Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 19 de maig de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- MIrar article Nash, Gromov
- Mirar quin Cn agafa al paper band
- Mirar Sung Jin Oh
- Mirar millora de Kuiper

Agraïments

Bla, bla, bla

Índex

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- Explicats

Estructura de la memòria

Tremendo HEM DE MIRAR DE POSAR LA DEMOSTRACIÓ DE QUE NOSEQUÈ SEMPRE HI HA UN PUNT EL·LIPTIC

Guia de lectura

Faig servir encabiment, que potser hauria de dir immersió?

1.1 Temes de les reunions

Sigui $\mathcal{M}$ una varietat diferenciable amb una distància d, i sigui

$$\nu = \{(x, v) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n : v \in T_x\mathcal{M}^\perp\}.$$

Per qualsevol $\varepsilon > 0$, definim el subconjunt

$$\nu_\varepsilon = \{(x, v) \in \nu : ||v|| < \varepsilon\}$$

i l'aplicació

$$\begin{aligned} \sigma : \nu_\varepsilon &\to \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto x + v \end{aligned}$$

Teorema 1.1.1. *Si ε és prou petit, aleshores $\sigma : \nu_\varepsilon \to \sigma(\nu_\varepsilon)$ és homeomorfisme.*

Prova. (Meva, està molt millor al John M. Lee) Primer, volem veure que σ és injectiva. Suposem que $\mathcal{M}$ és C^∞ (amb C^2 hauria de ser prou). Donat qualsevol punt $x \in \mathcal{M}$ existeix un entorn prou petit U_x de x en $\mathcal{M}$ tal que ν_1 és injectiva. Això és degut al fet que, localment, la varietat és aproximadament igual al seu espai tangent.

Sigui x_0 el punt amb l'entorn U_{x_0} més petit que verifica la propietat anterior, i sigui y_0 el punt de $\mathcal{M} \setminus U_{x_0}$ tal amb el vector $w_0 \in T_{y_0}\mathcal{M}$ més curt tal que existeix algun $v_0 \in T_{x_0}\mathcal{M}$ tal que $x_0 + v_0 = y_0 + w_0$. Sigui $l = ||w_0||$. Aleshores, posant $\varepsilon = l/2$, tenim que σ és injectiva.

Pel que fa a la exhaustivitat, $\sigma : \nu_\varepsilon \to \sigma(\nu_\varepsilon)$ és exhaustiva per definició. A més, en ser la suma de dos vectors en $\mathbb{R}^n$, σ és contínua.

Cal veure que la inversa σ^{-1} és contínua. Sigui $a \in \sigma(\nu_\varepsilon)$. Aleshores, existeixen $x \in \mathcal{M}$ i $v \in \mathbb{R}^n$ tals que $a = \sigma(x, v) = x + v$. Com σ^{-1} projecta punts de $\sigma(\nu_\varepsilon)$ en el punt de ν_ε més proper, tenim que σ^{-1} és contínua. Per tant, σ és un homeomorfisme. $\square$

Observació 1.1.2. D'aquí surt el que fa servir Nash per allò del conjunt que no admet dues perpendiculars.

Capítol 2

Geometria diferencial i suavitat

La ide d'aquest capítol ha de ser la següent:

- Explicar temes de varietats topològiques.
- Parlar sobre geometria Riemanniana.
- Definir immersions i encabiments.
- Parlar de la suavitat de les immersions i encabiments.
- Enunciar i demostrar el tema de que qualsevol encabiment suau del tor ha de tenir algun punt el·líptic. A la pàgina 9 del llibre del Tor es comenta.

El que haurem de fer per a que tot tingui sentit un cop estigui acabat és assegurar-nos que anomenem x a les coordenades normals i z a les coordenades de la carta.

2.1 Introducció al capítol

En aquest capítol ens ocuparem de definir i comentar algunes de les nocions bàsiques de geometria diferencial i de varietats diferenciables i suaus. La referència principal per aquest capítol és Lee (2013).

A un nivell intuïtiu, les varietats suaus (*smooth manifolds*) són espais topològics que, localment, es poden veure com espais euclidians $\mathbb{R}^n$, i tals que hi sigui possible fer càlcul infinitesimal. Si bé és fàcil entendre la noció de suavitat (*smoothness*) en els exemples senzills de corbes i superfícies immerses en $\mathbb{R}^3$, cal tenir en compte que no és cap requeriment per a una varietat suau que sigui immersa en un espai ambient $\mathbb{R}^n$, sinó que s'haurà de treballar en termes intrínsecs. Aquest fet és molt rellevant en una de les aplicacions més interessants de la geometria diferencial, la teoria de la relativitat general, on l'espai-temps es modela com una varietat diferenciable de dimensió 4 i on no hi ha cap espai ambient en el sentit clàssic. Un altra subtilesa és que la noció de suavitat no pot ser una propietat purament topològica, ja que no és preservada per homeomorfismes. L'exemple més evident és el d'un cercle i un quadrat, que són homeomorfs en $\mathbb{R}^2$, però el cercle és suau mentre que el quadrat no ho és. Amb el que escriuré ara, la referència principal passa a ser el Warner, Warner (1983).

2.2 Definicions i propietats bàsiques

Definició 2.2.1. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert i $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és* ***k-vegades derivable contínuament****, o* ***de classe*** *$C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si totes les derivades parcials d'ordre k,*

$$\frac{\partial^k f}{\partial r_1^{\alpha_1} \cdots \partial r_n^{\alpha_n}} \quad \textit{tal que} \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k,$$

existeixen i són contínues en U.

Si $g : U \to \mathbb{R}^m$ és una aplicació contínua, diem que g és ***k-vegades derivable contínuament****, o* ***de classe*** *$C^k(U)$, si totes les seves components $g_i : U \to \mathbb{R}$ són k-vegades derivables contínuament.*

Notació 1. *No indicarem el domini en què una aplicació és de classe C^k quan el domini sigui clar pel context.*

Observacions 2.2.2.

- Una aplicació f és 0 vegades derivable contínuament si i només si f és contínua.
- Si f és k vegades derivable contínuament, aleshores també és j vegades derivable contínuament per $0 \leq j \leq k$.

Definició 2.2.3. *Direm que una aplicació és* ***suau*** *o* ***de classe*** *C^∞ si és infinitament derivable, és a dir, si és k-vegades derivable contínuament per a tot $k \in \mathbb{N}_0$.*

Definició 2.2.4. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}$ una funció de classe $C^k(U)$. Definim la* ***norma*** *$\|\cdot\|_{C^k(U)}$ de f com*

$$\|f\|_{C^k(U)} := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in U} \left\| f^{(i)}(x) \right\|.$$

Per una aplicació $g : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^k(U)$, definim la ***norma*** *$\|\cdot\|_{C^k(U)}$ de g com*

$$\|g\|_{C^k(U)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in U} \|\partial^\alpha f(x)\|,$$

on $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, i

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definició 2.2.5. *Sigui M un espai topològic Cal definició d'espai topològic?. Diem que M és una* ***varietat topològica de dimensió*** *n si es compleixen les propietats següents:*

- *M és Hausdorff, és a dir, si per a cada $p, q \in M$ amb $p \neq q$ existeixen entorns oberts $U \subseteq M$ i $V \subseteq M$ de p i q respectivament tals que $U \cap V = \emptyset$,*
- *M verifica el segon axioma de numerabilitat, és a dir, existeix una base numerable de la topologia de M,*
- *M és localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$, és a dir, per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert $U \subseteq M$ de p que és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$.*

Per tal de poder descriure localment els punts de les varietats i de poder operar amb ells, és necessari introduir el concepte de carta coordenada.

Definició 2.2.6. *Sigui M una varietat topològica de dimensió n. Diem que un parell (U, φ) és una* ***carta coordenada*** *o un* ***sistema de coordenades de*** *M si U és un obert de M i $\varphi : U \to \hat{U}$ és un homeomorfisme amb un obert $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem U el* ***domini de la carta*** *i φ l'****aplicació coordenada****. Donat un punt $p \in U$, anomenem* ***coordenades de*** *p respecte de la carta (U, φ) als components de $\varphi(p)$ en la base canònica de $\mathbb{R}^n$.*

Notació 2. *Sovint anomenarem carta coordenada o simplement carta a l'aplicació coordenada φ.*

Observació 2.2.7. De la definició de carta coordenada, observem que no tota varietat topològica M es pot cobrir amb una única carta coordenada. Per exemple, si M és homeomorf al cercle $\mathbb{S}^1$ amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^2$, no es pot trobar cap aplicació $\varphi : M \to \mathbb{R}$ que sigui un homeomorfisme amb un obert de $\mathbb{R}$, ja que $\mathbb{S}^1$ és compacte.

Es pot posar un exemple.

Definició 2.2.8. *Sigui M una varietat topològica de dimensió n. Anomenem* ***estructura diferenciable de classe*** *C^k en M una col·lecció $\mathcal{F} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes coordenades de M que compleixen les propietats següents:*

- *$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,*
- *Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, aleshores $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ és C^k.*
- *$\mathcal{F}$ és maximal respecte de la propietat anterior, és a dir, si $\mathcal{G}$ és una altra estructura diferenciable de classe C^k en M i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, aleshores $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

Definició 2.2.9. *Sigui M una varietat topològica de dimensió n. Diem que $(M, \mathcal{F})$ és una* ***varietat diferenciable de dimensió*** *n* ***i classe*** *C^k si $\mathcal{F}$ és una estructura diferenciable de classe C^k en M.*

Notació 3. *Sovint ens referirem a M com a varietat diferenciable, sense especificar-ne l'estructura diferenciable.*

Definició 2.2.10. *Aquesta definició no m'acaba d'agradar. Podem mirar si canviar-la.*

Sigui M una varietat diferenciable, $U \subseteq M$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real. Diem que f és ***de classe*** *C^k* ***en*** *U si $f \circ \varphi^{-1}$ és de classe C^k per tota aplicació coordenada φ de M. Una aplicació $\psi : M \to N$ és de classe $C^k(M, N)$ si per tota g definida en oberts V de N la composició $g \circ \psi$ és de classe C^k en V.*

2.2.1 Segon axioma de numerabilitat

A continuació veurem algunes propietats de les varietats diferenciables que es desprenen del fet que verifiquen el segon axioma de numerabilitat. El que més ens interessarà serà l'existència de particions de la unitat, en el cas les varietats de classe C^∞.Potser hauríem de deixar més clar en quin moment estem parlant de varietats de classe C^∞ i quan no.

Definició 2.2.11. *Sigui M una varietat diferenciable. Anomenem* ***recobriment de*** *$W \subseteq M$ a una col·lecció $\{U_\alpha\}$ de subconjunts de M tals que $W = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Diem que el recobriment és un* ***recobriment per oberts*** *si tots els U_α són oberts, i un* ***recobriment per tancats*** *si tots els U_α són tancats.*

Donat un recobriment $\{U_\alpha\}$ de $W \subseteq M$, diem que $\{V_\beta\}$ n'és un ***refinament*** *si per tot β existeix un α tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$ i $\bigcup_{\beta \in B} V_\beta = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.*

Diem que un recobriment $\{U_\alpha\}$ de $W \subseteq M$ és ***localment finit*** *si per a cada $p \in W$ existeix un entorn V de p en M tal que $V \cap U_\alpha = \emptyset$ per a tot α excepte un nombre finit. Diem que una varietat diferenciable és* ***paracompacta*** *si qualsevol recobriment per oberts té un refinament localment finit.*

Definició 2.2.12. *Sigui M una varietat diferenciable suau.Una* ***partició de la unitat***

***en** M és una col·lecció $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ de funcions reals de classe $C^\infty(M)$ tals que:*

- $0 \leq \varphi_i(p) \leq 1$ *per a tot* $i \in I$ *i* $p \in M$,
- $\sum_{i\in I} \varphi_i(p) = 1$ *per a tot* $p \in M$,
- *El conjunt de suports* $\{supp(\varphi_i)\}$ *és localment finit, on el* ***suport*** *d'una funció és l'adherència del conjunt de punts del seu domini on la funció no és* 0.

*Diem que la partició de la unitat és **subordinada al recobriment** $\{U_\alpha\}$ si per a cada $i \in I$ existeix un α tal que $supp(\varphi_i) \subseteq U_\alpha$.*

Lema 2.2.13. *Sigui X un espai topològic localment compacte (és a dir, tal que tot punt de X té un entorn compacte), Hausdorff i tal que verifica el segon axioma de numerabilitat. Aleshores X és paracompacte, i cada recobriment per oberts de X té un refinament numerable i localment finit per oberts d'adherència compacta.*

Prova. Com X verifica el segon axioma de numerabilitat, existeix una base numerable de la topologia de X. Com X és localment compacte, podem prendre d'aquesta base numerable els conjunts amb adherència compacta, i pel fet que X és Hausdorff, aquesta col·lecció de subconjunts serà una base en si mateixa. Sigui $\{U_i\}_{i\in I}$ aquesta base.

Sigui $G_1 := U_1$, i suposem que hem definit un cert $G_k = U_1 \cup \cdots \cup U_{j_k}$. Sigui j_{k+1} l'enter més petit tal que sigui estrictament més gran que j_k i tal que

$$\overline{G_k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i,$$

i definim

$$G_{k+1} := G_k \cup U_{j_{k+1}}.$$

D'aquesta manera, obtenim inductivament una successió de conjunts oberts G_k tals que per tot k tenim que

1. $\overline{G_k}$ és compacte,
2. $\overline{G_k} \subseteq G_{k+1}$,
3. $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$.

Ojito aqui que hem canviat la manera en què enumerem els G_k a G_i. El millor seria que els escrivissim de manera consistent. Ara sigui $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recobriment per oberts qualsevol. El conjunt $\overline{G_{i+1}} \setminus G_{i-1}$ és compacte i contingut en l'obert $G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}$. Per tot $i \geq 3$, podem escollir un subrecobriment finit del recobriment per oberts $U_\alpha \cap (G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}})$ de $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$, i es pot escollir un subrecobriment finit del recobriment per oberts $U_\alpha \cap G_3$ del conjunt compacte $\overline{G_2}$. Aquesta nova col·lecció serà un refinament numerable i localment finit per oberts d'adherència compacta del recobriment $\{U_\alpha\}$, com volíem veure. □

Lema 2.2.14. *Existeix una funció real no-negativa $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ en que és igual a 1 en $[-1,1]^n$ i 0 en el complementari de $(-2,2)^n$.*

Prova. Definim la funció com un producte de la forma

$$\varphi = (h \circ x_1) \cdots (h \circ x_n), \tag{2.2.1}$$

on

$$h(t) = g(t+2)g(2-t),$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

i

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

L'Ignasi vol que expliqui bé aquesta demostració □

Teorema 2.2.15 (Existència de particions de la unitat). *Fer referència a això a la demostració del Teorema de Nash.*

Sigui M una varietat diferenciable de classe C^∞ i $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recobriment per oberts de M. Aleshores, existeix una partició de la unitat numberable $\{\varphi_i : i \in I\}$ subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}$ amb suports $\{supp\varphi_i\}$ compactes. A més, si no exigim que els suports siguin compactes, existeix una partició de la unitat $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}$ amb $supp\varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$ per a tot $\alpha \in A$, amb com a molt un conjunt numerable dels φ_α no idènticament zero.

Prova. Sigui $\{G_i\}$ un recobriment com el definit a la demostració del lema 2.2.13 i definim $G_0 = \emptyset$. Per cada punt $p \in M$, sigui i_p l'enter més gran tal que $p \in M \setminus \overline{G_{i_p}}$. Escollim un α_p tal que $p \in U_{\alpha_p}$ i sigui (V, τ) una carta coordenada centrada en p (és a dir, tal que $\tau(p) = 0$ Comprovar que aquesta és la definició correcta molt ràpid) i tal que $V \subseteq U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} \setminus \overline{G_{i_p}})$ i $[-2, 2]^n \subseteq \tau(V)$.

Definim

$$\psi_p = \begin{cases} \varphi \circ \tau & \text{a } V, \\ 0 & \text{fora de } V. \end{cases}$$

on φ és tal com l'hem definit a l'equació 2.2.1. Aleshores, ψ_p és una funció de classe C^∞ en M que val 1 en un entorn W_p de p i té suport compacte en $V \subseteq U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} \setminus \overline{G_{i_p}})$. Per cada $i \geq 1$, escollim un nombre finit de punts $p \in M$ tals que els respectius W_p siguin un recobriment de $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$. Podem escollir un ordre qualsevol per les funcions corresponents ψ_p per obtenir una successió $\{\psi_j\}$, i els seus suports formen una col·lecció localment finita de subconjunts de M. Amb això veiem que la funció

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$$

és positiva i de classe C^∞ en M. Ara, per tot $i = 1, 2, \ldots$ definim

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi}.$$

Les funcions φ_i formen una partició de la unitat subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}$ amb suports compactes.

Si definim φ_α tals que siguin idènticament zero si cap φ_i té suport en U_α, i en cas contrari que siguin la suma de totes les φ_i que hi tenen suport, aleshores tenim que φ_α formen una partició de la unitat subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}$ amb com a molt un conjunt numerable dels φ_α no idènticament zero.

Veiem que el suport de cada φ_α és contingut en U_α, ja que si $\mathcal{A}$ és una col·lecció localment finita de conjunts tancats, aleshores $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Ara bé, observem que en aquest cas el suport de φ_α no és necessàriament compacte. □

Corol·lari 2.2.16. *Sigui G un obert d'una varietat diferenciable de classe C^∞ i $A \subseteq G$ un subconjunt tancat. Aleshores, existeix una funció $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ en M tal que*

1. $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ *per a tot* $p \in M$,

2. $\varphi(p) = 1$ *per a tot* $p \in A$,
3. *supp*$\varphi \subseteq G$.

