



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet i Riera

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 23 de febrer de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C^1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- Mirar article Nash, Gromov
- Mirar quin C^n agafa al paper band

Agraïments

Bla, bla, bla

Índex

1	Introducció	iv
2	Comencem	1
3	Teorema Nash-Kuiper C1	2
3.1	Explicació del Sung-Jin Oh	2
4	Paper Mobius strip	6
5	Conclusions	7

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- Explicats

Estructura de la memòria

Tremendo

Guia de lectura

Faig servir incrustació, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

Capítol 3

Teorema Nash-Kuiper C1

3.1 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 3.1.1. *Sigui (M, g) una superfície, $N \geq \dim M + 1$ i $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ una incrustació estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en M s'escurça (estrictament) sota ∇u . Aleshores u es pot aproximar uniformement per incrustacions isomètriques C^1 .*

Haurem d'explicar què és una incrustació isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \rightarrow \varepsilon \mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació curta.

Observació 3.1.2. De fet, qualsevol incrustació C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la incrustació estàndard $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ fins translació i rotació.

El teorema 3.1.1 es demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D . Una aplicació $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una *immersió* per ara direm *incrustació als embeddings i immersions als immersions* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x . La mètrica en D induïda per u és de la forma
Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^\top(x) \nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar *isometries* si $\nabla u^\top \nabla u = g$, i diem que és (estrictament) curta si $\nabla u(x)^\top \nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.

Teorema 3.1.3. *Sigui $n \geq 4$ i $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una immersió isomètrica estrictament curta. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió isomètrica C^1 $\tilde{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(D)} < \varepsilon$. Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*

Observació 3.1.4. Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix \cdot \xi}$, però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposen que per cada $I \in \mathcal{I}$ que existeixi $\bar{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\bar{I}} = \overline{U_I}, \quad \bar{\bar{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\top \nabla u_1$. On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només afaço el primer terme.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla \overline{U_I}^\top \nabla U_I \right) - \sum_I (\nabla u^\top \nabla U_I + \nabla U_I^\top \nabla u) - \sum_{I, J: J \neq \bar{I}} \nabla U_I^\top \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt} .

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi},$$

amb $a : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1$. Per tal que sigui real, definim també $\bar{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\bar{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x) \bar{\mathbf{n}}(x) e^{-\lambda i x \cdot \xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned} \nabla_j W &= i \xi_j a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi} + \frac{1}{\lambda} \nabla_j (a(x) \mathbf{n}(x)) e^{\lambda i x \cdot \xi} \\ &= i \xi_j a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS $O(1/\text{LAMBDA})$!!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned} \nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x) &= (-i \xi_i a(x) e^{-\lambda i x \cdot \xi}) (i \xi_j a(x) e^{\lambda i x \cdot \xi}) \bar{\mathbf{n}}(x) \cdot \mathbf{n}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \xi_i \xi_j a(x)^2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\cdot)^\top$. Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2 \xi_i \xi_j$.

Exemple 3.1.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x) \xi \otimes \xi + b^2(x) \xi' \otimes \xi' + c^2(x) \xi'' \otimes \xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi \otimes \xi$. Repetint-ho per $\xi' \otimes \xi'$ i $\xi'' \otimes \xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.

Observació 3.1.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen d' x . Això es pot resoldre amb el següent lema.

Lema 3.1.7. (*Descomposició de l'error mètric*) *Sigui \mathcal{P} l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en \mathbb{R}^n i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0, \infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A) \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.

Observació 3.1.8. La demostració d'aquest teorema no l'escriuim aquí explícitament. [ESTÀ AL SUNG-JIN OH.](#)

Fins ara no ha calgut especificar el vector $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$ per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes q_{lin} i q_{alt} desapareguin fins a terme $O(1/\lambda)$.

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb W

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W = i \xi_j a(x) e^{ix \cdot \xi} \nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de $u(x)$, $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$. Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 ([REVISAR!!!](#)). Podem fer el mateix amb $\nabla_i W^\top \nabla_j u$ i obtenim

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W + \nabla_i W^\top \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W = (-a^2(x) \xi_i \xi_j e^{2ix \cdot \xi}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

I ara només cal utilitzar que la incrustació té co-dimensió ≥ 2 per escollir un vector complex tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ [Com està definit aquest producte?](#). Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x)$$

on $\zeta(x)$ i $\eta(x)$ són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent $T_{u(x)}u(D)$.

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda} (\sin(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \eta(x))$$

amb les següents propietats:

- Norma C^0 petita [Explicar C-normes](#):

$$\|W\|_{C^0} \leq C \frac{\|a\|_{C^0}}{\lambda}$$

- Terme principal en ∇W

$$\begin{aligned} \nabla W = & a(x) (\cos(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) - \sin(\lambda x \cdot \xi) \eta(x)) \\ & + O_{\|a\|_{C^0}, \|\nabla a\|_{C^0}, \|\nabla \zeta\|_{C^0}, \|\nabla \eta\|_{C^0}}(1/\lambda) \end{aligned}$$

– Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W(x) - a^2(x) \xi_i \xi_j = O(1/\lambda)$$

– Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W + \nabla_i W^\top \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

– Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

Observació 3.1.9. Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor. Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2) : D \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto \gamma(x, t) \end{aligned}$$

on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posant $\dot{\gamma}$ la derivada respecte de t , tenim que

$$\nabla W^\top(x) \nabla W(x) = (\dot{\gamma}_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot{\gamma}_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x cal trobar $\gamma(x, \cdot)$ tal que (1) $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = a^2$ i (2) $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$ sigui 2π -periòdic i $\int \dot{\gamma} dt = 0$. De manera que $t \mapsto \gamma(x, t)$ també ha de ser 2π -periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat \overline{D} . **IMPORTANT** Per a després, **NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ**, que es carrega un terme a un error d'ordre $O(1/\lambda)$.

Lema 3.1.10. *Sigui $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una immersió suau estrictament curta, tal que $h := g - \nabla u^\top \nabla u$ obeeix*

$$\|h\|_{C^0} \leq e_h$$

per algun $e_h > 0$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió suau estrictament curta $u_{[1]} = u + U$, on

$$\begin{aligned} \|U\|_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ \|\nabla U\|_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2} \end{aligned}$$

i $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^\top \nabla u_{[1]}$ obeeix

$$\|h_{[1]} - h\|_{C^0} \leq \varepsilon.$$

Capítol 4

Paper Mobius strip

Capítol 5

Conclusions

Hem après un munt

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY). *Nom del treball*. Cambridge University Press.