Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 20 de febrer de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- MIrar article Nash, Gromov
- Mirar quin Cn agafa al paper band

Agraïments

blablabla

Índex

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- explicats

Estructura de la memòria

tremendo

Guia de lectura

faig servir incrustació, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

Capítol 3

Teorema Nash-Kuiper C1

3.1 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 3.1.1. *Sigui (M, g) una superfície, $N \geq \dim M + 1$ i $u : M \to \mathbb{R}^N$ una incrustació estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en M s'escurça (estrictament) sota ∇u. Aleshores u es pot aproximar uniformement per incrustacions isomètriques C^1.*

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \to \varepsilon\mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació *curta*.

Observació 3.1.2. De fet, qualsevol incrustació C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la incrustació estàndar $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |X| = 1\}$ fins translació i rotació.

Això és demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem. Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D. Una aplicació $u : D \to \mathbb{R}^n$ és una *immersió* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x. La mètrica en D induïda per u és de la forma

$$\nabla u^{\intercal}(x)\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* si $\nabla u^{\intercal}\nabla u = g$, i diem que és *(estrictament) curta* si $\nabla u(x)\nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.

Teorema 3.1.3. *Sigui $n \geq 4$ i $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió isomètrica estrictament curta. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió isomètrica C^1 $\tilde{u} : D \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|u - v\|_{C^0(D)} < \varepsilon$.*

Observació 3.1.4. Aquest teorema necessita que la codimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscl·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix\cdot\xi}$ però el resultat del sumatori sigui real. Així, imposem per cada $I \in \mathcal{I}$ que exiteixi $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{U}_I, \quad \overline{\overline{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\intercal \nabla u_1$.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla \overline{U}_I^\intercal \nabla U_I\right) - \sum_I \left(\nabla u^\intercal \nabla U_I + \nabla U_I^\intercal \nabla u\right) - \sum_{I,J:J\neq \overline{I}} \nabla U_I^\intercal \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt}.

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi},$$

amb $a : D \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \to \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{n}} = 1$. Perque sigui real, definim també $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x)\overline{\mathbf{n}}(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned}\nabla_j W &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + \frac{1}{\lambda}\nabla_j (a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi}) \\ &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUE ÉS O(1/LAMBDA)!!! I, per tant,

$$\begin{aligned}\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x) &= (-i\xi_i a(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi})(i\xi_j a(x)e^{\lambda i x\cdot\xi})\overline{\mathbf{n}}(x)\cdot\mathbf{n}(x) + O(\frac{1}{\lambda}) \\ &= \xi_i\xi_j a(x)^2 + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\intercal$. Així, la oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2\xi_i\xi_j$.

Exemple 3.1.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x)\xi\otimes\xi + b^2(x)\xi'\otimes\xi' + c^2(x)\xi''\otimes\xi''$$

Aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi\otimes\xi$. Repetint-ho per $\xi'\otimes\xi'$ i $\xi''\otimes\xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.

Observació 3.1.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen de x. Això es pot resoldre amb el seguent lema.

Lema 3.1.7. *(Decomposició de l'error mètric) Sigui $\mathcal{P}$ l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en $\mathbb{R}^n$ i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P};[0,\infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A)\xi_i^{(k)}\xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.

Així, podem resoldre el problema de trobar a i ξ per cada $x \in D$.

Capítol 4

Paper Mobius strip

Capítol 5

Conclusions

Hem apres un munt

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY). *Nom del treball.* Cambridge University Press.