Prova. Existeix una partició de la unitat $\{\varphi, \psi\}$ subordinada al recobriment $\{G, M \setminus A\}$ de M amb supp$\varphi \subseteq G$ i supp$\psi \subseteq M \setminus A$. φ és, per tant, la funció desitjada. □

ÉS MOLT IMPORTANT QUE DESPRÉS MIREM LA PÀGINA 24 DEL LEE, ON DEFINEIX TAMBÉ VARIETATS AMB FRONTERA

2.2.2 Vectors tangents

Un vector en $\mathbb{R}^n$ es pot pensar com un operador lineal sobre funcions reals diferenciables. En concret, donada una funció f diferenciable en un punt $p \in \mathbb{R}^n$, el vector v assigna a f un valor real que és la derivada direccional de f en la direcció i sentit de v a p,

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_p,$$

amb les propietats de linealitat esperades,

$$v(f+g) = v(f) + v(g),$$

$$v(\lambda f) = \lambda v(f),$$

i la propietat de Leibniz,

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

És evident que volem un anàleg a aquesta definició que sigui útil en el context de varietats diferenciables, per tal d'aprofitar el fet que aquestes són espais localment similars a $\mathbb{R}^n$.

Definició 2.2.17. *Sigui M una varietat diferenciable i (U, φ) una carta coordenada de M. Un **vector tangent** a M en un punt $p \in M$ és una aplicació que assigna a cada funció f de classe C^k en un entorn de p un valor real $v(f)$ tal que existeixi una col·lecció de nombres reals $(a_1, \ldots, a_n)$ tals que*

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}.$$

*Anomenem el conjunt de tots aquests vectors tangents l'**espai tangent** a M en p i el denotem per T_pM.*

Hi ha al Lee una mica més de detall i demostra que té la dimensió que toca i tal, es pot mirar.

Definició 2.2.18. *Sigui M una varietat diferenciable. Per cada punt $p \in M$, definim **l'espai cotangent** a p, T_p^*M, com l'espai vectorial dual de T_pM,*

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Una eina essencial per treballar amb vectors tangents serà el concepte de **diferencial** d'una aplicació diferenciable entre varietats. Crec que el concepte d'aplicació diferenciable entre varietats no l'hem definit encara. A més, serà important definir-lo pel cas C^k ja que el necessitarem.

Definició 2.2.19. *La necessitem en el cas C^k ja que és important per les definicions de la subsecció següent*

Siguin M i N varietats diferenciables suaus, $F : M \to N$ una aplicació diferenciable i $p \in M$. Anomenem ***diferencial de** F **en** p *l'aplicació*

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

que assigna a cada vector tangent $v \in T_pM$ el vector tangent $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$ que compleix

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F),$$

per a tota $f \in C^\infty(N)$.

Definició 2.2.20. *Diem que una aplicació F és* ***no-singular*** *en $p \in M$ si dF_p no és singular, és a dir, si el seu nucli és $\{0\}$.*

Dualitzant l'aplicació que defineix el diferencial, podem definir el *pullback* d'una funció diferenciable, que serà particularment important per a les mètriques Riemannianes.

Definició 2.2.21. *Siguin M i N varietats diferenciables suaus, $F : M \to N$ una aplicació diferenciable i $p \in M$. Anomenem* ***pullback puntual de** F **en** p *l'aplicació*

$$dF_p^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$$

obtinguda dualitzant el diferencial dF_p.

Observem que el *pullback* puntual està caracteritzat per la propietat

$$dF_p^*(w)(v) = w(dF_p(v)),$$

per a tot $v \in T_pM$ i $w \in T^*_{F(p)}N$.

Una altra eina que necessitarem per descriure la geometria local de les varietats diferenciables és el de **fibrat tangent**.

Definició 2.2.22. *Sigui M una varietat diferenciable. El* ***fibrat tangent*** *de M és la unió disjunta dels espais tangents de tots els punts de M,*

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM,$$

juntament amb la ***projecció*** *$\pi : TM \to M$ que a cada vector tangent li assigna el punt de la varietat al qual és tangent,*

$$\pi(v) = p,$$

on $v \in T_pM$.

De la mateixa manera, podem definir el **fibrat cotangent** de M com la unió disjunta dels espais cotangents de tots els punts de M,

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} T^*_pM,$$

junt amb la **projecció** $\pi : T^*M \to M$ que envia $w \in T^*_pM$ a $p \in M$.

Hi ha la propietat 3.18 del Lee que explica alguna cosa de que té dimensió $2n$, potser hauríem de mirar-ho.

2.2.3 Subvarietats, immersions, encabiments i difeomorfismes

Important motivar bé aquesta secció perquè és de les més importants per al nostre TFG
Definició 2.2.23. *Sigui $\psi : M \to N$ una aplicació diferenciable C^∞.*

1. *Diem que ψ és una* ***immersió*** *si $d\psi_p$ és no-singular per a tot $p \in M$.*
2. *Diem que ψ és un* ***encabiment*** *(en anglès, embedding) si és una immersió injectiva i un homeomorfisme sobre la seva imatge.*
3. *Diem que ψ és un* ***difeomorfisme*** *si és una injectiva amb inversa diferenciable C^∞.*
4. *El parell (M, ψ) és una* ***subvarietat de*** *N si ψ és una immersió injectiva.*

Un dels tipus de subvarietats que més ens interessarà seran les subvarietats encabides en $\mathbb{R}^n$. En concret, posarem particular atenció a $n = 3$.
Definició 2.2.24. *Diem que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ és una* ***superfície regular i simple*** *no sé si cal di simple la veritat si és la imatge d'un encabiment suau $\psi : T \to \mathbb{R}^3$ d'una regió elemental $T \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.*
Exemple 2.2.25. Siguin $R > r > 0$. Per $T = [0, 1) \times [0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$, sigui $\psi : T \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació

$$\psi(u, v) = ((R + r\cos(2\pi v))\cos(2\pi u), (R + r\cos(2\pi v))\sin(2\pi u), r\sin(2\pi v)).$$

Aleshores, ψ és un encabiment suau i $S = \psi(T)$ és una superfície regular i simple.

2.2.4 Camps vectorials

Definició 2.2.26. *Sigui M una varietat diferenciable suau, i (a, b) un interval obert de $\mathbb{R}$. Una* ***corba suau*** *en M és una aplicació diferenciable $\sigma : (a, b) \to M$. Si es pot estendre a un interval obert $(a - \epsilon, b + \epsilon)$ per algun $\epsilon > 0$ escrivim també $\sigma : [a, b] \to M$. Definim el* ***vector tangent*** *a σ en $t \in (a, b)$ com*

$$\dot{\sigma}_t = d\sigma\left(\left.\frac{d}{dr}\right|_t\right) \in T_{\sigma(t)}M$$

Definició 2.2.27. *Un* ***camp vectorial*** *X* ***al llarg d'una corba*** *$\sigma : [a, b] \to M$ és una aplicació $X : [a, b] \to T(M)$ que "aixeca" σ, és a dir, tal que $\pi \circ X = \sigma$, on π és la projecció del fibrat tangent tal com l'hem definit abans.*

Un ***camp vectorial*** *X* ***en un conjunt obert*** *$U \subseteq M$ és una aplicació $X : U \to T(M)$ que "aixeca" U, és a dir, tal que $\pi \circ X = id_U$.*

En parlar de subvarietats encabides en espais euclidians $\mathbb{R}^n$, també serà interessant parlar del que anomenarem **vectors normals**.
Definició 2.2.28. *Sigui $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvarietat m-dimensional encabida en $\mathbb{R}^n$. Per tot punt $x \in M$, definim l'****espai normal*** *a M en x, N_xM, com el subespai vectorial de $T_x\mathbb{R}^n$ ortogonal a T_xM pel producte escalar euclidià.*

2.2.5 Geometria Riemanniana

Per tal de poder parlar de geometria en varietats diferenciables arbitràries, necessitem introduir el concepte de mètrica Riemanniana. Abans, però, recordem la definició de producte intern en $\mathbb{R}^n$.
Definició 2.2.29. *Un* ***producte intern*** *en un espai vectorial real V és una aplicació $g : V \times V \to \mathbb{R}$ que és bilineal, simètrica i definida positiva, és a dir, que verifica*

1. $g(\alpha u + \beta v, w) = \alpha g(u, w) + \beta g(v, w)$ *per a tot* $u, v, w \in V$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
2. $g(u, v) = g(v, u)$ *per a tot* $u, v \in V$,
3. $g(u, u) \geq 0$ *per a tot* $u \in V$,
4. $g(u, u) = 0$ *si i només si* $u = 0$.

Definició 2.2.30. *Sigui M una varietat diferenciable. Anomenem* ***mètrica Riemanniana*** *en M una aplicació g que assigna a cada punt p en M un producte intern $g_p : M_p \times M_p \to \mathbb{R}$ tal que per qualsevol obert $U \subseteq M$, si X, Y són camps vectorials diferenciables en U, aleshores la funció $g(X, Y) : U \to \mathbb{R}$ donada per*

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_{|p}, Y_{|p}),$$

és diferenciable.

Anomenem ***varietat Riemanniana*** *a una varietat diferenciable dotada d'una mètrica Riemanniana.*

En qualsevol sistema de coordenades tal que les coordenades siguin $z_1, \ldots, z_n$, la mètrica Riemanniana es pot expressar com

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dz^i \otimes dz^j = g_{ij} dz^i dz^j,$$

on g_{ij} són funcions diferenciables en U.

Definició 2.2.31. *Anomenarem* ***mètrica euclidiana*** *en $\mathbb{R}^n$ la mètrica Riemanniana que en qualsevol sistema de coordenades tal que les coordenades siguin $z_1, \ldots, z_n$ es pot expressar com*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \delta_{ij} dz^i dz^j,$$

on δ_{ij} és la delta de Kronecker.

Definició 2.2.32. *Siguin M i N dues varietats Riemannianes, g una mètrica Riemanniana en N i $F : M \to N$ una aplicació diferenciable. Anomenem* ***pullback de*** g ***per*** F *la mètrica Riemanniana F^*g en M tal que, per qualsevol parell de vectors tangents $u, v \in T_pM$,*

$$(F^*g)_p(v, u) = g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(u)),$$

on dF_p és el diferencial de F en p.

Proposició 2.2.33 (Existència de mètriques Riemannianes). *Tota varietat diferenciable suau admet una mètrica Riemanniana.*

Prova. Sigui M una varietat diferenciable suau amb o sense frontera. Sigui $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un recobriment per cartes coordenades. En cada domini de carta, existeix una mètrica Riemanniana $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \delta_{ij} dz^i dz^j$. Sigui $\{\psi_\alpha\}$ una partició de la unitat subordinada a $\{U_\alpha\}$. Definim

$$g = \sum_\alpha \psi_\alpha g_\alpha,$$

on els termes són zero fora dels suports de les ψ_α. Com les particions de la unitat són localment finites, la suma és localment finita i per tant g hereta la suavitat de les g_α. És evidentment bilineal i simètrica per construcció, i només cal veure que és definida positiva.

Sigui $v \in T_pM$ un vector tangent en $p \in M$ diferent de zero. Aleshores el producte intern definit en aquest punt és

$$g_p(v, v) = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) g_\alpha|_p(v, v)$$

que és una suma de termes no-negatius. Com a mínim alguna de les ψ_α és positiva en p i, per tant, $g_p(v, v) > 0$. □

Definició 2.2.34. *Siguin (M, g) i $(\tilde{M}, \tilde{g})$ dues varietats Riemannianes suaus. Una aplicació C^∞ $F : M \to \tilde{M}$ és una **isometria (Riemanniana)** si és un difeomorfisme i $F^*\tilde{g} = g$. Diem que F és una **isometria local** si tot punt $p \in M$ té un entorn U tal que $F|_U$ és una isometria d'un entorn de $F(p)$ en $\tilde{M}$. Si F és una isometria, diem que M i $\tilde{M}$ són **isomètriques**, i si F és una isometria local, diem que M i $\tilde{M}$ són **localment isomètriques**.*

Hi ha diverses propietats de les varietats Riemannianes que són invariants per isometries. La més important per nosaltres és la planitud (en anglès, *flatness*).

Definició 2.2.35. *Diem que una varietat Riemanniana (M, g) és **plana** si és isomètrica a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica euclidiana.*

estaria molt bé demostrar que la planitud és invariant per isometries

2.2.6 Un resultat interessant en $\mathbb{R}^3$

El que hi ha aquí s'ha de moure mes amunt EXPLICAR SUBVARIETATS RIEMANNIANES COM EN EL LEE, DE MANERA QUE TENIM LA MÈTRICA INDUÏDA. A MÉS; EN AQUEST CAPÏTOL ES PARLA DEL TEOREMA DE WHITNEY CAL DEFINIR SUPERFÍCIE REGULAR EN R3 I DEMOSTRAR QUE EL TOR ÉS SUPERFÍCIE REGULAR COMPACTA. CAL DEFINIR CURVATURA DE GAUSS I ENUNCIAR I DEMOSTRAR EL TEOREMA QUE TOTA SUPERFÍCIE REGULAR COMPACTA TÉ COM A MÍNIM UN PUNT ELÍPTIC. POTSER TAMBÉ CAL EXPLICAR SEGONA FORMA FONAMENTAL UF

Si (M, g) és una varietat Riemanniana, qualsevol subvarietat diferenciable $S \subseteq M$ admet una **mètrica induïda** $\imath^* g$, on $\imath : S \hookrightarrow M$ és la inclusió.

Definició 2.2.36. *Sigui M una varietat diferenciable suau. Això està ben dit?. Una **subvarietat encabida** (en anglès, embedded submanifold) de M és un subconjunt $S \subseteq M$ que és una varietat topològica en la topologia induïda, dotada d'una estructura suauaixò ho he definit? tal que la inclusió $\imath : S \to M$ és un encabiment suau.*

Cal demostrar que el tor és superfície regular compacta En el cas de superfícies regulars en $\mathbb{R}^3$, l'espai normal tal com l'hem definit a la definició 2.2.28 en qualsevol punt de la superfície és unidimensional. En general, el que ens interessarà d'aquest espai normal és la seva direcció, de manera que definim l'aplicació següent:

Definició 2.2.37. *Sigui S una superfície regular. Anomenem **aplicació de Gauss** o **aplicació normal** de S a una aplicació $N : S \to \mathbb{S}^2$ que a cada punt $p \in S$ li assigna un vector normal unitari a S en p.*

Diem que S és **orientable** si existeix una aplicació de Gauss N.

Exemple 2.2.38. La cinta de Möbius, donada per $S = \phi(\mathbb{R} \times (-1, 1))$, on $\phi(u, v) = 2(\cos(2u), \sin(2u), 0) + v(\cos(u)\cos(2u), \cos(u)\sin(2u), \sin(u))$, és una superfície regular no orientable.

Un dels resultats més rellevants pel que fa a l'orientació de superfícies regulars, que no demostrarem aquí, és el següent:

Teorema 2.2.39. *Tota superfície regular compacta és orientable.*

El diferencial de l'aplicació de Gauss N d'una superfície regular orientable S, $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, es pot interpretar com un operador lineal del pla tangent a S en si mateix, ja que el pla tangent a $\mathbb{S}^2$ en $N(p)$ és el mateix que el pla tangent a S en p. Per veure això, només cal considerar que $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = N(p)^\perp = T_pS$.això és una mica handwavey Per aquest motiu, denotem **endomorfisme de Weingarten** W_p el diferencial de l'aplicació de Gauss quan és considerat com un endomorfisme de T_pS. Amb aquest endomorfisme, podem arribar a definir la curvatura d'una superfície regular orientada.

Definició 2.2.40. *Sigui S una superfície regular orientada, p un punt de S. Anomenem* ***segona forma fonamental*** *de S en p la forma bilineal*

$$\begin{aligned} II_p : T_pS \times T_pS &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle W_p(v), w\rangle \end{aligned}$$

on $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és el producte escalar euclidià en T_pS.

Definició 2.2.41. *Sigui S una superfície regular orientada, p un punt de S. Anomenem* ***curvatura de Gauss*** *$\kappa_S(p)$ de S en p el determinant de l'endomorfisme de Weingarten W_p.*

Es pot demostrar, potser ho hauriem de fer, esta als apunts de l'Ignasi de geodif de fet, que la l'endomorfisme de Weingarten diagonalitza amb valors propis reals k_1 i k_2, de manera que la curvatura de Gauss és

$$\kappa_S(p) = k_1(p)k_2(p).$$

Anomenem $k_1(p)$ i $k_2(p)$ les **curvatures principals** de S en p, i els vectors propis corresponents a aquests valors propis s'anomenen **direccions principals de curvatura**. Localment, corbes sobre la superfície que passen per p i segueixen les direccions principals de curvatura coincideixen amb cercles encabits a $\mathbb{R}^3$ tangents a aquest mateix punt i de radis $1/|k_1(p)|$ i $1/|k_2(p)|$. La curvatura de Gauss és negativa quan els centres d'aquests cercles, que anomenem **centres de curvatura**, es troben en costats oposats del pla tangent, i positiva quan estan en el mateix costat. mirar si això està ben explicat.

Definició 2.2.42. *Sigui S una superfície regular orientada, p un punt de S. Diem que p és un* ***punt el·líptic*** *si $\kappa_S(p) > 0$.*

Intuïtivament, una superfície regular és el·líptica en un punt si, localment, la superfície roman a un mateix costat del pla tangent, sense creuar-lo.

Teorema 2.2.43. *Tota superfície regular compacta té un punt el·líptic.*

Prova. Sigui S una superfície regular compacta, i considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} g : S &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto ||p||^2. \end{aligned}$$

Com S és compacta i g és una funció real contínua, g assoleix un màxim en un punt $p_{\max} \in S$. Sigui $R^2 = ||p_{\max}||^2$ el valor màxim de g.

