MC558 - 02/2024

Nurikabe

Nome: Victor Rigatto
RA: 178068

Nurikabe

- Quebra-cabeça de lógica inventado pela maior revista de puzzles do Japão.
- Nurikabe significa “revestir”.
- Consiste em revestir/preencher as células de uma grade 2D de tamanho finito.
- Cada célula pode ser pintada de branco ou preto, respeitando-se as regras.
- Algumas células contêm rótulos com números inteiros.

Visualização

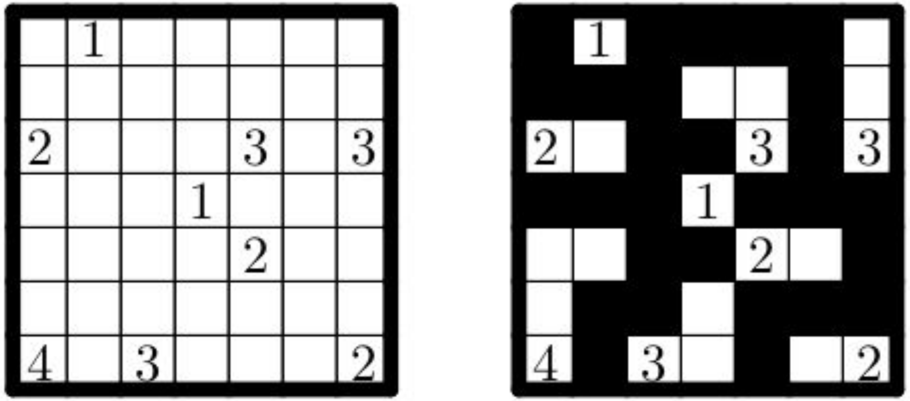
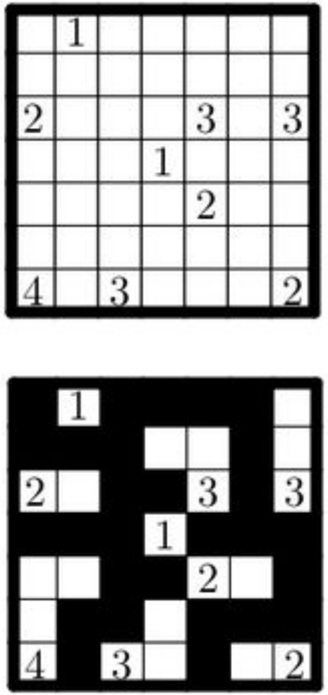


Fig. 1. NURIKABE puzzle and a solution.

Regras

- Células com números são pintadas de branco.
- O número mostra quantas células brancas estão conectadas.
- As conexões são feitas na horizontal e na vertical, formando uma região.
- Não há conexões em diagonal em nenhum caso.
- Cada região branca contém apenas um número, e são separadas pela região preta.
- A região preta é conexa, e não pode formar quadrados 2 x 2.



NURIKABE puzzle and a solution.

Estrutura da Prova

Para Nurikabe ser NP-completo, precisamos mostrar que:

1) Nurikabe está em NP.

Podemos sortear um padrão de preenchimento preto e branco das células, e essa solução pode ser verificada em tempo polinomial se é ou não uma solução válida para o problema. Temos então um certificado.

2) Nurikabe é NP-difícil.

Para mostrar que é NP-difícil, vamos reduzir o 3SAT planar, que é NP-difícil, para Nurikabe. Ou seja, transformar uma instância A de 3SAT planar para uma instância B de Nurikabe em tempo polinomial, e mostrar que resolver B implica em resolver A.

