UDESC – UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA	CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT) GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-0001**

Legenda:

Cálculos Conceitos Demonstração

Questões:

1. Classifique cada um dos sistemas lineares abaixo quanto ao seu número de soluções. Caso o sistema admitir alguma solução, exiba-a(s).

a) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x + 2z = 10 \\ -2x + 3y - 13z = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 5x - 15y + 10z = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 6 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ 2x + 3y - w = 0 \\ -3x + 4y + z + 2w = 4 \\ x + 2y - z + w = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -x + 2w = 1 \\ 4y - z - w = 2 \\ 5y - w = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$

2. Resolva o sistema linear, escrevendo a matriz ampliada do sistema inicial e escrevendo o sistema final do qual se obterá a solução do sistema original: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$.

3. Encontre todas as soluções do sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$.

4. Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ para determinar a matriz X que satisfaz a equação $X = DX + E$.

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2020/1: Graciela, Katiani e Marnei.

5. Reduza as matrizes à sua forma escada, por meio das operações linhas. A seguir, determine a nulidade e o posto dessas matrizes.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

6. Se A é uma matriz de ordem 3×5, quais são os possíveis valores para a nulidade de A? E se a ordem de A for 4×2?

7. Em cada item, determine o maior valor possível para o posto de A e o menor valor possível para a nulidade de A:

a) A é 4×4 b) A é 3×5 c) A é 5×3 d) A é 6×9

8. Verifique como o posto das seguintes matrizes varia em relação a *t:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$

9. Existem valores de *r* e *s* para os quais o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ seja igual a um ou dois? Se existirem, encontre estes valores.

10. Determine o(s) valor(es) de $k \in R$ para o(s) qual(is) o sistema linear $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$ admite solução.

11. Considere o sistema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$. Para quais valores reais de a e b o sistema:

a) tem uma infinidade de soluções?

b) tem única solução?

c) é impossível?

12. Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & \vdots & 2 \\ a & a & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & a & 2 & \vdots & b \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de um sistema linear. Para quais valores de *a* e *b* o sistema possui:

a) única solução?

b) nenhuma solução?

c) uma solução com duas variáveis livres?

13. Encontre uma relação entre *a, b* e *c* que faça com que o sistema linear $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \\ 5x + 9y - 6z = c \end{cases}$ se torne possível.

14. Considere o sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -4x + 8y - 5z = k - 1 \\ 2x - 4y + kz = -4 \end{cases}$. Determine (se existir) os valores de $k \in R$ que fazem com que o sistema

a) admita infinitas soluções.

b) admita única solução.

c) não admita nenhuma solução.

15.

a) Em cada item, use a informação da tabela para determinar se o sistema $AX = B$ é possível. Se for, determine **o número de variáveis livres** da solução geral do sistema. Justifique sua resposta.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Tamanho de A	3×3	9×5	4×4	3×3
Posto de A	2	4	0	3
Posto de $[A \vdots B]$	3	4	0	3

b) Para cada uma das matrizes da tabela acima, determine se o sistema homogêneo $AX = 0$ é **possível**. Indique a **quantidade de soluções** para cada caso.

16. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

17. Chamamos de sistema homogêneo de *m* equações e *n* incógnitas aquele sistema cujos termos independentes são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução, chamada de solução trivial. Qual é essa solução?

b) Encontre os valores de $k \in R$ para os quais o sistema homogêneo $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$ tenha uma solução distinta da solução trivial.

18. Um sistema **homogêneo** com três equações e 4 incógnitas sempre admite uma solução não trivial? Por quê?

☑ 19. Se $\det(A) = 0$ então o sistema **homogêneo** $AX = 0$ sempre admite infinitas soluções? Justifique sua resposta.

20. Encontre os valores de *k* para os quais o sistema **homogêneo** associado à matriz

$$A = \begin{bmatrix} k-3 & 0 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 \\ -5 & 0 & k+5 \end{bmatrix}$$

não admita nenhuma solução.

☑ 21. Apresente todos os possíveis resultados na discussão de um sistema **não-homogêneo** de 6 equações lineares com 4 incógnitas.

22. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix}$:

a) Discuta a solução do sistema linear **homogêneo** cuja matriz dos coeficientes é a matriz A.

☑ b) Construa um sistema linear **não homogêneo** cuja matriz dos coeficientes seja matiz D, tal que $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ seja uma **solução** desse sistema. Existem outras soluções para esse sistema? Em caso positivo exiba duas dessas soluções.

