



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

# GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

## EL MEU TFG

---

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet i Riera

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 22 de febrer de 2025

## Abstract

My wonderful abstract.

## Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar  $C^1$  i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- Mirar article Nash, Gromov
- Mirar quin  $C^n$  agafa al paper band

## Agraïments

Bla, bla, bla

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>iv</b>
<b>2</b>	<b>Comencem</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Teorema Nash-Kuiper C1</b>	<b>2</b>
3.1	Explicació del Sung-Jin Oh . . . . .	2
<b>4</b>	<b>Paper Mobius strip</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>7</b>

# Capítol 1

## Introducció

### **Objectius del treball**

- Explicats

### **Estructura de la memòria**

Tremendo

### **Guia de lectura**

Faig servir incrustació, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

## Capítol 3

# Teorema Nash-Kuiper C1

### 3.1 Explicació del Sung-Jin Oh

**Teorema 3.1.1.** *Sigui  $(M, g)$  una superfície,  $N \geq \dim M + 1$  i  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  una incrustació estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en  $M$  s'escurça (estrictament) sota  $\nabla u$ . Aleshores  $u$  es pot aproximar uniformement per incrustacions isomètriques  $C^1$ .*

Haurem d'explicar què és una incrustació isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \varepsilon \mathbb{S}^2$  amb  $\varepsilon \in (0, 1)$  és una aplicació curta.

**Observació 3.1.2.** De fet, qualsevol incrustació  $C^2$  isomètrica  $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  ha de ser igual a la incrustació estàndard  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$  fins translació i rotació.

El teorema 3.1.1 es demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  el disc unitat, i  $g = g_{ij}(x)$  una mètrica de  $D$ . Una aplicació  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una *immersió* per ara direm *incrustació als embeddings i immersions als immersions* si  $\nabla u(x)$  és injectiva per tot  $x$ . La mètrica en  $D$  induïda per  $u$  és de la forma  
Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^\top(x) \nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar *isometries* si  $\nabla u^\top \nabla u = g$ , i diem que és (estrictament) curta si  $\nabla u(x)^\top \nabla u(x) - g(x) \leq 0$  per tot  $x \in D$ .

**Teorema 3.1.3.** *Sigui  $n \geq 4$  i  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una immersió isomètrica estrictament curta. Per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix una immersió isomètrica  $C^1$   $\tilde{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(D)} < \varepsilon$ . Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*

**Observació 3.1.4.** Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui  $u_1 = u + U$  amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component  $U_I^j$  sigui complex, per tal que oscil·li com  $e^{ix \cdot \xi}$ , però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposen per cada  $I \in \mathcal{I}$  que existeixi  $\bar{I} \in \mathcal{I}$  tal que

$$U_{\bar{I}} = \overline{U_I}, \quad \bar{\bar{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric  $h_1 = g - \nabla u_1^\top \nabla u_1$ .

$$h_1 = \left( h - \sum_I \nabla \overline{U_I}^\top \nabla U_I \right) - \sum_I (\nabla u^\top \nabla U_I + \nabla U_I^\top \nabla u) - \sum_{I, J: J \neq \bar{I}} \nabla U_I^\top \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre,  $q_{\text{mèt}}$ ,  $q_{\text{lin}}$  i  $q_{\text{alt}}$ .

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\xi| = 1$ . Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi},$$

amb  $a : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\mathbf{n} : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1$ . Per tal que sigui real, definim també  $\bar{I} \in \mathcal{I}$  tal que

$$U_{\bar{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x) \bar{\mathbf{n}}(x) e^{-\lambda i x \cdot \xi}.$$

Per eliminar el terme  $q_{\text{mèt}}$ , observem que

$$\begin{aligned} \nabla_j W &= i \xi_j a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi} + \frac{1}{\lambda} \nabla_j (a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi}) \\ &= i \xi_j a(x) \mathbf{n}(x) e^{\lambda i x \cdot \xi} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS  $O(1/\text{LAMBDA})$ !!! I, per tant,

$$\begin{aligned} \nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x) &= (-i \xi_i a(x) e^{-\lambda i x \cdot \xi}) (i \xi_j a(x) e^{\lambda i x \cdot \xi}) \bar{\mathbf{n}}(x) \cdot \mathbf{n}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \xi_i \xi_j a(x)^2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

on definim  $(\cdot)^* = (\cdot)^\top$ . Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme  $a(x)^2 \xi_i \xi_j$ .