3SAT Planar

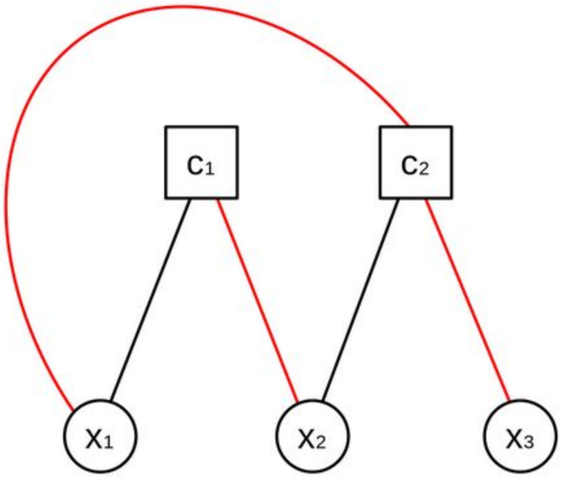
Já foi mostrado que 3SAT Planar é NP-completo, e é definido como:

Instance: A set of Boolean variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ and a set of clauses $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Furthermore, the bipartite graph $G = (X \cup C, E)$ is planar, where $E = \{\, (x_i, c_j) \mid x_i \in c_j \text{ or } \bar{x}_i \in c_j \,\}$.
Question: Is there an assignment for the variables such that all clauses are satisfied?

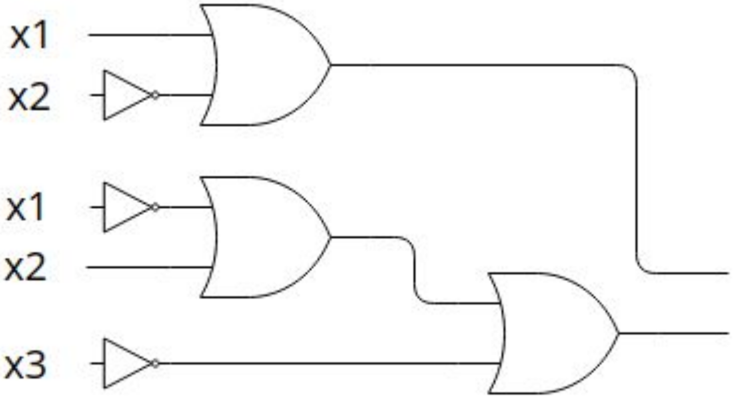
- Instância de 3SAT planar: variáveis e cláusulas booleanas.
- Podemos representar essa instância através de um grafo planar bipartido, onde os vértices são a união das variáveis e das cláusulas, e as arestas são a relação entre as variáveis e cláusulas definida acima.
- A partir do grafo, podemos então representar a instância através de circuitos booleanos, especificamente com portas OR e NOT. A porta AND também é representada através de OR e NOT devido à Lei de DeMorgan. O circuito também será planar.

3SAT Planar: Grafo e Circuito Booleano

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$



$$c_1 = x_1 \vee \neg x_2$$
$$c_2 = \neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$$



Instância Particular de Nurikabe

Theorem 1. *Solving a* NURIKABE *puzzle is* NP*-complete (under deterministic logspace many-one reductions), even when restricting to instances whose cells may contain only numbers* 1 *or* 2.

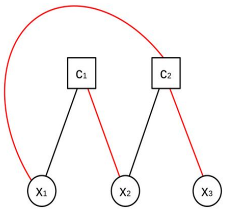
- Para as instâncias que têm apenas o número 1 nas células, o puzzle pode ser resolvido de forma determinística em tempo polinomial, e a solução é direta.
- No artigo, os autores desenvolveram um método que simula componentes de circuitos booleanos utilizando puzzles.
- Para isso, os autores limitam as células das instâncias dos puzzles aos números 1 e 2.
- Será mostrado que, para tais instâncias particulares, Nurikabe é NP-completo, e portanto também será para instâncias maiores, além de 1 e 2.

