



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

# GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

## EL MEU TFG

---

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 23 d'abril de 2025

## Abstract

My wonderful abstract.

## Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar  $C^1$  i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- Mirar article Nash, Gromov
- Mirar quin  $C^n$  agafa al paper band
- Mirar Sung Jin Oh
- Mirar millora de Kuiper

## Agraïments

Bla, bla, bla

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
1.1	Temes de les reunions . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Geometria diferencial i suavitat</b>	<b>3</b>
2.1	Introducció al capítol . . . . .	3
2.2	Varietats topològiques . . . . .	3
2.3	Estructura suau . . . . .	4
2.4	Suavitat . . . . .	5
2.4.1	Classes de diferenciabilitat com espais normats . . . . .	5
2.5	Fonaments de geometria diferencial . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Cinta de Moebius de paper òptima</b>	<b>7</b>
3.1	Introducció al capítol . . . . .	7
3.1.1	Introducció al problema . . . . .	7
3.1.2	Definicions . . . . .	8
3.1.3	Lemes addicionals . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Teorema Nash-Kuiper <math>C^1</math></b>	<b>9</b>
4.1	Introducció al capítol . . . . .	9
4.2	Enunciat dels teoremes . . . . .	9
4.3	Demostració . . . . .	10
4.3.1	La pertorbació en un pas . . . . .	12
4.3.2	Convergència dels passos en una etapa . . . . .	14
4.3.3	Organització general . . . . .	16
4.3.4	Convergència de la immersió . . . . .	17
4.3.5	Encabiments isomètrics . . . . .	17
4.3.6	Obtenint la immersió o l'encabiment inicial . . . . .	18
4.4	El refinament de Kuiper . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Encabiments isomètrics del tor pla</b>	<b>20</b>
5.1	Introducció al capítol . . . . .	20
5.2	Integració convexa . . . . .	20
5.2.1	Integració convexa 1D . . . . .	20
5.3	Integració convexa 2D: el cas primitiu . . . . .	21
5.3.1	Integració convexa del cilindre $Cil$ . . . . .	22
5.3.2	Integració convexa del tor $\mathbb{T}^2$ . . . . .	24
5.4	Encabiment isomètric del tor pla . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Apunts d'integració convexa</b>	<b>27</b>

6.1	Dia 1 . . . . .	27
6.2	Dia 2 . . . . .	28
6.3	Dia 3 . . . . .	29
6.4	Dia 4 . . . . .	29
6.5	Apunts del paper de Nash del 1954 . . . . .	31
6.6	Explicació del Sung-Jin Oh . . . . .	36
6.6.1	Extensions . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>42</b>

# Capítol 1

## Introducció

### Objectius del treball

- Explicats

### Estructura de la memòria

Tremendo HEM DE MIRAR DE POSAR LA DEMOSTRACIÓ DE QUE NOSEQUÈ SEMPRE HI HA UN PUNT EL·LIPTIC

### Guia de lectura

Faig servir encabiment, que potser hauria de dir immersió?

## 1.1 Temes de les reunions

Sigui  $\mathcal{M}$  una varietat diferenciable amb una distància  $d$ , i sigui

$$\nu = \{(x, v) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n : v \in T_x \mathcal{M}^\perp\}.$$

Per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , definim el subconjunt

$$\nu_\varepsilon = \{(x, v) \in \nu : \|v\| < \varepsilon\}$$

i l'aplicació

$$\begin{aligned}\sigma : \nu_\varepsilon &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto x + v\end{aligned}$$

**Teorema 1.1.1.** *Si  $\varepsilon$  és prou petit, aleshores  $\sigma : \nu_\varepsilon \rightarrow \sigma(\nu_\varepsilon)$  és homeomorfisme.*

*Prova.* (Meva, està molt millor al John M. Lee) Primer, volem veure que  $\sigma$  és injectiva. Suposem que  $\mathcal{M}$  és  $C^\infty$  (amb  $C^2$  hauria de ser prou). Donat qualsevol punt  $x \in \mathcal{M}$  existeix un entorn prou petit  $U_x$  de  $x$  en  $\mathcal{M}$  tal que  $\nu_1$  és injectiva. Això és degut al fet que, localment, la varietat és aproximadament igual al seu espai tangent.

Sigui  $x_0$  el punt amb l'entorn  $U_{x_0}$  més petit que verifica la propietat anterior, i sigui  $y_0$  el punt de  $\mathcal{M} \setminus U_{x_0}$  tal amb el vector  $w_0 \in T_{y_0} \mathcal{M}$  més curt tal que existeix algun  $v_0 \in T_{x_0} \mathcal{M}$  tal que  $x_0 + v_0 = y_0 + w_0$ . Sigui  $l = \|w_0\|$ . Aleshores, posant  $\varepsilon = l/2$ , tenim que  $\sigma$  és injectiva.

Pel que fa a la exhaustivitat,  $\sigma : \nu_\varepsilon \rightarrow \sigma(\nu_\varepsilon)$  és exhaustiva per definició. A més, en ser la suma de dos vectors en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\sigma$  és contínua.

Cal veure que la inversa  $\sigma^{-1}$  és contínua. Sigui  $a \in \sigma(\nu_\varepsilon)$ . Aleshores, existeixen  $x \in \mathcal{M}$  i  $v \in \mathbb{R}^n$  tals que  $a = \sigma(x, v) = x + v$ . Com  $\sigma^{-1}$  projecta punts de  $\sigma(\nu_\varepsilon)$  en el punt de  $\nu_\varepsilon$  més proper, tenim que  $\sigma^{-1}$  és contínua. Per tant,  $\sigma$  és un homeomorfisme.  $\square$

**Observació 1.1.2.** D'aquí surt el que fa servir Nash per allò del conjunt que no admet dues perpendiculars.

## Capítol 2

# Geometria diferencial i suavitat

La ide d'aquest capítol ha de ser la següent:

- Explicar temes de varietats topològiques.
- Parlar sobre geometria Riemanniana.
- Definir immersions i encabiments.
- Parlar de la suavitat de les immersions i encabiments.
- Enunciar i demostrar el tema de que qualsevol encabiment suau del tor ha de tenir algun punt el·líptic. A la pàgina 9 del llibre del Tor es comenta.

### 2.1 Introducció al capítol

En aquest capítol ens ocuparem de definir i comentar algunes de les nocions bàsiques de geometria diferencial i de varietats diferenciables i suaus. La referència principal per aquest capítol és Lee (2013).

A un nivell intuïtiu, les varietats suaus (*smooth manifolds*) són espais topològics que, localment, es poden veure com espais euclidians  $\mathbb{R}^n$ , i tals que hi sigui possible fer càlcul infinitesimal. Si bé és fàcil entendre la noció de suavitat (*smoothness*) en els exemples senzills de corbes i superfícies immerses en  $\mathbb{R}^3$ , cal tenir en compte que no és cap requeriment per a una varietat suau que sigui immersa en un espai ambient  $\mathbb{R}^n$ , sinó que s'haurà de treballar en termes intrínsecs. Aquest fet és molt rellevant en una de les aplicacions més interessants de la geometria diferencial, la teoria de la relativitat general, on l'espai-temps es modela com una varietat diferenciable de dimensió 4 i on no hi ha cap espai ambient en el sentit clàssic. Un altra subtileza és que la noció de suavitat no pot ser una propietat purament topològica, ja que no és preservada per homeomorfismes. L'exemple més evident és el d'un cercle i un quadrat, que són homeomorfs en  $\mathbb{R}^2$ , però el cercle és suau mentre que el quadrat no ho és. [Aquí podem escriure més quan haguem acabat el capítol.](#)

### 2.2 Varietats topològiques

**Definició 2.2.1.** *Sigui  $M$  un espai topològic. Diem que  $M$  és una **varietat topològica de dimensió  $n$**  si es compleixen les propietats següents:*

- $M$  és Hausdorff, és a dir, si per a cada  $p, q \in M$  amb  $p \neq q$  existeixen entorns oberts  $U \subseteq M$  i  $V \subseteq M$  de  $p$  i  $q$  respectivament tals que  $U \cap V = \emptyset$ ,



- $M$  verifica el segon axioma de numerabilitat, és a dir, existeix una base numerable de la topologia de  $M$ ,
- $M$  és localment homeomorf a  $\mathbb{R}^n$ , és a dir, per a cada  $p \in M$  existeix un entorn obert  $U \subseteq M$  de  $p$  que és homeomorf a un obert de  $\mathbb{R}^n$ .

Es pot posar un exemple

Per tal de poder descriure localment els punts de les varietats i de poder operar amb ells, serà útil introduir el concepte de carta coordenada.

**Definició 2.2.2.** Sigui  $M$  una varietat topològica de dimensió  $n$ . Diem que un parell  $(U, \varphi)$  és una **carta coordenada de  $M$**  si  $U$  és un obert de  $M$  i  $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$  és un homeomorfisme amb un obert  $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Anomenem  $U$  el **domini de la carta** i  $\varphi$  la **funció coordenada**.

**Observació 2.2.3.** De la definició de carta coordenada, observem que no tota varietat topològica  $M$  es pot cobrir amb una única carta coordenada. Per exemple, si  $M$  és homeomorf al cercle  $\mathbb{S}^1$  amb la topologia induïda per  $\mathbb{R}^2$ , no es pot trobar cap aplicació  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  que sigui un homeomorfisme amb un obert de  $\mathbb{R}$ , ja que  $\mathbb{S}^1$  és compacte.

Es pot posar un exemple.

A continuació, donarem algunes propietats de les varietats topològiques i les cartes coordenades, sense reproduir les demostracions explícitament.

**Lema 2.2.4.** Tota varietat topològica es pot recobrir amb numerables cartes coordenades.

**Lema 2.2.5.** Tota varietat topològica té una base numerable de boles coordenades amb adherència compacta.

**Proposició 2.2.6.** Sigui  $M$  una varietat topològica. Aleshores,

- $M$  és localment arc-connexa. Aquí utilitzo arc-connexa com a sinònim de connex per camins.
- $M$  és connex si i només si és arc-connex.
- Els components connexos de  $M$  són els seus components arc-connexos.
- $M$  té un conjunt numerable de components connexos, i cada un d'ells és un obert i una varietat topològica connexa.

**Proposició 2.2.7.** Tota varietat topològica és localment compacta. És a dir, per a cada  $p \in M$  existeix un entorn obert  $U$  de  $p$  tal que  $U \subseteq K$  per algun compacte  $K \subseteq M$ .

**Definició 2.2.8.** Diem que una col·lecció  $\mathcal{X}$  de subconjunts d'un espai topològic  $M$  és **localment finita** si per a cada  $p \in M$  existeix un entorn obert  $U$  de  $p$  tal que  $U \cap X = \emptyset$  per a tots  $X \in \mathcal{X}$  excepte un nombre finit d'ells.

**Definició 2.2.9.** Donat un recobriment per oberts  $\mathcal{U}$  d'un espai topològic  $M$ , diem que un recobriment per oberts  $\mathcal{V}$  és un **subrecobriment de  $\mathcal{U}$**  si per a cada  $V \in \mathcal{V}$  existeix  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $V \subseteq U$ .

**Definició 2.2.10.** Diem que un espai topològic  $M$  és **paracompacte** si qualsevol recobriment per oberts de  $M$  té un subrecobriment localment finit.

**Teorema 2.2.11.** Tota varietat topològica és paracompacta. De fet, donat un recobriment per oberts  $\mathcal{X}$  i qualsevol base  $\mathcal{B}$  de la topologia de  $M$ , existeix un subrecobriment numerable localment finit  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{X}$  format només d'elements de  $\mathcal{B}$ .

Aquesta demostració està en el Lee, no té gaire a veure amb el tema així que potser no la posem, però bueno, allà està.

## 2.3 Estructura suau

## 2.4 Suavitat

L'Ignasi m'ha dit que el que hauria de ressaltar més és la diferència entre  $C^1$  i  $C^\infty$ . Potser podria comentar alguns dels resultats que són vàlids en un i no en l'altre? El que hi ha aquí ho estic traient de wikipedia. Preguntar a l'Ignasi per una font més bona.

**Definició 2.4.1.** *Sigui  $U \subseteq \mathbb{R}$  un conjunt obert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funció real contínua. Diem que  $f$  és  $k$ -vegades derivable contínuament, amb  $k \in \mathbb{N}_0$ , si la derivada d'ordre  $k$ ,*

$$f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f,$$

*existeix i és contínua en  $U$ . Anomenem l'índex  $k$  suavitat de  $f$ . Diem que  $f$  és suau o infinitament derivable si existeix la derivada de qualsevol ordre.*

**Observacions 2.4.2.**

- $f$  és 0 vegades derivable contínuament si i només si  $f$  és contínua.
- Si  $f$  és  $k$  vegades derivable contínuament, aleshores també és  $j$  vegades derivable contínuament per  $0 \leq j \leq k$ .

**Definició 2.4.3.** *Anomenem classe de diferenciabilitat  $C^k(U)$ , amb  $k \in \mathbb{N}_0$  l'espai de les funcions  $k$ -vegades derivables contínuament en  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Anomenem  $C^\infty(U)$  l'espai de les funcions infinitament derivables en  $U$ .*

De la mateixa manera, podem definir aquests conceptes per funcions de diverses variables.

**Definició 2.4.4.** *Sigui  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunt obert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funció real contínua. Diem que  $f$  és  $k$ -vegades derivable contínuament, amb  $k \in \mathbb{N}_0$ , si totes les seves derivades parcials d'ordre  $k$ ,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

*tals que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ , existeixen i són contínues en  $U$ . És a dir, si  $f$  és  $k$ -vegades derivable contínuament en cada component de  $U$ .*

**Definició 2.4.5.** *Anomenem classe de diferenciabilitat  $C^k(U)$ , amb  $k \in \mathbb{N}_0$  l'espai de les funcions  $k$ -vegades derivables contínuament en  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Anomenem  $C^\infty(U)$  l'espai de les funcions infinitament derivables en  $U$ .*

**Observacions 2.4.6.** *Potser caldria donar la definició explícita en el cas de funcions de diverses variables.*

- Moltes vegades, en lloc de  $C^k(U)$  es fa servir  $C^k(U; \mathbb{R}^m)$  per a funcions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
- També escriurem simplement  $C^k$  en lloc de  $C^k(U)$  si el domini és clar pel context.

### 2.4.1 Classes de diferenciabilitat com espais normats

A continuació definirem normes en  $C^k(U)$  i  $C^\infty(U)$  que ens permetran tractar-les com espais vectorials normats.