Com a $p_{\max}$ s'assoleix el màxim de la distància a l'origen, el vector posició $p_{\max}$ és ortogonal a la superfície en $p_{\max}$. És a dir, $p_{\max}$ és un punt comú de la superfície regular S i la frontera de l'esfera $B_R(0)$, on els espais tangents a S i $B_R(0)$ coincideixen. crec que això és el que l'ignasi va quedar-se demostrant quan ho vam fer a classe

Tots els punts de S tenen distància a l'origen menor que R, de manera que $S \subseteq B_R(0)$. Siguin k_1 i k_2 les curvatures principals de S en $p_{\max}$, i $\alpha : [0,1] \to S$ i $\beta : [0,1] \to S$ corbes tangents a S en $p_{\max}$ que corresponen a les direccions principals de curvatura. Les curvatures principals de l'esfera $B_R(0)$ en $p_{\max}$ són ambdues $1/R$ o ambdues $-1/R$, depenent de la orientació N escollida. Escollim una orientació N de S tal que en $p_{\max}$ les curvatures principals de l'esfera siguin $1/R$. Aleshores, si alguna de les curvatures principals de S és menor que $1/R$, la corba α o β tindrà un radi de curvatura més gran que el de l'esfera, de manera que hi haurà un punt $\tilde{p} \in S$ proper a $p_{\max}$ que té distància a l'origen més gran que R. Això entra en contradicció amb el fet que la distància a l'origen de $p_{\max}$ és màxima. Per tant, ambdues curvatures principals de S en $p_{\max}$ han de ser majors que $1/R$, i per tant S té un punt el·líptic. $\square$

A continuació enunciem un dels teoremes més importants de la geometria de corbes i superfícies regulars en $\mathbb{R}^3$, demostrat per Carl Friedrich Gauss el 1827, que relaciona la curvatura de Gauss d'una superfície regular amb la seva mètrica com a varietat Riemanniana.

Teorema 2.2.44 (Teorema Egregi de Gauss)**.** *La curvatura de Gauss d'una superfície regular només depèn de la mètrica de la superfície com a varietat Riemanniana. En concret, la curvatura de Gauss és invariant per isometries.*

Un cas particular d'aquest teorema és que la planitud tal com l'hem definit a la definició 2.2.35, que la mètrica d'una varietat Riemanniana sigui la mètrica euclidiana, és equivalent a que la curvatura de Gauss sigui nul·la. Això té una implicació a l'hora de determinar quines varietats Riemannianes bidimensionals es poden encabir de manera isomètrica en $\mathbb{R}^3$. En concret, obtenim el següent resultat per al tor pla.

Teorema 2.2.45. *Anomenem* ***tor pla*** *la varietat Riemanniana* $(\mathbb{T}^2, g)$ *on* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ *és el tor, i* g *és la mètrica euclidiana. No existeix cap encabiment isomètric* C^∞ *del tor pla en* $\mathbb{R}^3$*.*

Capítol 3

Cinta de Moebius de paper òptima

La idea d'aquest capítol és la següent:

- Introduir que estem parlant d'això per mostrar d'una altra manera la rigidesa dels encabiments suaus.
- Explicar el problema de la cinta de Moebius de paper òptima.
- Enunciar i demostrar el teorema principal.
- Enunciar i demostrar el teorema del límit triangular.
- Explicar l'acordió de Möbius, donant peu al següent capítol.

3.1 Introducció al capítol

En aquesta secció expliquem el paper de Richard Evan Schwartz, en què demostra que la cinta de Moebius de paper òptima ha de tenir relació d'aspecte més gran que $\sqrt{3}$, i que qualsevol successió de cintes de Moebius amb relació d'aspecte convergint a $\sqrt{3}$ convergeix a la cinta de Moebius triangular.

3.1.1 Introducció al problema

Definició 3.1.1. *Una* cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte λ *és una aplicació infinitament diferenciable (suau)* $I : M_\lambda \to \mathbb{R}^3$*, on* M_λ *és la cinta de Moebius plana obtinguda amb la següent identificació d'un rectangle*

$$M_\lambda = ([0,\lambda] \times [0,1])/\sim, \qquad (0,y) \sim (\lambda, 1-y)$$

Una aplicació isomètrica *és una aplicació que preserva longituds d'arc. L'aplicació és una* encabiment *si és injectiva, i una* immersió *en general Interessant veure si aquesta notació la seguim utilitzant o si se l'ha inventat. Sigui* $\Omega = I(M_\lambda)$*. Diem que* Ω *està* incrustada *si* I *és una encabiment.*

Exemple 3.1.2. Anomenem *cinta de Moebius de paper triangular* la cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte $\lambda = \sqrt{3}$.

el shwartz menciona aquí uns papers que expliquem més sobre la banda de moebius, si volem escriure més sobre el tema els podem utilitzar.

Teorema 3.1.3 (Principal)**.** *Una cinta de Moebius de paper suau incrustada en* $\mathbb{R}^3$ *té relació d'aspecte més gran que* $\sqrt{3}$.

Teorema 3.1.4 (Límit Triangular). *Sigui $I_n : M_{\lambda_n} \to \mathbb{R}^3$ una successió de cintes de Moebius de paper suaus incrustades, tals que $\lambda_n \to \sqrt{3}$. Aleshores, I_n convergeix uniformement a una cinta de Moebius de paper triangular, llevat d'isometria.*

3.1.2 Definicions

Definició 3.1.5. *Sigui $I : M_\lambda \to \Omega$ una cinta de Moebius de paper incrustada. Un* plec *"doblec"o alguna cosa així? a Ω és un segment de recta B' que talla a través de Ω i té els seus extrems a la frontera.*

Veurem més endavant que tota cinta de Moebius de paper incrustada té una foliació per plecs.

Definició 3.1.6. *Sigui B' un plec. Anomenem* pre-plec *a la preimatge $B = I^{-1}(B')$.*

Degut al fet que I no incrementa distàncies, és fàcil veure que els pre-plecs també són segments de recta, i que M_λ té una foliació per pre-plecs.

3.1.3 Lemes addicionals

Per demostrar el teorema principal, es necessiten aquests dos lemes.

Lema 3.1.7 (T). *Una cinta de Moebius de paper incrustada suau té un*

Capítol 4

Teorema Nash-Kuiper C^1

La idea d'aquest capítol ha de ser la següent:

- Motivar que estem parlant d'això inspirats per l'acordió de Möbius.
- Enunciar i demostrar el teorema de Nash.
- Com a mínim explicar les millores de Kuiper i Thurston.
- Explicar la demostració de que qualsevol encabiment suau del tor ha de tenir algun punt el·líptic.

4.1 Introducció al capítol

En aquesta secció enunciarem i demostrarem els quatre teoremes d'immersions isomètriques C^1 de John Forbes Nash Jr., seguint l'article en què els va publicar el 1954 a Annals of Mathematics, Nash (1954).
explicar una mica el context i tal. El podem treure de la introducció del llibre del Tor.

Bàsicament, dir que és un teorema sorprenent perquè no se l'esperava ningú, explicar que el que fa és dividir en etapes i passos, i explicar que Kuiper fa una millora de la demostració de Nash per a una dimensió menys.

Important tornar a llegir i revisar quan dic successió i quan dic sèrie.

4.2 Enunciat dels teoremes

Hauria de fer servir $\mathbb{R}^k$ en comptes de E^k?
Teorema 4.2.1. *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió n té un encabiment isomètric C^1 en E^{2n}.*
Teorema 4.2.2. *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió n té una immersió isomètrica C^1 en E^{2n} i un encabiment isomètric C^1 en E^{2n+1}.*
Teorema 4.2.3. *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ en E^k amb $k \geq n+2$, aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètric en E^k.*
Teorema 4.2.4. *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ curta en E^k amb $k \geq n+2$ que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètric en E^k del mateix tipus.*

4.3 Demostració

Comencem amb una varietat diferenciable Riemanniana M de dimensió n, amb una mètrica intrínseca donada per un tensor mètric g_{ij}. L'objectiu principal serà trobar una immersió isomètrica d'aquesta varietat M en algun espai euclidià.

Suposem que tenim una immersió de M en un espai euclidià $\mathbb{R}^k$.

$$\begin{aligned} f : M &\to \mathbb{R}^k \\ \{x^i\} &\mapsto \{z^\alpha(x^1, \ldots, x^n)\} \end{aligned}$$

Aleshores, la mètrica induïda en M és

$$h_{ij} = \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}. \tag{4.3.1}$$

Per tal de començar la demostració, el primer que necessitarem serà una immersió f que sigui de classe C^∞ i *curta.*
Definició 4.3.1. *Una immersió $f : M \to \mathbb{R}^k$ és* ***curta*** *si la diferència de les mètriques $g_{ij} - h_{ij}$ és definida positiva.*

El més important d'aquesta definició és que, si f és curta, els vectors sobre M mai s'allarguen sota f. Aquesta primera immersió f és fàcil de trobar, en general, per a varietats tancades, mentre que per a varietats obertes cal entrar en més detalls. AQUÍ CITAR LA PART ON ES FA.

Un cop trobada aquesta immersió curta, l'estructura de la demostració dels teoremes de Nash consisteix en fer una successió de pertorbacions de f que, progressivament, disminueixen l'error mètric fins a trobar una immersió isomètrica en el límit. En general, el procés de pertorbació es divideix en **etapes** (en anglès, *stages*), i a cada etapa es divideix en **passos** (en anglès, *steps*). Així, la primera etapa prendrà la nostra immersió curta f i en retornarà una f_1 amb un error mètric com a molt la meitat del de f, que serà també C^∞ i curta. Aquesta f_1 serà millorada en la segona etapa, i així successivament.

La manera en què l'error mètric disminueix en cada etapa és la següent: en la primera immersió, l'error mètric és

$$\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}. \tag{4.3.2}$$

En la segona etapa, l'error mètric serà

$$\overline{\delta}_{ij} = g_{ij} - \overline{h}_{ij} \approx \frac{1}{2}\delta_{ij}, \tag{4.3.3}$$

on $\overline{h}_{ij}$ és la mètrica induïda per f_1. Aquest error mètric anirà disminuint geomètricament després de cada etapa, i en el límit obtindrem una immersió isomètrica.

En cada etapa, el procés de pertorbació es divideix en passos. Cada pas afectarà només un entorn local de M, però s'hauran de dur a terme l'un rere l'altre, no simultàniament. Per tal de fer-ho, cal prendre un recobriment localment finit de M per conjunts tancats $\{N_p\}_p$. És a dir, tals que M és la unió de tots ells, i cada N_p interseca només un nombre finit d'altres N_q. Al Lee crec que s'explica el fet que sempre es pot trobar aquest recobriment per tancats.

Associarem a cada N_p una funció ponderació φ_p de classe C^∞ positiva a l'interior de N_p i nul·la fora d'ell i a la frontera. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les

φ_p valgui 1 en qualsevol punt. crec que això s'anomena una partició de la unitat. Mirar el Lee. En cada entorn tancat, voldrem que l'error mètric δ_{ij} sigui reduït en $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$ després d'una etapa. Per fer-ho, necessitem aproximar δ_{ij} per un tensor de classe C^∞ i positiu β_{ij}.

Per tal de fer servir aquest β_{ij} per a reduir l'error mètric, necessitem el següent resultat:

Lema 4.3.2. *Sigui β_{ij} un tensor de classe C^∞ i definit positiu, i sigui φ_p seguint la definició de més amunt. Aleshores, es poden trobar funcions no-negatives a_ν de classe C^∞ i un nombre finit de funcions lineals $\psi^\nu = \psi^\nu(x^1, \ldots, x^n)$ tals que*

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right), \tag{4.3.4}$$

Observació 4.3.3. Cal remarcar que aquest lema només és cert si β_{ij} és definit positiu, i que el nombre de termes del sumatori és finit.

Prova (Aquesta és la demostració del Nash. És una mica llarga però s'entén bastant bé si la mires amb cura. El Sung-Jin Oh té una versió més curta amb una notació diferent.). El conjunt de les matrius simètriques definides positives de rang n és un con de dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$.Revisar d'on surt això, sembla bastant directe mirant quins coeficients es poden canviar. És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre W d'aquests entorns, on W depèn només de n.

Una matriu qualsevol representada per un punt interior d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{llll} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \ldots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \ldots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \ldots \end{array}$$

els coeficients per q representacions diferents d'una matriu del con que pertany a l'interior de q símplexs diferents. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C^*_{\mu,\nu} = \frac{C_{\mu,\nu}\exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_\rho \exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

on cal considerar que els exponencials són nuls si qualsevol dels termes del seu sumatori ho és. Observem que aquests coeficients són C^∞ com a funcions de la matriu que representen. A més, per cada matriu, com a molt $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients $C^*_{\mu,\nu}$ són no-nuls.

Si ara considerem que β_{ij} defineix una aplicació de classe C^∞ de N_p al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \tag{4.3.5}$$

on $M_{(\mu,\nu)ij}$ són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu $M_{(\mu,\nu)ij}$ obtenim n autovectors unitaris ortogonals $\{V_r\}$ i els seus autovalors $\{v_r\}$.

Si ψ_r és per cada r la funció lineal dels paràmetres locals pels quals $\sqrt{v_r}V_r$ és el vector gradient Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer, tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{4.3.6}$$

i, substituint en 4.3.5, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^j} \tag{4.3.7}$$

i, agrupant termes en a_ν, obtenim el resultat. □

4.3.1 La pertorbació en un pas

En el pas associat a N_p en una etapa donada, caldrà fer una pertorbació de la immersió curta obtinguda anteriorment. Per fer-ho, Nash considera dos camps vectorials unitaris ortogonals entre ells i a la immersió en l'entorn N_p, representats per funcions de classe C^∞, ζ^α i η^α. És a dir, compleixen les següents propietats:

$$\sum_\alpha (\zeta^\alpha)^2 = 1, \tag{4.3.8}$$

$$\sum_\alpha (\eta^\alpha)^2 = 1, \tag{4.3.9}$$

$$\sum_\alpha \zeta^\alpha \eta^\alpha = 0, \tag{4.3.10}$$

$$\sum_\alpha \zeta^\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = 0. \tag{4.3.11}$$

Observació 4.3.4. És possible que això ho expliqui en algun altre lloc, però per ara ho deixo aquí. Estaria bé explicar el canvi que fa Kuiper, si hi ha espai, que jo crec que sí.

El fet que Nash utilitzi dos camps vectorials unitaris ortogonals entre ells i a la immersió en l'entorn N_p restringeix severament la utilitat del seu resultat. En concret, per varietats Riemannianes de dimensió 2, com l'esfera o el tor, el que ens interessa idealment és obtenir immersions en l'espai euclidià tridimensional, per tal de poder-les representar visualment, mentre que el resultat de Nash dóna immersions en un espai euclidià de dimensió 4. Afortunadament, com veurem més endavant, Nicolaas H. Kuiper va modificar lleugerament la prova de Nash per rebaixar la codimensió de l'espai euclidià de $k = 2$ a $k = 1$.

Amb aquests camps vectorials, la pertorbació de la immersió curta z^α en un pas a l'entorn N_p és

$$\boxed{\overline{z}^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^\nu) + \eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda} \sin(\lambda \psi^\nu)} \tag{4.3.12}$$

on λ és una constant positiva tan gran com vulguem.

Ara cal veure que el canvi mètric $\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$ és aproximadament igual al terme ν del sumatori de 4.3.4.

Proposició 4.3.5. *El canvi mètric a l'entorn N_p en el pas associat a a_ν i ψ^ν donat per 4.3.12 compleix*

$$\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = a_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.3.13}$$

Prova. Desenvolupant les derivades parcials i cancel·lant els termes que apareixen en ambdós costats, tenim

$$\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = \sum_\alpha \Bigg[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)\right)\Bigg] \tag{4.3.14}$$

Observem que cada en terme del sumatori apareixen quatre derivades similars, canviant ζ^α per η^α i cos per sin, així com i per j. Podem considerar una sola d'aquestes, per exemple $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right)$. Desenvolupant-la, tenim

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) &= \left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^i}\right)\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\\ &+ \zeta^\alpha \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{a_\nu}\right)\cos(\lambda\psi^\nu)\\ &- \zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}\sin(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Observem que els dos primers termes d'aquesta suma són $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, de manera que es pot prendre λ prou gran per fer-los tan petits com vulguem. Així,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) = -\zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}\sin(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

El producte d'aquest terme amb la derivada respecte de x^j en 4.3.14 és, per tant,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) = (\zeta^\alpha)^2 a_\nu \sin^2(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Sumant aquest resultat amb el corresponent a η^α, obtenim que el terme α del sumatori de 4.3.14 és

$$\begin{aligned}&(\zeta^\alpha)^2 a_\nu \sin^2(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + (\eta^\alpha)^2 a_\nu \cos^2(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ &= ((\zeta^\alpha)^2\sin^2(\lambda\psi^\nu) + (\eta^\alpha)^2\cos^2(\lambda\psi^\nu))a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} =\\ &\qquad = \sum_\alpha\left[((\zeta^\alpha)^2\sin^2(\lambda\psi^\nu) + (\eta^\alpha)^2\cos^2(\lambda\psi^\nu))a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\\ &\qquad = a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\left(\sin^2(\lambda\psi^\nu)\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 + \cos^2(\lambda\psi^\nu)\sum_\alpha(\eta^\alpha)^2\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ &\qquad = a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\end{aligned}$$

on per a la darrera igualtat hem usat que $\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 = \sum_\alpha(\eta^\alpha)^2 = 1$. □

Amb aquesta última proposició s'ha demostrat que la pertorbació indueix un canvi mètric molt proper al que volem, amb un error $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. De la mateixa manera, observem que la pertorbació en un pas, 4.3.12, és $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. A continuació, volem veure quin és el canvi en les primeres derivades després d'una etapa del procés en un entorn N_p. És a dir, volem aproximar l'efecte de totes les pertorbacions associades a cada pas de l'etapa. Per fer-ho, primer notem que el canvi en les primeres derivades associat al pas ν és el següent:

$$\left|\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right| \leq 2\sqrt{a_\nu}\left|\frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i}\right| + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.3.15}$$

Proposició 4.3.6. *El canvi en les primeres derivades associat a una etapa del procés en un entorn N_p és*

$$\left|\left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{abans} - \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{despr\acute{e}s}\right| \\ \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) + \cdots, \tag{4.3.16}$$

on K és una constant que depèn només de la dimensió n de la varietat i les diferents λ_ν són els paràmetres de les pertorbacions.