3SAT Planar para Nurikabe: Visão Geral

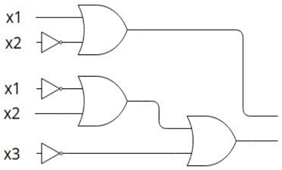
3SAT Planar

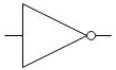
Nurikabe

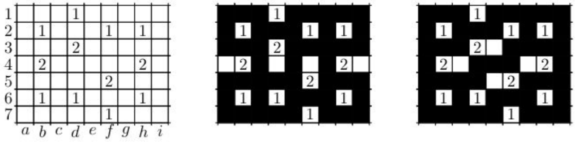
$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



$c_1 = x_1 \vee \neg x_2$
$c_2 = \neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$







(a) Sub-puzzle NOT-gate

(b) Solution "true"

(c) Solution "false"

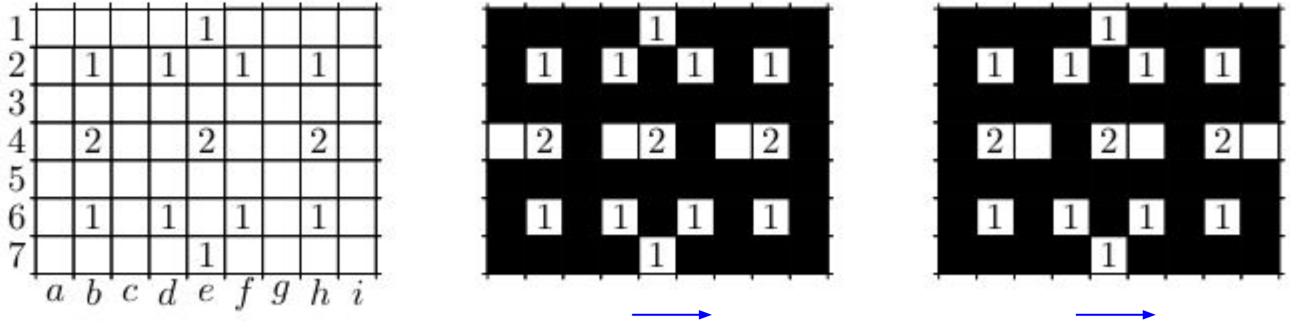
Qualquer instância de 3SAT Planar

em tempo polinomial

Define um sub puzzle particular de Nurikabe para cada componente booleana.

O preenchimento só pode ocorrer de 2 formas respeitando-se as regras. Uma forma é definida como true, a outra como false.

Nurikabe: Componentes - Wire



(a) Sub-puzzle wire (b) Solution "true" (c) Solution "false"

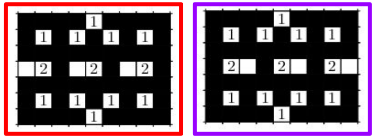
Pintar branco à esquerda do 2

Pintar branco à direita do 2

corresponde ao true e ao false no fio

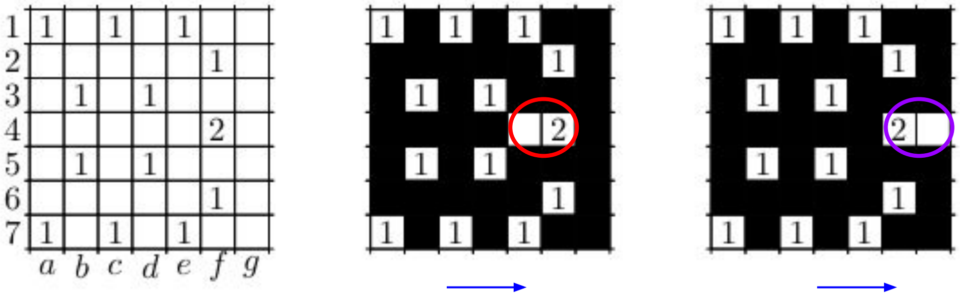
Referencial de interpretação
"esquerda para direita"

Nurikabe: Componentes - Input Gate



true

false



(a) Input-gate

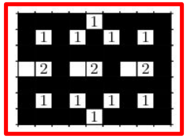
(b) Solution "true"

(c) Solution "false"

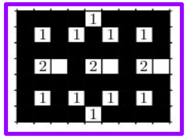
Fig. 3. Input-gate with information flow from left to right.

