Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet i Riera

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 4 de març de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- MIrar article Nash, Gromov
- Mirar quin Cn agafa al paper band

Agraïments

Bla, bla, bla

Índex

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- Explicats

Estructura de la memòria

Tremendo

Guia de lectura

Faig servir incrustació, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

Capítol 3

Suavitat i diferenciabilitat

3.1 Suavitat

El que hi ha aquí ho estic traient de wikipedia. Preguntar a l'Ignasi per una font més bona.

Definició 3.1.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-*vegades derivable contínuament*, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si la derivada d'ordre k,*

$$f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f,$$

existeix i és contínua en U. Anomenem l'índex k suavitat de f. Diem que f és suau *o* infinitament derivable *si existeix la derivada de qualsevol ordre.*

Observacions 3.1.2.

- f és 0 vegades derivable contínuament si i només si f és contínua.
- Si f és k vegades derivable contínuament, aleshores també és j vegades derivable contínuament per $0 \leq j \leq k$.

Definició 3.1.3. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

De la mateixa manera, podem definir aquests conceptes per funcions de diverses variables.

Definició 3.1.4. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-vegades derivable contínuament, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si totes les seves derivades parcials d'ordre k,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

tals que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, existeixen i són contínues en U. És a dir, si f és k-vegades derivable contínuament en cada component de U.

Definició 3.1.5. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

Observacions 3.1.6. Potser caldria donar la definició explícita en el cas de funcions de diverses variables.

- Moltes vegades, en lloc de $C^k(U)$ es fa servir $C^k(U; \mathbb{R}^m)$ per a funcions $f : U \to \mathbb{R}^m$.
- També escriurem simplement C^k en lloc de $C^k(U)$ si el domini és clar pel context.

3.1.1 Classes de diferenciabilitat com espais normats

A continuació definirem normes en $C^k(U)$ i $C^\infty(U)$ que ens permetran tractar-les com espais vectorials normats.

Definició 3.1.7. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció. Definim la norma $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ de f com*

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)},$$

on $\|\cdot\|_{L^\infty(U)}$ és la norma del suprem en U, tal que $\|g\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x \in U} |g(x)|$.

Aquí podríem proposar i demostrar que $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ és efectivament una norma, ho tenim a `https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek_Norm_is_Norm`. També cal decidir si definim explícitament la D^α.

3.2 Fonaments de geometria diferencial

Aquí hauriem de parlar d'embedding preferiblement.

Capítol 4

Teorema Nash-Kuiper C1

4.1 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 4.1.1. *Sigui (M, g) una superfície, $N \geq \dim M + 1$ i $u : M \to \mathbb{R}^N$ una incrustació estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en M s'escurça (estrictament) sota ∇u. Aleshores u es pot aproximar uniformement per incrustacions isomètriques C^1.*

Haurem d'explicar què és una incrustació isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \to \varepsilon\mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació *curta*.
Observació 4.1.2. De fet, qualsevol incrustació C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la incrustació estàndard $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |X| = 1\}$ fins translació i rotació.

El teorema 4.1.1 es demostra amb *integració convexa*.

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D. Una aplicació $u : D \to \mathbb{R}^n$ és una *immersió* per ara direm incrustació als embeddings i immersions als *immersions* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x. La mètrica en D induïda per u és de la forma Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^{\intercal}(x)\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar isometries si $\nabla u^{\intercal} \nabla u = g$, i diem que és *(estrictament) curta* si $\nabla u(x)^{\intercal}\nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.
Teorema 4.1.3. *Sigui $n \geq 4$ i $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió isomètrica estrictament curta. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió isomètrica C^1 $\tilde{u} : D \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|u - v\|_{C^0(D)} < \varepsilon$.Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*
Observació 4.1.4. Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix\cdot\xi}$, però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposem que per cada $I \in \mathcal{I}$ que existeixi $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{U}_I, \quad \overline{\overline{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\intercal \nabla u_1$. On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només agafo el primer terme.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla\overline{U}_I^\intercal \nabla U_I\right) - \sum_I \left(\nabla u^\intercal \nabla U_I + \nabla U_I^\intercal \nabla u\right) - \sum_{I,J:J\neq\overline{I}} \nabla U_I^\intercal \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt}.