Prova. Considerem l'element i de la diagonal de les matrius de 4.3.4:

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ii} = \sum_\nu a_\nu\left(\frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i}\right)^2 = \sum_\nu\left(\sqrt{a_\nu}\left|\frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i}\right|\right)^2.$$

Recordem de la prova del lema 4.3.4 que hi ha com a molt $M = W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients no nuls del sumatori, on W és una constant que només depèn de la dimensió n de la varietat. Així doncs, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_\nu \sqrt{a_\nu}\left|\frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i}\right| \leq \left(M\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ii}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (K\varphi_p\beta_{ii})^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(K\beta_{ii})}.$$

Combinant aquest resultat amb 4.3.15, obtenim que el canvi en les primeres derivades associat a una etapa del procés en un entorn N_p és

$$\left|\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right| \leq \sqrt{K\beta_{ii}} + O\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) + \cdots.$$

□

4.3.2 Convergència dels passos en una etapa

He de mirar si realment aquest és el títol que toca.

A continuació ens interessa veure quines són les constants $\{\lambda_\nu\}$ necessàries en les diferents passes d'una etapa per tal que el procés convergeixi tal com desitgem.

Definició 4.3.7. *Sigui N_p un entorn de M, i considerem el pas ν d'una etapa donada.*

- *Anomenem B_1 l'error d'ordre $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ màxim permès en l'aproximació del canvi mètric per $a_\nu\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right)$ en 4.3.13, per tots els parells (i,j) i tots els punts de l'entorn N_p.*

- *Anomenem B_2 l'error d'ordre $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ màxim permès en l'aproximació del canvi de les primeres derivades en 4.3.15, per tots els punts de l'entorn N_p.*
- *Anomenem B_3 la cota superior permesa del canvi $\overline{z}^\alpha - z^\alpha$ en N_p.*

Observació 4.3.8. Es pot trobar una pertorbació que compleixi les condicions anteriors per a qualsevol B_1, B_2 i B_3 donats, ja que tots tres disminueixen quan λ augmenta i aquesta pot ser presa arbitràriament gran.

Recordem que l'efecte desitjat després d'una etapa és prendre una mètrica induida h_{ij} i trobar-ne una h'_{ij} que redueixi a la meitat l'error mètric δ_{ij}. És a dir, la nova mètrica h'_{ij} ha de complir

$$h'_{ij} =\approx h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}, \tag{4.3.17}$$

que també podem escriure com

$$h'_{ij} = g_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}, \tag{4.3.18}$$

on e_{ij} és el terme de l'error de l'aproximació. Així, la diferència entre la mètrica de la nova immersió i la original és

$$\delta'_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} - e_{ij}. \tag{4.3.19}$$

A continuació, ens volem assegurar que δ'_{ij} sigui definit positiu, i que el tensor d'error e_{ij} sigui prou petit per permetre la convergència del procés.

Notació 4. *Per un tensor donat T_{ij} en un entorn N_p, escrivim $|T_{ij}|_{N_p}$ per denotar el màxim dels valors absoluts dels components de T_{ij} en N_p. Aquesta és una bona aproximació de la mida del tensor T_{ij} en N_p. Cal mirar si hi ha una millor notació*

Proposició 4.3.9. *Sigui N_p un entorn de M. En una etapa donada del procés, existeix una successió $\{B_{1\nu}\}_\nu$, on $B_{1\nu}$ és el B_1 de la definició 4.3.2 al pas ν, tal que, després de fer tots els passos en N_p*

- *δ'_{ij} és definit positiu en N_p.*
- *e_{ij} és prou petit per assegurar que el procés convergeix després de fer totes les etapes.*
- *La convergència és tal que la mida de δ'_{ij} és aproximadament $2/3$ de la mida de δ_{ij} després de cada etapa.* No m'agrada gaire com està descrita aquesta proposició

Observació 4.3.10. Aquest resultat confirma que el procés convergeix, de tal manera que la immersió resultant després de realitzar totes les etapes és isomètrica. Potser seria més correcte dir que la mètrica resultant és isomètrica, però encara no sabem si la immersió convergeix correctament.

Prova. En N_p, sempre es pot trobar una constant real $\varepsilon_p > 0$ tal que, si imposem

$$|e_{ij}|_{N_p} \leq \varepsilon_p, \tag{4.3.20}$$

aleshores $\delta'_{ij} = \delta_{ij} - e_{ij}$ és definit positiu.

Si també imposem que, després d'una etapa,

$$\max |e_{ij}|_{N_p} \leq \frac{1}{6} \min |\delta_{ij}|_{N_p}, \tag{4.3.21}$$

podem prendre 4.3.19 i veure que

$$\begin{aligned} \max |\delta'_{ij}|_{N_p} &= \max \left| \frac{1}{2}\delta_{ij} - e_{ij} \right|_{N_p} \leq \max \left| \frac{1}{2}\delta_{ij} \right|_{N_p} + \max |e_{ij}|_{N_p} \\ &\leq \frac{1}{2} \max |\delta_{ij}|_{N_p} + \frac{1}{6} \min |\delta_{ij}|_{N_p} \leq \frac{2}{3} \max |\delta_{ij}|_{N_p}. \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Amb això queda demostrat que es pot escollir e_{ij} tal que la mida de δ'_{ij} és aproximadament 2/3 de la mida de δ_{ij} després de cada etapa. Així, és clar que la diferència entre la mètrica de la immersió i g_{ij} convergeix a 0 en el límit.

Hem obtingut dues restriccions a la mida de e_{ij} que cal complir, 4.3.20 i 4.3.21. Ara cal relacionar-les amb les passes de l'etapa, per tal d'obtenir la successió $\{B_{1\nu}\}_\nu$ desitjada.

Primer de tot, recordem que els entorns N_p poden intersecar amb altres entorns N_q. Així, els canvis que fem en N_p poden afectar a N_q. Afortunadament, el nombre d'entorns que intersequen cada N_p és finit. Si N_p interseca amb σ entorns N_q, incloent N_p mateix, aleshores podem prendre les restriccions de N_p, dividir-les per σ, i imposar-les a tots els N_q. Sigui ε_p^* el mínim de totes aquestes restriccions sobre l'error de N_p.

Notem que hi ha dues fonts de l'error en N_p: el primer és l'aproximació preliminar de δ_{ij} pel tensor β_{ij}, i el segon és l'error acumulat per les passes individuals. Per tant, imposant $|\delta_{ij} - \beta_{ij}|_{N_p} \leq \varepsilon_p^*$ obtenim

$$\left| \frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij} - \frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} \right|_{N_p} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_p^*. \tag{4.3.23}$$

Ens resta $\frac{1}{2}\varepsilon_p^*$ per a l'error de les passes individuals, que podem assignar de la següent manera:

$$B_{1\nu} \leq \frac{1}{2^{\nu+1}}\varepsilon_p^*. \tag{4.3.24}$$

De manera que l'error total obtingut sumant 4.3.23 i 4.3.24 és menor que

$$\frac{1}{2}\varepsilon_p^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}}\varepsilon_p^* = \varepsilon_p^*.$$

Així, obtenim la successió $\{B_{1\nu}\}_\nu$ desitjada. □

Realitzabilitat dels passos

Per tal que els passos siguin realitzables, només cal tenir una immersió C^∞. Això és cert sempre que la mètrica induida sigui definida positiva i les immersions siguin C^∞. Totes les funcions utilitzades en el procés són C^∞, de manera que només cal veure que la mètrica induida és definida positiva.

Procedim per inducció. Suposem que cada pas pas pren una immersió que produeix una mètrica induida definida positiva, i augmenta la mètrica induida en $a_\nu \left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right)$. Així, la mètrica induida és definida positiva. Aquest augment és un tensor no-negatiu, i l'error és $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, de manera que per una λ prou gran, ens podem assegurar que la mètrica induida és definida positiva.

4.3.3 Organització general

Aquest apartat haurem de mirar de moure'l a un lloc més adequat, potser.

- El procés es divideix en una sèrie **d'etapes**. Cada una d'elles és igual que la resta, però la primera necessita una immersió f de classe C^∞ curta. Després de cada etapa, la nova immersió segueix sent C^∞ i curta, però l'error mètric és aproximadament 2/3 de l'error de la immersió de l'etapa anterior.
- S'escull un recobriment localment finit de M per conjunts tancats N_p. És a dir, tal que cada punt de M pertany a, com a molt, un nombre finit de conjunts N_p.

- Cada etapa es divideix en un nombre finit de **passos**. Primer, la correcció es divideix entre tots els conjunts N_p amb unes funcions pes φ_p. Aleshores es divideix la correcció de cada N_p en un nombre finit de passos, 4.3.4
- Els passos s'han de realitzar un rere l'altre. L'ordre concret no importa, però s'ha d'escollir un ordre i seguir-lo. En varietats obertes, el nombre de passes és infinit, però en cada entorn compacte el nombre de passos és finit.

4.3.4 Convergència de la immersió

Per la Proposició 4.3.9, sabem que la mètrica resultant del procés en el límit és la mètrica intrínseca de la varietat, com volíem. Ara bé, encara no hem demostrat que convergeixi en una immersió C^1. El primer que cal assegurar és que el resultat en el límit és, efectivament, una immersió. Amb aquest fi, podem imposar que en el pas r de l'etapa s del procés, el corresponent B_3 estigui fitat per

$$B_3 \leq \frac{1}{2^{(s+r)}}, \tag{4.3.25}$$

de manera que la successió dels B_3 sigui més petita que una successió convergent.

Imposant les mateixes fites per la successió de B_2,

$$B_2 \leq \frac{1}{2^{(s+r)}}, \tag{4.3.26}$$

controlem els termes d'error d'ordre $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ de l'equació 4.3.16. Ara bé, per tal que les primeres derivades convergeixin al final del procés, cal que el terme irreductible $2\sqrt{K\beta_{ii}}$ també convergeixi.

Proposició 4.3.11. *La sèrie formada per la successió $\{2\sqrt{K\beta_{ii}}\}_\nu$ convergeix per cada i i uniformement en cada entorn N_p.*

Prova. K és una constant que només depèn de la dimensió n de la varietat, de manera que només ens hem d'ocupar de β_{ii}. El tensor β_{ij} aproxima l'error mètric δ_{ij}, que es redueix per un factor $1/3$ o major després de cada etapa, com hem vist a la desigualtat 4.3.22 Nash diu que això és després de cada pas, em fa pal ara mirar com és.. Cal veure que β_{ij} decreix de manera similar. Podem imposar que β_{ij} sigui prou proper a δ_{ij} tal que

$$\frac{9}{10} \leq \frac{\max|\beta_{ij}|_{N_p}}{\max|\delta_{ij}|_{N_p}} \leq \frac{9}{8}. \tag{4.3.27}$$

Aleshores,

$$|\beta'_{ij}|_{N_p} \leq \frac{9}{8}|\delta'_{ij}|_{N_p} \leq \frac{9}{8}\frac{2}{3}|\delta_{ij}|_{N_p} \leq \frac{9}{8}\frac{2}{3}\frac{10}{9}|\beta_{ij}|_{N_p} = \frac{5}{6}|\beta_{ij}|_{N_p}. \tag{4.3.28}$$

Així, el terme β_{ii} decreix per un factor $5/6$ o major després de cada etapa. Per tant, la sèrie formada per la successió $\{2\sqrt{K\beta_{ii}}\}_\nu$ convergeix com una geomètrica de raó $\sqrt{5/6}$. □

Observació 4.3.12. La conseqüència d'això és que, en el límit, la immersió f és C^1, com volíem demostrar.

4.3.5 Encabiments isomètrics

Fins ara hem estat tractant el cas de les immersions, per les quals no hi ha restricció pel que fa a les interseccions amb elles mateixes. Ara bé, per demostrar que el procés descrit per Nash també aplica als encabiments, que han de ser injectius, cal comprovar que les immersions resultants també ho són.

Notació 5. *Sigui M una varietat oberta i $f : M \to \mathbb{R}^n$ un encabiment. Anomenem* ***frontera de l'encabiment*** *al conjunt $\partial f(M) = \overline{f(M)} \setminus f(M)$. Ho deixo indicat perquè no sé si aquest és el terme estàndard, però no m'agrada com l'anomena el Nash.*

La demostració per encabiments és la mateixa que per immersions generals, però l'aplicació f de la que partim ha de ser un encabiment. Si la varietat és oberta, demanem també que la frontera de l'encabiment, si existeix, no intersequi la imatge de l'encabiment. Un cop es té aquest primer encabiment curt, la única consideració addicional és que s'ha de controlar la mida de l'encabiment $|\overline{z}^\alpha - z^\alpha|$ en cada pas.

Ens haurem de fixar primer en què cada pas es pugui fer sense que el nou encabiment intersequi amb si mateix, i després en què l'encabiment resultant en el límit del procés sigui injectiu.

Observació 4.3.13. Si la varietat és oberta, l'elecció de B_3 a 4.3.25 assegura que la frontera de l'encabiment roman fix durant tot el procés.

Proposició 4.3.14. *En qualsevol pas d'una etapa i en qualsevol entorn N_p de la frontera de l'encabiment, es pot escollir una λ prou gran tal que el pas no produeixi interseccions de l'encabiment amb si mateix ni amb la frontera de l'encabiment.*

Prova. Sigui K un component compacte de l'encabiment que inclogui N_p al seu interior. K, al seu torn, està inclòs en un entorn obert H tan proper a K tal que per qualsevol punt P en H no pot tenir dues perpendiculars a K en H. Això és el que vam parlar amb l'Ignasi. Podríem mirar si cal posar una demostració o un dibuixet o algo.

Sigui Q la unió de la frontera de l'encabiment i la part de l'encabiment que no està inclòs en K. Com Q és un conjunt tancat, una pertorbació prou petita no pot intersecar Q. A més, com la pertorbació és normal a l'encabiment, estarà dins de H i els punts de K no es podran intersecar. Així doncs, el pas no produeix interseccions de l'encabiment amb si mateix ni amb la frontera de l'encabiment. □

Amb aquest resultat, obtenim per inducció que en qualsevol nombre finit de passos del procés, l'encabiment no produeix interseccions amb si mateix ni amb la frontera de l'encabiment. Això no assegura que el límit del procés sigui injectiu després d'infinits passos, sinó que cal considerar això a part.

Proposició 4.3.15. *Es pot escollir una successió dels B_3 tal que el límit del procés sigui injectiu, és a dir, tal que la immersió resultant sigui un encabiment.*

Prova. Considerem una enumeració dels N_p qualsevol. Sigui S_r el conjunt de tots els parells de punts dels primers r entorns tals que estaven separats per una distància major que 2^{-r} en l'encabiment curt original. Qualsevol parell de punts pertany a S_r per algun r. A partir de l'etapa r requerirem que el B_3 de l'etapa $\mu \leq r$ i el pas ν sigui més petit que $\varepsilon_r 2^{-\mu-\nu}$, on ε_r s'escull prou petit per assegurar que cap parell de punts pugui ajuntar-se al límit. D'aquesta manera, tots els parells de punts queden protegits en el límit, i la immersió resultant és un encabiment. □

4.3.6 Obtenint la immersió o l'encabiment inicial

Amb tot el que hem demostrat fins aquí, ja hem vist que per qualsevol immersió o encabiment curt inicial C^∞, es pot trobar una immersió o encabiment C^1 isomètric de la varietat en un espai euclidià. Només queda veure que es pot trobar aquesta immersió o aquest encabiment inicial. En aquesta subsecció expliquem el procés per obtenir-lo.

En el cas d'una varietat tancada, podem obtenir l'encabiment inicial en $\mathbb{R}^{2n}$ mitjançant el teorema de Whitney. Haurem de mirar d'explicar-lo. Per tar de fer-lo curt, es pot canviar l'escala de l'espai euclidià.

En el cas d'una varietat oberta, s'escull un recobriment per tancats N_p i unes funcions φ_p de classe C^∞que sumin 1 en qualsevol punt, com abans, i denotem x_{p_i} per la coordenada i-èssima de N_p. Suposem $|x_{p_i}| < 1$ per a qualsevol i i p. A més, imposem que cada N_p interseca com a molt amb s d'aquests conjunts, incloent-hi el mateix N_p. A continuació, separem els conjunts en s classes, tals que cap conjunt té intersecció amb un altre de la mateixa classe.

Construim un encabiment en un espai $s(n+2)$-dimensional $E^{s(n+2)}$ amb les següents funcions:

$$u_\sigma = \begin{cases} \varepsilon_p \varphi_p & \text{en entorns } N_p \text{ de la classe } \sigma \\ 0 & \text{en la resta d'entorns} \end{cases} \tag{4.3.29}$$

$$v_\sigma = \begin{cases} \varepsilon_p^2 \varphi_p & \text{en entorns } N_p \text{ de la classe } \sigma \\ 0 & \text{en la resta d'entorns} \end{cases} \tag{4.3.30}$$

$$w_{\sigma i} = \begin{cases} \varepsilon_p \varphi_p x_{pi} & \text{en entorns } N_p \text{ de la classe } \sigma \\ 0 & \text{en la resta d'entorns} \end{cases} \tag{4.3.31}$$

on ε_p formen part d'una successió monòtona decreixent i convergent a 0. Qualsevol parell de punts de la varietat en entorns diferents es pot distingir per tenir diferents conjunts de raons u_σ / v_σ, i qualsevol parell de punts en el mateix entorn es pot distingir pels $w_{\sigma i}$ corresponents. A més, la frontera de l'encabiment és l'origen de coordenades.

Per últim, aquesta immersió es pot fer curta escollint els ε_p tal que, si la immersió amb els p primers entorns és curta per un factor $\frac{1}{3}(2 - 1/p)$ o més gran, prenem ε_{p+1} prou petit perquè la immersió amb $p+1$ primers entorns sigui curta per un factor $\frac{1}{3}(2 - 1/(p+1))$ o més gran.

