# Relações e Funções

Lista

## 1.

### a)

$\langle 0,0\rangle$, $\langle 1,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle$, $\langle 3,3\rangle$.

### b)

$\langle 1,3\rangle$, $\langle 2,2\rangle$, $\langle 3,1\rangle$, $\langle 4,0\rangle$.

### c)

$\langle 1,0\rangle$, $\langle 2,0\rangle$, $\langle 2,1\rangle$, $\langle 3,0\rangle$, $\langle 3,1\rangle$, $\langle 3,2\rangle$, $\langle 4,0\rangle$, $\langle 4,1\rangle$, $\langle 4,2\rangle$, $\langle 4,3\rangle$.

### d)

$\langle 0,1\rangle$, $\langle 0,2\rangle$, $\langle 0,3\rangle$, $\langle 0,4\rangle$, $\langle 1,1\rangle$, $\langle 2,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle$, $\langle 3,1\rangle$, $\langle 3,3\rangle$, $\langle 4,1\rangle$, $\langle 4,2\rangle$, $\langle 4,4\rangle$.

## 2.

### a)

- Reflexiva: para qualquer $x \neq 0$, $x + x \neq 0$. Logo, não é reflexiva.
- Transitiva: se $x + y = 0$, ou seja, $y = -x$, e $y + z = 0$, ou seja, $y = -z$, então $x = z$. Se $x = z \neq 0$, então $x + z \neq 0$. Logo, não é transitiva.
- Simétrica: se $x + y = 0, y + x = 0$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica: temos, por exemplo, -1 + 1 = 0 e 1 - 1 = 0, mas $1 \neq -1$, Logo, não é anti-simétrica.

## b)

- Reflexiva: se $x < 0, |x| \neq x$. Logo, não é simétrica.
- Transitiva: se $x = |y|$ e $y = |z|$, então $x$ e $y$ têm o mesmo módulo e são ambos positivos, portanto, $x = y$. Assim, $x = |z|$. Logo, é transitiva.
- Simétrica: temos, por exemplo, $1 = |-1|$, mas $-1 \neq |1|$. Logo, não é simétrica.
- Anti-simétrica: se $a = |b|$ e $b = |a|$, $a$ e $b$ têm o mesmo módulo e são ambos positivos, portanto, $a = b$. Logo, é anti-simétrica.

## c)

- Reflexiva: $x^2 \geq 0$, sempre. Logo, é reflexiva.
- Transitiva: se $xy \geq 0$, $x$ e $y$ têm o mesmo sinal. Se $yz \geq 0$, $y$ e $z$ têm o mesmo sinal. Portanto, $x$ e $z$ têm o mesmo sinal, então $xz \geq 0$. Logo, é transitiva.
- Simétrica: se $xy \geq 0, yx \geq 0$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica: se $x \neq y$ e $xy \geq 0, yx \geq 0$. Logo, não é anti-simétrica.

## d)

- Reflexiva: se $x \neq 1$, não podemos ter $xHx$. Logo, não é simétrica.
- Transitiva: podemos ter $xHy$ e $yHz$, com $y = 1, x \neq 1$ e $z \neq 1$. Nesse caso, não teremos $xHz$. Logo, não é transitiva.
- Simétrica: se $xHy$, ou seja, $x = 1 \vee y = 1$, então também podemos escrever $y = 1 \vee x = 1$, ou seja, $yHx$. Logo, é simétrica.
- Anti-simétrica: se $x = 1$ e $y \neq 1$, temos $xHy$ e $yHx$, com $x \neq y$. Logo, não é anti-simétrica.

## 3.

Lembrar que, em lógica matemática, em uma implicação ($p \Rightarrow q$), se $p$ (antecedente da implicação) tiver valor F, $p \Rightarrow q$ tem valor V.

Condição para ser simétrica: $\forall a, b \in A\ (aRb \Rightarrow bRa)$.

Com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb$, assim, o antecedente da implicação ($aRb$) é falso, portanto, a implicação ($aRb \Rightarrow bRa$) é verdadeira. Logo, a relação é simétrica.

Condição para ser transitiva: $\forall a, b, c \in A\ (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.

Com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb\ \wedge bRc$, assim, o antecedente da implicação ($aRb \wedge bRc$) é falso, portanto, a implicação ($aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$) é verdadeira. Logo, a relação é transitiva.

Condição para ser reflexiva: $\forall a \in A\ (aRa)$.

