Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet i Riera
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 26 de febrer de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- MIrar article Nash, Gromov
- Mirar quin Cn agafa al paper band

Agraïments

Bla, bla, bla

Índex

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- Explicats

Estructura de la memòria

Tremendo

Guia de lectura

Faig servir incrustació, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

Capítol 3

Suavitat i diferenciabilitat

3.1 Suavitat

El que hi ha aquí ho estic traient de wikipedia. Preguntar a l'Ignasi per una font més bona.

Definició 3.1.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-*vegades derivable contínuament*, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si la derivada d'ordre k,*

$$f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f,$$

existeix i és contínua en U. Anomenem l'índex k suavitat de f. Diem que f és suau *o* infinitament derivable *si existeix la derivada de qualsevol ordre.*

Observacions 3.1.2.

- f és 0 vegades derivable contínuament si i només si f és contínua.
- Si f és k vegades derivable contínuament, aleshores també és j vegades derivable contínuament per $0 \le j \le k$.

Definició 3.1.3. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

De la mateixa manera, podem definir aquests conceptes per funcions de diverses variables.

Definició 3.1.4. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-vegades derivable contínuament, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si totes les seves derivades parcials d'ordre k,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

tals que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, existeixen i són contínues en U. És a dir, si f és k-vegades derivable contínuament en cada component de U.

Definició 3.1.5. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

Observacions 3.1.6. Potser caldria donar la definició explícita en el cas de funcions de diverses variables.

- Moltes vegades, en lloc de $C^k(U)$ es fa servir $C^k(U; \mathbb{R}^m)$ per a funcions $f : U \to \mathbb{R}^m$.
- També escriurem simplement C^k en lloc de $C^k(U)$ si el domini és clar pel context.

3.2 Classes de diferenciabilitat com espais normats

A continuació definirem normes en $C^k(U)$ i $C^\infty(U)$ que ens permetran tractar-les com espais vectorials normats.

Definició 3.2.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció. Definim la norma $\| \cdot \|_{C^k(U)}$ de f com*

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)},$$

on $\| \cdot \|_{L^\infty(U)}$ és la norma del suprem en U, tal que $\|g\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x \in U} |g(x)|$.

Aquí podríem proposar i demostrar que $\| \cdot \|_{C^k(U)}$ és efectivament una norma, ho tenim a `https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek_Norm_is_Norm`. També cal decidir si definim explícitament la D^α.

Capítol 4

Teorema Nash-Kuiper C1

4.1 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 4.1.1. *Sigui* (M, g) *una superfície,* $N \geq \dim M + 1$ *i* $u : M \to \mathbb{R}^N$ *una incrustació estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en* M *s'escurça (estrictament) sota* ∇u*. Aleshores* u *es pot aproximar uniformement per incrustacions isomètriques* C^1*.*

Haurem d'explicar què és una incrustació isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \to \varepsilon\mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació *curta*.
Observació 4.1.2. De fet, qualsevol incrustació C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la incrustació estàndard $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |X| = 1\}$ fins translació i rotació.

El teorema 4.1.1 es demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D. Una aplicació $u : D \to \mathbb{R}^n$ és una *immersió* per ara direm incrustació als embeddings i immersions als *immersions* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x. La mètrica en D induïda per u és de la forma Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^\intercal(x)\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar isometries si $\nabla u^\intercal \nabla u = g$, i diem que és *(estrictament) curta* si $\nabla u(x)^\intercal \nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.
Teorema 4.1.3. *Sigui* $n \geq 4$ *i* $u : D \to \mathbb{R}^n$ *una immersió isomètrica estrictament curta. Per qualsevol* $\varepsilon > 0$*, existeix una immersió isomètrica* C^1 $\tilde{u} : D \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|u - v\|_{C^0(D)} < \varepsilon$*.Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*
Observació 4.1.4. Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix\cdot\xi}$, però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposem que per cada $I \in \mathcal{I}$ que existeixi $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{U}_I, \quad \overline{\overline{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\intercal \nabla u_1$. On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només agafo el primer terme.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla \overline{U}_I^\intercal \nabla U_I\right) - \sum_I \left(\nabla u^\intercal \nabla U_I + \nabla U_I^\intercal \nabla u\right) - \sum_{I,J: J\neq \overline{I}} \nabla U_I^\intercal \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt}.