Amb això obtenim un encabiment curt de classe C^∞ de la varietat en un espai $s(n+2)$-dimensional. Mitjançant projeccions lineals, podem rebaixar la dimensió de l'espai de l'encabiment fins a $2n+1$, i fins a $2n$ per a immersions.

4.4 El refinament de Kuiper

Capítol 5

Encabiments isomètrics del tor pla

La idea d'aquest capítol és la següent:

- Recordar que el tor pla no es podia encabir isomètricament en l'espai euclidià tridimensional de manera suau, pel tema del punt el·líptic.
- Explicar com el teorema de Nash ens permet fer-ho de manera C^1.

Ens hauriem de mirar bé què és això de $W \cdot F$

5.1 Introducció al capítol

Havent enunciat i demostrat el teorema de Nash-Kuiper?, veurem un encabiment isomètric del tor pla en l'espai euclidià tridimensional. L'elaboració d'aquest encabiment va ser realitzat per Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus i Boris Thibert i publicada l'any 2013. La cita principal d'aquest capítol és Borrelli et al. (2013). **En aquest capítol no donem, en general, les demostracions de lemes i sublemes, que es troben en Borrelli et al. (2013). En canvi, donem les demostracions dels teoremes i proposicions més importants.**

RESUM DEL QUE VEUREM!!!

També podem parlar del fet que fins aquest moment no havíem visualitzat cap encabiment isomètric d'aquesta mena, i que han aconseguit fer-ho per primera vegada. També podem mencionar que ho han fet per altres encabiments com l'esfera reduïda i el pla projectiu.

Hem de revisar el que hi ha escrit aquí i anar-ho relacionant amb el que hem vist al Teorema de Nash. Per exemple, com el nombre N es relaciona amb la λ.

5.2 Integració convexa

Aquí s'explica el que es necessita sobre integració convexa per tal de poder fer aquest encabiment isomètric.

5.2.1 Integració convexa 1D

Definició 5.2.1. *Per cada $x \in I := [0,1]$, sigui $\mathcal{R}_x$ un conjunt de vectors en $\mathbb{R}^n$. Anomenem **relació diferencial** a la unió $\mathcal{R} := \bigcup_{x \in I} \mathcal{R}_x$. Anomenem **solució de** $\mathcal{R}$ a una corba*

$f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $f'(x) \in \mathcal{R}_x$ per a tot $x \in I$.

El mètode d'Integració Convexa ens permetrà trobar solucions de relacions diferencials arbitràriament properes a corbes $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qualssevol. Per a això necessitarem una família de **voltes** $h(x, \cdot) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathcal{R}_x$ tals que

$$f'(x) = \int_0^1 h(x,u)du, \tag{5.2.1}$$

és a dir, tals que la derivada $f'(x)$ és la mitjana de la volta $h(x,\cdot)$ sobre el cercle unitat. Si aquestes voltes existeixen, el següent que voldrem és definir la **integral convexa** de h com la solució f de la relació diferencial

$$F(t) := f(0) + \int_0^t h(x, \{Nx\})dx,$$

on $\{Nx\}$ és la part fraccionària (fraccionaria? fraccional? decimal?) de x. Intuïtivament, F s'obté integrant h sobre una corba de període $1/N$, de tal manera que per N molt gran, cada període és proper a una volta concreta $h(x,\cdot)$, i per tant la seva integral és propera a $f'(x)$. L'efecte acumulat de les N voltes és proper a $f(t)$. Aquest fet s'expressa en el lema següent.

Lema 5.2.2. *Siguin f, h, N i F com hem definit més amunt. Aleshores, F és solució de la relació diferencial $\mathcal{R}$ i*

$$||F - f||_\infty \leq \frac{K(h)}{N}, \tag{5.2.2}$$

on $K(h)$ només depèn de $||h||_{C^1}$.

Podem mirar de moure aquesta part més amunt, de manera que sigui evident com s'escullen les voltes.

En el nostre cas, les relacions diferencials $\mathcal{R}_s$ seran esferes de radi $r(s) > 0$, tal que la relació diferencial restringeix la mida de la derivada f'. En concret, tindrem corbes f que seran curtes si i només si $||f'(s)|| \leq r(s)$.

Suposant que f' mai s'anul·la, podem definir $\vec{n} : I \to \mathbb{R}^n$ un vector normal a f' i $\vec{t}(s) := f'(s)/||f'(s)||$. Podem fer ús d'aquests vectors per definir les voltes $h(s,\cdot)$ de la següent manera:

$$h(s,u) = r(s)(\cos(\alpha_s \cos(2\pi u))\vec{t}(s) + \sin(\alpha_s \sin(2\pi u))\vec{n}(s)), \tag{5.2.3}$$

on $\alpha_s := J_0^{-1}(||f'(s)||/r(s))$, on J_0 és la funció de Bessel de primer tipus i d'ordre 0. Per la propietat

$$J_0(x) = \int_0^1 \cos(x\cos(2\pi u))du, \tag{5.2.4}$$

es verifica la condició 5.2.1.

5.3 Integració convexa 2D: el cas primitiu

Havent vist com es troba un encabiment isomètric mitjançant Integració Convexa en el cas 1D, ara veurem com es pot fer en el cas 2D. Intuitivament, considerarem la superfície resultant d'un encabiment com una família de corbes unidimensionals, per tal de poder aplicar el resultat del lema 5.2.2.

Considerem el problema que volem resoldre, és a dir, trobar un encabiment isomètric d'un tor $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ amb una mètrica μ en l'espai euclidià tridimensional. Com hem fet en la demostració del teorema de Nash al capítol anterior, partirem d'un encabiment inicial no isomètric $f : (\mathbb{T}^2, \mu) \to (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de classe C^∞. Abans de considerar el cas més general, però, partirem primer de la suposició que la diferència entre la mètrica μ i el *pullback* de la mètrica euclidiana per f és una mètrica primitiva, és a dir:

$$\mu = f^*\langle\cdot,\cdot\rangle + \rho\ell\otimes\ell, \tag{5.3.1}$$

on $\rho : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}_+$ i ℓ una forma lineal que identifica plans tangents de $\mathbb{T}^2$ amb $\mathbb{R}^2$.

Sigui $V \in \ker(\ell)$ un vector amb coordenades enteres coprimeres. Aleshores, la corba f_V donada per

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to \mathbb{T}^2 \\ t &\mapsto [O + tV], \end{aligned}$$

és tancada i simple en $\mathbb{T}^2$. Per tant, podem tallar el tor per aquesta corba i obtenir un cilindre, que anomenarem $\mathcal{C}il$. Sigui U el vector tal que (U, V) és una base directa ortogonal i $||U|| \cdot ||V|| = 1$. De fet, si anomenem O a l'origen de $\mathbb{R}^2$, aleshores el rectangle format per $O, O+U, O+U+V, O+V$ és un domini fonamental de $\mathbb{T}^2$, i podem escriure

$$\mathcal{C}il = \{O + tV + sU : (t,s) \in [0,1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})\}. \tag{5.3.2}$$

A més, canviem l'escala tal que $\ell(U) = ||U||$.

5.3.1 Integració convexa del cilindre $\mathcal{C}il$

Per tal de poder aplicar el lema 5.2.2, no és prou amb prendre una família de corbes unidimensionals qualssevol, com

$$\begin{aligned} \phi_t : [0,1] &\to \mathbb{T}^2 \\ s &\mapsto [O + tV + sU], \end{aligned}$$

sinó que haurà de ser una mica més elaborat.

En concret, definim

$$W = U + \zeta V, \text{ on } \zeta = -\frac{\mu(U,V)}{\mu(V,V)} = -\frac{\langle U\cdot f, V\cdot f\rangle}{\langle V\cdot f, V\cdot f\rangle} \tag{5.3.3}$$

i $X \cdot f = \mathrm{d}f(X)$ denota la derivada de f al llarg de X. Observem que, amb aquesta definició, $\mu(W, V) = 0$. Ara podem definir la família de corbes $\varphi(t,\cdot) : [0,1] \to Cil$ tals que

$$\varphi(t,0) = O + tV, \text{ i } \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s) = W(\varphi(t,s)). \tag{5.3.4}$$

Resolent l'equació diferencial, obtenim

$$\varphi(t,s) = O + sU + \psi(t,s)V. \tag{5.3.5}$$

per alguna funció $\psi : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ amb $\psi(t,0) = t$. En particular, $\varphi(t,\cdot)$ connecta $O + tV$ i $O + U + \psi(t,1)V$. Així, $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0,1] \to \mathcal{C}il$ és un difeomorfisme. A més,

$$\ell\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0, \text{ i } \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, W\right) = 0. \tag{5.3.6}$$

Voldrem aplicar integració convexa a cada corba $f \circ \varphi(t, \cdot)$. Per fer-ho, considerem ara les voltes $h(t, s, u)$ donades per

$$h(t, s, u) = \bar{h}(\varphi(t, s), \cos(2\pi u)) \tag{5.3.7}$$

on

$$\bar{h}(p, c) = r(p) \left(\cos(\alpha(p)c)\vec{t}(p) + \sin(\alpha(p)c)\vec{n}(p)\right),$$

amb $r := \sqrt{\mu(W, W)}$, $\vec{t} := \frac{W \cdot f}{||W \cdot f||}$, $\vec{n} := \frac{W \cdot f \times V \cdot f}{||W \cdot f \times V \cdot f||}$ i $\alpha := J_0^{-1}(||W \cdot f||/r)$.

Si ara escrivim

$$(W \cdot f)(\varphi(t, s)) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial s}(t, s) = \int_0^1 h(t, s, u) du,$$

obtenim l'aplicació suau $F : (\mathcal{C}il, \mu) \to (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ amb

$$F \circ \varphi(t, s) := f(O + tV) + \int_0^s h(t, u, \{Nu\}) du. \tag{5.3.8}$$

A continuació, enunciem alguns lemes que caracteritzaran la diferència entre F i f i les seves derivades.

Lema 5.3.1. *Siguin f, h, N i F com hem definit més amunt. Aleshores,*

$$||F - f||_\infty \le \frac{K(h)}{N},$$

on $K(h)$ només depèn de $||h||_{C^1}$.

Lema 5.3.2. *Siguin f, h, N i F com hem definit més amunt. Aleshores,*

$$\left|\left| \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial t} - \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t} \right|\right|_\infty \le \frac{K(h)}{N},$$

on $K(h)$ només depèn de $||h||_{C^2}$.

Lema 5.3.3. *Siguin f i F com hem definit més amunt i $\mu = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle + \rho \ell \otimes \ell$. Aleshores,*

$$||W \cdot F - W \cdot f||_\infty \le \sqrt{7} \cdot ||U|| \cdot ||\rho||_\infty^{1/2}.$$

Lema 5.3.4. *SI AQUEST LEMA NO ES FA SERVIR ENS EL CARREGUEM Es verifica*

$$1 + J_0^2(\alpha) - 2J_0(\alpha)\cos(\alpha) \le 7(1 - J_0^2(\alpha)).$$

per tot $\alpha \in [0, z]$, on z és el primer zero de J_0.

Lema 5.3.5.

$$||dF - df||_\infty \le \sqrt{7}||\rho||_\infty^{1/2} + \frac{K(\zeta, \psi, h)}{N}$$

on $K(\zeta, \psi, h)$ només depèn de $||\zeta||_\infty$, de $\left|\left|\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{-1}\right|\right|_\infty$ i $||h||_{C^2}$.

Prova. Com (U, V) és una base directa ortogonal, aleshores

$$||dF - df|| \le \frac{||U \cdot F - U \cdot f||}{||U||} + \frac{||V \cdot F - V \cdot f||}{||V||}.$$

A més, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} V$. Per tant,

$$||V \cdot F - V \cdot f|| = \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|^{-1} \left|\left| \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial t} - \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t} \right|\right|. \tag{5.3.9}$$

Com $W = U + \zeta V$, obtenim

$$||U \cdot F - U \cdot f|| \leq ||W \cdot F - W \cdot f|| + |\zeta| \cdot ||V \cdot F - V \cdot f||.$$

Per últim, prenent les últimes tres equacions,

$$||dF - df|| \leq \frac{||W \cdot F - W \cdot f||}{||U||} + \frac{|\zeta| \cdot ||V||^2 + 1}{||V||} \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|^{-1} \left|\left|\frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial t} - \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t}\right|\right|. \quad (5.3.10)$$

Aplicant els lemes 5.3.2 i 5.3.3, obtenim el resultat. □

Lema 5.3.6.

$$||\mu - F^*\langle \cdot, \cdot \rangle||_\infty \leq \frac{K(f \circ \varphi, h)}{N} ||d\varphi^{-1}||_\infty^2,$$

on $K(f \circ \varphi, h)$ només depèn de $||\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t}||_\infty$ i de $||h||_{C^2}$.

Mirar això que ho he escrit amb molta son.

Prova. Primer volem acotar la diferència entre $\varphi^*\mu$ i $\varphi^* F^* \langle \cdot, \cdot \rangle = (F \circ \varphi)^* \langle \cdot, \cdot \rangle$. Notem que

$$\begin{aligned}
(F \circ \varphi)^* \langle \cdot, \cdot \rangle (\partial_s, \partial_s) &= \left|\left|\frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial s}\right|\right|^2 \\
&= ||h(t, s, \{Ns\})||^2 \\
&= \mu(W, W) \\
&= \varphi^*(\mu)(\partial_s, \partial_s).
\end{aligned}$$

Per tant, com $\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$, tenim que

$$\begin{aligned}
|((F \circ \varphi)^* \langle \cdot, \cdot \rangle - \varphi^*\mu)(\partial_t, \partial_t)| &= \left|\left|\left|\frac{\partial F \circ \varphi}{\partial t}\right|\right|^2 - \left|\left|\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}\right|\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{\partial F \circ \varphi}{\partial t} - \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}\right|\right| \left|\left|\frac{\partial F \circ \varphi}{\partial t} - \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{\partial F \circ \varphi}{\partial t} - \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}\right|\right| \left(2\left|\left|\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}\right|\right| + \left|\left|\frac{\partial F \circ \varphi}{\partial t} - \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}\right|\right|\right)
\end{aligned}$$

De manera que, pel lema 5.3.2,

$$|((F \circ \varphi)^* \langle \cdot, \cdot \rangle - \varphi^*\mu)(\partial_t, \partial_t)| \leq \frac{K_1(f \circ \varphi, h)}{N},$$

on $K_1(f \circ \varphi, h)$ només depèn de $||\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t}||_\infty$ i de $||h||_{C^2}$.

Per la manera en què hem definit els vectors, tenim que

$$f^*\langle \cdot, \cdot \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = \mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = \mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, W\right) = 0,$$

d'on podem inferir que

$$\left\langle \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t}, h(t, s, \{Ns\}) \right\rangle = 0.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} |((F\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle - \varphi^*\mu)(\partial_t,\partial_s)| &= |(F\circ\varphi)^*\langle\partial_t,\partial_s\rangle - \varphi^*\mu(\partial_t,\partial_s)| \\ &= \left|\left\langle \frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial t}, h(t,s,\{Ns\})\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle \frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}, h(t,s,\{Ns\})\right\rangle\right| \\ &\leq \left|\left|\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right| \, ||h(t,s,\{Ns\})||. \end{aligned}$$

De manera que, de nou pel lema 5.3.2,

$$|((F\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle - \varphi^*\mu)(\partial_t,\partial_s)| \leq \frac{K_2(h)}{N},$$

Tot plegat,

$$||\varphi^*\mu - \varphi^*F^*\langle\cdot,\cdot\rangle||_\infty \leq \frac{K_1(f\circ\varphi,h)+2K_2(h)}{N}.$$

I acabem amb

$$||\mu - F^*\langle\cdot,\cdot\rangle|| \leq ||\varphi^*\mu - \varphi^*F^*\langle\cdot,\cdot\rangle||\,||d\varphi^{-1}||_\infty^2.$$

□

Observació 5.3.7. Aquí podríem donar unes interpretacions d'aquests lemes, comparant-los amb els del teorema de Nash.

5.3.2 Integració convexa del tor $\mathbb{T}^2$

Amb la integració convexa del cilindre, hem obtingut una aplicació $F : (\mathcal{C}il,\mu) \to (\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ gairebé isomètrica i C_0-propera a l'aplicació induïda sobre $\mathcal{C}il$ per $f : (\mathbb{T}^2,\mu) \to (\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Ara bé, les imatges de les dues corbes que defineixen la frontera del cilindre no coincideixen necessàriament. Per tant, el nostre objectiu serà deformar F de tal manera que coincideixin, tal que sigui possible prendre el quocient d'aquesta nova aplicació per a obtenir un encabiment isomètric del tor.

Definim una nova aplicació $\bar{F}$ tal que

$$\bar{F}\circ\varphi(t,s) := F\circ\varphi(t,s) - w(s)(F\circ\varphi(t,1) - f\circ\varphi(t,1)), \tag{5.3.11}$$

on $w : I \to I$ és una funció C^∞ tal que

$$w(0)=0,\ w(1)=1 \text{ i } w^{(k)}(0)=w^{(k)}(1)=0.$$

Lema 5.3.8. *Si $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}^3$ i $w:I\to I$ són de classe C^∞, aleshores $\bar{F}$ és de classe C^∞ com a aplicació de $\mathbb{T}^2$ en $\mathbb{R}^3$.*

Podem reunir tots aquests resultats en el teorema següent.