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi},$$

amb $a : D \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \to \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{n}} = 1$. Per tal que sigui real, definim també $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x)\overline{\mathbf{n}}(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned}\nabla_j W &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + \frac{1}{\lambda}\nabla_j(a(x)\mathbf{n}(x))e^{\lambda i x\cdot\xi} \\ &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS O(1/LAMBDA)!!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned}\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x) &= (-i\xi_i a(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi})(i\xi_j a(x)e^{\lambda i x\cdot\xi})\overline{\mathbf{n}}(x)\cdot\mathbf{n}(x) + O(\frac{1}{\lambda}) \\ &= \xi_i\xi_j a(x)^2 + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\intercal$. Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2\xi_i\xi_j$.

Exemple 4.1.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x)\xi\otimes\xi + b^2(x)\xi'\otimes\xi' + c^2(x)\xi''\otimes\xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi\otimes\xi$. Repetint-ho per $\xi'\otimes\xi'$ i $\xi''\otimes\xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.

Observació 4.1.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen d'x. Això es pot resoldre amb el següent lema.

Lema 4.1.7. *(Descomposició de l'error mètric) Sigui $\mathcal{P}$ l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en $\mathbb{R}^n$ i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0, \infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A)\xi_i^{(k)}\xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.

Observació 4.1.8. La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$ per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes q_{lin} i q_{alt} desapareguin fins a terme $O(1/\lambda)$.

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb W

  $$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W = i\xi_j a(x) e^{ix\cdot\xi} \nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

  i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de $u(x)$, $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$. Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 (REVISAR!!!). Podem fer el mateix amb $\nabla_i W^\intercal \nabla_j u$ i obtenim

  $$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

  $$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = (-a^2(x)\xi_i\xi_j e^{2ix\cdot\xi})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

  I ara només cal utilitzar que la incrustació té co-dimensió ≥ 2 per escollir un vector complex tal que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$ Com està definit aquest producte?. Podem prendre, per exemple,

  $$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)$$

  on $\zeta(x)$ i $\eta(x)$ són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent $T_{u(x)}u(D)$.

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

  $$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda}\left(\sin(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) + \cos(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)$$

  amb les següents propietats:

  - Norma C^0 petita Explicar C-normes:

    $$||W||_{C^0} \leq C\frac{||a||_{C^0}}{\lambda}$$

  - Terme principal en ∇W

    $$\begin{aligned}\nabla W =& a(x)\left(\cos(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) - \sin(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)\\ &+ O_{||a||_{C^0}, ||\nabla a||_{C^0}, ||\nabla\zeta||_{C^0}, ||\nabla\eta||_{C^0}}(1/\lambda)\end{aligned}$$

  - Error mètric petit:

    $$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W(x) - a^2(x)\xi_i\xi_j = O(1/\lambda)$$

– Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

– Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

Observació 4.1.9. Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor. Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned} \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : & D \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, t) \mapsto \gamma(x, t) \end{aligned}$$

on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posant $\dot\gamma$ la derivada respecte de t, tenim que

$$\nabla W^\intercal(x) \nabla W(x) = \left(\dot\gamma_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot\gamma_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)\right) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x cal trobar $\gamma(x, \cdot)$ tal que (1) $\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2 = a^2$ i (2) $t \mapsto \dot\gamma(x, t)$ sigui 2π-periòdic i $\int \dot\gamma dt = 0$ De manera que $t \mapsto \gamma(x, t)$ també ha de ser 2π-periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat $\overline{D}$. IMPORTANT Per a després, NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ, que es carrega un terme a un error d'ordre $O(1/\lambda)$.

Lema 4.1.10 (Lema d'iteració)**.** *Sigui $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió suau estrictament curta, tal que $h := g - \nabla u^\intercal \nabla u$ obeeix*

$$||h||_{C^0} \leq e_h \tag{4.1.1}$$

per algun $e_h > 0$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió suau estrictament curta $u_{[1]} = u + U$, on

$$\begin{aligned} ||U||_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ ||\nabla U||_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

i $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^\intercal \nabla u_{[1]}$ obeeix

$$||h_{[1]} - h||_{C^0} \leq \varepsilon. \tag{4.1.3}$$

Prova. Pel lema 4.1.7, tenim que h es pot escriure com

$$h(x) = \sum_k \Gamma_{(k)}^2(h(x)) \xi^{(k)} \otimes \xi^{(k)}$$

on per cada $h(x)$ hi ha com a molt K termes no-nuls.