Se $R = \varnothing$, não temos nenhum par na relação, ou seja, não há nenhum par $\langle a, a \rangle$. Como $A$ é não vazio, existe ao menos um $a \in A$, mas não temos $aRa$. Logo, a relação não é reflexiva.

## 4.

### a)

$R_1 \cup R_3 = \big\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b \rangle \in R_1 \vee \langle a, b \rangle \in R_3\big\}$.

Como $R_1 = \big\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$ e $R_3 = \big\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$, então:

$R_1 \cup R_3 = \big\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b \vee a < b\big\}$.

Portanto, $a$ e $b$ podem ser quaisquer, desde que não sejam iguais. Então:

$R_1 \cup R_3 = \big\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\big\}$.

Já temos que $R_6 = \big\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\big\}$. Então:

$R_1 \cup R_3 = R_6$.

## b)

$R_3 \cap R_5 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a,b\rangle \in R_3 \wedge \langle a,b\rangle \in R_5\big\}$.

Como $R_3 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$ e $R_5 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\big\}$, então:

$R_3 \cap R_5 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b \wedge a = b\big\}$.

É impossível ter $a < b$ e $a = b$ ao mesmo tempo. Logo, a interseção entre $R_3$ e $R_5$ é vazia.

$R_3 \cap R_5 = \varnothing$.

## c)

Pela definição de diferença: $R_1 - R_2 = R_1 \cap \overline{R_2}$.

Como $R_2 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\big\}$, então, $\overline{R_2} = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$.

Já temos que $R_3 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$, logo, $\overline{R_2} = R_3$.

$R_1 \cap \overline{R_2} = R_1 \cap R_3 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a,b\rangle \in R_1 \wedge \langle a,b\rangle \in R_3\big\}$.

Como $R_1 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$ e $R_3 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$, então:

$R_1 \cap R_3 = \big\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b \wedge a < b\big\}$.

É impossível ter $a > b$ e $a < b$ ao mesmo tempo. Logo, a interseção entre $R_1$ e $R_3$ é vazia.

$R_1 \cap R_3 = R_1 - R_2 = \varnothing$.

## d)

$R_2 \cup R_4 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b\rangle \in R_2 \vee \langle a, b\rangle \in R_4\big\}$.

Como $R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\big\}$ e $R_4 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\big\}$, então:

$R_2 \cup R_4 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b \vee a \leq b\big\}$.

Portanto, $a$ e $b$ podem ser quaisquer, todo par $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição.

$R_2 \cup R_4 = \mathbb{R}^2$.

## e)

Pela definição de diferença, $R_6 - R_3 = R_6 \cap \overline{R_3}$.

Como $R_3 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$, então $\overline{R_3} = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\big\}$.

Já temos que $R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\big\}$, logo, $\overline{R_3} = R_2$.

$R_6 \cap \overline{R_3} = R_6 \cap R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b\rangle \in R_6 \wedge \langle a, b\rangle \in R_2\big\}$.

Como $R_6 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\big\}$ e $R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\big\}$, então:

$R_6 \cap R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b \wedge a \geq b\big\}$.

Portanto, para que se satisfaçam ambas as condições, $a$ deve ser exclusivamente maior que $b$, excluindo-se a possibilidade de serem iguais. Então:

$R_6 \cap R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$.

Já temos que $R_1 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$. Então:

$R_6 \cap R_2 = R_6 - R_3 = R_1$.

# 5.

## a)

$R_1 \circ R_1 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_1\big\}.$

Como $R_1 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$, então:

$R_1 \circ R_1 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b \land b > c\big\}.$

Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$. Logo:

$R_1 \circ R_1 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > c\big\}.$

Já temos que $R_1 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$, também podendo ser escrito como $\big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > c\big\}$. Então:

$R_1 \circ R_1 = R_1.$

## b)

$R_1 \circ R_6 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b\rangle \in R_6 \land \langle b, c\rangle \in R_1\big\}.$

Como $R_6 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\big\}$ e $R_1 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$, então:

$R_1 \circ R_6 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b \land b > c\big\}.$

Essas condições não impõem nenhuma restrição para a relação entre $a$ e $c$, logo, o par $\langle a, c\rangle$ pode ser qualquer em $\mathbb{R}^2$. Então:

$R_1 \circ R_6 = \mathbb{R}^2.$

## c)

$R_2 \circ R_1 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2\big\}.$

Como $R_1 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$ e $R_2 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\big\}$, então:

$R_2 \circ R_1 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b \land b \geq c\big\}.$