**Exemple 3.1.5.** EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert  $x \in D$ , l'error  $h$  és de la forma

$$h(x) = a^2(x) \xi \otimes \xi + b^2(x) \xi' \otimes \xi' + c^2(x) \xi'' \otimes \xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme  $\xi \otimes \xi$ . Repetint-ho per  $\xi' \otimes \xi'$  i  $\xi'' \otimes \xi''$  aconseguim reduir l'error  $h(x)$  a un terme  $O(\frac{1}{\lambda})$ .

**Observació 3.1.6.** EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que  $h$  sigui curta, ja que  $\nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x)$  és un terme no-negatiu. De fet, per tal que  $h_1$  sigui curt, necessitem que  $h$  sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors  $\xi$  depenen d' $x$ . Això es pot resoldre amb el següent lema.

**Lema 3.1.7.** (Descomposició de l'error mètric) Siguin  $\mathcal{P}$  l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió  $\xi^{(k)}$  de vectors unitaris en  $\mathbb{R}^n$  i una successió  $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0, \infty))$  tals que

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A) \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix  $N \in \mathbb{N}$  tal que per tot  $A \in \mathcal{P}$  com a màxim  $N$  termes de  $\Gamma_{(k)}$  són no-nuls.



**Observació 3.1.8.** La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector  $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$  per tal de minimitzar l'error mètric. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes  $q_{\text{lin}}$  i  $q_{\text{alt}}$  desapareguin fins a terme  $O(1/\lambda)$ .

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb  $W$

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W = i \xi_j a(x) e^{ix \cdot \xi} \nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de  $u(x)$ ,  $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$ . Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 (REVISAR!!!) Podem fer el mateix amb  $\nabla_i W^\top \nabla_j u$  i obtenim

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W + \nabla_i W^\top \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W = (-a^2(x) \xi_i \xi_j e^{2ix \cdot \xi}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

I ara només cal utilitzar que la incrustació té co-dimensió  $\geq 2$  per escollir un vector complex tal que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x)$$

on  $\zeta(x)$  i  $\eta(x)$  són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent  $T_{u(x)}u(D)$ .

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda} (\sin(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \eta(x))$$

amb les següents propietats:

- Norma  $C^0$  petita:

$$\|W\|_{C^0} \leq C \frac{\|a\|_{C^0}}{\lambda}$$

- Terme principal en  $\nabla W$

$$\nabla W = a(x) (\cos(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) - \sin(\lambda x \cdot \xi) \eta(x)) + O_{\|a\|_{C^0}, \|\nabla a\|_{C^0}, \|\nabla \zeta\|_{C^0}, \|\nabla \eta\|_{C^0}}(1/\lambda)$$

- Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W(x) - a^2(x) \xi_i \xi_j = O(1/\lambda)$$

- Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\top \nabla_j W + \nabla_i W^\top \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\top \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

**Observació 3.1.9.** AIXÒ S'HA DE MIRAR BÉ, NO ACABO D'ENTENDRE COM FA LA DERIVADA Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned}\gamma &= (\gamma_1, \gamma_2) : D \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto \gamma(x, t)\end{aligned}$$

on  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Posant  $\dot{\gamma}$  la derivada respecte de  $t$ , tenim que

$$\nabla W^\top(x) \nabla W(x) = (\dot{\gamma}_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot{\gamma}_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada  $x$  cal trobar  $\gamma(x, \cdot)$  tal que (1)  $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = a^2$  i (2)  $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$  sigui  $2\pi$ -periòdic i  $\int \dot{\gamma} dt = 0$ . De manera que  $t \mapsto \gamma(x, t)$  també ha de ser  $2\pi$ -periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat  $\overline{D}$ . IMPORTANT Per a després, NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ, que es carrega un terme a un error d'ordre  $O(1/\lambda)$ .

**Lema 3.1.10.** *Segui  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una immersió suau estrictament curta, tal que  $h := g - \nabla u^\top \nabla u$  obeeix*

$$\|h\|_{C^0} \leq e_h$$

*per algun  $e_h > 0$ . Aleshores, per qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix una immersió suau estrictament curta  $u_{[1]} = u + U$ , on*

$$\begin{aligned}\|U\|_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ \|\nabla U\|_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2}\end{aligned}$$

*i  $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^\top \nabla u_{[1]}$  obeeix*

$$\|h_{[1]} - h\|_{C^0} \leq \varepsilon.$$

Capítol 4

Paper Mobius strip

## Capítol 5

# Conclusions

Hem après un munt

# Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY). *Nom del treball*. Cambridge University Press.