Álgebras com uma Operação

Lista

1.

Para ser um grupo, a operação deve ser fechada, associativa, com elemento neutro e elemento inverso. Se alguma dessas propriedades falhar, $\langle \mathbb{R}, \odot \rangle$ não é grupo.

Testando para operação fechada:

Quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ têm resultado definido no conjunto dos reais para a operação. Portanto, é fechada.

Testando para associatividade:

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$
$$(x - y + 3) \odot z = x \odot (y - z + 3)$$
$$(x - y + 3) - z + 3 = x - (y - z + 3) + 3$$
$$x - y - z + 6 = x - y + z$$

A igualdade acima nem sempre se satisfaz, portanto, a operação não é associaiva.

Não sendo associativa, $\langle \mathbb{R}, \odot \rangle$ não é grupo.

2.

Para ser um monóide, a operação deve ser fechada, associativa e com elemento neutro.

Testando para operação fechada:

Seja $x = [a_1, b_1]$ e $y = [a_2, b_2]$.

Como temos $a_1 \leq b_1$, então $a_1 + a_2 \leq b_1 + a_2$. Como $a_2 \leq b_2$, então $b_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$. Logo, temos $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

Assim, $[a_1 + a_2, b_1 + b_2] \in IR$, ou seja, quaisquer x, y têm resultado definido no conjunto base para a operação. Logo, ela é fechada.

Testando para associatividade:

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

Seja $x = [a_1, b_1], y = [a_2, b_2]$ e $z = [a_3, b_3]$.

$$([a_1, b_1] \oplus [a_2, b_2]) \oplus [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \oplus ([a_2, b_2] \oplus [a_3, b_3])$$
$$[a_1 + a_2, b_1 + b_2] \oplus [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \oplus [a_2 + a_3, b_2 + b_3]$$
$$[a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3] = [a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3]$$

A igualdade acima é válida, portanto, a operação é associativa.

Testando para elemento neutro:

$$x \oplus e = x = e \oplus x$$

Seja $x = [a_1, b_1]$ e $e = [a_e, b_e]$.

$$[a_1, b_1] \oplus [a_e, b_e] = [a_1, b_1] = [a_e, b_e] \oplus [a_1, b_1]$$

$$[a_1 + a_e, b_1 + b_e] = [a_1, b_1] = [a_e + a_1, b_e + b_1]$$

Conclui-se que $e = [a_e, b_e] = [0, 0]$. Como $0 \leq 0$, $e \in IR$, logo, a operação tem elemento neutro.

Para ser um grupo, a operação deve ser fechada, associativa, com elemento neutro e elemento inverso. Se alguma dessas propriedades falhar, $\langle IR, \oplus \rangle$ não é grupo. Já sabemos que as três primeiras propriedades são válidas, então vamos testar a do elemento inverso:

$$\overline{x} \oplus x = e = x \oplus \overline{x}$$

Seja $x = [a_1, b_1]$ e $\overline{x} = [\overline{a_1}, \overline{b_1}]$.

$$[\overline{a_1}, \overline{b_1}] \oplus [a_1, b_1] = [0, 0] = [a_1, b_1] \oplus [\overline{a_1}, \overline{b_1}]$$

$$[\overline{a_1} + a_1, \overline{b_1} + b_1] = [0, 0] = [a_1 + \overline{a_1}, b_1 + \overline{b_1}]$$

Para que a igualdade acima seja verdadeira, precisamos ter $\overline{a_1} = -a_1$ e $\overline{b_1} = -b_1$. Porém, se $a_1 \leq b_1$, então $-b_1 \leq -a_1$. Logo, o par $[-a_1, -b_1]$ não pertence ao conjunto base, portanto, a operação não tem elemento inverso.

Como não tem elemento inverso, $\langle IR, \oplus \rangle$ não é grupo.

3.

Seja $x = [a_1, b_1]$ e $y = [a_2, b_2]$.

$$x \oplus y = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] = [a_2 + a_1, b_2 + b_1] = y \oplus x$$

A operação é comutativa, portanto, é abeliana.

4.

Para ser um monóide, a operação deve ser fechada, associativa e com elemento neutro.

Testando para operação fechada:

Seja $f \in S$ e $g \in S$.

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

Como f é função total de A para A, existe $a' \in A$ tal que $f(a) = a'$.

$$g(f(a)) = g(a')$$

Como g é função total de A para A, então existe $a'' \in A$ tal que $g(a') = a''$.

Logo, $g(f(a))$ sempre está definido em A, portanto, $(g \circ f) \in S$. Logo, a operação é fechada.

Testando para associatividade:

Seja $f \in S, g \in S$ e $h \in S$. Provar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Seja $a \in A$.

$$h \circ (g \circ f)(a) = h \circ (g \circ f(a)) = h \circ (g(f(a)))$$

Seja $f(a) = a'$.

$$h \circ (g(f(a))) = h \circ g(a') = (h \circ g)(a')$$

Como $a' = f(a)$, então:

$$(h \circ g)(a') = (h \circ g)(f(a)) = (h \circ g) \circ f(a)$$

Temos, então, $h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a)$. Logo, a operação é associativa.