Teorema 5.3.9 (One Step Theorem)**.** *Sigui $f:(\mathbb{T}^2,\mu)\to(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un encabiment de classe C^∞ tal que $\mu = f^*\langle\cdot,\cdot\rangle + \rho\ell\otimes\ell$ i $\rho\in L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Aleshores,*

1. $||\bar{F}-f||_\infty \leq \frac{K_1(h)}{N}$ *i* $||\bar{F}-f||_\infty \leq 2\sqrt{7}||U||\cdot||\rho||_\infty^{1/2}$,
2. $||d\bar{F}-df||_\infty \leq \frac{K_2(h,\zeta,\psi,w')}{N} + \sqrt{7}||\rho||_\infty^{1/2}||$,
3. $||V\cdot\bar{F} - V\cdot f||_\infty \leq \frac{K_3(h,\psi)}{N}$,

4. $||W \cdot \bar{F} - W \cdot f||_\infty \leq \sqrt{7}||U||(1 + ||w'||_\infty)||\rho||_\infty^{1/2}$, *i*
5. $||\mu - \bar{F}^*\langle\cdot,\cdot\rangle||_\infty \leq \frac{K_4(f\circ\varphi, r, h, w', \varphi^{-1})}{N}$.

on

- $K_1(h)$ *només depèn de* $||h||_{C^1}$.
- $K_2(h, \zeta, \psi, w')$ *només depèn de* $||\zeta||_\infty$, *de* $\left|\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^{-1}\right|\right|_\infty$, *de* $||w'||_\infty$ *i de* $||h||_{C^2}$.
- $K_3(h, \psi)$ *només depèn de* $\left|\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^{-1}\right|\right|_\infty$ *i de* $||h||_{C^2}$.
- $K_4(f\circ\varphi, r, h, w', \varphi^{-1})$ *només depèn de* $||\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}||_\infty$, *de* $||w'||_\infty$, *de* $||r||_\infty$, *de* $\left|\left|d\varphi^{-1}\right|\right|_\infty$ *i de* $||h||_{C^2}$.

Notació 6. *Anomenarem*

$$IC(f, \mu, N) := \bar{F}$$

l'aplicació obtinguda amb un pas d'integració convexa de l'aplicació f, la mètrica μ i el nombre d'oscil·lació N.

Prova.

Primer punt. De la definició 5.3.11, tenim que

$$||\bar{F}(p) - f(p)|| \leq ||F(p) - f(p)|| + ||w(s)||_\infty||F - f||_\infty \leq 2||F - f||_\infty. \tag{5.3.12}$$

Pel lema 5.3.1, $||F - f||_\infty \leq \frac{K(h)}{N}$. Així, obtenim la primera desigualtat del primer punt del teorema,

$$||\bar{F}(p) - f(p)||_\infty \leq \frac{K_1(h)}{N}.$$

Per la segona desigualtat, considerem

$$\begin{aligned} ||F\circ\varphi(t,s) - f\circ\varphi(t,s)|| &= \left|\left|\int_0^s \left(\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial s}(t,u) - \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial s}(t,u)\right) \mathrm{d}u\right|\right| \\ &\leq \int_0^s ||(W\cdot F)(\varphi(t,u)) - (W\cdot f)(\varphi(t,u))||\,\mathrm{d}u \\ &\leq ||W\cdot F - W\cdot f||_\infty. \end{aligned}$$

Pel lema 5.3.3, $||W\cdot F - W\cdot f||_\infty \leq \sqrt{7}||U||\cdot||\rho||_\infty^{1/2}$. Prenent això i la desigualtat 5.3.12, obtenim la segona desigualtat del primer punt del teorema,

$$||\bar{F} - f||_\infty \leq 2\sqrt{7}||U||\cdot||\rho||_\infty^{1/2}.$$

Segon punt. Seguim la demostració del lema 5.3.5 per a obtenir una desigualtat anàloga a 5.3.10,

$$||d\bar{F} - df|| \leq \frac{||W\cdot\bar{F} - W\cdot f||}{||U||} + \frac{|\zeta|\cdot||V||^2 + 1}{||V||}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^{-1}\left|\left|\frac{\partial(\bar{F}\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right|.$$

Derivant la definició 5.3.11 respecte de t i s, obtenim les desigualtats

$$||W\cdot\bar{F} - W\cdot f|| \leq ||W\cdot F - W\cdot f||_\infty + ||w'||_\infty||F - f||_\infty. \tag{5.3.13}$$

$$\left|\left|\frac{\partial(\bar{F}\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right| \leq 2\left|\left|\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right|_\infty \tag{5.3.14}$$

Prenent aquestes tres desigualtats,

$$||d\bar{F} - df||_\infty \leq \frac{1}{||U||}\left(||W\cdot F - W\cdot f||_\infty + ||w'||_\infty ||F-f||_\infty\right) \\ + \frac{|\zeta|\cdot||V||^2+1}{||V||}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^{-1}\left(2\left|\left|\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right|_\infty\right),$$

i amb els lemes 5.3.1, 5.3.2 i 5.3.3, obtenim la desigualtat del segon punt del teorema.

Tercer punt. Prenent una equació com la de 5.3.9 i considerant la desigualtat obtinguda derivant respecte de s, 5.3.14, trobem

$$||V\cdot\bar{F} - V\cdot f|| = \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^{-1}\left|\left|\frac{\partial(\bar{F}\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right| \\ \leq 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^{-1}\left|\left|\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}\right|\right|_\infty.$$

aplicant el lema 5.3.2, obtenim el tercer punt del teorema.

Quart punt. Prenent la desigualtat obtinguda derivant respecte de t, 5.3.13, i considerant que $||F-f||_\infty \leq ||W\cdot F - W\cdot f||_\infty$, obtenim

$$||W\cdot\bar{F} - W\cdot f||_\infty \leq ||W\cdot F - W\cdot f||_\infty + ||w'||_\infty||W\cdot F - W\cdot f||_\infty.$$

Pel lema 5.3.3, $||W\cdot F - W\cdot f||_\infty \leq \sqrt{7}||U||\cdot||\rho||_\infty^{1/2}$, de manera que

$$||W\cdot\bar{F} - W\cdot f||_\infty \leq \sqrt{7}||U||\cdot||\rho||_\infty^{1/2}(1+||w'||_\infty),$$

tal com volíem.

Cinquè punt. Seguim la demostració del lema 5.3.6 per acotar la diferència entre $\varphi^*\mu$ i $(F\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle$. Per la definició 5.3.11, tenim que

$$(\bar{F}\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle(\partial_s,\partial_s) = \left|\left|\frac{\partial(\bar{F}\circ\varphi)}{\partial s}\right|\right|^2 = \big|\big|W\cdot F - w'(s)(F\circ\varphi(t,1) - f\circ\varphi(t,1))\big|\big|^2,$$

i com $\varphi^*\mu(\partial_s,\partial_s) = ||W\cdot F||^2 = r^2$, obtenim

$$|(\bar{F}\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle(\partial_s,\partial_s) - \varphi^*\mu(\partial_s,\partial_s)| \leq ||w'||_\infty||F-f||_\infty(2||r||_\infty + ||w'||_\infty||F-f||_\infty).$$

Pel lema 5.3.1, obtenim

$$|(\bar{F}\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle(\partial_s,\partial_s) - \varphi^*\mu(\partial_s,\partial_s)| \leq \frac{X(w',r,h)}{N} \tag{5.3.15}$$

on $X(w',r,h)$ depèn de $||w'||_\infty$, $||r||_\infty$ i $||h||_{C^2}$.

Ara, com $\varphi^*\mu(\partial_t,\partial_t) = \left|\left|\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial t}\right|\right|^2$, obtenim

$$|(\bar{F}\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle(\partial_t,\partial_t) - \varphi^*\mu(\partial_t,\partial_t)| \leq \Bigg|\left|\left|\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial t} - w(s)\left(\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial t}(t,1) - \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial t}(t,1)\right)\right|\right|^2 \\ - \left|\left|\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial t}\right|\right|^2\Bigg|$$

Podem escriure $A := \frac{\partial F\circ\varphi}{\partial t}$, $B := \frac{\partial F\circ\varphi}{\partial t}(t,1) - \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial t}(t,1)$ i $C := \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial t}$.

$$\begin{aligned} |(\bar{F}\circ\varphi)^*\langle\cdot,\cdot\rangle(\partial_t,\partial_t) - \varphi^*\mu(\partial_t,\partial_t)| &= \left| ||A - w(s)B||^2 - ||C||^2 \right| \\ &\leq ||A - w(s)B - C||\, ||A - w(s)B + C|| \\ &\leq ||A - C|| + ||B||\, ||A - w(s)B + C|| \end{aligned}$$

AIXO NO ESTÀ ACABAT.

5.4 Encabiment isomètric del tor pla

Per algun motiu, aquí canvien la mètrica de μ a g. Si veiem que no hi ha cap motiu, ho podem canviar.

A la secció anterior ens hem fixat en el cas primitiu, de manera que podiem construir una aplicació gairebé isomètrica $\bar{f} : (\mathbb{T}^2, g) \to (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ a partir d'una immersió $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ quan

$$g - f^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \rho\ell\otimes\ell.$$

A continuació, prendrem aquests mètode i el generalitzarem al cas en què el defecte isomètric (*isometric default*)

$$D := g - f^*\langle\cdot,\cdot\rangle$$

és una mètrica. Aquest és el cas si i només si la immersió f és estrictament curta. Per tal d'aplicar els resultats anteriors, haurem de descompondre aquest defecte isomètric en una suma de mètriques primitives. Observem que el conjunt de productes interiors en $\mathbb{R}^2$ és un con convex

$$Q_+ = \{E\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x + F(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}x) + G\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y : EG - F^2 > 0, F > 0, G > 0\},$$

estas segur de que aquest $F > 0$ és correcte? potser és E. Aleshores, d'una manera anàloga a la que hem vist a la demostració de l'equació 4.3.4 al capítol anterior, podem trobar una descomposició del defecte isomètric

$$D = \sum_{j=1}^{N} \rho_j(D)\ell_j\otimes\ell_j,$$

on N és un enter i les ℓ_j es defineixen per entorns. El procés d'integració convexa que es presenta aquí aconsegueix trobar tres formes lineals ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 que funcionen a un nivell global, de manera que N es redueix a 3. En concret, suposarem que la immersió f és tal que el defecte isomètric pertany al con obert

Rellegir això perquè ho he fet al bus i no m'he concentrat molt.

$$\mathcal{C} := \{\rho_1\ell_1\otimes\ell_1 + \rho_2\ell_2\otimes\ell_2 + \rho_3\ell_3\otimes\ell_3 : \rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0\},$$

on ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 són formes lineals en $\mathbb{R}^2$ donades per

$$\ell_1 := \mathrm{d}x,\ \ \ell_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y) \text{ i } \ell_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y).$$

Per reduir els tres coeficients del defecte isomètric, farem tres integracions convexes PASSOS? successives. És a dir, prendrem primer

$$\mu_1 = f^*\langle\cdot,\cdot\rangle + \rho_1(D_1)\ell_1\otimes\ell_1,$$

amb $D_1 := D$ i construirem $f_1 := IC(f, \mu_1, N_1)$. Després, prendrem el nou defecte isomètric $D_2 := g - f_1^*\langle\cdot,\cdot\rangle \in \mathcal{C}$ i la mètrica

$$\mu_2 = f_1^*\langle\cdot,\cdot\rangle + \rho_2(D_2)\ell_2 \otimes \ell_2,$$

per obtenir $f_2 := IC(f_1, \mu_2, N_2)$. Finalment, prendrem el nou defecte isomètric $D_3 := g - f_2^*\langle\cdot,\cdot\rangle \in \mathcal{C}$ i la mètrica

$$\mu_3 = f_2^*\langle\cdot,\cdot\rangle + \rho_3(D_3)\ell_3 \otimes \ell_3,$$

per obtenir $f_3 := IC(f_2, \mu_3, N_3)$. Per tal que aquests tres passos d'integració convexa resultin en un encabiment isomètric, tal com volem, haurem de veure que podem triar les constants N_1, N_2, N_3 prou grans tal que, després de la i-èssima integració convexa, el component ρ_i del nou defecte isomètric sigui proper a zero, mentre la resta romanen aproximadament iguals.

Per tal d'obtenir un encabiment isomètric, no és prou amb triar N_1, N_2, N_3 prou grans, sinó que caldrà repetir el procés sencer indefinidament. La realització d'aquests tres passos s'anomena, com en la demostració dels teoremes de Nash, una **etapa** (*stage*). Al final de cadascuna obtenim un encabiment $\mathcal{F}_k$ amb una mètrica g_k que és cada vegada més propera a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Anomenem a l'encabiment obtingut després de l'etapa k-èssima

$$\mathcal{F}_k := IC(\mathcal{F}_{k-1}, g_k, N_{k,1}, N_{k,2}, N_{k,3}),$$

on $\mathcal{F}_0 := f$. En cada etapa, ens haurem de preocupar de que el defecte isomètric $D_k := g - f_{k-1}^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ pertanyi al con convex $\mathcal{C}$.

Teorema 5.4.1 (Stage Theorem)**.** *Siguin g i $\bar{g}$ dues mètriques Riemannianes sobre $\mathbb{T}^2$ i sigui*

$$f : (\mathbb{T}^2, g) \to \mathbb{E}^3$$

una immersió tal que

1. $\bar{g} - g \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$
2. $g - f^*\langle\cdot,\cdot\rangle \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$

Aleshores, existeixen enters N_1, N_2, N_3 tals que l'immersió

$$\bar{f} := IC(\{, g_k, N_1, N_2, N_3)$$

satisfà

1. $\bar{f}(0,0) = f(0,0)$
2. $\bar{g} - \bar{f}^*\langle\cdot,\cdot\rangle \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$
3. $||\bar{g} - \bar{f}^*\langle\cdot,\cdot\rangle||_\infty \leq ||\bar{g} - g||_\infty$
4. $||d\bar{f} - df||_\infty \leq 11||g - f^*\langle\cdot,\cdot\rangle||_\infty^{\frac{1}{2}}$

Prova. Aquí posaríem la prova si tenim espai.

Capítol 6

Apunts d'integració convexa

El que segueix són apunts del seminari *Convex Integration, Staircase Laminates and Applications* d'en Daniel Faraco, de part de la Universitat Autònoma de Madrid, el dia 17 de març de 2025. BGSMATH2025.

6.1 Dia 1

La integració convexa comença amb l'article de Nash sobre les encabiments C^1. La pregunta era si pots posar una esfera de manera isomètrica en una esfera més petita. Fiques una varietat $2D$, l'esfera, en una esfera en $\mathbb{R}^3$.

La condició **d'isometria** és que $Du^\intercal Du = g$. Nash comença amb una immersió curta i troba una d'isomètrica.

Esculls adequadament les pertorbacions de la immersió i obtens el resultat, com ja sabem. El resultat no és particularment útil, potser, però el mètode concret que fa servir és el que anomenem **integració convexa**, que és molt útil. En general, si hi ha una sèrie de PDE i les dones a través del límit d'unes pertorbacions, donada una subsolució final.

$$u^\infty = \lim_{N\to\infty} u^N,$$

on $u^{N+1} - u^N = \omega_q$ i ω_q té paràmetres d'oscil·lació i concentració λ_q i τ_q, amb direccions $\eta_k^1 \eta_k^2$. i funcions oscil·lants ϕ.

Considerarem que les aplicacions curtes són **límits febles**, on els límits febles tals que

$$⨍_E u_\gamma \to ⨍_E \overline{u}$$

FORMULA 1, són **course grain solutions**. Diu que en aplicacions a PDE, la solució seria "micro" i el límit feble seria "macro".

Gromov és potser qui comença a desenvolupar aquest mètode de Nash. Altres van veure que això servia en dinàmica de fluids.

Laminats d'escala són un mètode inventat pel Faraco per resoldre equacions el·líptiques isotròpiques. Es fan en tres passos:

(1) Escriure el problema com una inclusió diferencial: trobar un conjunt $K \subseteq M^{m\times n}$ tal que $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ i $Du(x) \in K$ a.e. $x \in \Omega$, on K és un conjunt tancat euclidià que representa les dades del problema.

(2) Aproximar la solució per K per

$$\int \mathrm{dist}_K(Du)^p \leq \varepsilon$$

.

(3) Combinar moltes solucions aproximades per construir una solució exacta.

Veurem aquí tota una sèrie d'aplicacions.

Teoria de Calderón Zygmund

Tenint en compte aquestes propietats i definició de la transformada de Fourier, FORMULA 2.

Per Plancherel, FORMULA 3, les derivades estan controlades per la laplaciana en la norma L^2. Però en L^1 això no és cert:

Teorema 6.1.1. *$\forall N, \Omega$ regular $\exists f_N$ amb $\int |\partial_{x1x2} f| \geq N$ i $\sup\{|\partial_{x1x1}|, |\partial_{x2x2}|\} \leq 1$*

Equacions el·líptiques i aplicacions quasiconformals

En electrostàtica, si u és el potencial elèctric, aleshores

- $\mathrm{div}(\rho \nabla u) = 0$ on ρ la conductivitat.
- Condició de frontera $u|_{\partial\Omega} = g$
- Quan $\rho = 1$: $\mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u$

El·lipticitat quantitativa:

$$\frac{1}{K} I \leq \rho(x) \leq KI$$

La solució feble en forma distribucional és

$$\int_\Omega \rho \nabla u \nabla \phi \mathrm{d}x = 0, \quad , \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

La manera d'arribar a això és amb la primera variació del funcional d'energia

$$I[u] = \int_\Omega \rho |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

Però hem de veure quin és l'espai en què això té sentit. En general, necessitem $W^{1,2}(\Omega)$. La pregunta és si són solucions febles honestes. Hi ha qui les anomena solucions molt febles.

I ara està parlant de coses del BIMR que no arribo a entendre.

6.2 Dia 2

Mirarem C-Z en L^1, equacions el·líptiques, homeomorfismes patològics etc., on el que ens interessa és que els podem escriure $Df(x) \in E \subseteq M^{m\times n}$.

El mètode que explicarà sera trobar $Df(x) \in E \subseteq M^{m\times n}$ tal que hi ha un exponent crític p a (J) tal que $Df \in L^{p,\infty} \subset \cap_{q<p} L^q \setminus L^p$.