Se $a > b$ e $b \geq c$, então $a > c$. Logo:

$R_2 \circ R_1 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > c\big\}.$

Já temos que $R_1 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\big\}$, também podendo ser escrito como $\big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > c\big\}$. Então:

$R_2 \circ R_1 = R_1.$

## d)

$R_5 \circ R_3 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b\rangle \in R_3 \land \langle b, c\rangle \in R_5\big\}.$

Como $R_3 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$ e $R_5 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\big\}$, então:

$R_5 \circ R_3 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b \land b = c\big\}.$

Se $a < b$ e $b = c$, então $a < c$. Logo:

$R_5 \circ R_3 = \big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < c\big\}.$

Já temos que $R_3 = \big\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\big\}$ também podendo ser escrito como $\big\{\langle a, c\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < c\big\}$. Então:

$R_5 \circ R_3 = R_3.$

## 6.

- $R_1 = \varnothing$
- $R_2 = \{\langle 0, 0\rangle\}$
- $R_3 = \{\langle 0, 1\rangle\}$
- $R_4 = \{\langle 1, 0\rangle\}$
- $R_5 = \{\langle 1, 1\rangle\}$
- $R_6 = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
- $R_7 = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$
- $R_8 = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $R_9 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$
- $R_{10} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $R_{11} = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $R_{12} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$
- $R_{13} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $R_{14} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $R_{15} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- $R_{16} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

## 7.

Se $R$ é simétrica, então $\forall a, b \in A\ (aRb \Rightarrow bRa)$. Logo, sempre teremos em $R$ pares $\langle a, b\rangle$ e $\langle b, a\rangle$.

Temos que $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$. Ou seja, se $aRb$, então $bR^{-1}a$. Mas, como $R$ é simétrica, se $aRb$, também temos $bRa$, logo, $aR^{-1}b$.

Dessa forma, $\forall \langle x, y\rangle \in R\ (\langle x, y\rangle \in R^{-1})$, ou seja, todos os elementos de $R$ também estão em $R^{-1}$. Portanto, $R = R^{-1}$.

## 8.

As respostas serão baseadas nas seguintes condições:

- Condição para ser função: $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B \ (aRb_1 \land aRb_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$
- Condição para ser injetora: $\forall b \in B \ \forall a_1, a_2 \in A \ (a_1Rb \land a_2Rb \Rightarrow a_1 = a_2)$
- Condição para ser sobrejetora: $\forall b \in B \ \exists a \in A \ (aRb)$
- Condição para ser total: $\forall a \in A \ \exists b \in B \ (aRb)$
- Condição para ser bijetora: função total injetora e sobrejetora

Lembrar que, em lógica matemática, em uma implicação $(p \Rightarrow q)$, se $p$ (antecedente da implicação) tiver valor F, $p \Rightarrow q$ tem valor V.

### a)

- Função: com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb_1 \land aRb_2$, então, o antecendente da implicação $(aRb_1 \land aRb_2)$ é falso, portanto, a implicação $(aRb_1 \land aRb_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$ é verdadeira. Logo, a relação é uma função.
- Injetora: com $R = \varnothing$, nunca teremos $a_1Rb \land a_2Rb$, então, o antecedente da implicação $(a_1Rb \land a_2Rb)$ é falso, portanto, a implicação $(a_1Rb \land a_2Rb \Rightarrow a_1 = a_2)$ é verdadeira. Logo, a relação é injetora.
- Sobrejetora: com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb$. Logo, não é sobrejetora.
- Total: com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb$. Logo, não é total.
- Bijetora: não é total e sobrejetora. Logo, não é bijetora.

### b)

- Função: temos $0R1$ e $0R2$, mas $1 \neq 2$. Logo, não é função.
- Injetora: temos $0R2$ e $1R2$, mas $0 \neq 1$. Logo, não é injetora.
- Sobrejetora: não existe $c \in C$ tal que $cR0$. Logo, não é sobrejetora.
- Total: não existe $c \in C$ tal que $2Rc$. Logo, não é total.
- Bijetora: não é função total injetora e sobrejetora. Logo, não é bijetora.

## c)

- Função: nenhum elemento de $C$ está relacionado com mais de um elemento de $B$. Logo, é função.
- Injetora: nenhum elemento de $B$ está relacionado com mais de um elemento de $C$. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: todos os elementos de $B$ estão relacionados com algum de $C$. Logo, é sobrejetora.
- Total: não existe $x \in B$ tal que $2Rx$. Logo, não é total.
- Bijetora: não é total. Logo, não é bijetora.