corresponde às entradas do circuito

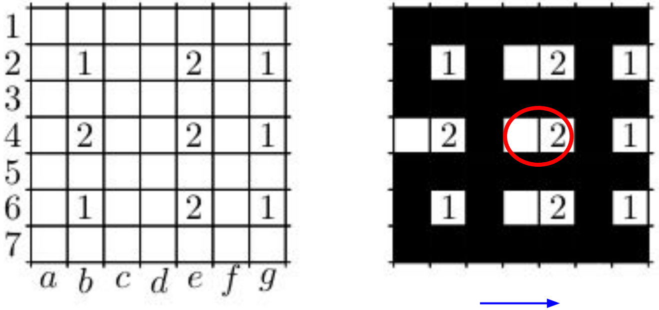
Nurikabe: Componentes - Output Gate



true



false



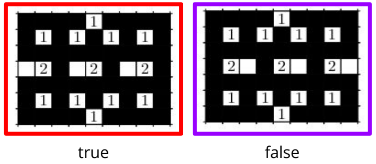
(a) Output-gate

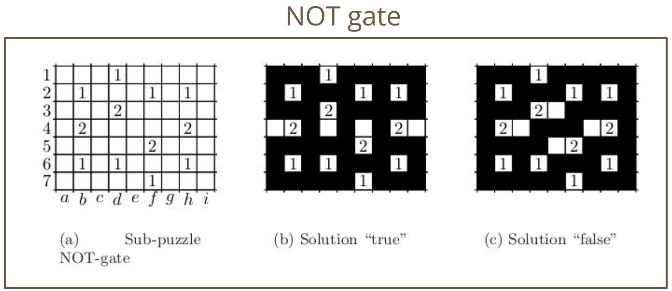
(b) Solution "true"

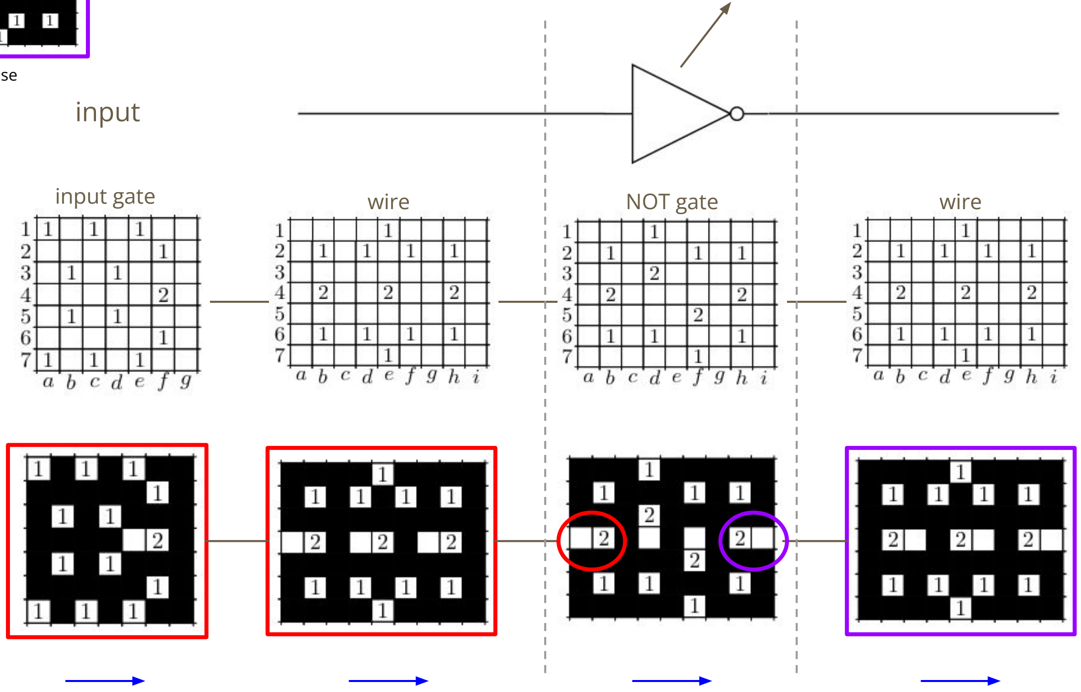
Fig. 4. Output-gate with information flow from left to right.

