $x \in \mathcal{U} = \blacksquare$:

$$x \in A \wedge x \in \mathcal{U}$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap \mathcal{U})$$

Logo, $x \in A \rightarrow x \in (A \cap \mathcal{U})$, ou seja, $A \subseteq A \cap \mathcal{U}$.

Provado que $A \subseteq A \cap \mathcal{U}$.

4. $A \cap \varnothing = \varnothing$

Supondo que $A \cap \varnothing \neq \varnothing$, ou seja, existe $x \in (A \cap \varnothing)$.

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in \varnothing$$

Como $x \in \varnothing = \Box$:

$$x \in A \wedge \Box$$

Por propriedade de identidade da conjunção ($p \wedge \Box = \Box$):

$$\Box$$

Logo, a proposição é falsa, portanto, não temos $A \cap \varnothing \neq \varnothing$.

Provado que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Para provar que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, devemos provar separadamente que $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ e $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

(1) $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

Seja $x \in A \cap (B \cap C)$.

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in (B \cap C)$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$

Por associatividade da conjunção:

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap B) \wedge x \in C$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap B) \cap C$$

Logo, $x \in A \cap (B \cap C) \to x \in (A \cap B) \cap C$, ou seja, $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

(2) $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

Seja $x \in (A \cap B) \cap C$.

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap B) \land x \in C$$

Pela definição de interseção:

$$(x \in A \land x \in B) \land x \in C$$

Por associatividade da conjunção:

$$x \in A \land (x \in B \land x \in C)$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \land x \in (B \cap C)$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \cap (B \cap C)$$

Logo, $x \in (A \cap B) \cap C \to x \in A \cap (B \cap C)$, ou seja, $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Provado que $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

III)

Temos que $\varnothing \times A = \varnothing = A \times \varnothing$, ou seja, o elemento absorvente do produto cartesiano é o $\varnothing$.

IV)

1. $A - B \subseteq A$

Seja $x \in (A - B)$.

Pela definição de diferença:

$$x \in (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \land x \in \overline{B}$$

Por simplificação lógica (se $p \land q = V, p = V$):

$$x \in A$$

Logo, $x \in (A - B) \to x \in A$, ou seja, $A - B \subseteq A$.

Provado que $A - B \subseteq A$.

2. $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

(1) $A - B = A \rightarrow A \cap B = \varnothing$

Supondo $A - B = A$, ou seja, $A - B \subseteq A$ e $A \subseteq A - B$.

Seja $A \cap B \neq \varnothing$, logo, existe $x \in A \cap B$. Pela definição de intereção:

$$x \in A \wedge x \in B$$

Por simplificação lógica (se $p \wedge q = V, p = V$):

$$x \in A$$

Como $A \subseteq A - B$, então, se $x \in A$, $x \in (A - B)$. Pela definição de diferença:

$$x \in (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in \overline{B}$$

Simplificando:

$$x \in \overline{B}$$

Já temos que $x \in A \wedge x \in B$. Juntando as informações:

$$x \in A \wedge x \in B \wedge x \in \overline{B}$$

É impossível $x \in B \wedge x \in \overline{B}$, então chegamos em uma contradição. Logo, é impossível ter $A \cap B \neq \varnothing$.

Provado que $A - B = A \rightarrow A \cap B = \varnothing$.

(2) $A \cap B = \varnothing \rightarrow A - B = A$

Supondo $A \cap B = \varnothing$.

Seja $x \in A$. Como $A \cap B = \varnothing$, então se $x \in A$, $x \notin B$. Temos, assim, $x \in A \wedge x \notin B$.

Pela definição de complemento:

$$x \in A \wedge x \in \overline{B}$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de diferença:

$$x \in (A - B)$$

Logo, $x \in A \rightarrow x \in (A - B)$, ou seja, $A \subseteq A - B$.

Temos que $A - B \subseteq A$ pela demonstração do exercício 1.