## d)

- Função: nenhum elemento de $A$ está relacionado com mais de um elemento de $B$. Logo, é função.
- Injetora: nenhum elemento de $B$ está relacionado com mais de um elemento de $A$. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: não existe $x \in A$ tal que $xRb$. Logo, não é sobrejetora.
- Total: todos os elementos de $A$ estão relacionados com algum de $B$. Logo, é total.
- Bijetora: não é sobrejetora. Logo, não é bijetora.

## e)

- Função: temos $aRa$ e $aRb$, mas $a \neq b$. Logo, não é função.
- Injetora: nenhum elemento de $B$ está relacionado com mais de um elemento de $A$. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: todos os elementos de $B$ estão relacionados com algum de $A$. Logo, é sobrejetora.
- Total: todos os elementos de $A$ estão relacionados com algum de $B$. Logo, é total.
- Bijetora: não é função. Logo, não é bijetora.

## f)

- Função: nenhum $x \in \mathbb{Z}$ tem mais de um quadrado. Logo, é função.
- Injetora: temos, por exemplo, $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$, mas $2 \neq -2$. Logo, não é injetora.
- Sobrejetora: não existe, por exemplo, $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = 3$. Logo, não é sobrejetora.
- Total: todo $x \in \mathbb{Z}$ tem um quadrado. Logo, é total.
- Bijetora: não é injetora e sobrejetora. Logo, não é bijetora.

## g)

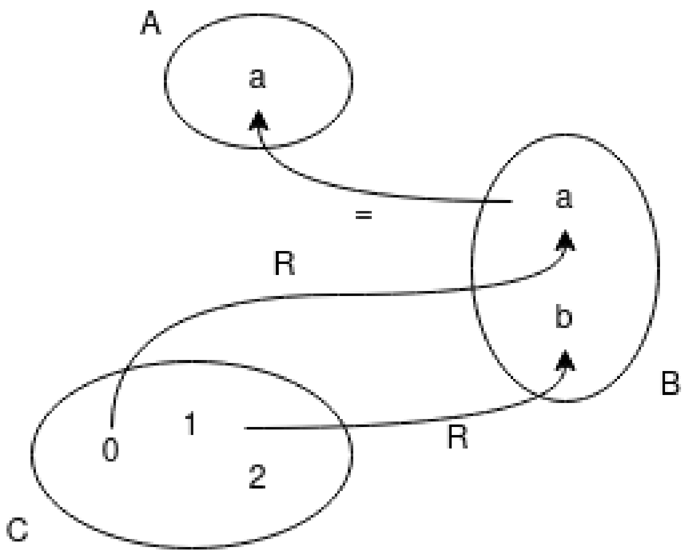
- Função: todo par $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2$ tem uma única soma. Logo, é função.
- Injetora: temos, por exemplo, $1 + 3 = 4$ e $2 + 2 = 4$, mas $\langle 1, 3 \rangle \neq \langle 2, 2 \rangle$. Logo, não é injetora.
- Sobrejetora: para cada $n \in \mathbb{N}$, é possível ao menos uma soma ($n + 0$, por exemplo) cujo resultado seja $n$. Logo, é sobrejetora.
- Total: todo par $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2$ tem uma soma. Logo, é total.
- Bijetora: não é injetora. Logo, não é bijetora.

## h)

- Função: todo par $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$ tem um único quociente. Logo, é função.
- Injetora: temos, por exemplo, $2 \div 1 = 2$ e $4 \div 2 = 2$, mas $\langle 2, 1 \rangle \neq \langle 4, 2 \rangle$. Logo, não é injetora.
- Sobrejetora: para cada $z \in \mathbb{Z}$, é possível ao menos uma divisão ($z \div 1$, por exemplo) cujo resultado seja $z$. Logo, é sobrejetora.
- Total: os pares do tipo $\langle n, 0 \rangle$ não têm quociente. Logo, não é total.
- Bijetora: não é injetora e total. Logo, não é bijetora.

# 9.

Representação das relações em diagramas de Venn:




A relação $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \rightarrow B$ foi representada como $R$. A relação $\varnothing : A \rightarrow C$ não foi representada, pois não possui pares.

Analisar o diagrama de Venn nos ajuda a encontrar as possíveis composições entre as relações.

Analisando a partir de $\varnothing : A \rightarrow C$. Como ela vai para $C$, precisa ser composta com uma relação que sai de $C$, no caso, $R : C \rightarrow B$.