**Definició 2.4.7.** *Sigui  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunt obert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funció. Definim la norma  $\|\cdot\|_{C^k(U)}$  de  $f$  com*

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)},$$

*on  $\|\cdot\|_{L^\infty(U)}$  és la norma del suprem en  $U$ , tal que  $\|g\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x \in U} |g(x)|$ .*

Aquí podríem proposar i demostrar que  $\|\cdot\|_{C^k(U)}$  és efectivament una norma, ho tenim a [https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek\\_Norm\\_is\\_Norm](https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek_Norm_is_Norm). També cal decidir si definim explícitament la  $D^\alpha$ .

## 2.5 Fonaments de geometria diferencial

Aquí hauriem de parlar d'embedding preferiblement.

## Capítol 3

# Cinta de Moebius de paper òptima

La idea d'aquest capítol és la següent:

- Introduir que estem parlant d'això per mostrar d'una altra manera la rigidesa dels encabiments seus.
- Explicar el problema de la cinta de Moebius de paper òptima.
- Enunciar i demostrar el teorema principal.
- Enunciar i demostrar el teorema del límit triangular.
- Explicar l'acordió de Möbius, donant peu al següent capítol.

### 3.1 Introducció al capítol

En aquesta secció expliquem el paper de Richard Evan Schwartz, en què demostra que la cinta de Moebius de paper òptima ha de tenir relació d'aspecte més gran que  $\sqrt{3}$ , i que qualsevol successió de cintes de Moebius amb relació d'aspecte convergint a  $\sqrt{3}$  convergeix a la cinta de Moebius triangular.

#### 3.1.1 Introducció al problema

**Definició 3.1.1.** Una cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte  $\lambda$  és una aplicació infinitament diferenciable (suau)  $I : M_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on  $M_\lambda$  és la cinta de Moebius plana obtinguda amb la següent identificació d'un rectangle

$$M_\lambda = ([0, \lambda] \times [0, 1]) / \sim, \quad (0, y) \sim (\lambda, 1 - y)$$

Una aplicació isomètrica és una aplicació que preserva longituds d'arc. L'aplicació és una encabiment si és injectiva, i una immersió en general *Interessant veure si aquesta notació la seguim utilitzant o si se l'ha inventat.* Sigui  $\Omega = I(M_\lambda)$ . Diem que  $\Omega$  està incrustada si  $I$  és una encabiment.

**Exemple 3.1.2.** Anomenem cinta de Moebius de paper triangular la cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte  $\lambda = \sqrt{3}$ .

el shwartz menciona aquí uns papers que expliquem més sobre la banda de moebius, si volem escriure més sobre el tema els podem utilitzar.

**Teorema 3.1.3** (Principal). Una cinta de Moebius de paper suau incrustada en  $\mathbb{R}^3$  té relació d'aspecte més gran que  $\sqrt{3}$ .

**Teorema 3.1.4** (Límit Triangular). *Sigui  $I_n : M_{\lambda_n} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una successió de cintes de Moebius de paper seus incrustades, tals que  $\lambda_n \rightarrow \sqrt{3}$ . Aleshores,  $I_n$  convergeix uniformement a una cinta de Moebius de paper triangular, llevat d'isometria.*

### 3.1.2 Definicions

**Definició 3.1.5.** *Sigui  $I : M_\lambda \rightarrow \Omega$  una cinta de Moebius de paper incrustada. Un plec "doble" o alguna cosa així? a  $\Omega$  és un segment de recta  $B'$  que talla a través de  $\Omega$  i té els seus extrems a la frontera.*

Veurem més endavant que tota cinta de Moebius de paper incrustada té una foliació per plecs.

**Definició 3.1.6.** *Sigui  $B'$  un plec. Anomenem pre-plec a la preimatge  $B = I^{-1}(B')$ .*

Degut al fet que  $I$  no incrementa distàncies, és fàcil veure que els pre-plecs també són segments de recta, i que  $M_\lambda$  té una foliació per pre-plecs.

### 3.1.3 Lemes addicionals

Per demostrar el teorema principal, es necessiten aquests dos lemes.

**Lema 3.1.7** (T). *Una cinta de Moebius de paper incrustada seu té un*

## Capítol 4

# Teorema Nash-Kuiper $C^1$

La idea d'aquest capítol ha de ser la següent:

- Motivar que estem parlant d'això inspirats per l'acordió de Möbius.
- Enunciar i demostrar el teorema de Nash.
- Com a mínim explicar les millores de Kuiper i Thurston.
- Explicar la demostració de que qualsevol encabiment suau del tor ha de tenir algun punt el·líptic.

### 4.1 Introducció al capítol

En aquesta secció enunciaré i demostraré els quatre teoremes d'immersions isomètriques  $C^1$  de John Forbes Nash Jr., seguint l'article en què els va publicar el 1954 a *Annals of Mathematics*, Nash (1954).

explicar una mica el context i tal. El podem treure de la introducció del llibre del Tor.

Bàsicament, dir que és un teorema sorprenent perquè no se l'esperava ningú, explicar que el que fa és dividir en etapes i passos, i explicar que Kuiper fa una millora de la demostració de Nash per a una dimensió menys.

Important tornar a llegir i revisar quan dic successió i quan dic sèrie.

### 4.2 Enunciat dels teoremes

Hauria de fer servir  $\mathbb{R}^k$  en comptes de  $E^k$ ?

**Teorema 4.2.1.** *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió  $n$  té un encabiment isomètric  $C^1$  en  $E^{2n}$ .*

**Teorema 4.2.2.** *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió  $n$  té una immersió isomètrica  $C^1$  en  $E^{2n}$  i un encabiment isomètric  $C^1$  en  $E^{2n+1}$ .*

**Teorema 4.2.3.** *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió  $n$  té una immersió o encabiment  $C^\infty$  en  $E^k$  amb  $k \geq n + 2$ , aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètric en  $E^k$ .*

**Teorema 4.2.4.** *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió  $n$  té una immersió o encabiment  $C^\infty$  curta en  $E^k$  amb  $k \geq n + 2$  que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètric en  $E^k$  del mateix tipus.*

### 4.3 Demostració

Comencem amb una varietat diferenciable Riemanniana  $M$  de dimensió  $n$ , amb una mètrica intrínseca donada per un tensor mètric  $g_{ij}$ . L'objectiu principal serà trobar una immersió isomètrica d'aquesta varietat  $M$  en algun espai euclidià.

Suposem que tenim una immersió de  $M$  en un espai euclidià  $\mathbb{R}^k$ .

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ \{x^i\} &\mapsto \{z^\alpha(x^1, \dots, x^n)\} \end{aligned}$$

Aleshores, la mètrica induïda en  $M$  és

$$h_{ij} = \sum_{\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}. \quad (4.3.1)$$

Per tal de començar la demostració, el primer que necessitem serà una immersió  $f$  que sigui de classe  $C^\infty$  i curta.

**Definició 4.3.1.** Una immersió  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  és **curta** si la diferència de les mètriques  $g_{ij} - h_{ij}$  és definida positiva.

El més important d'aquesta definició és que, si  $f$  és curta, els vectors sobre  $M$  mai s'allarguen sota  $f$ . Aquesta primera immersió  $f$  és fàcil de trobar, en general, per a varietats tancades, mentre que per a varietats obertes cal entrar en més detalls. [AQUÍ CITAR LA PART ON ES FA.](#)

Un cop trobada aquesta immersió curta, l'estructura de la demostració dels teoremes de Nash consisteix en fer una successió de pertorbacions de  $f$  que, progressivament, disminueixen l'error mètric fins a trobar una immersió isomètrica en el límit. En general, el procés de pertorbació es divideix en **etapes** (en anglès, *stages*), i a cada etapa es divideix en **passos** (en anglès, *steps*). Així, la primera etapa prendrà la nostra immersió curta  $f$  i en retornarà una  $f_1$  amb un error mètric com a molt la meitat del de  $f$ , que serà també  $C^\infty$  i curta. Aquesta  $f_1$  serà millorada en la segona etapa, i així successivament.

La manera en què l'error mètric disminueix en cada etapa és la següent: en la primera immersió, l'error mètric és

$$\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}. \quad (4.3.2)$$

En la segona etapa, l'error mètric serà

$$\bar{\delta}_{ij} = g_{ij} - \bar{h}_{ij} \approx \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad (4.3.3)$$

on  $\bar{h}_{ij}$  és la mètrica induïda per  $f_1$ . Aquest error mètric anirà disminuint geomètricament després de cada etapa, i en el límit obtindrem una immersió isomètrica.

En cada etapa, el procés de pertorbació es divideix en passos. Cada pas afectarà només un entorn local de  $M$ , però s'hauran de dur a terme l'un rere l'altre, no simultàniament. Per tal de fer-ho, cal prendre un recobriment localment finit de  $M$  per conjunts tancats  $\{N_p\}_p$ . És a dir, tals que  $M$  és la unió de tots ells, i cada  $N_p$  interseca només un nombre finit d'altres  $N_q$ . [Al Lee crec que s'explica el fet que sempre es pot trobar aquest recobriment per tancats.](#)

Associarem a cada  $N_p$  una funció ponderació  $\varphi_p$  de classe  $C^\infty$  positiva a l'interior de  $N_p$  i nul·la fora d'ell i a la frontera. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les

$\varphi_p$  valgui 1 en qualsevol punt. [crec que això s'anomena una partició de la unitat. Mirar el Lee.](#) En cada entorn tancat, voldrem que l'error mètric  $\delta_{ij}$  sigui reduït en  $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$  després d'una etapa. Per fer-ho, necessitem aproximar  $\delta_{ij}$  per un tensor de classe  $C^\infty$  i positiu  $\beta_{ij}$ .

Per tal de fer servir aquest  $\beta_{ij}$  per a reduir l'error mètric, necessitem el següent resultat: **Lema 4.3.2.** *Sigui  $\beta_{ij}$  un tensor de classe  $C^\infty$  i definit positiu, i sigui  $\varphi_p$  seguint la definició de més amunt. Aleshores, es poden trobar funcions no-negatives  $a_\nu$  de classe  $C^\infty$  i un nombre finit de funcions lineals  $\psi^\nu = \psi^\nu(x^1, \dots, x^n)$  tals que*

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_{\nu} a_{\nu} \left( \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} \right), \quad (4.3.4)$$

**Observació 4.3.3.** Cal remarcar que aquest lema només és cert si  $\beta_{ij}$  és definit positiu, i que el nombre de termes del sumatori és finit.

*Prova* (Aquesta és la demostració del Nash. És una mica llarga però s'entén bastant bé si la mires amb cura. El Sung-Jin Oh té una versió més curta amb una notació diferent.). El conjunt de les matrius simètriques definides positives de rang  $n$  és un con de dimensió  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Revisar d'on surt això, sembla bastant directe mirant quins coeficients es poden canviar. És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre  $W$  d'aquests entorns, on  $W$  depèn només de  $n$ .

Una matriu qualsevol representada per un punt interior d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{cccc} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \dots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \dots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \dots \end{array}$$

els coeficients per  $q$  representacions diferents d'una matriu del con que pertany a l'interior de  $q$  símplexs diferents. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C_{\mu,\nu}^* = \frac{C_{\mu,\nu} \exp\{-\sum_{\sigma} 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_{\rho} \exp\{-\sum_{\sigma} 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

on cal considerar que els exponencials són nuls si qualsevol dels termes del seu sumatori ho és. Observem que aquests coeficients són  $C^\infty$  com a funcions de la matriu que representen. A més, per cada matriu, com a molt  $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$  coeficients  $C_{\mu,\nu}^*$  són no-nuls.

Si ara considerem que  $\beta_{ij}$  defineix una aplicació de classe  $C^\infty$  de  $N_p$  al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu,\nu}^* M_{(\mu,\nu)ij} \quad (4.3.5)$$

on  $M_{(\mu,\nu)ij}$  són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu  $M_{(\mu,\nu)ij}$  obtenim  $n$  autovectors unitaris ortogonals  $\{V_r\}$  i els seus autovalors  $\{v_r\}$ .

Si  $\psi_r$  és per cada  $r$  la funció lineal dels paràmetres locals pels quals  $\sqrt{v_r}V_r$  és el vector gradient [Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer](#), tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial \psi_r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^j} \quad (4.3.6)$$



i, substituint en 4.3.5, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r \sum_{\mu, \nu} C_{\mu, \nu}^* M_{(\mu, \nu)ij} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^j} \quad (4.3.7)$$

i, agrupant termes en  $a_\nu$ , obtenim el resultat.  $\square$

#### 4.3.1 La pertorbació en un pas

En el pas associat a  $N_p$  en una etapa donada, caldrà fer una pertorbació de la immersió curta obtinguda anteriorment. Per fer-ho, Nash considera dos camps vectorials unitaris ortogonals entre ells i a la immersió en l'entorn  $N_p$ , representats per funcions de classe  $C^\infty$ ,  $\zeta^\alpha$  i  $\eta^\alpha$ . És a dir, compleixen les següents propietats:

$$\sum_{\alpha} (\zeta^\alpha)^2 = 1, \quad (4.3.8)$$

$$\sum_{\alpha} (\eta^\alpha)^2 = 1, \quad (4.3.9)$$

$$\sum_{\alpha} \zeta^\alpha \eta^\alpha = 0, \quad (4.3.10)$$

$$\sum_{\alpha} \zeta^\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = \sum_{\alpha} \eta^\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = 0. \quad (4.3.11)$$

**Observació 4.3.4.** És possible que això ho expliqui en algun altre lloc, però per ara ho deixo aquí. Estaria bé explicar el canvi que fa Kuiper, si hi ha espai, que jo crec que sí.

El fet que Nash utilitzi dos camps vectorials unitaris ortogonals entre ells i a la immersió en l'entorn  $N_p$  restringeix severament la utilitat del seu resultat. En concret, per varietats Riemannianes de dimensió 2, com l'esfera o el tor, el que ens interessa idealment és obtenir immersions en l'espai euclidià tridimensional, per tal de poder-les representar visualment, mentre que el resultat de Nash dóna immersions en un espai euclidià de dimensió 4. Afortunadament, com veurem més endavant, Nicolaas H. Kuiper va modificar lleugerament la prova de Nash per rebaixar la codimensió de l'espai euclidià de  $k = 2$  a  $k = 1$ .

Amb aquests camps vectorials, la pertorbació de la immersió curta  $z^\alpha$  en un pas a l'entorn  $N_p$  és

$$\bar{z}^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^\nu) + \eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda} \sin(\lambda \psi^\nu) \quad (4.3.12)$$

on  $\lambda$  és una constant positiva tan gran com vulguem.