Então, $A \subseteq A - B$ e $A - B \subseteq A$, ou seja, $A - B = A$.

Provado que $A \cap B = \varnothing \rightarrow A - B = A$.

3. $(A - B) \cap B = \varnothing$

Supondo $(A - B) \cap B \neq \varnothing$, ou seja, existe $x \in (A - B) \cap B$.

Pela definição de interseção:

$$x \in (A - B) \wedge x \in B$$

Pela definição de diferença:

$$x \in (A \cap \overline{B}) \wedge x \in B$$

Pela definição de interseção:

$$(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \wedge x \in B$$

Por associatividade da conjunção:

$$x \in A \wedge (x \in \overline{B} \wedge x \in B)$$

Chegamos, então, em uma contradição:

$$x \in A \wedge \Box = \Box$$

Logo, é impossível $(A - B) \cap B \neq \varnothing$.

Provado que $(A - B) \cap B = \varnothing$.

4. $A \cap B = A - (A - B)$

Para provar que $A \cap B = A - (A - B)$, devemos provar separadamente que $A \cap B \subseteq A - (A - B)$ e $A - (A - B) \subseteq A \cap B$.

(1) $A - (A - B) \subseteq A \cap B$

Seja $x \in A - (A - B)$.

Pela definição de diferença:

$$x \in A - (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de diferença:

$$x \in A \cap (\overline{A \cap \overline{B}})$$

Por De Morgan:

$$x \in A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})$$

Por propriedade do complemento ($\overline{\overline{B}} = B$):

$$x \in A \cap (\overline{A} \cup B)$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \wedge x \in (\overline{A} \cup B)$$

Pela definição de união:

$$x \in A \wedge (x \in \overline{A} \vee x \in B)$$

Pela propriedade distributiva:

$$(x \in A \wedge x \in \overline{A}) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

$x \in A \wedge x \in \overline{A} = \Box$:

$$\Box \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

Pela propriedade de identidade da disjunção ($p \vee \Box = p$):

$$x \in A \wedge x \in B$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (A \cap B)$$

Logo, $x \in A - (A - B) \rightarrow x \in (A \cap B)$, ou seja, $A - (A - B) \subseteq A \cap B$.

Provado que $A - (A - B) \subseteq A \cap B$.

(2) $A \cap B \subseteq A - (A - B)$

Seja $x \in (A \cap B)$.

Pela definição de interseção:

$$x \in A \land x \in B$$

Pela propriedade de identidade da disjunção ($p \lor \square = p$):

$$\square \lor (x \in A \land x \in B)$$

$x \in A \land x \in \overline{A} = \square$:

$$(x \in A \land x \in \overline{A}) \lor (x \in A \land x \in B)$$

Pelo inverso da distributiva:

$$x \in A \land (x \in \overline{A} \lor x \in B)$$

Pela definição de união:

$$x \in A \land x \in (\overline{A} \cup B)$$

Pela definição de interseção:

$$x \in A \cap (\overline{A} \cup B)$$

Por propriedade do complemento ($\overline{\overline{X}} = X$):

$$x \in A \cap \overline{\overline{(\overline{A} \cup B)}}$$

Por De Morgan:

$$x \in A \cap (\overline{A \cap \overline{B}})$$

Pela definição de diferença:

$$x \in A - (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de diferença:

$$x \in A - (A - B)$$

Logo, $x \in (A \cap B) \to x \in A - (A - B)$, ou seja, $A \cap B \subseteq A - (A - B)$.

Provado que $A \cap B \subseteq A - (A - B)$.

5. $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Para provar que $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, devemos provar separadamente que $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \subseteq (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ e $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$.

(1) $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \subseteq (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Seja $x \in \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$.