Os pares da relação composta são dados por $\{\langle a, c\rangle \mid \langle a, b\rangle \in \varnothing \wedge \langle b, c\rangle \in R\}$. Mas não existe $\langle a, b\rangle \in \varnothing$, logo, não existem pares $\langle a, c\rangle$ que satisfaçam a condição. Portanto, a composição é uma relação vazia definida de $A$ para $B$, pois $\varnothing$ sai de $A$ e $R$ vai para $B$.

A composição, então, é: $R \circ \varnothing : A \rightarrow B = \varnothing$.

Como $R \circ \varnothing$ vai para $B$, pode ainda ser composta com uma relação que sai de $B$, $=: B \rightarrow A$.

Os pares da relação composta são dados por $\{\langle a, c\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R \circ \varnothing \wedge \langle b, c\rangle \in =\}$. Mas não existe $\langle a, b\rangle \in R \circ \varnothing$, logo, não existem pares $\langle a, c\rangle$ que satisfaçam a condição. Portanto, a composição é uma relação vazia definida de $A$ para $A$, pois $R \circ \varnothing$ sai de $A$ e $=$ vai para $A$.

A composição, então, é: $= \circ R \circ \varnothing : A \rightarrow A = \varnothing$.

Analisando a partir de $R : C \to B$. Como ela vai para $B$, precisa ser composta com uma relação que sai de $B$, no caso, $=: B \to A$.

Os pares da relação composta são dados por $\{\langle a, c\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in =\}$. Podemos ver pelo diagrama de Venn que o único par que satisfaz essa condição é $\langle 0, a\rangle$. Portanto, a composição é uma relação igual a $\{\langle 0, a\rangle\}$ definida de $C$ para $A$, pois $R$ sai de $C$ e $=$ vai para $A$.

A composição, então, é: $= \circ R : C \to A = \{\langle 0, a\rangle\}$.

Como $= \circ R$ vai para $A$, pode ainda ser composta com uma relação que sai de $A$, $\varnothing : A \to C$.

Os pares da relação composta são dados por $\{\langle a, c\rangle \mid \langle a, b\rangle \in = \circ R \wedge \langle b, c\rangle \in \ \varnothing\}$. Mas não existe $\langle b, c\rangle \in \varnothing$, logo, não existem pares $\langle a, c\rangle$ que satisfaçam a condição. Portanto, a composição é uma relação vazia definida de $C$ para $C$, pois $= \circ R$ sai de $C$ e $\varnothing$ vai para $C$.

A composição, então, é $\varnothing \circ = \circ R : C \to C = \varnothing$.

Analisando a partir de $=: B \to A$. Como ela vai para $A$, precisa ser composta com uma relação que sai de $A$, no caso, $\varnothing : A \to C$.

Os pares da relação composta são dados por $\{\langle a, c\rangle \mid \langle a, b\rangle \in = \wedge \langle b, c\rangle \in \varnothing\}$. Mas não existe $\langle b, c\rangle \in \varnothing$, logo, não existem pares $\langle a, c\rangle$ que satisfaçam a condição. Portanto, a composição é uma relação vazia definida de $B$ para $C$, pois $=$ sai de $B$ e $\varnothing$ vai para $C$.

A composição, então, é: $\varnothing \circ =: B \to C = \varnothing$.

Como $\varnothing \circ =$ vai para $C$, pode ainda ser composta com uma relação que sai de $C$, $R : C \to B$.

Os pares da relação composta são dados por $\{\langle a, c\rangle \mid \langle a, b\rangle \in \ \varnothing \circ = \wedge \langle b, c\rangle \in R\}$. Mas não existe $\langle b, c\rangle \in \varnothing \circ =$, logo, não existem pares $\langle a, c\rangle$ que satisfaçam a condição. Portanto, a composição é uma relação vazia definida de $B$ para $B$, pois $\varnothing \circ =$ sai de $B$ e $R$ vai para $B$.

A composição, então, é: $R \circ \varnothing \circ =: B \to B = \varnothing$.

# 10.

## a)

Condição para ser função: $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B \ (aRb_1 \wedge aRb_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$.

Em uma relação vazia, nunca existirão $aRb_1$ ou $aRb_2$, assim, o antecedente da implicação é falso, portanto, a implicação é verdadeira. Logo, o conjunto vazio é sempre função parcial.