Ara cal veure que el canvi mètric  $\sum_{\alpha} \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_{\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$  és aproximadament igual al terme  $\nu$  del sumatori de 4.3.4.

**Proposició 4.3.5.** El canvi mètric a l'entorn  $N_p$  en el pas associat a  $a_\nu$  i  $\psi^\nu$  donat per 4.3.12 compleix

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_{\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = a_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (4.3.13)$$

*Prova.* Desenvolupant les derivades parcials i cancel·lant els termes que apareixen en

ambdós costats, tenim

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial \bar{z}^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{z}^{\alpha}}{\partial x^j} - \sum_{\alpha} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j} &= \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \eta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \sin(\lambda \psi^{\nu}) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \eta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \sin(\lambda \psi^{\nu}) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Observem que cada en terme del sumatori apareixen quatre derivades similars, canviant  $\zeta^{\alpha}$  per  $\eta^{\alpha}$  i cos per sin, així com  $i$  per  $j$ . Podem considerar una sola d'aquestes, per exemple  $\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right)$ . Desenvolupant-la, tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right) &= \left( \frac{\partial \zeta^{\alpha}}{\partial x^i} \right) \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \\ &\quad + \zeta^{\alpha} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{a_{\nu}} \right) \cos(\lambda \psi^{\nu}) \\ &\quad - \zeta^{\alpha} \sqrt{a_{\nu}} \sin(\lambda \psi^{\nu}) \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Observem que els dos primers termes d'aquesta suma són  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ , de manera que es pot prendre  $\lambda$  prou gran per fer-los tan petits com vulguem. Així,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right) = -\zeta^{\alpha} \sqrt{a_{\nu}} \sin(\lambda \psi^{\nu}) \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

El producte d'aquest terme amb la derivada respecte de  $x^j$  en 4.3.14 és, per tant,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda \psi^{\nu}) \right) = (\zeta^{\alpha})^2 a_{\nu} \sin^2(\lambda \psi^{\nu}) \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Sumant aquest resultat amb el corresponent a  $\eta^{\alpha}$ , obtenim que el terme  $\alpha$  del sumatori de 4.3.14 és

$$\begin{aligned} &(\zeta^{\alpha})^2 a_{\nu} \sin^2(\lambda \psi^{\nu}) \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} + (\eta^{\alpha})^2 a_{\nu} \cos^2(\lambda \psi^{\nu}) \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= ((\zeta^{\alpha})^2 \sin^2(\lambda \psi^{\nu}) + (\eta^{\alpha})^2 \cos^2(\lambda \psi^{\nu})) a_{\nu} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial \bar{z}^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{z}^{\alpha}}{\partial x^j} - \sum_{\alpha} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j} &= \\ &= \sum_{\alpha} \left[ ((\zeta^{\alpha})^2 \sin^2(\lambda \psi^{\nu}) + (\eta^{\alpha})^2 \cos^2(\lambda \psi^{\nu})) a_{\nu} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \\ &= a_{\nu} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} \left( \sin^2(\lambda \psi^{\nu}) \sum_{\alpha} (\zeta^{\alpha})^2 + \cos^2(\lambda \psi^{\nu}) \sum_{\alpha} (\eta^{\alpha})^2 \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= a_{\nu} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

on per a la darrera igualtat hem usat que  $\sum_{\alpha} (\zeta^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} (\eta^{\alpha})^2 = 1$ .  $\square$

Amb aquesta última proposició s'ha demostrat que la pertorbació induïx un canvi mètric molt proper al que volem, amb un error  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ . De la mateixa manera, observem que la pertorbació en un pas, 4.3.12, és  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ . A continuació, volem veure quin és el canvi en les primeres derivades després d'una etapa del procés en un entorn  $N_p$ . És a dir, volem aproximar l'efecte de totes les pertorbacions associades a cada pas de l'etapa. Per fer-ho, primer notem que el canvi en les primeres derivades associat al pas  $\nu$  és el següent:

$$\left| \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \right| \leq 2\sqrt{a_\nu} \left| \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \right| + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (4.3.15)$$

**Proposició 4.3.6.** *El canvi en les primeres derivades associat a una etapa del procés en un entorn  $N_p$  és*

$$\left| \left( \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \right)_{abans} - \left( \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \right)_{després} \right| \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) + \cdots, \quad (4.3.16)$$

on  $K$  és una constant que depèn només de la dimensió  $n$  de la varietat i les diferents  $\lambda_\nu$  són els paràmetres de les pertorbacions.

*Prova.* Considerem l'element  $i$  de la diagonal de les matrius de 4.3.4:

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ii} = \sum_\nu a_\nu \left( \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \right)^2 = \sum_\nu \left( \sqrt{a_\nu} \left| \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \right| \right)^2.$$

Recordem de la prova del lema 4.3.4 que hi ha com a molt  $M = W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$  coeficients no nuls del sumatori, on  $W$  és una constant que només depèn de la dimensió  $n$  de la varietat. Així doncs, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_\nu \sqrt{a_\nu} \left| \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \right| \leq \left( M \frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ii} \right)^{\frac{1}{2}} \leq (K\varphi_p\beta_{ii})^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(K\beta_{ii})}.$$

Combinant aquest resultat amb 4.3.15, obtenim que el canvi en les primeres derivades associat a una etapa del procés en un entorn  $N_p$  és

$$\left| \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \right| \leq \sqrt{K\beta_{ii}} + O\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) + \cdots.$$

□

### 4.3.2 Convergència dels passos en una etapa

He de mirar si realment aquest és el títol que toca.

A continuació ens interessa veure quines són les constants  $\{\lambda_\nu\}$  necessàries en les diferents passes d'una etapa per tal que el procés convergeixi tal com desitgem.

**Definició 4.3.7.** *Sigui  $N_p$  un entorn de  $M$ , i considerem el pas  $\nu$  d'una etapa donada.*

- Anomenem  $B_1$  l'error d'ordre  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  màxim permès en l'aproximació del canvi mètric per  $a_\nu \left( \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^j} \right)$  en 4.3.13, per tots els parells  $(i, j)$  i tots els punts de l'entorn  $N_p$ .

- Anomenem  $B_2$  l'error d'ordre  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  màxim permès en l'aproximació del canvi de les primeres derivades en 4.3.15, per tots els punts de l'entorn  $N_p$ .
- Anomenem  $B_3$  la cota superior permesa del canvi  $\bar{z}^\alpha - z^\alpha$  en  $N_p$ .

**Observació 4.3.8.** Es pot trobar una pertorbació que compleixi les condicions anteriors per a qualsevol  $B_1$ ,  $B_2$  i  $B_3$  donats, ja que tots tres disminueixen quan  $\lambda$  augmenta i aquesta pot ser presa arbitràriament gran.

Recordem que l'efecte desitjat després d'una etapa és prendre una mètrica induïda  $h_{ij}$  i trobar-ne una  $h'_{ij}$  que redueixi a la meitat l'error mètric  $\delta_{ij}$ . És a dir, la nova mètrica  $h'_{ij}$  ha de complir

$$h'_{ij} \approx h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad (4.3.17)$$

que també podem escriure com

$$h'_{ij} = g_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}, \quad (4.3.18)$$

on  $e_{ij}$  és el terme de l'error de l'aproximació. Així, la diferència entre la mètrica de la nova immersió i la original és

$$\delta'_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} - e_{ij}. \quad (4.3.19)$$

A continuació, ens volem assegurar que  $\delta'_{ij}$  sigui definit positiu, i que el tensor d'error  $e_{ij}$  sigui prou petit per permetre la convergència del procés.

**Notació 1.** Per un tensor donat  $T_{ij}$  en un entorn  $N_p$ , escrivim  $|T_{ij}|_{N_p}$  per denotar el màxim dels valors absoluts dels components de  $T_{ij}$  en  $N_p$ . Aquesta és una bona aproximació de la mida del tensor  $T_{ij}$  en  $N_p$ . *Cal mirar si hi ha una millor notació*

**Proposició 4.3.9.** Sigui  $N_p$  un entorn de  $M$ . En una etapa donada del procés, existeix una successió  $\{B_{1\nu}\}_\nu$ , on  $B_{1\nu}$  és el  $B_1$  de la definició 4.3.2 al pas  $\nu$ , tal que, després de fer tots els passos en  $N_p$

- $\delta'_{ij}$  és definit positiu en  $N_p$ .
- $e_{ij}$  és prou petit per assegurar que el procés convergeix després de fer totes les etapes.
- La convergència és tal que la mida de  $\delta'_{ij}$  és aproximadament  $2/3$  de la mida de  $\delta_{ij}$  després de cada etapa. *No m'agrada gaire com està descrita aquesta proposició*

**Observació 4.3.10.** Aquest resultat confirma que el procés convergeix, de tal manera que la immersió resultant després de realitzar totes les etapes és isomètrica. *Potser seria més correcte dir que la mètrica resultant és isomètrica, però encara no sabem si la immersió convergeix correctament.*

*Prova.* En  $N_p$ , sempre es pot trobar una constant real  $\varepsilon_p > 0$  tal que, si imposem

$$|e_{ij}|_{N_p} \leq \varepsilon_p, \quad (4.3.20)$$

aleshores  $\delta'_{ij} = \delta_{ij} - e_{ij}$  és definit positiu.

Si també imposem que, després d'una etapa,

$$\max |e_{ij}|_{N_p} \leq \frac{1}{6} \min |\delta_{ij}|_{N_p}, \quad (4.3.21)$$

podem prendre 4.3.19 i veure que

$$\begin{aligned} \max |\delta'_{ij}|_{N_p} &= \max \left| \frac{1}{2}\delta_{ij} - e_{ij} \right|_{N_p} \leq \max \left| \frac{1}{2}\delta_{ij} \right|_{N_p} + \max |e_{ij}|_{N_p} \\ &\leq \frac{1}{2} \max |\delta_{ij}|_{N_p} + \frac{1}{6} \min |\delta_{ij}|_{N_p} \leq \frac{2}{3} \max |\delta_{ij}|_{N_p}. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Amb això queda demostrat que es pot escollir  $e_{ij}$  tal que la mida de  $\delta'_{ij}$  és aproximadament  $2/3$  de la mida de  $\delta_{ij}$  després de cada etapa. Així, és clar que la diferència entre la mètrica de la immersió i  $g_{ij}$  convergeix a 0 en el límit.

Hem obtingut dues restriccions a la mida de  $e_{ij}$  que cal complir, 4.3.20 i 4.3.21. Ara cal relacionar-les amb les passes de l'etapa, per tal d'obtenir la successió  $\{B_{1\nu}\}_\nu$  desitjada.

Primer de tot, recordem que els entorns  $N_p$  poden intersecar amb altres entorns  $N_q$ . Així, els canvis que fem en  $N_p$  poden afectar a  $N_q$ . Afortunadament, el nombre d'entorns que intersequen cada  $N_p$  és finit. Si  $N_p$  interseca amb  $\sigma$  entorns  $N_q$ , incloent  $N_p$  mateix, aleshores podem prendre les restriccions de  $N_p$ , dividir-les per  $\sigma$ , i imposar-les a tots els  $N_q$ . Sigui  $\varepsilon_p^*$  el mínim de totes aquestes restriccions sobre l'error de  $N_p$ .

Notem que hi ha dues fonts de l'error en  $N_p$ : el primer és l'aproximació preliminar de  $\delta_{ij}$  pel tensor  $\beta_{ij}$ , i el segon és l'error acumulat per les passes individuals. Per tant, imposant  $|\delta_{ij} - \beta_{ij}|_{N_p} \leq \varepsilon_p^*$  obtenim

$$\left| \frac{1}{2} \varphi_p \delta_{ij} - \frac{1}{2} \varphi_p \beta_{ij} \right|_{N_p} \leq \frac{1}{2} \varepsilon_p^*. \quad (4.3.23)$$

Ens resta  $\frac{1}{2} \varepsilon_p^*$  per a l'error de les passes individuals, que podem assignar de la següent manera:

$$B_{1\nu} \leq \frac{1}{2^{\nu+1}} \varepsilon_p^*. \quad (4.3.24)$$

De manera que l'error total obtingut sumant 4.3.23 i 4.3.24 és menor que

$$\frac{1}{2} \varepsilon_p^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}} \varepsilon_p^* = \varepsilon_p^*.$$

Així, obtenim la successió  $\{B_{1\nu}\}_\nu$  desitjada. □

### Realitzabilitat dels passos

Per tal que els passos siguin realitzables, només cal tenir una immersió  $C^\infty$ . Això és cert sempre que la mètrica induïda sigui definida positiva i les immersions siguin  $C^\infty$ . Totes les funcions utilitzades en el procés són  $C^\infty$ , de manera que només cal veure que la mètrica induïda és definida positiva.

Procedim per inducció. Suposem que cada pas pas pren una immersió que produeix una mètrica induïda definida positiva, i augmenta la mètrica induïda en  $a_\nu \left( \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^j} \right)$ . Així, la mètrica induïda és definida positiva. Aquest augment és un tensor no-negatiu, i l'error és  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ , de manera que per una  $\lambda$  prou gran, ens podem assegurar que la mètrica induïda és definida positiva.

### 4.3.3 Organització general

Aquest apartat haurem de mirar de moure'l a un lloc més adequat, potser.

- El procés es divideix en una sèrie **d'etapes**. Cada una d'elles és igual que la resta, però la primera necessita una immersió  $f$  de classe  $C^\infty$  curta. Després de cada etapa, la nova immersió segueix sent  $C^\infty$  i curta, però l'error mètric és aproximadament  $2/3$  de l'error de la immersió de l'etapa anterior.
- S'escull un recobriment localment finit de  $M$  per conjunts tancats  $N_p$ . És a dir, tal que cada punt de  $M$  pertany a, com a molt, un nombre finit de conjunts  $N_p$ .

- Cada etapa es divideix en un nombre finit de **passos**. Primer, la correcció es divideix entre tots els conjunts  $N_p$  amb unes funcions pes  $\varphi_p$ . Aleshores es divideix la correcció de cada  $N_p$  en un nombre finit de passos, 4.3.4
- Els passos s'han de realitzar un rere l'altre. L'ordre concret no importa, però s'ha d'escollir un ordre i seguir-lo. En varietats obertes, el nombre de passes és infinit, però en cada entorn compacte el nombre de passos és finit.