corresponde à saída do circuito

Nurikabe: Porta NOT

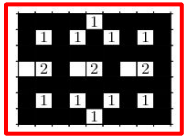




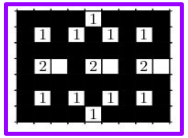


Exemplo preenchido como true

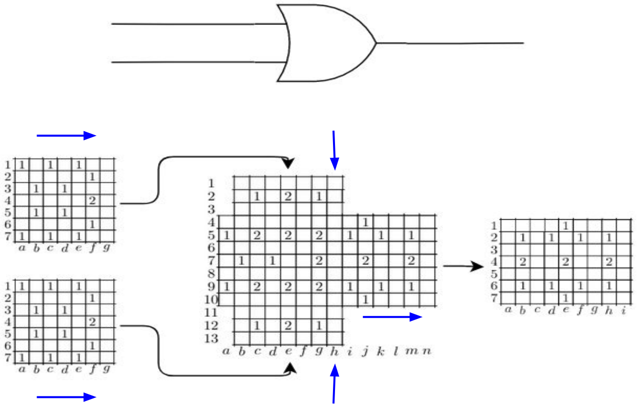
Nurikabe: Porta OR

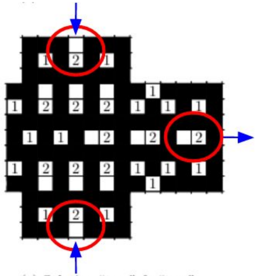


true

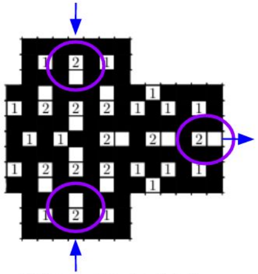


false

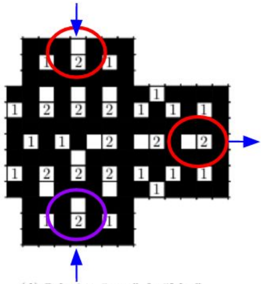




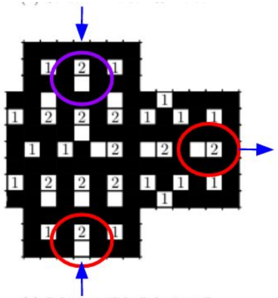
(e) Solution "true" & "true"



(b) Solution "false" & "false"

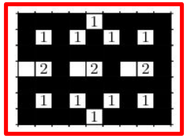


(d) Solution "true" & "false"

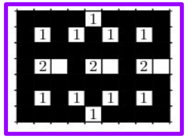


(c) Solution "false" & "true"