Testando para elemento neutro:

O elemento neutro de $\circ$ é i_A.

Seja $f \in S$ e $a \in A$.

Testando pela esquerda:

$$i_A \circ f(a) = i_A(f(a))$$

Seja $f(a) = a'$.

$$i_A(f(a)) = i_A(a')$$

Como $\forall a \in A\ (i_A(a) = a)$, então:

$$i_A(a') = a' = f(a)$$

Temos, então, que $i_A \circ f(a) = f(a)$, ou seja, $i_A \circ f = f$.

Testando pela direita:

$$f \circ i_A(a) = f(i_A(a))$$

Como $\forall a \in A\ (i_A(a) = a)$, então:

$$f(i_A(a)) = f(a)$$

Temos, então, que $f \circ i_A(a) = f(a)$, ou seja, $f \circ i_A = f$.

Logo, a operação tem elemento neutro.

5.

a)

A álgebra $\langle X, \oplus, v \rangle$, representada na tabela a seguir, é um grupo.

$\oplus$	v	w	x	y	z
v	v	w	x	y	z
w	w	x	y	z	v
x	x	y	z	v	w
y	y	z	v	w	x
z	z	v	w	x	y

A operação é definida da seguinte forma:

Seja $v = a_0, w = a_1, x = a_2, y = a_3$ e $z = a_4$. Então $a_i \oplus a_j = a_{(i+j)\%5}$.

Todos os pares têm resultado definido em X, logo, a operação é fechada.

A operação é associativa pois temos que:

$$a_i \oplus (a_j \oplus a_k) = a_i \oplus a_{(j+k)\%5} = a_{(i+(j+k))\%5}$$

$$= a_{((i+j)+k)\%5} = a_{(i+j)\%5} \oplus a_k = (a_i \oplus a_j) \oplus a_k$$

A linha e a coluna do v se repetem em relação à linha e à coluna do $\oplus$, significando que v é o elemento neutro.

Temos que $w \oplus z = z \oplus w = v$ e $x \oplus y = y \oplus x = z$. Ou seja, todo elemento tem um elemento inverso.

b)

A álgebra $\langle X, \odot, w \rangle$, representada na tabela a seguir, é um monóide.

$\odot$	v	w	x	y	z
v	v	v	v	v	v
w	v	w	x	y	z
x	v	x	z	w	y
y	v	y	w	z	x
z	v	z	y	x	w

A operação é definida da seguinte forma:

Seja $v = a_0, w = a_1, x = a_2, y = a_3$ e $z = a_4$. Então $a_i \odot a_j = a_{(i \cdot j)\%5}$.

Todos os pares têm resultado definido em X, logo, a operação é fechada.

A operação é associativa pois temos que:

$$a_i \odot (a_j \odot a_k) = a_i \odot a_{(j \cdot k)\%5} = a_{(i \cdot (j \cdot k))\%5}$$

$$= a_{((i \cdot j) \cdot k)\%5} = a_{(i \cdot j)\%5} \odot a_k = (a_i \odot a_j) \odot a_k$$

A linha e a coluna do w se repetem em relação à linha e à coluna do $\odot$, significando que w é o elemento neutro.

Porém, não existe elemento que, operado com v, resulte em w, logo, v não tem elemento inverso, portanto, a álgebra não é um grupo.

c)

A álgebra $\langle X, min \rangle$, representada na tabela a seguir, é um semi-grupo.

min	v	w	x	y	z
v	v	v	v	v	v
w	v	w	w	w	w
x	v	w	x	x	x
y	v	w	x	y	y
z	v	w	x	y	z

A operação é definida da seguinte forma:

Seja $v = a_0, w = a_1, x = a_2, y = a_3$ e $z = a_4$. Então $a_i \; min \; a_j = a_{min(i,j)}$, ou seja, o elemento de menor índice entre os 2.

Todos os pares têm resultado definido em X, logo, a operação é fechada.

A operação é associativa, pois temos que:

$$a_i\ min\ (a_j\ min\ a_k) = a_i\ min\ a_{min(j,k)} = a_{min(i,j,k)}$$

$$a_{min(i,j)}\ min\ a_k = (a_i\ min\ a_j)\ min\ a_k$$

A operação é comutativa, pois a tabela é simétrica em relação à diagonal principal.

A operação não tem elemento neutro, pois nenhuma linha ou coluna da tabela se repete em relação à linha/coluna do *min*.

d)

A operação representada na tabela a seguir não é fechada sobre X, pois alguns pares não têm resultado definido em X.

&	v	w	x	y	z
v	v	v	v	v	v
w	a	b	c	d	e
x	v	w	x	7	3
y	v	w	x	f	f
z	v	w	x	f	z