#### 4.3.4 Convergència de la immersió

Per la Proposició 4.3.9, sabem que la mètrica resultant del procés en el límit és la mètrica intrínseca de la varietat, com volíem. Ara bé, encara no hem demostrat que convergeixi en una immersió  $C^1$ . El primer que cal assegurar és que el resultat en el límit és, efectivament, una immersió. Amb aquest fi, podem imposar que en el pas  $r$  de l'etapa  $s$  del procés, el corresponent  $B_3$  estigui fitat per

$$B_3 \leq \frac{1}{2^{(s+r)}}, \quad (4.3.25)$$

de manera que la successió dels  $B_3$  sigui més petita que una successió convergent.

Imposant les mateixes fites per la successió de  $B_2$ ,

$$B_2 \leq \frac{1}{2^{(s+r)}}, \quad (4.3.26)$$

controlems els termes d'error d'ordre  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  de l'equació 4.3.16. Ara bé, per tal que les primeres derivades convergeixin al final del procés, cal que el terme irreductible  $2\sqrt{K\beta_{ii}}$  també convergeixi.

**Proposició 4.3.11.** *La sèrie formada per la successió  $\{2\sqrt{K\beta_{ii}}\}_\nu$  convergeix per cada  $i$  i uniformement en cada entorn  $N_p$ .*

*Prova.*  $K$  és una constant que només depèn de la dimensió  $n$  de la varietat, de manera que només ens hem d'ocupar de  $\beta_{ii}$ . El tensor  $\beta_{ij}$  aproxima l'error mètric  $\delta_{ij}$ , que es redueix per un factor  $1/3$  o major després de cada etapa, com hem vist a la desigualtat 4.3.22 Nash diu que això és després de cada pas, em fa pal ara mirar com és.. Cal veure que  $\beta_{ij}$  decreix de manera similar. Podem imposar que  $\beta_{ij}$  sigui prou proper a  $\delta_{ij}$  tal que

$$\frac{9}{10} \leq \frac{\max |\beta_{ij}|_{N_p}}{\max |\delta_{ij}|_{N_p}} \leq \frac{9}{8}. \quad (4.3.27)$$

Aleshores,

$$|\beta'_{ij}|_{N_p} \leq \frac{9}{8} |\delta'_{ij}|_{N_p} \leq \frac{9}{8} \frac{2}{3} |\delta_{ij}|_{N_p} \leq \frac{9}{8} \frac{2}{3} \frac{10}{9} |\beta_{ij}|_{N_p} = \frac{5}{6} |\beta_{ij}|_{N_p}. \quad (4.3.28)$$

Així, el terme  $\beta_{ii}$  decreix per un factor  $5/6$  o major després de cada etapa. Per tant, la sèrie formada per la successió  $\{2\sqrt{K\beta_{ii}}\}_\nu$  convergeix com una geomètrica de raó  $\sqrt{5/6}$ .  $\square$

**Observació 4.3.12.** La conseqüència d'això és que, en el límit, la immersió  $f$  és  $C^1$ , com volíem demostrar.

#### 4.3.5 Encabiments isomètrics

Fins ara hem estat tractant el cas de les immersions, per les quals no hi ha restricció pel que fa a les interseccions amb elles mateixes. Ara bé, per demostrar que el procés descrit per Nash també aplica als encabiments, que han de ser injectius, cal comprovar que les immersions resultants també ho són.

**Notació 2.** Sigui  $M$  una varietat oberta i  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encabiment. Anomenem **frontera de l'encabiment** al conjunt  $\partial f(M) = \overline{f(M)} \setminus f(M)$ . *Ho deixo indicat perquè no sé si aquest és el terme estàndard, però no m'agrada com l'anomena el Nash.*

La demostració per encabiments és la mateixa que per immersions generals, però l'aplicació  $f$  de la que partim ha de ser un encabiment. Si la varietat és oberta, demanem també que la frontera de l'encabiment, si existeix, no intersequi la imatge de l'encabiment. Un cop es té aquest primer encabiment curt, la única consideració addicional és que s'ha de controlar la mida de l'encabiment  $|\bar{z}^\alpha - z^\alpha|$  en cada pas.

Ens haurem de fixar primer en què cada pas es pugui fer sense que el nou encabiment intersequi amb si mateix, i després en què l'encabiment resultant en el límit del procés sigui injectiu.

**Observació 4.3.13.** Si la varietat és oberta, l'elecció de  $B_3$  a 4.3.25 assegura que la frontera de l'encabiment roman fix durant tot el procés.

**Proposició 4.3.14.** *En qualsevol pas d'una etapa i en qualsevol entorn  $N_p$  de la frontera de l'encabiment, es pot escollir una  $\lambda$  prou gran tal que el pas no produeixi interseccions de l'encabiment amb si mateix ni amb la frontera de l'encabiment.*

*Prova.* Sigui  $K$  un component compacte de l'encabiment que inclogui  $N_p$  al seu interior.  $K$ , al seu torn, està inclòs en un entorn obert  $H$  tan proper a  $K$  tal que per qualsevol punt  $P$  en  $H$  no pot tenir dues perpendiculars a  $K$  en  $H$ . Això és el que vam parlar amb l'Ignasi. Podríem mirar si cal posar una demostració o un dibuixet o algo.

Sigui  $Q$  la unió de la frontera de l'encabiment i la part de l'encabiment que no està inclòs en  $K$ . Com  $Q$  és un conjunt tancat, una pertorbació prou petita no pot interseccionar  $Q$ . A més, com la pertorbació és normal a l'encabiment, estarà dins de  $H$  i els punts de  $K$  no es podran interseccionar. Així doncs, el pas no produeix interseccions de l'encabiment amb si mateix ni amb la frontera de l'encabiment.  $\square$

Amb aquest resultat, obtenim per inducció que en qualsevol nombre finit de passos del procés, l'encabiment no produeix interseccions amb si mateix ni amb la frontera de l'encabiment. Això no assegura que el límit del procés sigui injectiu després d'infinits passos, sinó que cal considerar això a part.

**Proposició 4.3.15.** *Es pot escollir una successió dels  $B_3$  tal que el límit del procés sigui injectiu, és a dir, tal que la immersió resultant sigui un encabiment.*

*Prova.* Considerem una enumeració dels  $N_p$  qualsevol. Sigui  $S_r$  el conjunt de tots els parells de punts dels primers  $r$  entorns tals que estaven separats per una distància major que  $2^{-r}$  en l'encabiment curt original. Qualsevol parell de punts pertany a  $S_r$  per algun  $r$ . A partir de l'etapa  $r$  requerirem que el  $B_3$  de l'etapa  $\mu \leq r$  i el pas  $\nu$  sigui més petit que  $\varepsilon_r 2^{-\mu-\nu}$ , on  $\varepsilon_r$  s'escull prou petit per assegurar que cap parell de punts pugui ajuntar-se al límit. D'aquesta manera, tots els parells de punts queden protegits en el límit, i la immersió resultant és un encabiment.  $\square$

#### 4.3.6 Obtenint la immersió o l'encabiment inicial

Amb tot el que hem demostrat fins aquí, ja hem vist que per qualsevol immersió o encabiment curt inicial  $C^\infty$ , es pot trobar una immersió o encabiment  $C^1$  isomètric de la varietat en un espai euclidià. Només queda veure que es pot trobar aquesta immersió o aquest encabiment inicial. En aquesta subsecció expliquem el procés per obtenir-lo.

En el cas d'una varietat tancada, podem obtenir l'encabiment inicial en  $\mathbb{R}^{2n}$  mitjançant el teorema de Whitney. *Haurem de mirar d'explicar-lo.* Per fer-lo curt, es pot

canviar l'escala de l'espai euclidià.

En el cas d'una varietat oberta, s'escull un recobriment per tancats  $N_p$  i unes funcions  $\varphi_p$  de classe  $C^\infty$  que sumin 1 en qualsevol punt, com abans, i denotem  $x_{pi}$  per la coordenada  $i$ -èssima de  $N_p$ . Suposem  $|x_{pi}| < 1$  per a qualsevol  $i$  i  $p$ . A més, imposem que cada  $N_p$  interseca com a molt amb  $s$  d'aquests conjunts, incloent-hi el mateix  $N_p$ . A continuació, separem els conjunts en  $s$  classes, tals que cap conjunt té intersecció amb un altre de la mateixa classe.

Construïm un encabiment en un espai  $s(n+2)$ -dimensional  $E^{s(n+2)}$  amb les següents funcions:

$$u_\sigma = \begin{cases} \varepsilon_p \varphi_p & \text{en entorns } N_p \text{ de la classe } \sigma \\ 0 & \text{en la resta d'entorns} \end{cases} \quad (4.3.29)$$

$$v_\sigma = \begin{cases} \varepsilon_p^2 \varphi_p & \text{en entorns } N_p \text{ de la classe } \sigma \\ 0 & \text{en la resta d'entorns} \end{cases} \quad (4.3.30)$$

$$w_{\sigma i} = \begin{cases} \varepsilon_p \varphi_p x_{pi} & \text{en entorns } N_p \text{ de la classe } \sigma \\ 0 & \text{en la resta d'entorns} \end{cases} \quad (4.3.31)$$

on  $\varepsilon_p$  formen part d'una successió monòtona decreixent i convergent a 0. Qualsevol parell de punts de la varietat en entorns diferents es pot distingir per tenir diferents conjunts de raons  $u_\sigma/v_\sigma$ , i qualsevol parell de punts en el mateix entorn es pot distingir pels  $w_{\sigma i}$  corresponents. A més, la frontera de l'encabiment és l'origen de coordenades.

Per últim, aquesta immersió es pot fer curta escollint els  $\varepsilon_p$  tal que, si la immersió amb els  $p$  primers entorns és curta per un factor  $\frac{1}{3}(2 - 1/p)$  o més gran, prenem  $\varepsilon_{p+1}$  prou petit perquè la immersió amb  $p+1$  primers entorns sigui curta per un factor  $\frac{1}{3}(2 - 1/(p+1))$  o més gran.

Amb això obtenim un encabiment curt de classe  $C^\infty$  de la varietat en un espai  $s(n+2)$ -dimensional. Mitjançant projeccions lineals, podem rebaixar la dimensió de l'espai de l'encabiment fins a  $2n+1$ , i fins a  $2n$  per a immersions.

## 4.4 El refinament de Kuiper



## Capítol 5

# Encabiments isomètrics del tor pla

La idea d'aquest capítol és la següent:

- Recordar que el tor pla no es podia encabir isomètricament en l'espai euclidià tridimensional de manera suau, pel tema del punt el·líptic.
- Explicar com el teorema de Nash ens permet fer-ho de manera  $C^1$ .

### 5.1 Introducció al capítol

Havent enunciat i demostrat el teorema de Nash-Kuiper?, veurem un encabiment isomètric del tor pla en l'espai euclidià tridimensional. L'elaboració d'aquest encabiment va ser realitzat per Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus i Boris Thibert i publicada l'any 2013. La cita principal d'aquest capítol és Borrelli et al. (2013). **En aquest capítol no donem, en general, les demostracions de lemes i sublemes, que es troben en Borrelli et al. (2013). En canvi, donem les demostracions dels teoremes i proposicions més importants.**

RESUM DEL QUE VEUREM!!!

També podem parlar del fet que fins aquest moment no havíem visualitzat cap encabiment isomètric d'aquesta mena, i que han aconseguit fer-ho per primera vegada. També podem mencionar que ho han fet per altres encabiments com l'esfera reduïda i el pla projectiu.

Hem de revisar el que hi ha escrit aquí i anar-ho relacionant amb el que hem vist al Teorema de Nash. Per exemple, com el nombre  $N$  es relaciona amb la  $\lambda$ .

### 5.2 Integració convexa

Aquí s'explica el que es necessita sobre integració convexa per tal de poder fer aquest encabiment isomètric.

#### 5.2.1 Integració convexa 1D

**Definició 5.2.1.** Per cada  $x \in I := [0, 1]$ , sigui  $\mathcal{R}_x$  un conjunt de vectors en  $\mathbb{R}^n$ . Anomenem **relació diferencial** a la unió  $\mathcal{R} := \bigcup_{x \in I} \mathcal{R}_x$ . Anomenem **solució de  $\mathcal{R}$**  a una corba  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tal que  $f'(x) \in \mathcal{R}_x$  per a tot  $x \in I$ .

El mètode d'Integració Convexa ens permetrà trobar solucions de relacions diferencials arbitràriament properes a corbes  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  qualssevol. Per a això necessitarem una família de **voltes**  $h(x, \cdot) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}_x$  tals que

$$f'(x) = \int_0^1 h(x, u) du, \quad (5.2.1)$$

és a dir, tals que la derivada  $f'(x)$  és la mitjana de la volta  $h(x, \cdot)$  sobre el cercle unitat. Si aquestes voltes existeixen, el següent que voldrem és definir la **integral convexa** de  $h$  com la solució  $f$  de la relació diferencial

$$F(t) := f(0) + \int_0^t h(x, \{Nx\}) dx,$$

on  $\{Nx\}$  és la part fraccionària ([fraccionaria?](#) [fraccional?](#) [decimal?](#)) de  $x$ . Intuïtivament,  $F$  s'obté integrant  $h$  sobre una corba de període  $1/N$ , de tal manera que per  $N$  molt gran, cada període és proper a una volta concreta  $h(x, \cdot)$ , i per tant la seva integral és propera a  $f'(x)$ . L'efecte acumulat de les  $N$  voltes és proper a  $f(t)$ . Aquest fet s'expressa en el lema següent.

**Lema 5.2.2.** *Siguin  $f$ ,  $h$ ,  $N$  i  $F$  com hem definit més amunt. Aleshores,  $F$  és solució de la relació diferencial  $\mathcal{R}$  i*

$$\|F - f\|_\infty \leq \frac{K(h)}{N}, \quad (5.2.2)$$

on  $K(h)$  només depèn de  $\|h\|_{C^1}$ .

[Podem mirar de moure aquesta part més amunt, de manera que sigui evident com s'escullen les voltes.](#)

En el nostre cas, les relacions diferencials  $\mathcal{R}_s$  seran esferes de radi  $r(s) > 0$ , tal que la relació diferencial restringeix la mida de la derivada  $f'$ . En concret, tindrem corbes  $f$  que seran curtes si i només si  $\|f'(s)\| \leq r(s)$ .