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x)\mathbf{n}(x) e^{\lambda i x\cdot\xi},$$

amb $a : D \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \to \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{n}} = 1$. Per tal que sigui real, definim també $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x)\overline{\mathbf{n}}(x) e^{-\lambda i x\cdot\xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned}\nabla_j W &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x) e^{\lambda i x\cdot\xi} + \frac{1}{\lambda}\nabla_j (a(x)\mathbf{n}(x)) e^{\lambda i x\cdot\xi} \\ &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x) e^{\lambda i x\cdot\xi} + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS O(1/LAMBDA)!!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned}\nabla_i W^*(x) \nabla_j W(x) &= (-i\xi_i a(x) e^{-\lambda i x\cdot\xi})(i\xi_j a(x) e^{\lambda i x\cdot\xi})\overline{\mathbf{n}}(x)\cdot\mathbf{n}(x) + O(\frac{1}{\lambda}) \\ &= \xi_i\xi_j a(x)^2 + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\intercal$. Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2\xi_i\xi_j$.

Exemple 4.1.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x)\xi\otimes\xi + b^2(x)\xi'\otimes\xi' + c^2(x)\xi''\otimes\xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi\otimes\xi$. Repetint-ho per $\xi'\otimes\xi'$ i $\xi''\otimes\xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.

Observació 4.1.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen d'x. Això es pot resoldre amb el següent lema.

Lema 4.1.7. *(Descomposició de l'error mètric) Sigui $\mathcal{P}$ l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en $\mathbb{R}^n$ i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0,\infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A)\xi_i^{(k)}\xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.

Observació 4.1.8. La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$ per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes q_{lin} i q_{alt} desapareguin fins a terme $O(1/\lambda)$.

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb W

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W = i\xi_j a(x) e^{ix\cdot\xi}\nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

  i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de $u(x)$, $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$. Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 (REVISAR!!!). Podem fer el mateix amb $\nabla_i W^\intercal \nabla_j u$ i obtenim

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = (-a^2(x)\xi_i\xi_j e^{2ix\cdot\xi})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

  I ara només cal utilitzar que la incrustació té co-dimensió ≥ 2 per escollir un vector complex tal que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$ Com està definit aquest producte?. Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)$$

  on $\zeta(x)$ i $\eta(x)$ són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent $T_{u(x)}u(D)$.

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda}\left(\sin(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) + \cos(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)$$

  amb les següents propietats:

  – Norma C^0 petita Explicar C-normes:

$$||W||_{C^0} \leq C\frac{||a||_{C^0}}{\lambda}$$

  – Terme principal en ∇W

$$\begin{aligned}\nabla W =& a(x)\left(\cos(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) - \sin(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)\\ &+ O_{||a||_{C^0},||\nabla a||_{C^0},||\nabla\zeta||_{C^0},||\nabla\eta||_{C^0}}(1/\lambda)\end{aligned}$$

  – Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W(x) - a^2(x)\xi_i\xi_j = O(1/\lambda)$$

– Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

– Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

Observació 4.1.9. Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor. Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned}\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : & D \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,t) \mapsto \gamma(x,t)\end{aligned}$$

on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posant $\dot\gamma$ la derivada respecte de t, tenim que

$$\nabla W^\intercal(x) \nabla W(x) = \left(\dot\gamma_1^2(x, \lambda x\cdot\xi) + \dot\gamma_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)\right) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x cal trobar $\gamma(x,\cdot)$ tal que (1) $\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2 = a^2$ i (2) $t \mapsto \dot\gamma(x,t)$ sigui 2π-periòdic i $\int \dot\gamma dt = 0$ De manera que $t \mapsto \gamma(x,t)$ també ha de ser 2π-periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat $\overline{D}$. IMPORTANT Per a després, NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ, que es carrega un terme a un error d'ordre $O(1/\lambda)$.

Lema 4.1.10 (Lema d'iteració)**.** *Sigui $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió suau estrictament curta, tal que $h := g - \nabla u^\intercal \nabla u$ obeeix*

$$||h||_{C^0} \le e_h \tag{4.1.1}$$

per algun $e_h > 0$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió suau estrictament curta $u_{[1]} = u + U$, on

$$\begin{aligned}||U||_{C^0(D)} &\le \varepsilon \\ ||\nabla U||_{C^0(D)} &\le C e_h^{1/2}\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

i $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^\intercal \nabla u_{[1]}$ obeeix

$$||h_{[1]} - h||_{C^0} \le \varepsilon. \tag{4.1.3}$$

Prova. Pel lema 4.1.7, tenim que h es pot escriure com

$$h(x) = \sum_k \Gamma_{(k)}^2(h(x)) \xi^{(k)} \otimes \xi^{(k)}$$

on per cada $h(x)$ hi ha com a molt K termes no-nuls.