Nurikabe: Porta OR com FALSE e TRUE



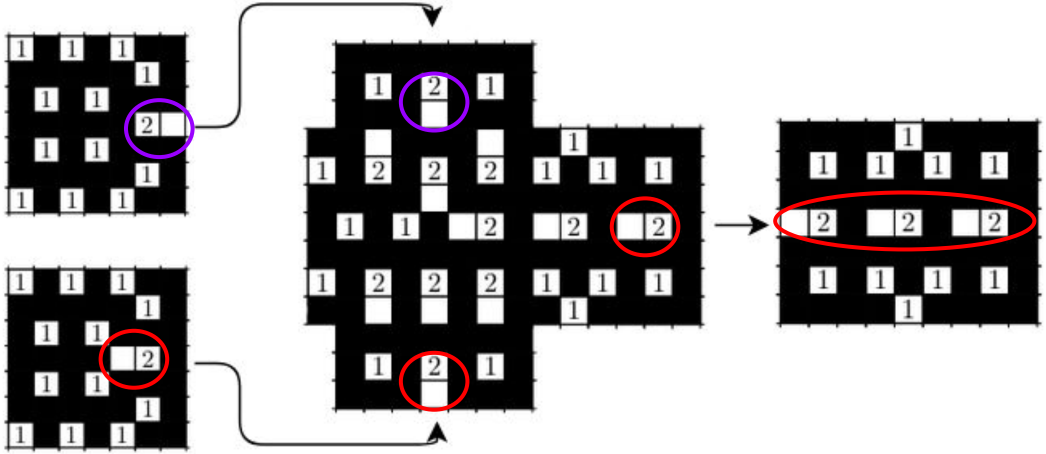
true



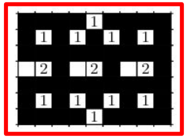
false

Exemplo preenchido como false

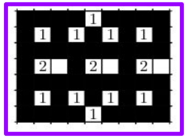
Exemplo preenchido como true



Nurikabe: Porta OR com FALSE e FALSE



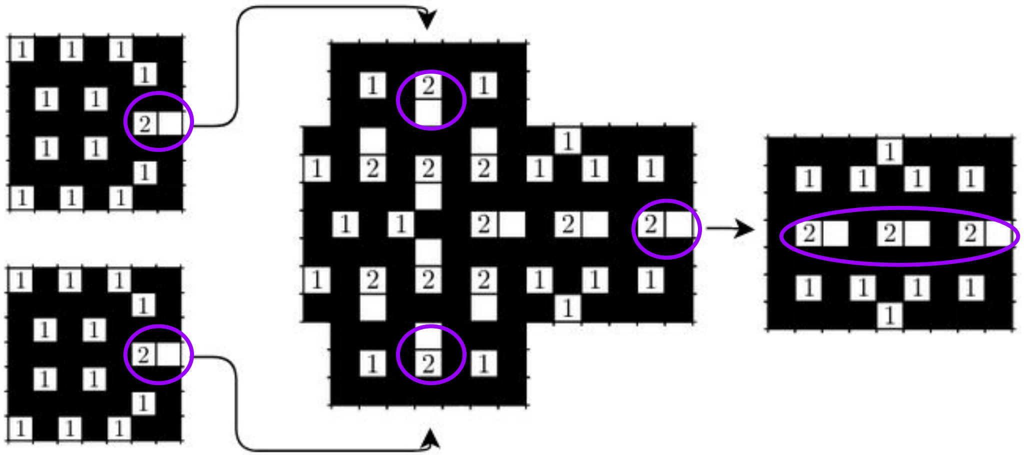
true



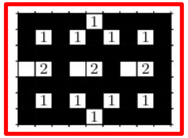
false

Exemplo preenchido como false

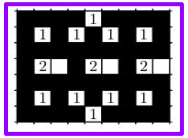
Exemplo preenchido como false



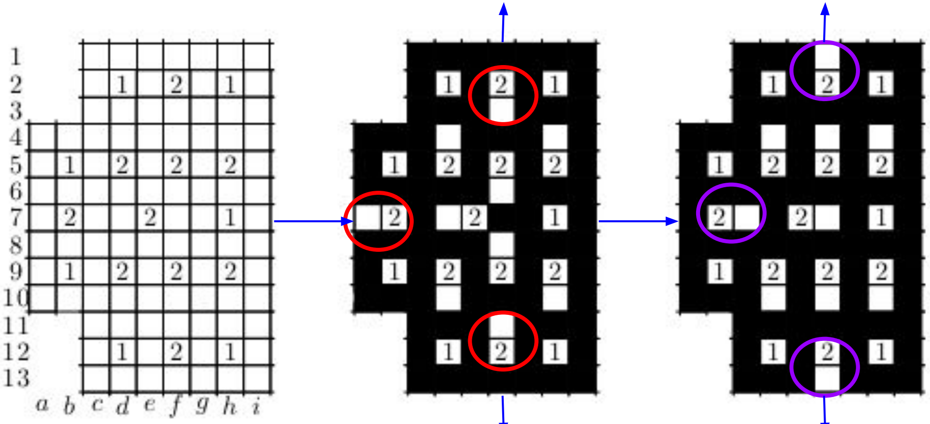
Nurikabe: Outras Componentes



true



false



(a) Sub-puzzle splitter

(b) Solution "true"

(c) Solution "false"

Fig. 5. A signal splitter—input from left, and outputs at the top and bottom.