Pel que fa a CZ ens interessa veure que no és vàlid en L^1. És a dir, que exiteis u tal que $\int |\partial_{x1x2} u| = \infty$ però $|\partial_{x1x1}| + |\partial_{x2x2}| \leq 1$.

Vam deduir l'operador estrella de Hodge, $\star$, per equacions el·líptiques. Les derivades conformes i anticonformes es poden escriure com coordenades complexes d'una matriu 2×2.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_-, a_+)$, aleshores $\partial_{\bar{z}} f = \pm\kappa\overline{\partial_z f}$. Escrivim $Df \in E_{\pm\kappa} = \{a_- = \pm\kappa a_+\}$. Si tenim una matriu conforme i diagonal, aleshores està en una diagonal. El que tenim ara és en dos plans, $a_- = -\kappa a_+$ i $a_- = \kappa a_+$. MIRAR DIBUIX.

Beltrami no lineals

$\partial_{\bar{z}} f = \mu \partial_z f$, $\partial_{\bar{z}} f = v\overline{\partial_z f}$, $\partial_{\bar{z}} f = \mu\partial_z f + v\overline{\partial_z f}$ es poden posar en una certa forma.

6.3 Dia 3

Recordem que el que volem, donat $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, descriure

$$Du(x) \in K \quad \text{a.e. x} \quad (I)$$

Quina és la integrabilitat de Du? I volem reformular el problema com:

$$\exists g.d.v_u \text{ tal que ...}$$

6.4 Dia 4

Volem, com sempre, $Du \in K$ tal que $Du \in L^{p,\infty} \setminus L^p$ per algun p crític. Això és el mateix que fer una distribució de gradients tq el suport de $v_u \in K$, $v_u(x : |x| \geq t) \approx t^{-p}$. Que serà el mateix que construir un laminat d'escala tal que $v_u \in \mathcal{SL}^p(K)$

Recordem que diem que A i B són rang 1 connectades si $A - B = a \otimes n$ tal que $\det(A - B) = 0$. Per tant, $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda s_A + (1-\lambda)s_B$ és (aprox) distribució de gradients.

Amb això podem trobar ua funció amb distribució de gradients només un en A i un en B (l'espai gradient vius a l'espai de les matrius, generat per $(10, 00)$ i $(00, 01)$) Aleshores les direccions de rang 1 són les horitzontals i verticals. El centre de masses d'una mesura generada (en horitzontal) per A i B està en el segment entre A i B.

Les propietats que té la distribució de gradients per tal que funcionin és que siguin afins a trossos amb condicions afins de frontera, que ens fa més fàcil generar laminats. Si tenim $ABABAB$ haurem de posar a la frontera lateral una regió d'interpolació, i no hi ha problema canviant per exemple B per $DEDEDE$ o alguna cosa així. Cada vegada que fem aquest procés, que la massa de A es divideix entre B i C i la de B entre D i E, tenim una altra distribució gradient. Ara bé, amb això només podem fer coses amb matrius connectades rang 1. Ara bé, si no són connectades rang 1 això no funciona. El que hem construit fins ara eren prelaminats, els laminats són els límits de successions de prelaminats a mesura que fem més i més petites les cantonades.

La gran contribució de Tartar és que ser un camp gradient és només que el rotacional sigui 0. Anul·lar el rotacional és com resoldre un sistema d'equacions de primer ordre, per exemple $\mathcal{L}(z) = A_{ijk}\partial_j z^k$. Per cada operador diferencial existeix el que anomenem con d'ones Λ_L, el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tal que si $I \in \Lambda_L$ aleshores exiteix una direcció ξ tal que per qualsevol $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenim que $\mathcal{L}(h)$ LHA TRET :(, que generalitza el concepte de connexió de rang 1.

Aquesta teoria no es restringeix només a gradients, sinó també a coses de Fraday blablabla.

Definició de laminat escala: tenim un conjunt $K \in M^{d\times m}$ on vull que es suporti, i $A \notin K$. Aleshores l'esglaó n serà $\omega_1 = (1-\gamma_n)\mu_n + \gamma_n \delta_{A_n}$ i tal, de manera que anem pujant i suportant-nos on toca.

6.5 Apunts del paper de Nash del 1954

- Parlar abans de la diferència entre el punt de vista extrínsec i intrínsec de la geometria, un cop haguem parlat de geodif.
- Veurem que una varietat de dimensió n es pot ficar en un espai E^{2n}, on aquí diem que E^k és l'espai euclidià de dimensió k.
- Interessant que el procés de les correccions sempre augmenta les distàncies localment, motiu pel qual el primer ha de ser curt. Diu Nash que l'anem "estirant".
- Mirar el tema de si la caracterització de una immersió curta és diferent que a la que dona SJO.
- Si la varietat és tancada només cal canviar l'escala de E^k per fer la immersió curta. Si és oberta cal fer una cosa més complicada.
- Coses a tenir en compte:
  - g_{ij} és la mètrica intrínseca, h_{ij} és la mètrica induïda.
  - $\{x^i\}$ són les coordenades en la varietat M.
  - $\{z^\alpha\}$ són les coordenades en E^k.
  - Amb la immersió, $z^\alpha = z^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$.
  - La mètrica induïda és $h_{ij} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^j}$. Normalment estaria multiplicat per una $g_{\alpha\beta}$ que no apareix perquè en aquest cas és la mètrica euclidiana.
- Cada correcció es va fent en infinites "etapes", cada una d'elles corregint la correcció de la etapa anterior. L'important aquí és que cada correcció manté el fet que la immersió sigui curta, tot i que cada vegada menys. Cada etapa ens hi hauria d'apropar la meitat del camí. Per exemple, després de la primera, l'error hauria de ser

$$g_{ij} - \overline{h_{ij}} \approx \frac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})$$

- Ho fem d'aquesta manera perquè així ens assegurem que cada correcció només ha d'augmentar la mètrica.
- Cada etapa es divideix en passes (passos?), que afecten només localment la immersió augmentant la mètrica en una sola direcció.
- Per tal de dividir en passos, dividim la varietat en una sèrie d'entorns amb n paràmetres C^∞ no singulars, i cada entorn es pot trobar amb un nombre finit d'altres entorns.
- Per cada un d'aquests entorns, per exemple N_p, prenem una funció φ_p positiva a l'interior de N_p i 0 fora d'ell. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les φ_p valgui 1 en qualsevol punt. (Això com es fa? Diu que és estàndard però em sembla una mica complicat si ha de ser C^∞.) Això serveix per distribuir la çàrrega"de la correcció.
- En cada entorn, la çàrrega"de la correcció es divideix també entre les passes. Sigui $\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ l'error mètric després d'unes quantes etapes. A la propera voldríem augmentar la mètrica més o menys $\frac{1}{2}\delta_{ij}$, de manera que a l'entorn N_p voldríem augmentar la mètrica en $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$. Per fer-ho haurem de trobar un tensor definit positiu β_{ij} que sigui C^∞ i aproximi δ_{ij}.

- $$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  on x^i són coordenades de l'entorn N_p, a_ν funcions no-negatives C^∞ i ψ^ν funcions lineals en x^i.

- A l'apartat **The normal fields**, diu que necessita dos camps vectorials unitaris C^∞ normals a la immersió i ortogonals entre ells, ζ^α i η^α. Això és lo de la co-dimensió 2 que després Kuiper canvia a 1.

- La pertorbació associada a a_ν i ψ^ν és

  $$\boxed{\overline{z}^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu) + \eta^\alpha\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)} \tag{6.5.1}$$

  on λ és un paràmetre que podem triar.

- El canvi mètric és $\sum_\alpha \frac{\partial\overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$. No cal calcular tots els termes en detall, perquè molts contenen $1/\lambda$ o $1/\lambda^2$ i, per tant, convergeixen uniformement a 0 quan $\lambda \to \infty$. Altres termes es cancel·len. CALDRIA FER AIXÒ A MÀ.

- λ no fa desaparèixer els termes en què s'ha derivat les trigonomètriques, perquè en surt una λ de dins. Ara bé, ens queden termes de l'estil $\sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}(-\sin(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$, o amb les i i j bescanviades o amb η^α en comptes del ζ^α. Cadascun d'aquests termes són 0, ja que ζ i η són normals a la immersió.

- La resta de termes tindran el producte de dues funcions trigonomètriques o el quadrat d'una d'elles. Les que tinguin el producte també contenen $\zeta^\alpha\eta^\alpha$, i desapareixen per ortogonalitat.

- El que queda, doncs és

  $$\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 a_\nu(\sin^2(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + \sum_\alpha(\eta^\alpha)^2 a_\nu(\cos^2(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  i si traiem factor comú i usem que els vectors són unitaris, ens queda

  $$a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  que és el que volíem.

- I amb això veiem que l'error mètric és $O(1/\lambda)$.

- A **Size of immersion...** repetim que la pertorbació canvia segons $O(1/\lambda)$ després de cada passa. Mirant el que fa a la primera derivada, veiem el canvi que fa en un entorn totes les passes d'una etapa, i queda que el canvi en les derivades acaba sent

  $$\left|\left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\text{final}} - \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\text{inicial}}\right| \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O(1/\lambda_1) + \cdots + O(1/\lambda_\nu) + \cdots$$

  LA VERITAT ÉS QUE NO SÉ D'ON SURTEN ELS TRES PUNTS DEL FINAL.

- A **Global considerations and convergence** volem veure quina λ s'ha d'agafar.
  - B_1 és el màxim error que volem en l'aproximació del canvi mètric, $a_\nu\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right)$.

  - B_2 és el màxim error $O(1/\lambda)$ que volem en el canvi de les primeres derivades.
  - B_3 és la cota de $\overline{z}^\alpha - z^\alpha$.

- Després d'una etapa, la nova mètrica induïda és $h'_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Posem $h'_{ij} = g_{ij} - \delta'_{ij}$, on $\delta'_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}$ i e_{ij} és un terme d'error. Per tal que la successió convergeixi, necessitem que δ'_{ij} sigui estrictament més petita que δ_{ij}. Si imposem que en tot punt de N_p el màxim dels components de e_{ij} sigui menor o igual a un sisè del màxim de δ_{ij}, aleshores el màxim de δ'_{ij} serà menor o igual a dos terços del màxim de δ_{ij}. MIRAR SI AIXÒ ÉS ALGUNA NORMA C^k O ALGO.
- Volem que δ'_{ij} sigui definida positiva, que ho podem assegurar si imposem que la mida de e_{ij} sigui més petita que un cert ε_p que depèn de l'entorn compacte N_p. Com cada entorn se superposa amb un nombre finit σ d'altres entorns, es poden trobar límits per e_{ij} tal que el que busquem sigui cert en tots ells. Anomenem ε_p^* el mínim d'aquestes limitacions.
- L'error ve de l'aproximació de δ_{ij} per β_{ij} i dels passos. Per tant, imposant $(\delta_{ij} - \beta_{ij}) < \varepsilon_p^*$, tenim que $(\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij} - \frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij}) < \frac{1}{2}\varepsilon_p^*$. Així, podem imposar que en un entorn N_p els passos tinguin aquesta seqüència de B_1: $B_{11} \leq \frac{1}{4}\varepsilon_p^*$, $B_{12} \leq \frac{1}{8}\varepsilon_p^*$, $B_{13} \leq \frac{1}{16}\varepsilon_p^*$, etc.
- A **Performability of the steps** simplement diu que a cada pas tenim una immersió C^∞ i que tot és definit positiu. La única font de negativitat és l'error, però això sempre es pot contenir amb λ.
- A **General organization** es fa aquest resum:
  - El procés es fa en una sèrie d'etapes que prenen una immersió curta C^∞ i en retornen una amb un error mètric com a molt $2/3$ del de l'anterior.
  - La varietat es divideix en entorns N_p.
  - Cada etapa es divideix en passos. A cada etapa, la correcció és pesada per φ_p i dividida per tal que la duguin a terme les passes.
  - Si la varietat és oberta, hi ha un nombre infinit de passos per etapa, però a cada porció compacta hi ha un nombre finit.
- A **Convergence of the immersion** diu que necessitem que les B_3 del pas r de l'etapa s siguin més petites que $2^{-(r+s)}$, i el mateix per B_2. La manera per fer-ho és escollir que la mida de β_{ij} estigui entre $9/10$ i $9/8$ de la de δ_{ij}. Això fa que el canvi en les derivades estigui limitat per una geomètrica de raó $\sqrt{5/6}$ MIRAR AIXÒ, de manera que les funcions C^∞ convergeixen uniformement a una de C^1.
- ES MOLT IMPORTANT QUE ESCRIVIM ALGUNA COSA SOBRE LA DIFERÈNCIA ENTRE IMMERSIONS I encabiments.
- A **Isometric Imbeddings** QUAN PARLA DE CONJUNT LÍMIT CREC QUE ES REFEREIX A LA PART DEL CONJUNT OBERT MÉS LLUNYANA, EL QUE ESTARIA JUST A TOCAR DE LA FRONTERA diu que per encabiments és bàsicament el mateix, però necessitem controlar les auto-interseccions. Per veure que pas a pas no n'hi ha, cal comprovar que per λ prou gran les evitem.
- Sigui M un conjunt tancat de l'encabiment que conté N_p al seu interior. M té un entorn obert H tal que no hi ha punt de H amb dues rectes perpendiculars a M. MIRAR AIXÒ, HI HA UNA CITA.
- Posem Q la unió del conjunt límit amb la part de la encabiment que no està a l'interior

de M. Aleshores Q és tancat i una pertorbació prou petita de N_p^* no afectarà Q. AQUÍ NO SÉ QUÈ ÉS N_p^*. EN GENERAL, AQUEST APARTAT ÉS POSA MOLT TÈRBOL.

- A **Constructing the initial immersion** explica que si la varietat té dimensió n, sabem que es pot trobar una encabiment en E^{2n} no-singular i analítica. Es pot prendre aquesta immersió i escalar-la per a que sigui curta.
- Per un conjunt obert, podem recobrir la varietat per entorns N_p pesats amb funcions C^∞ φ_p amb paràmetres x_{pi} tals que $|x_{pi}| \leq 1$. Volem que en qualsevol punt de la varietat els conjunts d'aquest recobriment se superposin un nombre finit de vegades s, com a molt.
- Podem dividir els conjunts N_p en s classes, de manera que en cada classe no hi hagi conjunts que es superposin.
- Podem definir una encabiment en un espai $s(n+2)$ dimensional, a partir de funcions $u_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, $v_\sigma = \varepsilon_p^2 \varphi_p$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, i $w_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p x_{pi}$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, on x_{pi} la coordenada i-èssima de N_p i $\{\varepsilon_p\}_p$ és una successió monòtona decreixent de nombres positius que convergeix a 0.
- Observem: que totes aquestes funcions són C^∞, que dos punts de conjunts interiors a conjunts diferents tenen raons v_σ / u_σ diferents, i que punts interiors a un mateix entorn N_p tenen $w_{\sigma i}$ diferents. (EL CONJUNT LÍMIT ÉS L'ORIGEN PERÒ CAP PUNT ÉS ENVIAT A L'ORIGEN)
- Podem escollir que la encabiment sigui curta escollint la successió $\{\varepsilon_p\}_p$. Si la mètrica induïda pels primers p entorns és curta per un factor $\frac{1}{3}(2 - 1/p)$, podem escollor $p+1$ tal que sigui curta per un factor $1/3(2 - 1/(p+1))$. Amb això tenim una encabiment curta i C^∞ en $E^{s(n+2)}$, i a partir de projeccions podem arribar a E^{2n+1}
- A **General summary** enumera els quatre teoremes que ha demostrat en aquest article:
  - **Teorema 6.5.1.** *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una encabiment isomètrica C^1 en E^{2n}.*
  - **Teorema 6.5.2.** *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió n té una immersió isomètrica C^1 en E^{2n} i una encabiment isomètrica C^1 en E^{2n+1}.*
  - **Teorema 6.5.3.** *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ en E^k amb $k \geq n+2$, aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètrica en E^k.*
  - **Teorema 6.5.4.** *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ curta en E^k amb $k \geq n+2$ que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètrica en E^k del mateix tipus.*
- Per últim, un comentari super interessant que fa és que potser es pot canviar $n+2$ per $n+1$ si es fa una una pertorbació diferent que només necessita una direcció, que crec que és just el que fa Kuiper!

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} \tag{6.5.2}$$

Lema 6.5.5. *L'equació 6.5.2 es pot satisfer amb les condicions necessàries.*

Prova. Les matrius simètriques definides positives formen un con de dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$.D'on surt això? És molt estrany És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials MIRAR A WIKIPEDIA EL QUE ÉS geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre W d'aquests entorns, on W depèn només de n.

Una matriu qualsevol representada per un punt d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{llll} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \dots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \dots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \dots \end{array}$$

els coeficients per q representacions d'una matriu del con. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C^*_{\mu,\nu} = \frac{C_{\mu,\nu}\exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_\rho \exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

de manera que aquests coeficients són C^∞ com a funcions de la matriu que representen. Per cada matriu, com a molt $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients $C^*_{\mu,\nu}$ són no-nuls.

Si ara considerem que β_{ij} defineix una aplicació C^∞ de N_p al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \tag{6.5.3}$$

on $M_{(\mu,\nu)ij}$ són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu $M_{(\mu,\nu)ij}$ obtenim n autovectors unitaris ortogonals $\{V_r\}$ i els seus autovalors $\{v_r\}$.

Si ψ_r és per cada r la funció lineal dels paràmetres locals pels quals $\sqrt{v_r}V_r$ és el vector gradient Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer, tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{6.5.4}$$

i, substituint en 4.3.5, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{6.5.5}$$

i, agrupant termes en a_ν, obtenim el resultat. □

6.6 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 6.6.1. *Sigui (M, g) una superfície, $N \geq \dim M + 1$ i $u : M \to \mathbb{R}^N$ una encabiment estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en M s'escurça (estrictament) sota ∇u. Aleshores u es pot aproximar uniformement per encabiments isomètriques C^1.*

Haurem d'explicar què és una encabiment isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \to \varepsilon\mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació *curta*.
Observació 6.6.2. De fet, qualsevol encabiment C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la encabiment estàndard $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |X| = 1\}$ fins translació i rotació.