Suposant que  $f'$  mai s'anul·la, podem definir  $\vec{n} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  un vector normal a  $f'$  i  $\vec{t}(s) := f'(s)/\|f'(s)\|$ . Podem fer ús d'aquests vectors per definir les voltes  $h(s, \cdot)$  de la següent manera:

$$h(s, u) = r(s)(\cos(\alpha_s \cos(2\pi u))\vec{t}(s) + \sin(\alpha_s \sin(2\pi u))\vec{n}(s)), \quad (5.2.3)$$

on  $\alpha_s := J_0^{-1}(\|f'(s)\|/r(s))$ , on  $J_0$  és la funció de Bessel de primer tipus i d'ordre 0. Per la propietat

$$J_0(x) = \int_0^1 \cos(x \cos(2\pi u)) du, \quad (5.2.4)$$

es verifica la condició 5.2.1.

### 5.3 Integració convexa 2D: el cas primitiu

Havent vist com es troba un encabiment isomètric mitjançant Integració Convexa en el cas 1D, ara veurem com es pot fer en el cas 2D. Intuïtivament, considerarem la superfície resultant d'un encabiment com una família de corbes unidimensionals, per tal de poder aplicar el resultat del lema 5.2.2.

Considerem el problema que volem resoldre, és a dir, trobar un encabiment isomètric d'un tor  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  amb una mètrica  $\mu$  en l'espai euclidià tridimensional. Com hem fet

en la demostració del teorema de Nash al capítol anterior, partirem d'un encabiment inicial no isomètric  $f : (\mathbb{T}^2, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de classe  $C^\infty$ . Abans de considerar el cas més general, però, partirem primer de la suposició que la diferència entre la mètrica  $\mu$  i el *pullback* de la mètrica euclidiana per  $f$  és una mètrica primitiva, és a dir:

$$\mu = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle + \rho \ell \otimes \ell, \quad (5.3.1)$$

on  $\rho : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  i  $\ell$  una forma lineal que identifica plans tangents de  $\mathbb{T}^2$  amb  $\mathbb{R}^2$ .

Sigui  $V \in \ker(\ell)$  un vector amb coordenades enteres coprimeres. Aleshores, la corba  $f_V$  donada per

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ t &\mapsto [O + tV], \end{aligned}$$

és tancada i simple en  $\mathbb{T}^2$ . Per tant, podem tallar el tor per aquesta corba i obtenir un cilindre, que anomenarem  $\mathcal{C}il$ . Sigui  $U$  el vector tal que  $(U, V)$  és una base directa ortogonal i  $\|U\| \cdot \|V\| = 1$ . De fet, si anomenem  $O$  a l'origen de  $\mathbb{R}^2$ , aleshores el rectangle format per  $O, O + U, O + U + V, O + V$  és un domini fonamental de  $\mathbb{T}^2$ , i podem escriure

$$\mathcal{C}il = \{O + tV + sU : (t, s) \in [0, 1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})\}. \quad (5.3.2)$$

A més, canviem l'escala tal que  $\ell(U) = \|U\|$ .

### 5.3.1 Integració convexa del cilindre $\mathcal{C}il$

Per tal de poder aplicar el lema 5.2.2, no és prou amb prendre una família de corbes unidimensionals qualssevol, com

$$\begin{aligned} \phi_t : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ s &\mapsto [O + tV + sU], \end{aligned}$$

sinó que haurà de ser una mica més elaborat.

En concret, definim

$$W = U + \zeta V, \text{ on } \zeta = -\frac{\mu(U, V)}{\mu(V, V)} = -\frac{\langle U \cdot f, V \cdot f \rangle}{\langle V \cdot f, V \cdot f \rangle} \quad (5.3.3)$$

i  $X \cdot f = df(X)$  denota la derivada de  $f$  al llarg de  $X$ . Observem que, amb aquesta definició,  $\mu(W, V) = 0$ . Ara podem definir la família de corbes  $\varphi(t, \cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}il$  tals que

$$\varphi(t, 0) = O + tV, \text{ i } \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) = W(\varphi(t, s)). \quad (5.3.4)$$

Resolent l'equació diferencial, obtenim

$$\varphi(t, s) = O + sU + \psi(t, s)V. \quad (5.3.5)$$

per alguna funció  $\psi : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  amb  $\psi(t, 0) = t$ . En particular,  $\varphi(t, \cdot)$  connecta  $O + tV$  i  $O + U + \psi(t, 1)V$ . Així,  $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}il$  és un difeomorfisme. A més,

$$\ell \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0, \text{ i } \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s}, W \right) = 0. \quad (5.3.6)$$

Voldrem aplicar integració convexa a cada corba  $f \circ \varphi(t, \cdot)$ . Per fer-ho, considerem ara les voltes  $h(t, s, u)$  donades per

$$h(t, s, u) = \bar{h}(\varphi(t, s), \cos(2\pi u)) \quad (5.3.7)$$

on

$$\bar{h}(p, c) = r(p) \left( \cos(\alpha(p)c) \vec{t}(p) + \sin(\alpha(p)c) \vec{n}(p) \right),$$

amb  $r := \sqrt{\mu(W, W)}$ ,  $\vec{t} := \frac{W \cdot f}{\|W \cdot f\|}$ ,  $\vec{n} := \frac{W \cdot f \times V \cdot f}{\|W \cdot f \times V \cdot f\|}$  i  $\alpha := J_0^{-1}(\|W \cdot f\|/r)$ .

Si ara escrivim

$$(W \cdot f)(\varphi(t, s)) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial s}(t, s) = \int_0^1 h(t, s, u) du,$$

obtenim l'aplicació suau  $F : (Cil, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  amb

$$F \circ \varphi(t, s) := f(O + tV) + \int_0^s h(t, u, \{Nu\}) du. \quad (5.3.8)$$

A continuació, enunciem alguns lemes que caracteritzaran la diferència entre  $F$  i  $f$  i les seves derivades.

**Lema 5.3.1.** *Siguin  $f$ ,  $h$ ,  $N$  i  $F$  com hem definit més amunt. Aleshores,*

$$\|F - f\|_\infty \leq \frac{K(h)}{N},$$

on  $K(h)$  només depèn de  $\|h\|_{C^1}$ .

**Lema 5.3.2.** *Siguin  $f$ ,  $h$ ,  $N$  i  $F$  com hem definit més amunt. Aleshores,*

$$\left\| \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial t} - \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t} \right\|_\infty \leq \frac{K(h)}{N},$$

on  $K(h)$  només depèn de  $\|h\|_{C^2}$ .

**Lema 5.3.3.** *Siguin  $f$  i  $F$  com hem definit més amunt i  $\mu = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle + \rho \ell \otimes \ell$ . Aleshores,*

$$\|W \cdot F - W \cdot f\|_\infty \leq \sqrt{7} \cdot \|U\| \cdot \|\rho\|_\infty^{1/2}.$$

**Lema 5.3.4.** *SI AQUEST LEMA NO ES FA SERVIR ENS EL CARREGUEM* Es verifica

$$1 + J_0^2(\alpha) - 2J_0(\alpha) \cos(\alpha) \leq 7(1 - J_0^2(\alpha)).$$

per tot  $\alpha \in [0, z]$ , on  $z$  és el primer zero de  $J_0$ .

**Lema 5.3.5.**

$$\|dF - df\|_\infty \leq \sqrt{7} \|\rho\|_\infty^{1/2} + \frac{K(\zeta, \psi, h)}{N}$$

on  $K(\zeta, \psi, h)$  només depèn de  $\|\zeta\|_\infty$ , de  $\left\| \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \right\|_\infty$  i  $\|h\|_{C^2}$ .

**Lema 5.3.6.**

$$\|\mu - F^*\langle \cdot, \cdot \rangle\|_\infty \leq \frac{K(f \circ \varphi, h)}{N} \|d\varphi^{-1}\|_\infty^2,$$

on  $K(f \circ \varphi, h)$  només depèn de  $\left\| \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t} \right\|_\infty$  i de  $\|h\|_{C^2}$ .

**Observació 5.3.7.** Aquí podríem donar unes interpretacions d'aquests lemes, comparant-los amb els del teorema de Nash.

### 5.3.2 Integració convexa del tor $\mathbb{T}^2$

Amb la integració convexa del cilindre, hem obtingut una aplicació  $F : (\mathcal{C}il, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gairebé isomètrica i  $C_0$ -propera a l'aplicació induïda sobre  $\mathcal{C}il$  per  $f : (\mathbb{T}^2, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Ara bé, les imatges de les dues corbes que defineixen la frontera del cilindre no coincideixen necessàriament. Per tant, el nostre objectiu serà deformar  $F$  de tal manera que coincideixin, tal que sigui possible prendre el quocient d'aquesta nova aplicació per a obtenir un encabiment isomètric del tor.

Definim una nova aplicació  $\bar{F}$  tal que

$$\bar{F} \circ \varphi(t, s) := F \circ \varphi(t, s) - w(s)(F \circ \varphi(t, 1) - f \circ \varphi(t, 1)), \quad (5.3.9)$$

on  $w : I \rightarrow I$  és una funció  $C^\infty$  tal que

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1 \text{ i } w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0.$$

**Lema 5.3.8.** *Si  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $w : I \rightarrow I$  són de classe  $C^\infty$ , aleshores  $\bar{F}$  és de classe  $C^\infty$  com a aplicació de  $\mathbb{T}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ .*

Podem reunir tots aquests resultats en el teorema següent.

**Teorema 5.3.9** (One Step Theorem). *Sigui  $f : (\mathbb{T}^2, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un encabiment de classe  $C^\infty$  tal que  $\mu = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle + \rho \ell \otimes \ell$  i  $\rho \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ . Aleshores,*

1.  $\|\bar{F} - f\|_\infty \leq \frac{K_1(h)}{N}$  i  $\|\bar{F} - f\|_\infty \leq 2\sqrt{7}\|U\| \cdot \|\rho\|_\infty^{1/2}$ ,
2.  $\|d\bar{F} - df\|_\infty \leq \frac{K_2(h, \zeta, \psi, w')}{N} + \sqrt{7}\|\rho\|_\infty^{1/2}$ ,
3.  $\|V \cdot \bar{F} - V \cdot f\|_\infty \leq \frac{K_3(h, \psi)}{N}$ ,
4.  $\|W \cdot \bar{F} - W \cdot f\|_\infty \leq \sqrt{7}\|U\|(1 + \|w'\|_\infty)\|\rho\|_\infty^{1/2}$ , i
5.  $\|\mu - \bar{F}^* \langle \cdot, \cdot \rangle\|_\infty \leq \frac{K_4(f \circ \varphi, r, h, w', \varphi^{-1})}{N}$ .

on

- $K_1(h)$  només depèn de  $\|h\|_{C^1}$ .
- $K_2(h, \zeta, \psi, w')$  només depèn de  $\|\zeta\|_\infty$ , de  $\left\| \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \right\|_\infty$ , de  $\|w'\|_\infty$  i de  $\|h\|_{C^2}$ .
- $K_3(h, \psi)$  només depèn de  $\left\| \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \right\|_\infty$  i de  $\|h\|_{C^2}$ .
- $K_4(f \circ \varphi, r, h, w', \varphi^{-1})$  només depèn de  $\left\| \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t} \right\|_\infty$ , de  $\|w'\|_\infty$ , de  $\|r\|_\infty$ , de  $\|d\varphi^{-1}\|_\infty$  i de  $\|h\|_{C^2}$ .

**Notació 3.** Anomenarem

$$IC(f, \mu, N) := \bar{F}$$

l'aplicació obtinguda amb un pas d'integració convexa de l'aplicació  $f$ , la mètrica  $\mu$  i el nombre d'oscil·lació  $N$ .

*Prova.* Aquí posaríem la prova si veiem que tenim espai.

## 5.4 Encabiment isomètric del tor pla

Per algun motiu, aquí canvien la mètrica de  $\mu$  a  $g$ . Si veiem que no hi ha cap motiu, ho podem canviar.

A la secció anterior ens hem fixat en el cas primitiu, de manera que podem construir una aplicació gairebé isomètrica  $\bar{f} : (\mathbb{T}^2, g) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  a partir d'una immersió  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  quan

$$g - f^*\langle \cdot, \cdot \rangle = \rho \ell \otimes \ell.$$

A continuació, prendrem aquests mètode i el generalitzarem al cas en què el defecte isomètric (*isometric default*)

$$D := g - f^*\langle \cdot, \cdot \rangle$$

és una mètrica. Aquest és el cas si i només si la immersió  $f$  és estrictament curta. Per tal d'aplicar els resultats anteriors, haurem de descompondre aquest defecte isomètric en una suma de mètriques primitives. Observem que el conjunt de productes interiors en  $\mathbb{R}^2$  és un con convex

$$Q_+ = \{E dx \otimes dx + F(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + G dy \otimes dy : EG - F^2 > 0, F > 0, G > 0\},$$

estas segur de que aquest  $F > 0$  és correcte? potser és  $E$ . Aleshores, d'una manera anàloga a la que hem vist a la demostració de l'equació 4.3.4 al capítol anterior, podem trobar una descomposició del defecte isomètric

$$D = \sum_{j=1}^N \rho_j(D) \ell_j \otimes \ell_j,$$

on  $N$  és un enter i les  $\ell_j$  es defineixen per entorns. El procés d'integració convexa que es presenta aquí aconsegueix trobar tres formes lineals  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  que funcionen a un nivell global, de manera que  $N$  es redueix a 3. En concret, suposarem que la immersió  $f$  és tal que el defecte isomètric pertany al con obert

Rellegir això perquè ho he fet al bus i no m'he concentrat molt.

$$\mathcal{C} := \{\rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3 : \rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0\},$$

on  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  són formes lineals en  $\mathbb{R}^2$  donades per

$$\ell_1 := dx, \ell_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(dx + 2dy) \text{ i } \ell_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}(dx - 2dy).$$

Per reduir els tres coeficients del defecte isomètric, farem tres integracions convexes **PASSOS?** successives. És a dir, prendrem primer

$$\mu_1 = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle + \rho_1(D_1) \ell_1 \otimes \ell_1,$$

amb  $D_1 := D$  i construirem  $f_1 := IC(f, \mu_1, N_1)$ . Després, prendrem el nou defecte isomètric  $D_2 := g - f_1^*\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}$  i la mètrica

$$\mu_2 = f_1^*\langle \cdot, \cdot \rangle + \rho_2(D_2) \ell_2 \otimes \ell_2,$$

per obtenir  $f_2 := IC(f_1, \mu_2, N_2)$ . Finalment, prendrem el nou defecte isomètric  $D_3 := g - f_2^*\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}$  i la mètrica

$$\mu_3 = f_2^*\langle \cdot, \cdot \rangle + \rho_3(D_3) \ell_3 \otimes \ell_3,$$

per obtenir  $f_3 := IC(f_2, \mu_3, N_3)$ . Per tal que aquests tres passos d'integració convexa resultin en un encabiment isomètric, tal com volem, haurem de veure que podem triar

les constants  $N_1, N_2, N_3$  prou grans tal que, després de la  $i$ -èssima integració convexa, el component  $\rho_i$  del nou defecte isomètric sigui proper a zero, mentre la resta romanen aproximadament iguals.