23. Determine para quais valores reais de t o sistema linear **homogêneo** $(A - tI)X = 0$ possui mais de uma solução, sendo *I* a matriz identidade, A a matriz dada nos itens abaixo, $(A - tI)$ a matriz de coeficientes do sistema e 0 uma matriz coluna nula de ordem apropriada:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

24. Podemos resolver um sistema linear utilizando a matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema, procedendo da seguinte forma:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

Isto é útil quando desejamos resolver vários sistemas lineares diferentes, mas que possuem a mesma matriz dos coeficientes. Usando a teoria acima descrita, resolva os sistemas lineares $AX = B$ em que

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ e:

a) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 100 \end{bmatrix}$ c) $B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 111 \\ 311 \\ 511 \end{bmatrix}$.

25. Resolva o sistema matricial $D^{-1}X = A$ onde $D = diag(1,2,3,4,5,6)$ é uma matriz diagonal e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

26. Determine a expressão algébrica para a matriz X que satisfaz a equação matricial

$$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}.$$

27. Obtenha a forma escalonada reduzida por linhas da matriz dos coeficientes de cada um dos sistemas lineares abaixo e, a partir dela, determine as soluções dos respectivos sistemas:

$$\begin{cases} 5s - 5\pi t = -5\pi^2 \\ -s + (\pi + 3)t = \pi(\pi + 6) \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_2 - 15x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_2 + 8x_4 = \frac{3}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 9x_5 = -21 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 7 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - \frac{3}{2}x_5 = -5 \\ -7x_1 + 28x_2 + 15x_3 - 23x_5 = 53 \end{cases}$

d) $\begin{cases} b + 6c = 6 \\ a + 6b - 5c = -3 \\ 3a + 20b - 3c = 1 \end{cases}$

28. Utilize matrizes inversas para resolver os sistemas anteriores, quando for possível.

29. Determine (se existir) a inversa das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 21 \\ -3 & -7 & -13 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 14 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

30. Resolva os seguintes sistemas lineares, usando matrizes inversas:

a) $\begin{cases} -y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + 4y + 5z = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -v + 5w = 0 \\ u + 2v + 3w = 0 \\ 2u + 4v + 5w = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -q + 5r = -2 \\ p + 2q + 3r = 3 \\ 2p + 4q + 5r = 1 \end{cases}$

31. Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes associada a um sistema linear **homogêneo**. Utilize a eliminação de Gauss-Jordan para provar que se $\neq 0$, então o sistema possui somente a solução trivial.

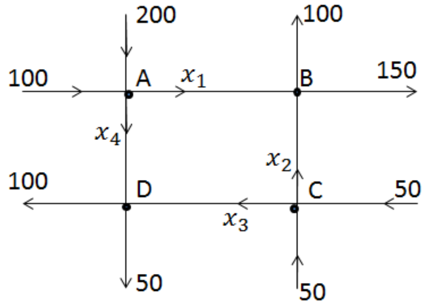
32. Uma editora publica um best-seller potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encardenação de luxo. Cada exemplar necessita de certo tempo para costura e cola conforme mostra a tabela abaixo:

	Costura	**Cola**
Capa mole	1 min	2 min
Capa dura	2 min	4 min
Luxo	3 min	5 min

Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local de colagem 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia, de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

33. Num grande acampamento militar há 150 blindados dos tipos BM3, BM4 e BM5, isto é, equipados com 3, 4 e 5 canhões do tipo MX9 respectivamente. O total de canhões disponíveis é igual a 530. A soma dos BM4 com os BM5 corresponde a 2/3 dos BM3. Se para o início de uma manobra militar, cada canhão carrega 12 projéteis, quantos projéteis serão necessários para o grupo dos BM4 no início da operação?

34. Pretende-se construir um modelo matemático que analise a rede de tráfego representada na figura. A unidade de medida é "veículos por hora". O tráfego flui ao longo das vias, no sentido assinalado, e sendo válida a lei de que o número de viaturas que entra num cruzamento é igual ao número de viaturas que sai.

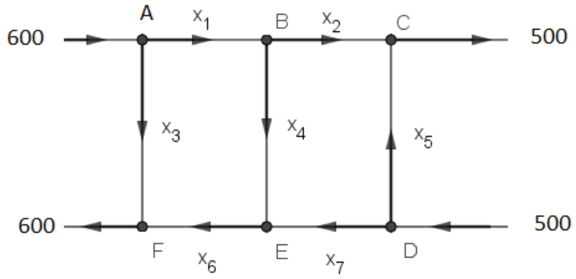


a) Represente a situação por meio de um sistema de equações lineares e resolva-o.

b) Apresente duas maneiras distintas segundo as quais o tráfego pode fluir.

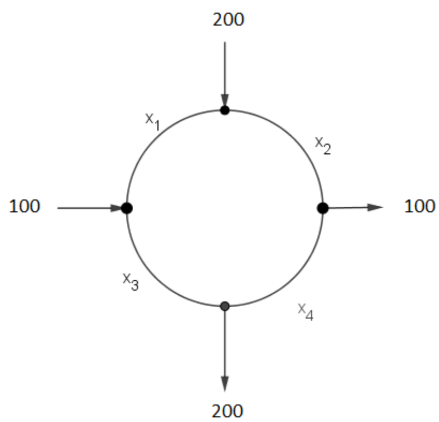
c) Qual o menor número de carros que pode passar por AB?