El teorema 6.6.1 es demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D. Una aplicació $u : D \to \mathbb{R}^n$ és una *immersió* per ara direm encabiment als embeddings i immersions als *immersions* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x. La mètrica en D induïda per u és de la forma Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^\intercal(x)\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar isometries si $\nabla u^\intercal \nabla u = g$, i diem que és *(estrictament) curta* si $\nabla u(x)^\intercal \nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.
Teorema 6.6.3. *[Baby Nash] Sigui $n \geq 4$ i $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió estrictament curta. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió isomètrica C^1 $\tilde{u} : D \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(D)} < \varepsilon$.Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*
Observació 6.6.4. Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix\cdot\xi}$, però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposem que per cada $I \in \mathcal{I}$ que existeixi $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{U}_I, \quad \overline{\overline{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\intercal \nabla u_1$. On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només agafo el primer terme.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla \overline{U}_I^\intercal \nabla U_I \right) - \sum_I \left(\nabla u^\intercal \nabla U_I + \nabla U_I^\intercal \nabla u \right) - \sum_{I,J : J \neq \overline{I}} \nabla U_I^\intercal \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt}.

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi},$$

amb $a : D \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \to \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{n}} = 1$. Per tal que sigui real, definim també $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x)\overline{\mathbf{n}}(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned}\nabla_j W &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + \frac{1}{\lambda}\nabla_j(a(x)\mathbf{n}(x))e^{\lambda i x\cdot\xi}\\ &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS O(1/LAMBDA)!!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned}\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x) &= (-i\xi_i a(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi})(i\xi_j a(x)e^{\lambda i x\cdot\xi})\overline{\mathbf{n}}(x)\cdot\mathbf{n}(x) + O(\frac{1}{\lambda})\\ &= \xi_i\xi_j a(x)^2 + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\intercal$. Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2\xi_i\xi_j$.
Exemple 6.6.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x)\xi\otimes\xi + b^2(x)\xi'\otimes\xi' + c^2(x)\xi''\otimes\xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi\otimes\xi$. Repetint-ho per $\xi'\otimes\xi'$ i $\xi''\otimes\xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.
Observació 6.6.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen d'x. Això es pot resoldre amb el següent lema.
Lema 6.6.7. *(Descomposició de l'error mètric) Sigui $\mathcal{P}$ l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en $\mathbb{R}^n$ i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P};[0,\infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A)\xi_i^{(k)}\xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.
Observació 6.6.8. La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$ per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes q_{lin} i q_{alt} desapareguin fins a terme $O(1/\lambda)$.

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb W

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W = i\xi_j a(x) e^{ix\cdot\xi} \nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de $u(x)$, $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$. Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 (REVISAR!!!). Podem fer el mateix amb $\nabla_i W^\intercal \nabla_j u$ i obtenim

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = (-a^2(x)\xi_i\xi_j e^{2ix\cdot\xi})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

I ara només cal utilitzar que la encabiment té co-dimensió ≥ 2 per escollir un vector complex tal que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$ Com està definit aquest producte?. Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)$$

on $\zeta(x)$ i $\eta(x)$ són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent $T_{u(x)}u(D)$.

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda}\left(\sin(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) + \cos(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)$$

amb les següents propietats:

  - Norma C^0 petita Explicar C-normes:

$$||W||_{C^0} \leq C\frac{||a||_{C^0}}{\lambda}$$

  - Terme principal en ∇W

$$\begin{aligned}\nabla W =& a(x)\left(\cos(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) - \sin(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)\\ &+ O_{||a||_{C^0},||\nabla a||_{C^0},||\nabla\zeta||_{C^0},||\nabla\eta||_{C^0}}(1/\lambda)\end{aligned}$$

  - Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W(x) - a^2(x)\xi_i\xi_j = O(1/\lambda)$$

  - Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

  - Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

Observació 6.6.9. Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor. Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned}\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) :& D\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}^2\\ &(x,t) \mapsto \gamma(x,t)\end{aligned}$$

on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posant $\dot{\gamma}$ la derivada respecte de t, tenim que

$$\nabla W^\intercal(x)\nabla W(x) = \left(\dot{\gamma}_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot{\gamma}_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)\right) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x cal trobar $\gamma(x, \cdot)$ tal que (1) $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = a^2$ i (2) $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$ sigui 2π-periòdic i $\int \dot{\gamma} dt = 0$ De manera que $t \mapsto \gamma(x, t)$ també ha de ser 2π-periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat $\overline{D}$. IMPORTANT Per a després, NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ, que es carrega un terme a un error d'ordre $O(1/\lambda)$.

Lema 6.6.10 (Lema d'iteració)**.** *Sigui $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió suau estrictament curta, tal que $h := g - \nabla u^\intercal \nabla u$ obeeix*

$$||h||_{C^0} \leq e_h \tag{6.6.1}$$

per algun $e_h > 0$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió suau estrictament curta $u_{[1]} = u + U$, on

$$\begin{aligned} ||U||_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ ||\nabla U||_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2} \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

i $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^\intercal \nabla u_{[1]}$ obeeix

$$||h_{[1]} - h||_{C^0} \leq \varepsilon. \tag{6.6.3}$$

Prova. Pel lema 6.6.7, tenim que h es pot escriure com

$$h(x) = \sum_k \Gamma^2_{(k)}(h(x))\xi^{(k)} \otimes \xi^{(k)}$$

on per cada $h(x)$ hi ha com a molt K termes no-nuls.

Per la compacitat d' $h(D) \subseteq \mathcal{P}$, existeix un nombre finit de sumands que són funcions no-nul·lesNon-vanishing, mirar la traducció. Reanomenem aquests sumands d'aquesta manera:

$$\Gamma^2_{(1)}(h(x))\xi^{(1)} \otimes \xi^{(1)}, \Gamma^2_{(2)}(h(x))\xi^{(2)} \otimes \xi^{(2)}, \ldots, \Gamma^2_{(N)}(h(x))\xi^{(N)} \otimes \xi^{(N)}$$

Prenent la traça, veiem que

$$||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq ||h||^{1/2}_{C^0} \leq e_h^{1/2}$$

Mirar d'on surt això (Sembla Cauchy-Schwarz, però què passa amb la traça de h?) Ara podem fer N correccions a u de la mateixa manera que hem fet abans, en les direccions $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$, per cancel·lar aquests errors. En concret, per un $\delta > 0$, definim de manera recursiva $u_j = u_{j-1} + (1-\delta)^{1/2} U_j$, amb $u_0 = u$ i

$$U_j = \frac{\Gamma_{(j)}(h(x))}{\lambda_j} \left(\sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta_j(x) + \cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta_j(x)\right)$$

per uns certs λ_j i $\zeta_j, \eta_j : D \to \mathbb{R}^n$ unitaris.

Prenem $\delta > 0$ per tal d'assegurar curtedat estricta no sé com es diu shortness la veritat. De fet, fixem $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2e_h^{1/2}}$ per tal que $h \geq \delta I$. uiuiui això mirar-ho bé

Escollint λ_j prou gran, tenim

–

$$||U_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{6.6.4}$$

–

$$\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta) + \mathrm{err}_j, \quad ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \ll \varepsilon \quad (6.6.5)$$

–

$$h_j = h_{j-1} - (1-\delta)\Gamma^2_{(k)}(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \mathrm{err}'_j, \quad ||\mathrm{err}'_j||_{C^0} \ll \delta^2 \quad (6.6.6)$$

Les dues primeres són fàcils d'entendre, però la tercera l'hem de revisar.

On $h_j = g - \nabla u_j^\intercal \nabla u_j$.

Per tal de concloure la prova, verifiquem que $U = U_1 + \cdots + U_N$ i $u_{[1]} = u_N = u + U$ satisfan les propietats desitjades.

- És fàcil veure que $||U_j|| \ll \varepsilon$ implica $||U||_{C^0(D)} \ll \varepsilon$.
- A més, de $\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta) + \mathrm{err}_j$ i $||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq e_h^{1/2}$ tenim que $||\nabla U||_{C^0(D)} \leq K e_h^{1/2} + \sum_{j=1}^N ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \leq 2K e_h^{1/2}$ si es prenen les constants adequades.
- Finalment, sumant els termes h_j obtenim

$$h_N = h - (1-\delta)\sum_{j=1}^N \Gamma^2_{(j)}(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j = \delta h + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j$$

  i imposant que $u_{[1]} = u_N$ sigui estrictament curta, $h_{[1]} = h_N \geq \delta^2 I$, obtenim el resultat.

$\square$

Ara podem iterar diverses vegades per concloure la prova del teorema 6.6.3.

Prova del teorema 6.6.3. Sigui $e_{h,[k]} > 0$ una successió tal que

$$\sum_k e_{h,[k]} \leq \epsilon, \quad \sum_k e_{h,[k]}^{1/2} < \infty.$$

Pel lema 6.6.10, obtenim una successió d'aplicacions suaus estrictament curtes $u_{[k]}$ tal que $u_{[0]} = u$ i

$$||g - \nabla u_{[k]}^\intercal \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k]}$$
$$||\nabla u_{[k+1]} - \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq C e_{h,[k]}^{1/2}$$
$$||u_{[k+1]} - u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k+1]},$$

demostrant el teorema. $\square$

revisar això últim perquè just estava parlant amb la marina

6.6.1 Extensions

Extensió a encabiments de varietats

Per estendre el teorema 6.6.3 a immersions a superfícies generals, només cal reduir a cartes coordenades. Per estendre'l a encabiments usem que, per la compacitat d'M, podem trobar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{x,y} \mathrm{dist}(u(x), u(y)) \geq \varepsilon.$$

Ara només cal dur a terme la construcció en un entorn de 0.01ε.entendre millor això últim perquè és bastant random

Refinament de Kuiper: encabiment de codimensió 1

Modificant la forma de la correcció, podem aconseguir la mateixa construcció amb només co-dimensió 1. Sigui $\eta : D \to \mathbb{R}^3$ el camp vectorial unitari en $u(D)$, i sigui

$$\zeta = \nabla u (\nabla u^\intercal \nabla u)^{-1} \xi.$$

Prenem

$$U = \frac{1}{\lambda}\Big(\gamma_1(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\zeta}(x) + \gamma_2(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\eta}(x)\Big)$$

on

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{|\zeta|^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{|\zeta|},$$

i $u_1 = u + U$. Això porta a paper i boli

$$\nabla u_1^\intercal \nabla u_1 = \nabla u^\intercal \nabla u + \frac{1}{|\zeta|^2}\left(2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2\right)\xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x i $a = a(x) \in \mathbb{R}$ volem que γ sigui tal que

- posar això amb la cosa aquella de (1) i (2)
- $(1 + \dot{\gamma}_1)^2 + \dot{\gamma}_2^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1$,
- $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$ és 2π-periòdica i $\int \dot{\gamma} \mathrm{d}t = 0$

i tal que $|\dot{\gamma}| \le C|a|$. Això és possible perquè l'envolupant convexa de $\{(x, y) : (1+x)^2+y^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1\}$ conté el 0.

6.7 Varietats topològiques

Definició 6.7.1. *Sigui M un espai topològic. Diem que M és una* ***varietat topològica de dimensió*** n *si es compleixen les propietats següents:*

- *M és Hausdorff, és a dir, si per a cada $p, q \in M$ amb $p \neq q$ existeixen entorns oberts $U \subseteq M$ i $V \subseteq M$ de p i q respectivament tals que $U \cap V = \emptyset$,*
- *M verifica el segon axioma de numerabilitat, és a dir, existeix una base numerable de la topologia de M,*
- *M és localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$, és a dir, per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert $U \subseteq M$ de p que és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$.*

Es pot posar un exemple

Per tal de poder descriure localment els punts de les varietats i de poder operar amb ells, serà útil introduir el concepte de carta coordenada.

Definició 6.7.2. *Sigui M una varietat topològica de dimensió n. Diem que un parell (U, φ) és una* ***carta coordenada de*** *M si U és un obert de M i $\varphi : U \to \hat{U}$ és un homeomorfisme amb un obert $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem U el* ***domini de la carta*** *i φ la* ***funció coordenada****.*

Observació 6.7.3. De la definició de carta coordenada, observem que no tota varietat topològica M es pot cobrir amb una única carta coordenada. Per exemple, si M és homeomorf al cercle $\mathbb{S}^1$ amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^2$, no es pot trobar cap aplicació $\varphi : M \to \mathbb{R}$ que sigui un homeomorfisme amb un obert de $\mathbb{R}$, ja que $\mathbb{S}^1$ és compacte.

Es pot posar un exemple.

A continuació, donarem algunes propietats de les varietats topològiques i les cartes coordenades, sense reproduir les demostracions explícitament.

Lema 6.7.4. *Tota varietat topològica es pot recobrir amb numerables cartes coordenades.*

Lema 6.7.5. *Tota varietat topològica té una base numerable de boles coordenades amb adherència compacta.*

Proposició 6.7.6. *Sigui M una varietat topològica. Aleshores,*

- *M és localment arc-connexa.* Aquí utilitzo arc-connexa com a sinònim de connex per camins.
- *M és connex si i només si és arc-connex.*
- *Els components connexos de M són els seus components arc-connexos.*
- *M té un conjunt numerable de components connexos, i cada un d'ells és un obert i una varietat topològica connexa.*

Proposició 6.7.7. *Tota varietat topològica és localment compacta. És a dir, per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert U de p tal que $U \subseteq K$ per algun compacte $K \subseteq M$.*

Definició 6.7.8. *Diem que una col·lecció $\mathcal{X}$ de subconjunts d'un espai topològic M és* ***localment finita*** *si per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert U de p tal que $U \cap X = \emptyset$ per a tots $X \in \mathcal{X}$ excepte un nombre finit d'ells.*

Definició 6.7.9. *Donat un recobriment per oberts $\mathcal{U}$ d'un espai topològic M, diem que un recobriment per oberts $\mathcal{V}$ és un* ***subrecobriment de*** *$\mathcal{U}$ si per a cada $V \in \mathcal{V}$ existeix $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.*

Definició 6.7.10. *Diem que un espai topològic M és* ***paracompacte*** *si qualsevol recobriment per oberts de M té un subrecobriment localment finit.*

Teorema 6.7.11. *Tota varietat topològica és paracompacta. De fet, donat un recobriment per oberts $\mathcal{X}$ i qualsevol base $\mathcal{B}$ de la topologia de M, existeix un subrecobriment numerable* *localment finit $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ format només d'elements de $\mathcal{B}$.*

Aquesta demostració està en el Lee, no té gaire a veure amb el tema així que potser no la posem, però bueno, allà està.

6.8 Estructura suau

6.9 Suavitat

L'Ignasi m'ha dit que el que hauria de ressaltar més és la diferència entre C^1 i C^∞. Potser podria comentar alguns dels resultats que són vàlids en un i no en l'altre? El que hi ha aquí ho estic traient de wikipedia. Preguntar a l'Ignasi per una font més bona.

Definició 6.9.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és* k-vegades derivable contínuament, *amb $k \in \mathbb{N}_0$, si la derivada d'ordre k,*

$$f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f,$$

existeix i és contínua en U. Anomenem l'índex k suavitat de f. Diem que f és suau *o* infinitament derivable *si existeix la derivada de qualsevol ordre.*

Observacions 6.9.2.

- f és 0 vegades derivable contínuament si i només si f és contínua.
- Si f és k vegades derivable contínuament, aleshores també és j vegades derivable contínuament per $0 \leq j \leq k$.

Definició 6.9.3. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

De la mateixa manera, podem definir aquests conceptes per funcions de diverses variables.

Definició 6.9.4. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-vegades derivable contínuament, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si totes les seves derivades parcials d'ordre k,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

tals que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, existeixen i són contínues en U. És a dir, si f és k-vegades derivable contínuament en cada component de U.

Definició 6.9.5. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

Observacions 6.9.6. Potser caldria donar la definició explícita en el cas de funcions de diverses variables.

- Moltes vegades, en lloc de $C^k(U)$ es fa servir $C^k(U; \mathbb{R}^m)$ per a funcions $f : U \to \mathbb{R}^m$.
- També escriurem simplement C^k en lloc de $C^k(U)$ si el domini és clar pel context.

6.9.1 Classes de diferenciabilitat com espais normats

A continuació definirem normes en $C^k(U)$ i $C^\infty(U)$ que ens permetran tractar-les com espais vectorials normats.

Definició 6.9.7. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció. Definim la norma $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ de f com*

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)},$$

on $\|\cdot\|_{L^\infty(U)}$ és la norma del suprem en U, tal que $\|g\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x \in U} |g(x)|$.

Aquí podríem proposar i demostrar que $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ és efectivament una norma, ho tenim a `https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek_Norm_is_Norm`. També cal decidir si definim explícitament la D^α.

6.10 Fonaments de geometria diferencial

Aquí hauriem de parlar d'embedding preferiblement.

Capítol 7

Conclusions

Hem après un muntHI HA UNA EXPLICACIó DE COM CITAR AL CAMPUS

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY) *Nom del treball.* Cambridge University Press.

Oh, S. J. (2018) *The Nash C^1 isometric embedding theorem.* LINK O PUBLISHER?

Nash, J. (1954) *C^1 isometric imbeddings.* Annals of Mathematics, 60(3), 383-396.

Lee, J. M. (2013) *Introduction to smooth manifolds.* Springer.

Borrelli, V., Jabrane, S., Lazarus, F., & Thibert, B. (2013) *Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space.* Ensaios Matemáticos (Sociedade Brasileira de Matemática), 24, 1-98.

Warner, F. W. (1983) *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Springer.

Chavel, I. (2006) *Riemannian geometry: A modern introduction.* Cambridge University Press.