Nurikabe: Observações

- Para cada componente de um circuito 3SAT-Planar, os autores construíram um sub puzzle particular de Nurikabe válido e conveniente.
- Os sub puzzles estão restritos à instância particular apenas com células de números 1 e 2, respeitando-se as regras do jogo.
- Cada sub puzzle é montado exatamente como vimos, representando true e false de acordo com os dois únicos modos que podem ser preenchidos. As posições dos 1s e 2s “forçam” a configuração válida desejada pelos autores.

Nurikabe: Observações

- Por conveniência, os autores assumem que todas as componentes do circuito estão rodeadas por preenchimentos com células contendo 1s e por células pretas, ou seja, um preenchimento neutro e válido que não interfere com as componentes definidas.
- Os autores afirmam que é sempre possível completar (juntar) os sub puzzles para obter um puzzle único, fazendo os preenchimentos neutros acima.
- Esses preenchimentos tem solução única trivial, e portanto não afetam o número de soluções do Nurikabe construído.

Nurikabe: Observações

- Finalmente, como há correspondência 1 para 1 entre as atribuições satisfeitas do circuito booleano 3SAT Planar e os puzzles Nurikabe construídos, a redução fica completa.
- Nurikabe é pelo menos tão difícil quanto 3SAT Planar.
- O artigo também menciona algumas variantes do Nurikabe, e mostra que também são NP-completas.

Nurikabe: Modelagem PLI

Idéia inicial...

- Puzzle pode ser visto como uma matriz quadrada i x j.
- Utilizando 1 variável, onde:
  - **Xij** : célula (i,j) pintada de preto (0) ou pintada de branco (1).
- A idéia é varrer as posições em volta da célula.
- Uma função objetivo para maximizar ou minimizar não teria utilidade nessa idéia.

Nurikabe: Modelagem PLI

Restrições

- Cada região branca só pode ter 1 número.
    - Só pode existir um único número diferente de 0 em uma região.
- A região com número deve respeitar o tamanho definido pelo número.
    - Somatório de Xij brancos da região deve ser igual ao número daquela região.
- Não podem existir regiões pretas 2 x 2.
    - Não podem existir Xij pretos tal que (i,j) configure um quadrado 2 x 2.
- Não há conexões em diagonal.
    - Não consideramos como região Xij de mesma cor onde (i,j) configure uma diagonal.
- As dimensões da matriz i x j.

Nurikabe: Modelagem PLI

Problemas em aberto:

Para o conjunto de instâncias onde as células só podem conter os números 1 e 2, a solução é mais simples, pois não precisamos verificar se a região que estamos pintando é conexa.

Para instâncias arbitrárias de Nurikabe, resta encontrar uma solução para checar se uma região é conexa.

Obrigado!

On The NP-Completeness of The Nurikabe Pencil Puzzle and Variants Thereof

Markus Holzer[1] and Andreas Klein[2] and Martin Kutrib[3]

[1] Institut für Informatik, Technische Universität München,
Boltzmannstraße 3, D-85748 Garching bei München, Germany
email: holzer@informatik.tu-muenchen.de
[2] Fachbereich für Mathematik und Informatik, Universität Kassel,
Heinrich Plett Straße 40, D-34132 Kassel, Germany
email: klein@mathematik.uni-kassel.de
[3] Institut für Informatik, Universität Gießen,
Arndtstraße 2, D-35392 Gießen, Germany
email: kutrib@informatik.uni-giessen.de