Per la compacitat d' $h(D) \subseteq \mathcal{P}$, existeix un nombre finit de sumands que són funcions no-nul·lesNon-vanishing, mirar la traducció. Reanomenem aquests sumands d'aquesta manera:

$$\Gamma_{(1)}^2(h(x))\xi^{(1)} \otimes \xi^{(1)}, \Gamma_{(2)}^2(h(x))\xi^{(2)} \otimes \xi^{(2)}, \dots, \Gamma_{(N)}^2(h(x))\xi^{(N)} \otimes \xi^{(N)}$$

Prenent la traça, veiem que

$$||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \le ||h||_{C^0}^{1/2} \le e_h^{1/2}$$

Mirar d'on surt això (Sembla Cauchy-Schwarz, però què passa amb la traça de h?) Ara podem fer N correccions a u de la mateixa manera que hem fet abans, en les direccions

$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N)}$, per cancel·lar aquests errors. En concret, per un $\delta > 0$, definim de manera recursiva $u_j = u_{j-1} + (1-\delta)^{1/2} U_j$, amb $u_0 = u$ i

$$U_j = \frac{\Gamma_{(j)}(h(x))}{\lambda_j} \Big(\sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta_j(x) + \cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta_j(x) \Big)$$

per uns certs λ_j i $\zeta_j, \eta_j : D \to \mathbb{R}^n$ unitaris.

Prenem $\delta > 0$ per tal d'assegurar curtedat estricta no sé com es diu shortness la veritat. De fet, fixem $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2e_h^{1/2}}$ per tal que $h \geq \delta I$. uiuiui això mirar-ho bé

Escollint λ_j prou gran, tenim

–
$$||U_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.1.4}$$

–
$$\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h) \xi^{(j)} (\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta) + \mathrm{err}_j, \quad ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.1.5}$$

–
$$h_j = h_{j-1} - (1-\delta) \Gamma_{(k)}^2 (h) \xi^{(j)} \xi^{(j)} + \mathrm{err}'_j, \quad ||\mathrm{err}'_j||_{C^0} \ll \delta^2 \tag{4.1.6}$$

Les dues primeres són fàcils d'entendre, però la tercera l'hem de revisar.

On $h_j = g - \nabla u_j^{\intercal} \nabla u_j$.

Per tal de concloure la prova, verifiquem que $U = U_1 + \cdots + U_N$ i $u_{[1]} = u_N = u + U$ satisfan les propietats desitjades.

- És fàcil veure que $||U_j|| \ll \varepsilon$ implica $||U||_{C^0(D)} \ll \varepsilon$.
- A més, de $\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h) \xi^{(j)} (\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta) + \mathrm{err}_j$ i $||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq e_h^{1/2}$ tenim que $||\nabla U||_{C^0(D)} \leq K e_h^{1/2} + \sum_{j=1}^N ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \leq 2K e_h^{1/2}$ si es prenen les constants adequades.
- Finalment, sumant els termes h_j obtenim

$$h_N = h - (1-\delta) \sum_{j=1}^N \Gamma_{(j)}^2 (h) \xi^{(j)} \xi^{(j)} + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j = \delta h + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j$$

  i imposant que $u_{[1]} = u_N$ sigui estrictament curta, $h_{[1]} = h_N \geq \delta^2 I$, obtenim el resultat.

$\square$

Ara podem iterar diverses vegades per concloure la prova del teorema 4.1.3.

Prova del teorema 4.1.3. Sigui $e_{h,[k]} > 0$ una successió tal que

$$\sum_k e_{h,[k]} \leq \epsilon, \quad \sum_k e_{h,[k]}^{1/2} < \infty.$$

Pel lema 4.1.10, obtenim una successió d'aplicacions suaus estrictament curtes $u_{[k]}$ tal que $u_{[0]} = u$ i

$$||g - \nabla u_{[k]}^{\intercal} \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k]}$$
$$||\nabla u_{[k+1]} - \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq C e_{h,[k]}^{1/2}$$
$$||u_{[k+1]} - u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k+1]},$$

demostrant el teorema. □

revisar això últim perquè just estava parlant amb la marina

Capítol 5

Paper Mobius strip

Capítol 6

Conclusions

Hem après un munt

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY). *Nom del treball.* Cambridge University Press.