Per tal d'obtenir un encabiment isomètric, no és prou amb triar  $N_1, N_2, N_3$  prou grans, sinó que caldrà repetir el procés sencer indefinidament. La realització d'aquests tres passos s'anomena, com en la demostració dels teoremes de Nash, una **etapa** (*stage*). Al final de cadascuna obtenim un encabiment  $\mathcal{F}_k$  amb una mètrica  $g_k$  que és cada vegada més propera a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Anomenem a l'encabiment obtingut després de l'etapa  $k$ -èssima

$$\mathcal{F}_k := IC(\mathcal{F}_{k-1}, g_k, N_{k,1}, N_{k,2}, N_{k,3}),$$

on  $\mathcal{F}_0 := f$ . En cada etapa, ens haurem de preocupar de que el defecte isomètric  $D_k := g - f_{k-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle$  pertanyi al con convex  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 5.4.1** (Stage Theorem). *Siguin  $g$  i  $\bar{g}$  dues mètriques Riemannianes sobre  $\mathbb{T}^2$  i sigui*

$$f : (\mathbb{T}^2, g) \rightarrow \mathbb{E}^3$$

*una immersió tal que*

1.  $\bar{g} - g \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$
2.  $g - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$

*Aleshores, existeixen enters  $N_1, N_2, N_3$  tals que l'immersió*

$$\bar{f} := IC(\{, g_k, N_1, N_2, N_3)$$

*satisfà*

1.  $\bar{f}(0,0) = f(0,0)$
2.  $\bar{g} - \bar{f}^* \langle \cdot, \cdot \rangle \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$
3.  $\|\bar{g} - \bar{f}^* \langle \cdot, \cdot \rangle\|_\infty \leq \|\bar{g} - g\|_\infty$
4.  $\|d\bar{f} - df\|_\infty \leq 11\|g - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle\|_\infty^{\frac{1}{2}}$

*Prova.* Aquí posaríem la prova si tenim espai.

## Capítol 6

# Apunts d'integració convexa

El que segueix són apunts del seminari *Convex Integration, Staircase Laminates and Applications* d'en Daniel Faraco, de part de la Universitat Autònoma de Madrid, el dia 17 de març de 2025. BGSMATH2025.

### 6.1 Dia 1

La integració convexa comença amb l'article de Nash sobre les encabiments  $C^1$ . La pregunta era si pots posar una esfera de manera isomètrica en una esfera més petita. Fiques una varietat  $2D$ , l'esfera, en una esfera en  $\mathbb{R}^3$ .

La condició **d'isometria** és que  $Du^T Du = g$ . Nash comença amb una immersió curta i troba una d'isomètrica.

Esculls adequadament les pertorbacions de la immersió i obtens el resultat, com ja sabem. El resultat no és particularment útil, potser, però el mètode concret que fa servir és el que anomenem **integració convexa**, que és molt útil. En general, si hi ha una sèrie de PDE i les dones a través del límit d'unes pertorbacions, donada una subsolució final.

$$u^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} u^N,$$

on  $u^{N+1} - u^N = \omega_q$  i  $\omega_q$  té paràmetres d'oscil·lació i concentració  $\lambda_q$  i  $\tau_q$ , amb direccions  $\eta_k^1 \eta_k^2$ . i funcions oscil·lants  $\phi$ .

Considerarem que les aplicacions curtes són **límits febles**, on els límits febles tals que

$$\int_E u_\gamma \rightarrow \int_E \bar{u}$$

FORMULA 1, són **course grain solutions**. Diu que en aplicacions a PDE, la solució seria “micro” i el límit feble seria “macro”.

Gromov és potser qui comença a desenvolupar aquest mètode de Nash. Altres van veure que això servia en dinàmica de fluids.

**Laminats d'escala** són un mètode inventat pel Faraco per resoldre equacions el·líptiques isotròpiques. Es fan en tres passos:

- (1) Escriure el problema com una inclusió diferencial: trobar un conjunt  $K \subseteq M^{m \times n}$  tal que  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $Du(x) \in K$  a.e.  $x \in \Omega$ , on  $K$  és un conjunt tancat euclidià que representa les dades del problema.



(2) Aproximar la solució per  $K$  per

$$\int \text{dist}_K(Du)^p \leq \varepsilon$$

(3) Combinar moltes solucions aproximades per construir una solució exacta.

Veurem aquí tota una sèrie d'aplicacions.

### Teoria de Calderón Zygmund

Tenint en compte aquestes propietats i definició de la transformada de Fourier, FORMULA 2.

Per Plancherel, FORMULA 3, les derivades estan controlades per la laplaciana en la norma  $L^2$ . Però en  $L^1$  això no és cert:

**Teorema 6.1.1.**  $\forall N, \Omega$  regular  $\exists f_N$  amb  $\int |\partial_{x_1 x_2} f| \geq N$  i  $\sup\{|\partial_{x_1 x_1}|, |\partial_{x_2 x_2}|\} \leq 1$

### Equacions el·líptiques i aplicacions quasiconformes

En electrostàtica, si  $u$  és el potencial elèctric, aleshores

- $\text{div}(\rho \nabla u) = 0$  on  $\rho$  la conductivitat.
- Condició de frontera  $u|_{\partial\Omega} = g$
- Quan  $\rho = 1$ :  $\text{div}(\nabla u) = \Delta u$

El·lipticitat quantitativa:

$$\frac{1}{K} I \leq \rho(x) \leq K I$$

La solució feble en forma distribucional és

$$\int_{\Omega} \rho \nabla u \nabla \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

La manera d'arribar a això és amb la primera variació del funcional d'energia

$$I[u] = \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 \, dx$$

Però hem de veure quin és l'espai en què això té sentit. En general, necessitem  $W^{1,2}(\Omega)$ . La pregunta és si són solucions febles honestes. Hi ha qui les anomena solucions molt febles.

I ara està parlant de coses del BIMR que no arribo a entendre.

## 6.2 Dia 2

Mirarem C-Z en  $L^1$ , equacions el·líptiques, homeomorfismes patològics etc., on el que ens interessa és que els podem escriure  $Df(x) \in E \subseteq M^{m \times n}$ .

El mètode que explicarà serà trobar  $Df(x) \in E \subseteq M^{m \times n}$  tal que hi ha un exponent crític  $p$  a  $(J)$  tal que  $Df \in L^{p,\infty} \subset \cap_{q < p} L^q \setminus L^p$ .

Pel que fa a CZ ens interessa veure que no és vàlid en  $L^1$ . És a dir, que existeix  $u$  tal que  $\int |\partial_{x_1 x_2} u| = \infty$  però  $|\partial_{x_1 x_1}| + |\partial_{x_2 x_2}| \leq 1$ .

Vam deduir l'operador estrella de Hodge,  $\star$ , per equacions el·líptiques. Les derivades conformes i anticonformes es poden escriure com coordenades complexes d'una matriu  $2 \times 2$ .

Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_-, a_+)$ , aleshores  $\partial_{\bar{z}}f = \pm\kappa\bar{\partial}_zf$ . Escrivim  $Df \in E_{\pm\kappa} = \{a_- = \pm\kappa a_+\}$ . Si tenim una matriu conforme i diagonal, aleshores està en una diagonal. El que tenim ara és en dos plans,  $a_- = -\kappa a_+$  i  $a_- = \kappa a_+$ . MIRAR DIBUIX.

### Beltrami no lineals

$\partial_{\bar{z}}f = \mu\partial_zf$ ,  $\partial_{\bar{z}}f = v\bar{\partial}_zf$ ,  $\partial_{\bar{z}}f = \mu\partial_zf + v\bar{\partial}_zf$  es poden posar en una certa forma.

## 6.3 Dia 3

Recordem que el que volem, donat  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , descriure

$$Du(x) \in K \quad \text{a.e. } x \quad (I)$$

Quina és la integrabilitat de  $Du$ ? I volem reformular el problema com:

$$\exists g.d.v_u \text{ tal que ...}$$

## 6.4 Dia 4

Volem, com sempre,  $Du \in K$  tal que  $Du \in L^{p,\infty} \setminus L^p$  per algun  $p$  crític. Això és el mateix que fer una distribució de gradients tq el suport de  $v_u \in K$ ,  $v_u(x : |x| \geq t) \approx t^{-p}$ . Que serà el mateix que construir un laminat d'escala tal que  $v_u \in \mathcal{SL}^p(K)$

Recordem que diem que  $A$  i  $B$  són rang 1 connectades si  $A - B = a \otimes n$  tal que  $\det(A - B) = 0$ . Per tant,  $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\lambda s_A + (1 - \lambda)s_B$  és (aprox) distribució de gradients.

Amb això podem trobar ua funció amb distribució de gradients només un en  $A$  i un en  $B$  (l'espai gradient vius a l'espai de les matrius, generat per  $(10, 00)$  i  $(00, 01)$  ) Aleshores les direccions de rang 1 són les horitzontals i verticals. El centre de masses d'una mesura generada (en horitzontal) per  $A$  i  $B$  està en el segment entre  $A$  i  $B$ .

Les propietats que té la distribució de gradients per tal que funcionin és que siguin afins a trossos amb condicions afins de frontera, que ens fa més fàcil generar laminats. Si tenim  $ABABAB$  haurem de posar a la frontera lateral una regió d'interpolació, i no hi ha problema canviant per exemple  $B$  per  $DEDEDE$  o alguna cosa així. Cada vegada que fem aquest procés, que la massa de  $A$  es divideix entre  $B$  i  $C$  i la de  $B$  entre  $D$  i  $E$ , tenim una altra distribució gradient. Ara bé, amb això només podem fer coses amb matrius connectades rang 1. Ara bé, si no són connectades rang 1 això no funciona. El que hem construït fins ara eren prelaminals, els laminats són els límits de successions de prelaminals a mesura que fem més i més petites les cantonades.

La gran contribució de Tartar és que ser un camp gradient és només que el rotacional sigui 0. Anul·lar el rotacional és com resoldre un sistema d'equacions de primer ordre, per exemple  $\mathcal{L}(z) = A_{ijk}\partial_j z^k$ . Per cada operador diferencial existeix el que anomenem con d'ones  $\Lambda_L$ , el subconjunt de  $\mathbb{R}^n$  tal que si  $I \in \Lambda_L$  aleshores existeix una direcció  $\xi$  tal que per qualsevol  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenim que  $\mathcal{L}(h)$  LHA TRET : (, que generalitza el concepte de connexió de rang 1.

Aquesta teoria no es restringeix només a gradients, sinó també a coses de Fraday blablabla.

Definició de laminat escala: tenim un conjunt  $K \in M^{d \times m}$  on vull que es suporti, i  $A \notin K$ . Aleshores l'esglaió  $n$  serà  $\omega_1 = (1 - \gamma_n)\mu_n + \gamma_n\delta_{A_n}$  i tal, de manera que anem pujant i suportant-nos on toca.

## 6.5 Apunts del paper de Nash del 1954

- Parlar abans de la diferència entre el punt de vista extrínsec i intrínsec de la geometria, un cop haguem parlat de geodif.
- Veurem que una varietat de dimensió  $n$  es pot ficar en un espai  $E^{2n}$ , on aquí diem que  $E^k$  és l'espai euclidià de dimensió  $k$ .
- Interessant que el procés de les correccions sempre augmenta les distàncies localment, motiu pel qual el primer ha de ser curt. Diu Nash que l'anem "estirant".
- Mirar el tema de si la caracterització de una immersió curta és diferent que a la que dona SJO.
- Si la varietat és tancada només cal canviar l'escala de  $E^k$  per fer la immersió curta. Si és oberta cal fer una cosa més complicada.
- Coses a tenir en compte:
  - $g_{ij}$  és la mètrica intrínseca,  $h_{ij}$  és la mètrica induïda.
  - $\{x^i\}$  són les coordenades en la varietat  $M$ .
  - $\{z^\alpha\}$  són les coordenades en  $E^k$ .
  - Amb la immersió,  $z^\alpha = z^\alpha(x^1, \dots, x^n)$ .
  - La mètrica induïda és  $h_{ij} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^j}$ . Normalment estaria multiplicat per una  $g_{\alpha\beta}$  que no apareix perquè en aquest cas és la mètrica euclidiana.
- Cada correcció es va fent en infinites "etapes", cada una d'elles corregint la correcció de la etapa anterior. L'important aquí és que cada correcció manté el fet que la immersió sigui curta, tot i que cada vegada menys. Cada etapa ens hi hauria d'apropar la meitat del camí. Per exemple, després de la primera, l'error hauria de ser

$$g_{ij} - \overline{h_{ij}} \approx \frac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})$$

- Ho fem d'aquesta manera perquè així ens assegurem que cada correcció només ha d'augmentar la mètrica.
- Cada etapa es divideix en passes (passos?), que afecten només localment la immersió augmentant la mètrica en una sola direcció.
- Per tal de dividir en passos, dividim la varietat en una sèrie d'entorns amb  $n$  paràmetres  $C^\infty$  no singulars, i cada entorn es pot trobar amb un nombre finit d'altres entorns.
- Per cada un d'aquests entorns, per exemple  $N_p$ , prenem una funció  $\varphi_p$  positiva a l'interior de  $N_p$  i 0 fora d'ell. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les  $\varphi_p$  valgui 1 en qualsevol punt. (Això com es fa? Diu que és estàndard però em sembla una mica complicat si ha de ser  $C^\infty$ .) Això serveix per distribuir la càrrega de la correcció.
- En cada entorn, la càrrega de la correcció es divideix també entre les passes. Sigui  $\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$  l'error mètric després d'unes quantes etapes. A la propera voldríem augmentar la mètrica més o menys  $\frac{1}{2}\delta_{ij}$ , de manera que a l'entorn  $N_p$  voldríem augmentar la mètrica en  $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$ . Per fer-ho haurem de trobar un tensor definit positiu  $\beta_{ij}$  que sigui  $C^\infty$  i aproximi  $\delta_{ij}$ .