## b)

Condição para ser total: $\forall a \in A\ \exists b \in B\ (aRb)$.

Se $A$ for um conjunto não vazio, tem ao menos um $a$, mas, como a relação é vazia, nunca haverá $b \in B$ tal que $aRb$. Logo, o conjunto vazio só é função total quando $A$ for conjunto vazio.

# 11.

As respostas serão baseadas nas mesmas condições da questão 8.

## a)

- Função total: nenhum elemento de $A$ está relacionado com mais de um elemento de $B$. Logo, é função. E todos os elementos de $A$ estão relacionados com algum de $B$. Logo, é total.
- Injetora: nenhum elemento de $B$ está relacionado com mais de um elemento de $A$. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: não existe $x \in A$ tal que $xRb$. Logo, não é sobrejetora.
- Bijetora: não é sobrejetora. Logo, não é bijetora.

## b)

- Função total: não existe $x \in B$ tal que $xRy \wedge xRz \wedge y \neq z$. Logo, é função. E para todo $x \in B$, temos $y \in B$ tal que $xRy$. Logo, é total.
- Injetora: não existe $x \in B$ tal que $yRx \wedge zRx \wedge y \neq z$. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: para todo $x \in B$, temos $y \in B$ tal que $yRx$. Logo, é sobrejetora.
- Bijetora: é função total injetora e sobrejetora. Logo, é bijetora.

## c)

- Função total: com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb_1 \land aRb_2$, então, o antecendente da implicação é falso, portanto, a implicação é verdadeira. Logo, é função. E com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb$. Logo, não é total.
- Injetora: com $R = \varnothing$, nunca teremos $a_1Rb \land a_2Rb$, então, o antecedente da implicação é falso, portanto, a implicação é verdadeira. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb$. Logo, não é sobrejetora.
- Bijetora: não é total e sobrejetora. Logo, não é bijetora.

## d)

- Função total: com $R = \varnothing$, nunca teremos $aRb_1 \land aRb_2$, então, o antecendente da implicação é falso, portanto, a implicação é verdadeira. Logo, é função. E não existem elementos no conjunto vazio, então, mesmo não havendo nenhum $aRb$, ainda segue a condição. Logo, é total.
- Injetora: com $R = \varnothing$, nunca teremos $a_1Rb \land a_2Rb$, então, o antecedente da implicação é falso, portanto, a implicação é verdadeira. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: não existem elementos no conjunto vazio, então, mesmo não havendo nenhum $aRb$, ainda segue a condição. Logo, é sobrejetora.
- Bijetora: é função total injetora e sobrejetora. Logo, é bijetora.

## e)

- Função total: temos $aRa$ e $aRb$, mas $a \neq b$. Logo, não é função. E todos os elementos de $A$ estão relacionados com algum de $B$. Logo, é total.
- Injetora: nenhum elemento de $B$ está relacionado com mais de um elemento de $A$. Logo, é injetora.
- Sobrejetora: todos os elementos de $B$ estão relacionados com algum de $A$. Logo, é sobrejetora.
- Bijetora: não é função. Logo, não é bijetora.

# 12.

## a)

$sucessor : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid y = x + 1 \right\}$

É injetora, pois para cada $y$ só existe um $x$ tal que $y = x+1$, mas não é sobrejetora porque não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 = x + 1$.

## b)

$R : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid y = x - 1 \ se \ x \neq 0; y = 0 \ se \ x = 0 \right\}$

É sobrejetora, pois todo $n \in \mathbb{N}$ é antecessor de algum natural, mas não é injetora, pois temos $\langle 0, 0 \rangle$ e $\langle 1, 0 \rangle$.

## c)

$troca : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid y = x + 1 \ se \ x \ é \ par; y = x - 1 \ se \ x \ é \ impar \right\}$

É injetora, pois cada $y$ se relaciona com apenas um $x$, e é sobrejetora, pois $y$ pode assumir todos os valores de $n \in \mathbb{N}$.

## d)

$dez : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid y = 10 \right\}$

Não é injetora, pois $y = 10$ está relacionado com mais de um valor de $x$, e não é sobrejetora, pois $y$ assume apenas um valor de $n \in \mathbb{N}$.

# 13.

## a)

Se $f \circ g$ for injetora, teremos $f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Supondo, então, que temos $f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2)$, ou, pela definição de composição, $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$. Se temos essa igualdade, como $f$ é injetora, concluímos que $g(a_1) = g(a_2)$. Mas $g$ também é injetora, logo, concluímos que $a_1 = a_2$.