Pela definição de complemento:

$$x \notin (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

Reescrevendo:

$$\neg(x \in (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$$

Pela definição de união:

$$\neg(x \in (A \cap B) \vee x \in (\overline{A} \cap \overline{B}))$$

Pela definição de interseção:

$$\neg((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}))$$

Pela definição de complemento:

$$\neg((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B))$$

Por De Morgan:

$$\neg(x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \notin B)$$

Por De Morgan:

$$(x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in A \vee x \in B)$$

Pela propriedade distributiva:

$$((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in A) \vee ((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in B)$$

Pela propriedade distributiva:

$$((x \notin A \wedge x \in A) \vee (x \notin B \wedge x \in A)) \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \notin B \wedge x \in B))$$

$x \notin A \wedge x \in A = \Box$ e $x \notin B \wedge x \in B = \Box$:

$$(\Box \vee (x \notin B \wedge x \in A)) \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \vee \Box)$$

Pela propriedade de identidade da disjunção ($p \vee \Box = p$):

$$(x \notin B \wedge x \in A) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$$

Pela definição de complemento:

$$(x \in \overline{B} \wedge x \in A) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in B)$$

Pela definição de interseção:

$$x \in (\overline{B} \cap A) \vee x \in (\overline{A} \cap B)$$

Por comutatividade da interseção:

$$x \in (A \cap \overline{B}) \vee x \in (\overline{A} \cap B)$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Por comutatividade da união:

$$x \in (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

Logo, $x \in \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \rightarrow x \in (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, ou seja, $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \subseteq (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Provado que $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \subseteq (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

(2) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$

Seja $x \in (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Pela definição de união:

$$x \in (\overline{A} \cap B) \vee x \in (A \cap \overline{B})$$

Pela definição de interseção:

$$(x \in \overline{A} \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \overline{B})$$

Pela definição de complemento:

$$(x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$$

Pela propriedade de identidade da disjunção ($p \vee \Box = p$):

$$(\Box \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \vee ((x \in A \wedge x \notin B) \vee \Box)$$

$x \notin B \wedge x \in B = \Box$ e $x \notin A \wedge x \in A = \Box$:

$$((x \notin B \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \vee ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in A))$$

Pelo inverso da: distributiva:

$$((x \notin B \vee x \notin A) \wedge x \in B) \vee ((x \notin B \vee x \notin A) \wedge x \in A)$$

Pelo inverso da distributiva:

$$(x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \in A)$$

Reescrevendo:
$$(\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \wedge (\neg(x \notin B) \vee \neg(x \notin A))$$

Por De Morgan:
$$\neg(x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \notin B \wedge x \notin A)$$

Por De Morgan:
$$\neg((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin B \wedge x \notin A))$$

Pela definição de complemento:
$$\neg((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in \overline{B} \wedge x \in \overline{A}))$$

Pela definição de interseção:
$$\neg(x \in (A \cap B) \vee x \in (\overline{B} \cap \overline{A}))$$

Pela definição de união:
$$\neg(x \in (A \cap B) \cup (\overline{B} \cap \overline{A}))$$

Reescrevendo:
$$x \notin (A \cap B) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})$$

Por comutatividade da interseção:
$$x \notin (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

Pela definição de complemento:
$$x \in \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$$

Logo, $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \rightarrow x \in \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$, ou seja, $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$.

Provado que $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$.

6. $A \cap \overline{B} = \varnothing \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Supondo $A \cap B = \varnothing$ e $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Analisando o conjunto A:

Como $\mathcal{U}$ é o elemento neutro da interseção, então:
$$A = A \cap \mathcal{U}$$

Por propriedade de complemento, $B \cup \overline{B} = \mathcal{U}$:

$$A \cap (B \cup \overline{B})$$

Pela propriedade distributiva:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

Já sabemos que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cap \overline{B} = \varnothing$:

$$\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

Chegamos, então, em $A = \varnothing$.

Provado que $A \cap \overline{B} = \varnothing \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$.

7. $A \cup B = B \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Supondo $A \cup B = B \wedge A \cap B = \varnothing$ e $A \neq \varnothing$, ou seja, existe $x \in A$.

Como $A \cap B = \varnothing$, se $x \in A$, $x \notin B$.