Per la compacitat d' $h(D) \subseteq \mathcal{P}$, existeix un nombre finit de sumands que són funcions no-nul·lesNon-vanishing, mirar la traducció. Reanomenem aquests sumands d'aquesta manera:

$$\Gamma_{(1)}^2(h(x)) \xi^{(1)} \otimes \xi^{(1)}, \Gamma_{(2)}^2(h(x)) \xi^{(2)} \otimes \xi^{(2)}, \ldots, \Gamma_{(N)}^2(h(x)) \xi^{(N)} \otimes \xi^{(N)}$$

Prenent la traça, veiem que

$$||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq ||h||_{C^0}^{1/2} \leq e_h^{1/2}$$

Mirar d'on surt això (Sembla Cauchy-Schwarz, però què passa amb la traça de h?) Ara podem fer N correccions a u de la mateixa manera que hem fet abans, en les direccions

$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N)}$, per cancel·lar aquests errors. En concret, per un $\delta > 0$, definim de manera recursiva $u_j = u_{j-1} + (1-\delta)^{1/2} U_j$, amb $u_0 = u$ i

$$U_j = \frac{\Gamma_{(j)}(h(x))}{\lambda_j} \left(\sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta_j(x) + \cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta_j(x) \right)$$

per uns certs λ_j i $\zeta_j, \eta_j : D \to \mathbb{R}^n$ unitaris.

Prenem $\delta > 0$ per tal d'assegurar curtedat estricta no sé com es diu shortness la veritat. De fet, fixem $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2e_h^{1/2}}$ per tal que $h \geq \delta I$. uiuiui això mirar-ho bé

Escollint λ_j prou gran, tenim

–
$$||U_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.1.4}$$

–
$$\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h) \xi^{(j)} (\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta) + \mathrm{err}_j, \quad ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.1.5}$$

–
$$h_j = h_{j-1} - (1-\delta) \Gamma_{(k)}^2 (h) \xi^{(j)} \xi^{(j)} + \mathrm{err}'_j, \quad ||\mathrm{err}'_j||_{C^0} \ll \delta^2 \tag{4.1.6}$$

Les dues primeres són fàcils d'entendre, però la tercera l'hem de revisar.

On $h_j = g - \nabla u_j^{\intercal} \nabla u_j$.

Per tal de concloure la prova, verifiquem que $U = U_1 + \cdots + U_N$ i $u_{[1]} = u_N = u + U$ satisfan les propietats desitjades.

- És fàcil veure que $||U_j|| \ll \varepsilon$ implica $||U||_{C^0(D)} \ll \varepsilon$.
- A més, de $\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h) \xi^{(j)} (\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)}) \eta) + \mathrm{err}_j$ i $||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq e_h^{1/2}$ tenim que $||\nabla U||_{C^0(D)} \leq K e_h^{1/2} + \sum_{j=1}^N ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \leq 2K e_h^{1/2}$ si es prenen les constants adequades.
- Finalment, sumant els termes h_j obtenim

$$h_N = h - (1-\delta) \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{(j)}^2 (h) \xi^{(j)} \xi^{(j)} + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{err}'_j = \delta h + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{err}'_j$$

  i imposant que $u_{[1]} = u_N$ sigui estrictament curta, $h_{[1]} = h_N \geq \delta^2 I$, obtenim el resultat.

□

Ara podem iterar diverses vegades per concloure la prova del teorema 4.1.3.

Prova del teorema 4.1.3. Sigui $e_{h,[k]} > 0$ una successió tal que

$$\sum_k e_{h,[k]} \leq \epsilon, \quad \sum_k e_{h,[k]}^{1/2} < \infty.$$

Pel lema 4.1.10, obtenim una successió d'aplicacions suaus estrictament curtes $u_{[k]}$ tal que $u_{[0]} = u$ i

$$||g - \nabla u_{[k]}^{\intercal} \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k]}$$
$$||\nabla u_{[k+1]} - \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq C e_{h,[k]}^{1/2}$$
$$||u_{[k+1]} - u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k+1]},$$

demostrant el teorema. □

revisar això últim perquè just estava parlant amb la marina

4.1.1 Extensions

Extensió a incrustacions de varietats

Per estendre el teorema 4.1.3 a immersions a superfícies generals, només cal reduir a cartes coordenades. Per estendre'l a incrustacions usem que, per la compacitat d'M, podem trobar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{x,y} \operatorname{dist}(u(x), u(y)) \geq \varepsilon.$$