•

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_{\nu} a_{\nu} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j}$$

on  $x^i$  són coordenades de l'entorn  $N_p$ ,  $a_{\nu}$  funcions no-negatives  $C^{\infty}$  i  $\psi^{\nu}$  funcions lineals en  $x^i$ .

- A l'apartat **The normal fields**, diu que necessita dos camps vectorials unitaris  $C^{\infty}$  normals a la immersió i ortogonals entre ells,  $\zeta^{\alpha}$  i  $\eta^{\alpha}$ . Això és lo de la co-dimensió 2 que després Kuiper canvia a 1.
- La pertorbació associada a  $a_{\nu}$  i  $\psi^{\nu}$  és

$$\boxed{\bar{z}^{\alpha} = z^{\alpha} + \zeta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \cos(\lambda\psi^{\nu}) + \eta^{\alpha} \frac{\sqrt{a_{\nu}}}{\lambda} \sin(\lambda\psi^{\nu})} \quad (6.5.1)$$

on  $\lambda$  és un paràmetre que podem triar.

- El canvi mètric és  $\sum_{\alpha} \frac{\partial\bar{z}^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial\bar{z}^{\alpha}}{\partial x^j} - \sum_{\alpha} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j}$ . No cal calcular tots els termes en detall, perquè molts contenen  $1/\lambda$  o  $1/\lambda^2$  i, per tant, convergeixen uniformement a 0 quan  $\lambda \rightarrow \infty$ . Altres termes es cancel·len. CALDRIA FER AIXÒ A MÀ.
- $\lambda$  no fa desaparèixer els termes en què s'ha derivat les trigonomètriques, perquè en surt una  $\lambda$  de dins. Ara bé, ens queden termes de l'estil  $\sum_{\alpha} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \zeta^{\alpha} \sqrt{a_{\nu}} (-\sin(\lambda\psi^{\nu})) \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j}$ , o amb les  $i$  i  $j$  bescanviades o amb  $\eta^{\alpha}$  en comptes del  $\zeta^{\alpha}$ . Cadascun d'aquests termes són 0, ja que  $\zeta$  i  $\eta$  són normals a la immersió.
- La resta de termes tindran el producte de dues funcions trigonomètriques o el quadrat d'una d'elles. Les que tinguin el producte també contenen  $\zeta^{\alpha}\eta^{\alpha}$ , i desapareixen per ortogonalitat.
- El que queda, doncs és

$$\sum_{\alpha} (\zeta^{\alpha})^2 a_{\nu} (\sin^2(\lambda\psi^{\nu})) \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j} + \sum_{\alpha} (\eta^{\alpha})^2 a_{\nu} (\cos^2(\lambda\psi^{\nu})) \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j}$$

i si traiem factor comú i usem que els vectors són unitaris, ens queda

$$a_{\nu} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j}$$

que és el que volíem.

- I amb això veiem que l'error mètric és  $O(1/\lambda)$ .
- A **Size of immersion...** repetim que la pertorbació canvia segons  $O(1/\lambda)$  després de cada passa. Mirant el que fa a la primera derivada, veiem el canvi que fa en un entorn totes les passes d'una etapa, i queda que el canvi en les derivades acaba sent

$$\left| \left( \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \right)_{\text{final}} - \left( \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \right)_{\text{inicial}} \right| \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O(1/\lambda_1) + \dots + O(1/\lambda_{\nu}) + \dots$$

LA VERITAT ÉS QUE NO SÉ D'ON SURTEN ELS TRES PUNTS DEL FINAL.

- A **Global considerations and convergence** volem veure quina  $\lambda$  s'ha d'agafar.
  - $B_1$  és el màxim error que volem en l'aproximació del canvi mètric,
 
$$a_{\nu} \left( \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j} \right).$$

- $B_2$  és el màxim error  $O(1/\lambda)$  que volem en el canvi de les primeres derivades.
- $B_3$  és la cota de  $\bar{z}^\alpha - z^\alpha$ .
- Després d'una etapa, la nova mètrica induïda és  $h'_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$ . Posem  $h'_{ij} = g_{ij} - \delta'_{ij}$ , on  $\delta'_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}$  i  $e_{ij}$  és un terme d'error. Per tal que la successió convergeixi, necessitem que  $\delta'_{ij}$  sigui estrictament més petita que  $\delta_{ij}$ . Si impossem que en tot punt de  $N_p$  el màxim dels components de  $e_{ij}$  sigui menor o igual a un sisè del màxim de  $\delta_{ij}$ , aleshores el màxim de  $\delta'_{ij}$  serà menor o igual a dos terços del màxim de  $\delta_{ij}$ . MIRAR SI AIXÒ ÉS ALGUNA NORMA  $C^k$  O ALGO.
- Volem que  $\delta'_{ij}$  sigui definida positiva, que ho podem assegurar si impossem que la mida de  $e_{ij}$  sigui més petita que un cert  $\varepsilon_p$  que depèn de l'entorn compacte  $N_p$ . Com cada entorn se superposa amb un nombre finit  $\sigma$  d'altres entorns, es poden trobar límits per  $e_{ij}$  tal que el que busquem sigui cert en tots ells. Anomenem  $\varepsilon_p^*$  el mínim d'aquestes limitacions.
- L'error ve de l'aproximació de  $\delta_{ij}$  per  $\beta_{ij}$  i dels passos. Per tant, imposant  $(\delta_{ij} - \beta_{ij}) < \varepsilon_p^*$ , tenim que  $(\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij} - \frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij}) < \frac{1}{2}\varepsilon_p^*$ . Així, podem imposar que en un entorn  $N_p$  els passos tinguin aquesta seqüència de  $B_1$ :  $B_{11} \leq \frac{1}{4}\varepsilon_p^*$ ,  $B_{12} \leq \frac{1}{8}\varepsilon_p^*$ ,  $B_{13} \leq \frac{1}{16}\varepsilon_p^*$ , etc.
- **A Performability of the steps** simplement diu que a cada pas tenim una immersió  $C^\infty$  i que tot és definit positiu. La única font de negativitat és l'error, però això sempre es pot contenir amb  $\lambda$ .
- **A General organization** es fa aquest resum:
  - El procés es fa en una sèrie d'etapes que prenen una immersió curta  $C^\infty$  i en retornen una amb un error mètric com a molt  $2/3$  del de l'anterior.
  - La varietat es divideix en entorns  $N_p$ .
  - Cada etapa es divideix en passos. A cada etapa, la correcció és pesada per  $\varphi_p$  i dividida per tal que la duguin a terme les passes.
  - Si la varietat és oberta, hi ha un nombre infinit de passos per etapa, però a cada porció compacta hi ha un nombre finit.
- **A Convergence of the immersion** diu que necessitem que les  $B_3$  del pas  $r$  de l'etapa  $s$  siguin més petites que  $2^{-(r+s)}$ , i el mateix per  $B_2$ . La manera per fer-ho és escollir que la mida de  $\beta_{ij}$  estigui entre  $9/10$  i  $9/8$  de la de  $\delta_{ij}$ . Això fa que el canvi en les derivades estigui limitat per una geomètrica de raó  $\sqrt{5/6}$  MIRAR AIXÒ, de manera que les funcions  $C^\infty$  convergeixen uniformement a una de  $C^1$ .
- **ES MOLT IMPORTANT QUE ESCRIVIM ALGUNA COSA SOBRE LA DIFERÈNCIA ENTRE IMMERSIONS I encabiments.**
- **A Isometric Imbeddings** QUAN PARLA DE CONJUNT LÍMIT CREC QUE ES REFEREIX A LA PART DEL CONJUNT OBERT MÉS LLUNYANA, EL QUE ESTARIA JUST A TOCAR DE LA FRONTERA diu que per encabiments és bàsicament el mateix, però necessitem controlar les auto-interseccions. Per veure que pas a pas no n'hi ha, cal comprovar que per  $\lambda$  prou gran les evitem.
- Sigui  $M$  un conjunt tancat de l'encabiment que conté  $N_p$  al seu interior.  $M$  té un entorn obert  $H$  tal que no hi ha punt de  $H$  amb dues rectes perpendiculars a  $M$ . MIRAR AIXÒ, HI HA UNA CITA.
- Posem  $Q$  la unió del conjunt límit amb la part de la encabiment que no està a l'interior

de  $M$ . Aleshores  $Q$  és tancat i una pertorbació prou petita de  $N_p^*$  no afectarà  $Q$ . AQUÍ NO SÉ QUÈ ÉS  $N_p^*$ . EN GENERAL, AQUEST APARTAT ES POSA MOLT TÈRBOL.

- **A Constructing the initial immersion** explica que si la varietat té dimensió  $n$ , sabem que es pot trobar una encabiment en  $E^{2n}$  no-singular i analítica. Es pot prendre aquesta immersió i escalar-la per a que sigui curta.
- Per un conjunt obert, podem recobrir la varietat per entorns  $N_p$  pesats amb funcions  $C^\infty$   $\varphi_p$  amb paràmetres  $x_{pi}$  tals que  $|x_{pi}| \leq 1$ . Volem que en qualsevol punt de la varietat els conjunts d'aquest recobriment se superposin un nombre finit de vegades  $s$ , com a molt.
- Podem dividir els conjunts  $N_p$  en  $s$  classes, de manera que en cada classe no hi hagi conjunts que es superposin.
- Podem definir una encabiment en un espai  $s(n+2)$  dimensional, a partir de funcions  $u_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p$  en conjunts de la classe  $\sigma$  i 0 en la resta,  $v_\sigma = \varepsilon_p^2 \varphi_p$  en conjunts de la classe  $\sigma$  i 0 en la resta, i  $w_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p x_{pi}$  en conjunts de la classe  $\sigma$  i 0 en la resta, on  $x_{pi}$  la coordenada  $i$ -èssima de  $N_p$  i  $\{\varepsilon_p\}_p$  és una successió monòtona decreixent de nombres positius que convergeix a 0.
- Observem: que totes aquestes funcions són  $C^\infty$ , que dos punts de conjunts interiors a conjunts diferents tenen raons  $v_\sigma/u_\sigma$  diferents, i que punts interiors a un mateix entorn  $N_p$  tenen  $w_{\sigma i}$  diferents. (EL CONJUNT LÍMIT ÉS L'ORIGEN PERÒ CAP PUNT ÉS ENVIAT A L'ORIGEN)
- Podem escollir que la encabiment sigui curta escollint la successió  $\{\varepsilon_p\}_p$ . Si la mètrica induïda pels primers  $p$  entorns és curta per un factor  $\frac{1}{3}(2 - 1/p)$ , podem escollir  $p+1$  tal que sigui curta per un factor  $1/3(2 - 1/(p+1))$ . Amb això tenim una encabiment curta i  $C^\infty$  en  $E^{s(n+2)}$ , i a partir de projeccions podem arribar a  $E^{2n+1}$
- **A General summary** enumera els quatre teoremes que ha demostrat en aquest article:
  - **Teorema 6.5.1.** *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió  $n$  té una encabiment isomètrica  $C^1$  en  $E^{2n}$ .*
  - **Teorema 6.5.2.** *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió  $n$  té una immersió isomètrica  $C^1$  en  $E^{2n}$  i una encabiment isomètrica  $C^1$  en  $E^{2n+1}$ .*
  - **Teorema 6.5.3.** *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió  $n$  té una immersió o encabiment  $C^\infty$  en  $E^k$  amb  $k \geq n+2$ , aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètrica en  $E^k$ .*
  - **Teorema 6.5.4.** *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió  $n$  té una immersió o encabiment  $C^\infty$  curta en  $E^k$  amb  $k \geq n+2$  que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètrica en  $E^k$  del mateix tipus.*
- Per últim, un comentari super interessant que fa és que potser es pot canviar  $n+2$  per  $n+1$  si es fa una pertorbació diferent que només necessita una direcció, que crec que és just el que fa Kuiper!

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_{\nu} a_{\nu} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^i} \frac{\partial\psi^{\nu}}{\partial x^j} \quad (6.5.2)$$

**Lema 6.5.5.** *L'equació 6.5.2 es pot satisfer amb les condicions necessàries.*

*Prova.* Les matrius simètriques definides positives formen un con de dimensió  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . D'on surt això? És molt estrany. És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials MIRAR A WIKIPEDIA EL QUE ÉS geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre  $W$  d'aquests entorns, on  $W$  depèn només de  $n$ .

Una matriu qualsevol representada per un punt d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{cccc} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \dots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \dots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \dots \end{array}$$

els coeficients per  $q$  representacions d'una matriu del con. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C_{\mu,\nu}^* = \frac{C_{\mu,\nu} \exp\{-\sum_{\sigma} 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_{\rho} \exp\{-\sum_{\sigma} 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

de manera que aquests coeficients són  $C^{\infty}$  com a funcions de la matriu que representen. Per cada matriu, com a molt  $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$  coeficients  $C_{\mu,\nu}^*$  són no-nuls.

Si ara considerem que  $\beta_{ij}$  defineix una aplicació  $C^{\infty}$  de  $N_p$  al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu,\nu}^* M_{(\mu,\nu)ij} \quad (6.5.3)$$

on  $M_{(\mu,\nu)ij}$  són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu  $M_{(\mu,\nu)ij}$  obtenim  $n$  autovectors unitaris ortogonals  $\{V_r\}$  i els seus autovalors  $\{v_r\}$ .

Si  $\psi_r$  és per cada  $r$  la funció lineal dels paràmetres locals pels quals  $\sqrt{v_r}V_r$  és el vector gradient Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer, tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i} \frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \quad (6.5.4)$$

i, substituint en 4.3.5, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r \sum_{\mu,\nu} C_{\mu,\nu}^* M_{(\mu,\nu)ij} \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i} \frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \quad (6.5.5)$$

i, agrupant termes en  $a_{\nu}$ , obtenim el resultat.  $\square$



## 6.6 Explicació del Sung-Jin Oh

**Teorema 6.6.1.** *Sigui  $(M, g)$  una superfície,  $N \geq \dim M + 1$  i  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una encabiment estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en  $M$  s'escurça (estrictament) sota  $\nabla u$ . Aleshores  $u$  es pot aproximar uniformement per encabiments isomètrics  $C^1$ .*

Haurem d'explicar què és una encabiment isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \varepsilon \mathbb{S}^2$  amb  $\varepsilon \in (0, 1)$  és una aplicació curta.

**Observació 6.6.2.** De fet, qualsevol encabiment  $C^2$  isomètrica  $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  ha de ser igual a la encabiment estàndard  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$  fins translació i rotació.