35. A água flui por meio de uma rede de tubos (em milhares de metros cúbicos por hora) como mostrado na figura. O fluxo total de água que entra em cada junção (indicadas pelos pontos A, B, C, D, E e F) deve ser igual ao fluxo de saída da junção.



a) Interprete matematicamente o fluxo de água apresentado na figura por meio de um sistema de equações lineares. A seguir, resolva esse sistema.
b) Encontre o fluxo de água quando $x_1 = x_2 = 100$.
c) Encontre o fluxo de água quando $x_6 = x_7 = 0$.
d) Encontre o fluxo de água quando $x_5 = 1000$ e $x_6 = 0$.

36. O fluxo de tráfego (em veículos por hora) em uma rede de ruas de sentido único, interligadas por uma rotatória, é mostrado na figura. Na rotatória, o sentido de fluxo é somente o **anti-horário.** O tráfego flui ao longo das ruas no sentido assinalado. É válida a lei de que o número de veículos que entra numa interseção é igual ao número de veículos que sai dessa interseção.



a) Interprete matematicamente o fluxo de tráfego apresentado na figura, por meio de um sistema de equações lineares. A seguir, resolva esse sistema.
b) Encontre o fluxo de tráfego quando $x_4 = 0$.
c) Encontre o fluxo de tráfego quando $x_4 = 100$.
d) Encontre o fluxo de tráfego quando $x_1 = 2x_2$.

✐ 37. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Apresente argumentos consistentes que justifiquem a veracidade da afirmação que julgar verdadeira e exiba um contra-exemplo para a afirmação que julgar falsa:

a) A matriz nula é uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas.
b) A matriz identidade 4×4 está na forma escalonada reduzida por linhas.
c) Se U e V são matrizes diagonais, então $UV = VU$.
d) Existem matrizes A e B de mesma ordem tais que A, B e $A + B$ sejam inversíveis.
e) Existem matrizes A e B de mesma ordem e não inversíveis tais que $A + B$ seja inversível.
f) Não existem matrizes A e B de mesma ordem e inversíveis tais que $A + B$ não seja inversível.
g) Se A e B são matrizes do mesmo tamanho tais que os sistemas $AX = 0$ e $BX = 0$ têm as mesmas soluções, então $A = B$.
h) Se X_1, X_2 e X_3 são soluções do sistema $AX = B$, então $\frac{2}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_2 - \frac{1}{5}X_3$ é também uma solução de $AX = B$.

✐ 38. Uma matriz quadrada A é considerada simétrica se $A^T = A$ e antissimétrica se $A^T = -A$. Levando em conta as propriedades da transposição de matrizes, determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com argumentos consistentes ou com a exibição de contra-exemplos:

a) Todas as entradas da diagonal principal de uma matriz antissimétrica devem ser nulas.
b) Não existem matrizes simétricas que também sejam antissimétricas.
c) Toda matriz simétrica é antissimétrica.
d) Toda matriz antissimétrica é simétrica.
e) Se uma matriz não é simétrica, então ela é antissimétrica.
f) Se uma matriz triangular superior é simétrica, então ela é uma matriz diagonal.
g) Nenhuma matriz quadrada pode ser simétrica e antissimétrica simultaneamente.
h) Se A é uma matriz antissimétrica, então A^T também é antissimétrica.
i) A soma de duas matrizes simétricas de mesma ordem também é uma matriz simétrica.
j) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem também é uma matriz simétrica.
k) A soma de duas matrizes antissimétricas de mesma ordem é uma matriz antissimétrica.
l) Se A é uma matriz quadrada qualquer, então $A + A^T$ e AA^T sempre são matrizes simétricas.
m) Se A é uma matriz quadrada qualquer, então $A - A^T$ e AA^T sempre são matrizes antissimétricas.
n) Se A é uma matriz antissimétrica inversível, então A^{-1} também é antissimétrica.
o) Se $A_{n \times n}$ é uma matriz antissimétrica e *n* é ímpar, então o determinante de A é igual a zero.

p) Se A é uma matriz simétrica e B é uma matriz quadrada de mesma ordem que A, então $B^T AB$ também é simétrica.

39. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Mostre que BA é uma matriz antissimétrica e inversível.

40. Uma matriz quadrada P é chamada de ortogonal se $P^{-1} = P^T$. Sejam P e Q matrizes ortogonais de mesma ordem. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com argumentos consistentes.

a) P^T é uma matriz ortogonal.

b) PQ é uma matriz ortogonal.

c) $P + Q$ é uma matriz ortogonal.

d) $\det(P) = \pm 1$.