Ara només cal dur a terme la construcció en un entorn de 0.01ε.entendre millor això últim perquè és bastant random

Refinament de Kuiper: incrustació de codimensió 1

Modificant la forma de la correcció, podem aconseguir la mateixa construcció amb només co-dimensió 1. Sigui $\eta : D \to \mathbb{R}^3$ el camp vectorial unitari en $u(D)$, i sigui

$$\zeta = \nabla u(\nabla u^\intercal \nabla u)^{-1}\xi.$$

Prenem

$$U = \frac{1}{\lambda}\Big(\gamma_1(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\zeta}(x) + \gamma_2(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\eta}(x)\Big)$$

on

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{|\zeta|^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{|\zeta|},$$

i $u_1 = u + U$. Això porta a paper i boli

$$\nabla u_1^\intercal \nabla u_1 = \nabla u^\intercal \nabla u + \frac{1}{|\zeta|^2}\left(2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2\right)\xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x i $a = a(x) \in \mathbb{R}$ volem que γ sigui tal que

- posar això amb la cosa aquella de (1) i (2)
- $(1 + \dot{\gamma}_1)^2 + \dot{\gamma}_2^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1$,
- $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$ és 2π-periòdica i $\int \dot{\gamma} dt = 0$

i tal que $|\dot{\gamma}| \leq C|a|$. Això és possible perquè l'envolupant convexa de $\{(x, y) : (1+x)^2 + y^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1\}$ conté el 0.

Capítol 5

Cinta de Moebius de paper òptima

5.1 Explicació del Schwartz

En aquesta secció expliquem el paper de Richard Evan Schwartz, en què demostra que la sinta de Moebius de paper òptima ha de tenir relació d'aspecte més gran que $\sqrt{3}$, i que qualsevol successió de cintes de Moebius amb relació d'aspecte convergint a $\sqrt{3}$ convergeix a la cinta de Moebius triangular.

5.1.1 Introducció al problema

Definició 5.1.1. *Una* cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte λ *és una aplicació infinitament diferenciable (suau)* $I : M_\lambda \to \mathbb{R}^3$*, on* M_λ *és la cinta de Moebius plana obtinguda amb la següent identificació d'un rectangle*

$$M_\lambda = ([0, \lambda] \times [0, 1])/\sim, \qquad (0, y) \sim (\lambda, 1 - y)$$

Una aplicació isomètrica *és una aplicació que preserva longituds d'arc. L'aplicació és una* incrustació *si és injectiva, i una* immersió *en general Interessant veure si aquesta notació la seguim utilitzant o si se l'ha inventat. Sigui* $\Omega = I(M_\lambda)$*. Diem que* Ω *està* incrustada *si* I *és una incrustació.*

Exemple 5.1.2. Anomenem *cinta de Moebius de paper triangular* la cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte $\lambda = \sqrt{3}$.

el shwartz menciona aquí uns papers que expliquem més sobre la banda de moebius, si volem escriure més sobre el tema els podem utilitzar.

Teorema 5.1.3 (Principal)**.** *Una cinta de Moebius de paper suau incrustada en* $\mathbb{R}^3$ *té relació d'aspecte més gran que* $\sqrt{3}$*.*

Teorema 5.1.4 (Límit Triangular)**.** *Sigui* $I_n : M_{\lambda_n} \to \mathbb{R}^3$ *una successió de cintes de Moebius de paper suaus incrustades, tals que* $\lambda_n \to \sqrt{3}$*. Aleshores,* I_n *convergeix uniformement a una cinta de Moebius de paper triangular, llevat d'isometria.*

5.1.2 Definicions

Definició 5.1.5. *Sigui* $I : M_\lambda \to \Omega$ *una cinta de Moebius de paper incrustada. Un* plec *a* Ω *és un vector* $N : \Omega \to \mathbb{S}^2$ *que a cada punt de* Ω *li assigna un vector normal unitari.*

5.1.3 Lemes addicionals

Per demostrar el teorema principal, es necessiten aquests dos lemes.

Lema 5.1.6 (T)**.** *Una cinta de Moebius de paper incrustada suau té un*

Capítol 6

Conclusions

Hem après un munt

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY). *Nom del treball.* Cambridge University Press.