Temos, então, $f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. Logo, $f \circ g$ é injetora.

## b)

Se $f \circ g$ for sobrejetora, teremos $\forall c \in C\ \exists a \in A\ (fog(a) = c)$.

Seja $c \in C$. Sendo $f$ sobrejetora, $\exists b \in B$ tal $f(b) = c$. Sendo $g$ sobrejetora, $\exists a \in A$ tal que $g(a) = b$. Pela definição de composição, havendo $g(a) = b$ e $f(b) = c$, temos $f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b) = c$.

Logo, sempre existe $a \in A$ tal que $f \circ g(a) = c$. Portanto, $f \circ g$ é sobrejetora.

# 14.

$f(S) = \{b \mid f(s) = b, s \in S\}$

## a)

Para mostrar que $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$, devemos mostrar separadamente que $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ e $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$.

**(1)** $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$

Seja $x \in f(S \cup T)$, ou seja, $x = f(y)$, onde $y \in (S \cup T)$. Como $y \in (S \cup T)$, temos, pela definição de união, que $y \in S \vee y \in T$. Ou seja, $f(y) \in f(S) \vee f(y) \in f(T)$.
Como $x = f(y)$, então, $x \in f(S) \vee x \in f(T)$. Logo, pela definição de união, $x \in f(S) \cup f(T)$.

Temos, assim, $x \in f(S \cup T) \Rightarrow x \in f(S) \cup f(T)$, ou seja, $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$.

**(2)** $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$

Seja $x \in f(S) \cup f(T)$. Ou, pela definição de união, $x \in f(S) \vee x \in f(T)$.

Caso $x \in f(S)$, temos que existe $s \in S$ tal que $f(s) = x$.
Se $s \in S$, temos, por adição lógica (se $p = V$, $p \vee q = V$), $s \in S \vee s \in T$, ou, por definição de união, $s \in (S \cup T)$.
Portanto, como $x = f(s)$ e $s \in (S \cup T)$, temos que $x \in f(S \cup T)$.

Caso $x \in f(T)$, teremos, por demonstração análoga à de $x \in f(S)$, que $x \in f(S \cup T)$.

Temos, assim, $x \in f(S) \cup f(T) \Rightarrow x \in f(S \cup T)$, ou seja, $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$.

## b)

Supondo $x \in f(S \cap T)$, ou seja, $\exists y \in (S \cap T)$ tal que $f(y) = x$.

Como $y \in (S \cap T)$, temos que $y \in S \wedge y \in T$. Então, $f(y) \in f(S) \wedge f(y) \in f(T)$.
Como $f(y) = x$, temos $x \in f(S) \wedge x \in f(T)$, ou, pela definição de interseção, $x \in f(S) \cap f(T)$.

Temos, assim, $x \in f(S \cap T) \Rightarrow x \in f(S) \cap f(T)$, ou seja, $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

# 15.

$f^{-1}(S) = \{a \mid f(a) = s, s \in S\}$

## a)

Para mostrar que $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$, devemos mostrar separadamente que $f^{-1}(S \cup T) \subseteq f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ e $f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(S \cup T)$.

**(1)** $f^{-1}(S \cup T) \subseteq f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

Seja $x \in f^{-1}(S \cup T)$, ou seja, $f(x) = y, y \in (S \cup T)$. Como $y \in (S \cup T)$, temos, pela definição de união, que $y \in S \vee y \in T$.

Pela definição de $f^{-1}(S)$ e, analogamente, de $f^{-1}(T)$, se $f(x) = y$ e $y \in S \vee y \in T$, então $x \in f^{-1}(S) \vee x \in f^{-1}(T)$.

Logo, pela definição de união, $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

Temos, assim, $x \in f^{-1}(S \cup T) \Rightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$, ou seja, $f^{-1}(S \cup T) \subseteq f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

**(2)** $f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(S \cup T)$

Seja $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. Ou, pela definição de união, $x \in f^{-1}(S) \vee x \in f^{-1}(T)$.

Caso $x \in f^{-1}(S)$, temos $f(x) = y, y \in S$.

Se $y \in S$, temos, por adição lógica (se $p = V$, $p \vee q = V$), $y \in S \vee y \in T$, ou, por definição de união, $y \in (S \cup T)$.

Portanto, como $f(x) = y$ e $y \in (S \cup T)$, temos que $x \in f^{-1}(S \cup T)$.