El teorema 6.6.1 es demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  el disc unitat, i  $g = g_{ij}(x)$  una mètrica de  $D$ . Una aplicació  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una *immersió* per ara direm encabiment als embeddings i immersions als immersions si  $\nabla u(x)$  és injectiva per tot  $x$ . La mètrica en  $D$  induïda per  $u$  és de la forma

$$\nabla u^\top(x) \nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és isomètrica també estaria bé comentar isometries si  $\nabla u^\top \nabla u = g$ , i diem que és (estrictament) curta si  $\nabla u(x)^\top \nabla u(x) - g(x) \leq 0$  per tot  $x \in D$ .

**Teorema 6.6.3.** [Baby Nash] *Sigui  $n \geq 4$  i  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una immersió estrictament curta. Per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix una immersió isomètrica  $C^1$   $\tilde{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(D)} < \varepsilon$ . Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*

**Observació 6.6.4.** Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui  $u_1 = u + U$  amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component  $U_I^j$  sigui complex, per tal que oscil·li com  $e^{ix \cdot \xi}$ , però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposen que per cada  $I \in \mathcal{I}$  que existeixi  $\bar{I} \in \mathcal{I}$  tal que

$$U_{\bar{I}} = \overline{U_I}, \quad \bar{\bar{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric  $h_1 = g - \nabla u_1^\top \nabla u_1$ . On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només agafo el primer terme.

$$h_1 = \left( h - \sum_I \nabla \overline{U_I}^\top \nabla U_I \right) - \sum_I (\nabla u^\top \nabla U_I + \nabla U_I^\top \nabla u) - \sum_{I, J: J \neq \bar{I}} \nabla U_I^\top \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre,  $q_{\text{mèt}}$ ,  $q_{\text{lin}}$  i  $q_{\text{alt}}$ .

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\xi| = 1$ . Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi},$$

amb  $a : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\mathbf{n} : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1$ . Per tal que sigui real, definim també  $\bar{I} \in \mathcal{I}$  tal que

$$U_{\bar{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x) \bar{\mathbf{n}}(x) e^{-\lambda i x \cdot \xi}.$$

Per eliminar el terme  $q_{\text{mèt}}$ , observem que

$$\begin{aligned} \nabla_j W &= i \xi_j a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi} + \frac{1}{\lambda} \nabla_j (a(x) \mathbf{n}(x)) e^{\lambda i x \cdot \xi} \\ &= i \xi_j a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS  $O(1/\text{LAMBDA})$ !!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned} \nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x) &= (-i \xi_i a(x) e^{-\lambda i x \cdot \xi}) (i \xi_j a(x) e^{\lambda i x \cdot \xi}) \bar{\mathbf{n}}(x) \cdot \mathbf{n}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \xi_i \xi_j a(x)^2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

on definim  $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\top$ . Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme  $a(x)^2 \xi_i \xi_j$ .

**Exemple 6.6.5.** EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert  $x \in D$ , l'error  $h$  és de la forma

$$h(x) = a^2(x) \xi \otimes \xi + b^2(x) \xi' \otimes \xi' + c^2(x) \xi'' \otimes \xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme  $\xi \otimes \xi$ . Repetint-ho per  $\xi' \otimes \xi'$  i  $\xi'' \otimes \xi''$  aconseguim reduir l'error  $h(x)$  a un terme  $O(\frac{1}{\lambda})$ .

**Observació 6.6.6.** EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que  $h$  sigui curta, ja que  $\nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x)$  és un terme no-negatiu. De fet, per tal que  $h_1$  sigui curt, necessitem que  $h$  sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors  $\xi$  depenen de  $x$ . Això es pot resoldre amb el següent lema.

**Lema 6.6.7.** (Descomposició de l'error mètric) Sigui  $\mathcal{P}$  l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió  $\xi^{(k)}$  de vectors unitaris en  $\mathbb{R}^n$  i una successió  $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0, \infty))$  tals que

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A) \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix  $N \in \mathbb{N}$  tal que per tot  $A \in \mathcal{P}$  com a màxim  $N$  termes de  $\Gamma_{(k)}$  són no-nuls.

**Observació 6.6.8.** La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector  $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$  per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes  $q_{\text{lin}}$  i  $q_{\text{alt}}$  desapareguin fins a terme  $O(1/\lambda)$ .

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb  $W$

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W = i \xi_j a(x) e^{ix \cdot \xi} \nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de  $u(x)$ ,  $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$ . Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 ([REVISAR!!!!](#)). Podem fer el mateix amb  $\nabla_i W^\top \nabla_j u$  i obtenim

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W + \nabla_i W^\top \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W = (-a^2(x) \xi_i \xi_j e^{2ix \cdot \xi}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

I ara només cal utilitzar que la encabiment té co-dimensió  $\geq 2$  per escollir un vector complex tal que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$  [Com està definit aquest producte?](#). Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x)$$

on  $\zeta(x)$  i  $\eta(x)$  són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent  $T_{u(x)}u(D)$ .

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda} (\sin(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \eta(x))$$

amb les següents propietats:

- Norma  $C^0$  petita [Explicar C-normes](#):

$$\|W\|_{C^0} \leq C \frac{\|a\|_{C^0}}{\lambda}$$

- Terme principal en  $\nabla W$

$$\begin{aligned} \nabla W &= a(x) (\cos(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) - \sin(\lambda x \cdot \xi) \eta(x)) \\ &\quad + O(\|a\|_{C^0}, \|\nabla a\|_{C^0}, \|\nabla \zeta\|_{C^0}, \|\nabla \eta\|_{C^0}) (1/\lambda) \end{aligned}$$

- Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W(x) - a^2(x) \xi_i \xi_j = O(1/\lambda)$$

- Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W + \nabla_i W^\top \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

**Observació 6.6.9.** [Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor.](#) Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2) : D \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto \gamma(x, t) \end{aligned}$$

on  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Posant  $\dot{\gamma}$  la derivada respecte de  $t$ , tenim que

$$\nabla W^\top(x) \nabla W(x) = (\dot{\gamma}_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot{\gamma}_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada  $x$  cal trobar  $\gamma(x, \cdot)$  tal que (1)  $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = a^2$  i (2)  $t \mapsto \gamma(x, t)$  sigui  $2\pi$ -periòdic i  $\int \dot{\gamma} dt = 0$ . De manera que  $t \mapsto \gamma(x, t)$  també ha de ser  $2\pi$ -periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat  $\overline{D}$ . **IMPORTANT** Per a després, **NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ**, que es carrega un terme a un error d'ordre  $O(1/\lambda)$ .

**Lema 6.6.10** (Lema d'iteració). *Segui  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una immersió suau estrictament curta, tal que  $h := g - \nabla u^\top \nabla u$  obeeix*

$$\|h\|_{C^0} \leq e_h \quad (6.6.1)$$

*per algun  $e_h > 0$ . Aleshores, per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix una immersió suau estrictament curta  $u_{[1]} = u + U$ , on*

$$\begin{aligned} \|U\|_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ \|\nabla U\|_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2} \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

*i  $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^\top \nabla u_{[1]}$  obeeix*

$$\|h_{[1]} - h\|_{C^0} \leq \varepsilon. \quad (6.6.3)$$

*Prova.* Pel lema 6.6.7, tenim que  $h$  es pot escriure com

$$h(x) = \sum_k \Gamma_{(k)}^2(h(x)) \xi^{(k)} \otimes \xi^{(k)}$$

on per cada  $h(x)$  hi ha com a molt  $K$  termes no-nuls.

Per la compacitat d'  $h(D) \subseteq \mathcal{P}$ , existeix un nombre finit de sumands que són funcions no-nul·les **Non-vanishing**, **mirar la traducció**. Reanomenem aquests sumands d'aquesta manera:

$$\Gamma_{(1)}^2(h(x)) \xi^{(1)} \otimes \xi^{(1)}, \Gamma_{(2)}^2(h(x)) \xi^{(2)} \otimes \xi^{(2)}, \dots, \Gamma_{(N)}^2(h(x)) \xi^{(N)} \otimes \xi^{(N)}$$

Prenent la traça, veiem que

$$\|\Gamma_{(j)}(h)\|_{C^0} \leq \|h\|_{C^0}^{1/2} \leq e_h^{1/2}$$

**Mirar d'on surt això (Sembla Cauchy-Schwarz, però què passa amb la traça de  $h$ ?)** Ara podem fer  $N$  correccions a  $u$  de la mateixa manera que hem fet abans, en les direccions  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N)}$ , per cancel·lar aquests errors. En concret, per un  $\delta > 0$ , definim de manera recursiva  $u_j = u_{j-1} + (1 - \delta)^{1/2} U_j$ , amb  $u_0 = u$  i

$$U_j = \frac{\Gamma_{(j)}(h(x))}{\lambda_j} \left( \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta_j(x) + \cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta_j(x) \right)$$

per uns certs  $\lambda_j$  i  $\zeta_j, \eta_j : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  unitaris.

Prenem  $\delta > 0$  per tal d'assegurar curtedat estricta **no sé com es diu shortness la veritat**. De fet, fixem  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2e_h^{1/2}}$  per tal que  $h \geq \delta I$ . **uiuiui això mirar-ho bé**

Escollint  $\lambda_j$  prou gran, tenim

—

$$\|U_j\|_{C^0} \ll \varepsilon \quad (6.6.4)$$

$$\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta) + \text{err}_j, \quad \|\text{err}_j\|_{C^0} \ll \varepsilon \quad (6.6.5)$$

$$h_j = h_{j-1} - (1 - \delta)\Gamma_{(k)}^2(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \text{err}'_j, \quad \|\text{err}'_j\|_{C^0} \ll \delta^2 \quad (6.6.6)$$

Les dues primeres són fàcils d'entendre, però la tercera l'hem de revisar.

On  $h_j = g - \nabla u_j^\top \nabla u_j$ .

Per tal de concloure la prova, verifiquem que  $U = U_1 + \dots + U_N$  i  $u_{[1]} = u_N = u + U$  satisfan les propietats desitjades.

- És fàcil veure que  $\|U_j\| \ll \varepsilon$  implica  $\|U\|_{C^0(D)} \ll \varepsilon$ .
- A més, de  $\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta) + \text{err}_j$  i  $\|\Gamma_{(j)}(h)\|_{C^0} \leq e_h^{1/2}$  tenim que  $\|\nabla U\|_{C^0(D)} \leq K e_h^{1/2} + \sum_{j=1}^N \|\text{err}_j\|_{C^0} \leq 2K e_h^{1/2}$  si es prenen les constants adequades.
- Finalment, sumant els termes  $h_j$  obtenim

$$h_N = h - (1 - \delta) \sum_{j=1}^N \Gamma_{(j)}^2(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \sum_{j=1}^N \text{err}'_j = \delta h + \sum_{j=1}^N \text{err}'_j$$

i imposant que  $u_{[1]} = u_N$  sigui estrictament curta,  $h_{[1]} = h_N \geq \delta^2 I$ , obtenim el resultat.

□

Ara podem iterar diverses vegades per concloure la prova del teorema 6.6.3.

*Prova del teorema 6.6.3.* Sigui  $e_{h,[k]} > 0$  una successió tal que

$$\sum_k e_{h,[k]} \leq \epsilon, \quad \sum_k e_{h,[k]}^{1/2} < \infty.$$

Pel lema 6.6.10, obtenim una successió d'aplicacions suaus estrictament curtes  $u_{[k]}$  tal que  $u_{[0]} = u$  i

$$\begin{aligned} \|g - \nabla u_{[k]}^\top \nabla u_{[k]}\|_{C^0} &\leq e_{h,[k]} \\ \|\nabla u_{[k+1]} - \nabla u_{[k]}\|_{C^0} &\leq C e_{h,[k]}^{1/2} \\ \|u_{[k+1]} - u_{[k]}\|_{C^0} &\leq e_{h,[k+1]}, \end{aligned}$$

demostrant el teorema.

□

revisar això últim perquè just estava parlant amb la marina

### 6.6.1 Extensions

#### Extensió a encabiments de varietats

Per estendre el teorema 6.6.3 a immersions a superfícies generals, només cal reduir a cartes coordenades. Per estendre'l a encabiments usem que, per la compacitat d' $M$ , podem trobar  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\inf_{x,y} \text{dist}(u(x), u(y)) \geq \varepsilon.$$

Ara només cal dur a terme la construcció en un entorn de  $0.01\varepsilon$ . entendre millor això últim perquè és bastant random

**Refinament de Kuiper: encabiment de codimensió 1**

Modificant la forma de la correcció, podem aconseguir la mateixa construcció amb només co-dimensió 1. Sigui  $\eta : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  el camp vectorial unitari en  $u(D)$ , i sigui

$$\zeta = \nabla u (\nabla u^\top \nabla u)^{-1} \xi.$$

Prenem

$$U = \frac{1}{\lambda} \left( \gamma_1(x, \lambda x \cdot \xi) \tilde{\zeta}(x) + \gamma_2(x, \lambda x \cdot \xi) \tilde{\eta}(x) \right)$$

on

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{|\zeta|^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{|\zeta|},$$

i  $u_1 = u + U$ . Això porta a [paper i boli](#)

$$\nabla u_1^\top \nabla u_1 = \nabla u^\top \nabla u + \frac{1}{|\zeta|^2} (2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada  $x$  i  $a = a(x) \in \mathbb{R}$  volem que  $\gamma$  sigui tal que

- [posar això amb la cosa aquella de \(1\) i \(2\)](#)
- $(1 + \dot{\gamma}_1)^2 + \dot{\gamma}_2^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1$ ,
- $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$  és  $2\pi$ -periòdica i  $\int \dot{\gamma} dt = 0$

i tal que  $|\dot{\gamma}| \leq C|a|$ . Això és possible perquè l'envolupant convexa de  $\{(x, y) : (1+x)^2 + y^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1\}$  conté el 0.

## Capítol 7

## Conclusions

Hem après un muntHI HA UNA EXPLICACIó DE COM CITAR AL CAMPUS

# Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY) *Nom del treball*. Cambridge University Press.

Oh, S. J. (2018) *The Nash  $C^1$  isometric embedding theorem*. [LINK](#) O PUBLISHER?

Nash, J. (1954)  *$C^1$  isometric imbeddings*. Annals of Mathematics, 60(3), 383-396.

Lee, J. M. (2013) *Introduction to smooth manifolds*. Springer.

Borrelli, V., Jabrane, S., Lazarus, F., & Thibert, B. (2013) *Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space*. Ensaios Matemáticos (Sociedade Brasileira de Matemática), 24, 1-98.