Seja $x \in A$. Por adição lógica (se $p = V, p \vee q = V$):

$$x \in A \vee x \in B$$

Pela definição de união:

$$x \in (A \cup B)$$

Como $A \cup B = B$:

$$x \in B$$

Supomos inicialmente que $x \in A$, portanto:

$$x \in A \wedge x \in B$$

Mas já temos que, se $x \in A$, $x \notin B$. Chegamos, então, em um absurdo.

Logo, é impossível ter $x \in A$, ou seja, $A = \varnothing$.

Provado que $A \cup B = B \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$.

8. $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \wedge B = \varnothing$

Supondo $A \cup B = \varnothing$, ou seja, não existe $x \in (A \cup B)$. Assim, para qualquer $x \in \mathcal{U}$, podemos escrever que $x \notin (A \cup B)$.

Reescrevendo:

$$\neg(x \in (A \cup B))$$

Pela definição de união:

$$\neg(x \in A \lor x \in B)$$

Por De Morgan:

$$\neg(x \in A) \land \neg(x \in B)$$

Reescrevendo:

$$x \notin A \land x \notin B$$

Ou seja, não existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in A$ ou $x \in B$. Logo, $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$.

Provado que $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \land B = \varnothing$.

9. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

(1) $A \subseteq B \rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Supondo $A \subseteq B$.

Seja $x \in \overline{B}$, ou seja, $x \notin B$.

Como, por definição de $A \subseteq B$, $\forall a \in A \rightarrow a \in B$, se temos $x \notin B$, então $x \notin A$, ou seja, $x \in \overline{A}$.

Temos, então, $x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}$, ou seja, $B \subseteq A$.

(2) $\overline{B} \subseteq \overline{A} \rightarrow A \subseteq B$

Supondo $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Seja $x \in A$, ou seja, $x \notin \overline{A}$.

Como, por definição de $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $\forall b \in \overline{B} \rightarrow b \in \overline{A}$, se temos $x \notin \overline{A}$, então $x \notin \overline{B}$, ou seja, $x \in B$.

Temos, então, $x \in A \rightarrow x \in B$, ou seja, $A \subseteq B$.

V)

1.

Para que E seja elemento neutro da diferença de conjuntos, é necessário que $E - A = A$.

Supondo $E - A = A$. Seja $x \in (E - A)$.

Pela definição de diferença:

$$x \in (E \cap \overline{A})$$

Pela definição de interseção:

$$x \in E \wedge x \in \overline{A}$$

Por simplificação lógica (se $p \wedge q = V, p = V$):

$$x \in \overline{A}$$

Porém, se $x \in (E - A)$ e $E - A = A$, então:

$$x \in A$$

Assim, temos que $x \in A \wedge x \in \overline{A}$. Chegamos em um absurdo, então é impossível existir E tal que $E - A = A$.

Portanto, não existe elemento neutro para a diferença de conjuntos.

2.

Pela definição de diferença de conjuntos, temos que:

$$A - A = A \cap \overline{A}$$

Por propriedade de complemento:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

Se $A \neq \varnothing$, então $A - A \neq A$.

Portanto, a idempotência não vale para a diferença de conjuntos.

3.

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

Temos, então, $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 2, 3\}$ e $B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\} = \{5, 6, 7\}$.

Como $A - B \neq B - A$, a comutatividade não vale para a diferença de conjuntos.

4.

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ e $C = \{1, 7, 8, 9\}$.

Temos, então, $B - C = \{x/x \in B \wedge x \notin C\} = \{4, 5, 6\}$ e $A - (B - C) = \{x/x \in A \wedge x \notin (B - C)\} = \{1, 2, 3\}$.

$(A - B) = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 2, 3\}$ e $(A - B) - C = \{x/x \in (A - B) \wedge x \notin C\} = \{2, 3\}$.

Como $A - (B - C) \neq (A - B) - C$, a associatividade não vale para a diferença de conjuntos.