Caso $x \in f^{-1}(T)$, teremos, por demonstração análoga à de $x \in f^{-1}(S)$, que $x \in f^{-1}(S \cup T)$.

Temos, assim, $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \Rightarrow x \in f^{-1}(S \cup T)$, ou seja, $f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(S \cup T)$.

## b)

Para mostrar que $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$, devemos mostrar separadamente que $f^{-1}(S \cap T) \subseteq f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$ e $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(S \cap T)$.

**(1)** $f^{-1}(S \cap T) \subseteq f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

Seja $x \in f^{-1}(S \cap T)$, ou seja, $f(x) = y, y \in (S \cap T)$.

Pela definição de interseção, $y \in S \wedge y \in T$.

Como $f(x) = y$, $x \in f^{-1}(S) \wedge x \in f^{-1}(T)$.

E, pela definição de interseção, $x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

Temos, assim, $x \in f^{-1}(S \cap T) \Rightarrow x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

**(2)** $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(S \cap T)$

Seja $x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$. Ou, pela definição de intereseção, $x \in f^{-1}(S) \wedge x \in f^{-1}(T)$.

Ou seja, $f(x) = y, y \in S \wedge y \in T$.
Pela definição de interseção, $y \in (S \cap T)$.
Então, como $f(x) = y$, temos $x \in f^{-1}(S \cap T)$.

Temos, assim, $x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \Rightarrow x \in f^{-1}(S \cap T)$, ou seja, $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(S \cap T)$.

# 16.

*$f$ é injetora $\Leftrightarrow$ $f$ é sobrejetora*

**(1)** *$f$ é injetora $\Rightarrow$ $f$ é sobrejetora*

Supondo $f$ injetora.

Pela definição de injeção, $\forall b \in B\ \forall a_1, a_2 \in A\ (f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2)$. Ou seja, nenhum valor de $b \in B$ é alcançado por mais de um $a \in A$.

Como a função é total, $\forall a \in A\ \exists b \in B\ (f(a) = b)$. Supondo $n$ a cardinalidade de $A$, todos os $n$ elementos de $A$ alcançam um valor em $B$. Como $f$ é injetora, cada $a \in A$ alcança um valor diferente de $b \in B$, ou seja, $n$ valores de $b \in B$ são alcançados pela função.

$A$ e $B$ têm a mesma cardinalidade, então, $B$ tem $n$ elementos e todos são alcançados pela função, logo, $f$ é sobrejetora.

**(2)** *$f$ é sobrejetora $\Rightarrow$ $f$ é injetora*

Supondo $f$ sobrejetora.

Pela definição de sobrejeção, $\forall b \in B\ \exists a \in A\ (f(a) = b)$. Ou seja, supondo $n$ a cardinalidade de $B$, todos os $n$ elementos de $B$ são alcançados pela função.

Como a função é total, $\forall a \in A\ \exists b \in B\ (f(a) = b)$. $A$ e $B$ têm a mesma cardinalidade, então, todos os $n$ elementos de $A$ alcançam um valor em $B$. Como $f$ é sobrejetora, temos $n$ elementos de $A$ relacionados com $n$ elementos de $B$.

Em uma função, cada $a \in A$ alcança no máximo um $b \in B$. Então, para que todos os $n$ elementos de $B$ sejam alcançados, é necessário que cada valor de $b \in B$ esteja relacionado com um valor diferente de $a \in A$, ou seja, nenhum valor de $b \in B$ é alcançado por mais de um $a \in A$. Logo, $f$ é sobrejetora.

# 17.

## a)

Está correta pela definição de sobrejeção.

## b)

A proposição apresenta a definição de relação total, e não de sobrejeção. É possível haver uma função sobrejetora que não seja total.

Um exemplo é:

$A = \{a, b\}\ ;\ B = \{0\}\ ;\quad f : A \to B = \{\langle a, 0\rangle\}$

Todos os elementos de $B$ estão relacionados com algum de $A$ (sobrejetora), mas nem todos os elementos de $A$ estão relacionados com algum de $B$ (não é total).

Logo, a proposição é falsa.

## c)

Está correta pela definição de sobrejeção.

## d)

A proposição apresenta a definição de relação total, e não de sobrejeção. Como mostrado no item b, é possível haver uma função sobrejetora que não seja total.

Logo, a proposição é falsa.

## e)

Se $f$ é sobrejetora, a imagem de $f$ é composta por todos os elementos do co-domínio de $f$, ou seja, imagem e co-domínio são iguais. Logo, está correta.