MDI0001
Matemática Discreta
UDESC - Centro de Ciências Tecnológicas

Bacharelado em Ciência da Computação

Exercícios
Reticulados e Álgebra Booleana

---

1. Tendo-se $\langle P, R\rangle$ um reticulado e $a, b, c \in P$, prove:

   a) $a \mapsdown (b \mapsdown c) = (a \mapsdown b) \mapsdown c$

   b) $a \mapsup (b \mapsup c) = (a \mapsup b) \mapsup c$

   c) $a \mapsdown b = b \mapsdown a$

   d) $a \mapsup b = b \mapsup a$

   e) $a \mapsdown (a \mapsup b) = a$

   f) $a \mapsup (a \mapsdown b) = a$

   g) $a \mapsdown a = a$

   h) $a \mapsup a = a$

2. Tendo-se $\langle P, \mapsdown, \mapsup, \overline{}, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana e $a, b \in P$, prove:

   a) $a \mapsdown 1 = a$

   b) $a \mapsup 0 = a$

   c) $a \mapsdown 0 = 0$

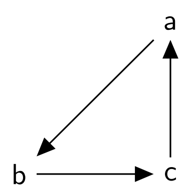
   d) $a \mapsup 1 = 1$

   e) $\overline{\overline{a}} = a$

   f) $\overline{a \mapsdown b} = \overline{a} \mapsup \overline{b}$

   g) $\overline{a \mapsup b} = \overline{a} \mapsdown \overline{b}$

3. Suponha a, b e c elementos distintos de um conjunto A em uma relação de ordem R. Indique por que a configuração ilustrada na figura a seguir não é possível em um diagrama de Hasse.



4. Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e a relação de ordem $\langle 2^A, R\rangle$ ilustrada a seguir. Então:

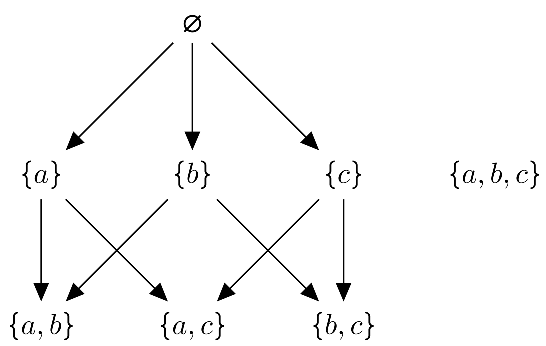
   a) Verifique a existência de elemento inicial e terminal. Justifique sua resposta.

   b) Para cada par de conjuntos que segue, determine o ínfimo e o supremo.

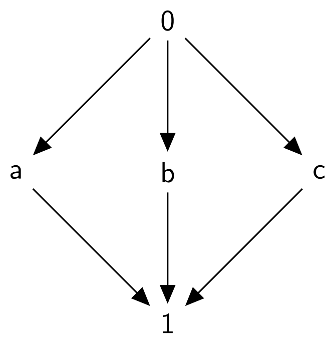
      (i) $\{a\}$ e $\{b\}$

      (ii) $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$

      (iii) $\varnothing$ e $\{a, b, c\}$



5. Prove que o reticulado a seguir não é distributivo.



6. Mostre que, para quaisquer elementos $a, b, c \in P$ de uma álgebra booleana $\langle P, ↧, ↥, \overline{}, 0, 1\rangle$, sendo $\langle P, R\rangle$ a correspondente relação de ordem:

   a) se $a ↧ b = a ↧ c$ e $a ↥ b = a ↥ c$ então $b = c$

   b) $(a ↧ b) = a \Leftrightarrow aRb$

   c) $(a ↥ b) = b \Leftrightarrow aRb$

   d) $aRb \Rightarrow (a ↥ b) ↧ (a ↧ b) = a$