Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 11 de març de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- MIrar article Nash, Gromov
- Mirar quin Cn agafa al paper band

Agraïments

Bla, bla, bla

Índex

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- Explicats

Estructura de la memòria

Tremendo

Guia de lectura

Faig servir incasasasasrustació, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

Capítol 3

Suavitat i diferenciabilitat

L'Ignasi m'ha dit que el que hauria de ressaltar més és la diferència entre C^1 i C^∞. Potser podria comentar alguns dels resultats que són vàlids en un i no en l'altre?

3.1 Suavitat

El que hi ha aquí ho estic traient de wikipedia. Preguntar a l'Ignasi per una font més bona.

Definició 3.1.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-*vegades derivable contínuament*, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si la derivada d'ordre k,*

$$f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f,$$

existeix i és contínua en U. Anomenem l'índex k suavitat de f. Diem que f és suau *o* infinitament derivable *si existeix la derivada de qualsevol ordre.*

Observacions 3.1.2.

- f és 0 vegades derivable contínuament si i només si f és contínua.
- Si f és k vegades derivable contínuament, aleshores també és j vegades derivable contínuament per $0 \leq j \leq k$.

Definició 3.1.3. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

De la mateixa manera, podem definir aquests conceptes per funcions de diverses variables.

Definició 3.1.4. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-vegades derivable contínuament, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si totes les seves derivades parcials d'ordre k,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

tals que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, existeixen i són contínues en U. És a dir, si f és k-vegades derivable contínuament en cada component de U.

Definició 3.1.5. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

Observacions 3.1.6. Potser caldria donar la definició explícita en el cas de funcions de diverses variables.

- Moltes vegades, en lloc de $C^k(U)$ es fa servir $C^k(U;\mathbb{R}^m)$ per a funcions $f : U \to \mathbb{R}^m$.
- També escriurem simplement C^k en lloc de $C^k(U)$ si el domini és clar pel context.

3.1.1 Classes de diferenciabilitat com espais normats

A continuació definirem normes en $C^k(U)$ i $C^\infty(U)$ que ens permetran tractar-les com espais vectorials normats.

Definició 3.1.7. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció. Definim la norma $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ de f com*

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)},$$

on $\|\cdot\|_{L^\infty(U)}$ és la norma del suprem en U, tal que $\|g\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x\in U} |g(x)|$.

Aquí podríem proposar i demostrar que $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ és efectivament una norma, ho tenim a `https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek_Norm_is_Norm`. També cal decidir si definim explícitament la D^α.

3.2 Fonaments de geometria diferencial

Aquí hauriem de parlar d'embedding preferiblement.

Capítol 4

Teorema Nash-Kuiper C^1

4.1 Paper de Nash del 1954

- Parlar abans de la diferència entre el punt de vista extrínsec i intrínsec de la geometria, un cop haguem parlat de geodif.
- Veurem que una varietat de dimensió n es pot ficar en un espai E^{2n}, on aquí diem que E^k és l'espai euclidià de dimensió k.
- Interessant que el procés de les correccions sempre augmenta les distàncies localment, motiu pel qual el primer ha de ser curt. Diu Nash que l'anem "estirant".
- Mirar el tema de si la caracterització de una immersió curta és diferent que a la que dona SJO.
- Si la varietat és tancada només cal canviar l'escala de E^k per fer la immersió curta. Si és oberta cal fer una cosa més complicada.
- Coses a tenir en compte:
  - g_{ij} és la mètrica intrínseca, h_{ij} és la mètrica induïda.
  - $\{x^i\}$ són les coordenades en la varietat M.
  - $\{z^\alpha\}$ són les coordenades en E^k.
  - Amb la immersió, $z^\alpha = z^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$.
  - La mètrica induïda és $h_{ij} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^j}$. Normalment estaria multiplicat per una $g_{\alpha\beta}$ que no apareix perquè en aquest cas és la mètrica euclidiana.
- Cada correcció es va fent en infinites "etapes", cada una d'elles corregint la correcció de la etapa anterior. L'important aquí és que cada correcció manté el fet que la immersió sigui curta, tot i que cada vegada menys. Cada etapa ens hi hauria d'apropar la meitat del camí. Per exemple, després de la primera, l'error hauria de ser

$$g_{ij} - \overline{h_{ij}} \approx \frac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})$$

- Ho fem d'aquesta manera perquè així ens assegurem que cada correcció només ha d'augmentar la mètrica.
- Cada etapa es divideix en passes (passos?), que afecten només localment la immersió augmentant la mètrica en una sola direcció.

- Per tal de dividir en passos, dividim la varietat en una sèrie d'entorns amb n paràmetres C^∞ no singulars, i cada entorn es pot trobar amb un nombre finit d'altres entorns.
- Per cada un d'aquests entorns, per exemple N_p, prenem una funció φ_p positiva a l'interior de N_p i 0 fora d'ell. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les φ_p valgui 1 en qualsevol punt. (Això com es fa? Diu que és estàndard però em sembla una mica complicat si ha de ser C^∞.) Això serveix per distribuir la çàrrega"de la correcció.
- En cada entorn, la çàrrega"de la correcció es divideix també entre les passes. Sigui $\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ l'error mètric després d'unes quantes etapes. A la propera voldríem augmentar la mètrica més o menys $\frac{1}{2}\delta_{ij}$, de manera que a l'entorn N_p voldríem augmentar la mètrica en $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$. Per fer-ho haurem de trobar un tensor definit positiu β_{ij} que sigui C^∞ i aproximi δ_{ij}.
- $$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  on x^i són coordenades de l'entorn N_p, a_ν funcions no-negatives C^∞ i ψ^ν funcions lineals en x^i.
- A l'apartat **The normal fields**, diu que necessita dos camps vectorials unitaris C^∞ normals a la immersió i ortogonals entre ells, ζ^α i η^α. Això és lo de la co-dimensió 2 que després Kuiper canvia a 1.
- La pertorbació associada a a_ν i ψ^ν és

  $$\boxed{\bar{z}^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu) + \eta^\alpha\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)} \tag{4.1.1}$$

  on λ és un paràmetre que podem triar.
- El canvi mètric és $\sum_\alpha \frac{\partial\bar{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$. No cal calcular tots els termes en detall, perquè molts contenen $1/\lambda$ o $1/\lambda^2$ i, per tant, convergeixen uniformement a 0 quan $\lambda \to \infty$. Altres termes es cancel·len. CALDRIA FER AIXÒ A MÀ.
- λ no fa desaparèixer els termes en què s'ha derivat les trigonomètriques, perquè en surt una λ de dins. Ara bé, ens queden termes de l'estil $\sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}(-\sin(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$, o amb les i i j bescanviades o amb η^α en comptes del ζ^α. Cadascun d'aquests termes són 0, ja que ζ i η són normals a la immersió.
- La resta de termes tindran el producte de dues funcions trigonomètriques o el quadrat d'una d'elles. Les que tinguin el producte també contenen $\zeta^\alpha\eta^\alpha$, i desapareixen per ortogonalitat.
- El que queda, doncs és

  $$\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 a_\nu(\sin^2(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + \sum_\alpha(\eta^\alpha)^2 a_\nu(\cos^2(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  i si traiem factor comú i usem que els vectors són unitaris, ens queda

  $$a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  que és el que volíem.

- I amb això veiem que l'error mètric és $O(1/\lambda)$.
- A **Size of immersion...** repetim que la pertorbació canvia segons $O(1/\lambda)$ després de cada passa. Mirant el que fa a la primera derivada, veiem el canvi que fa en un entorn totes les passes d'una etapa, i queda que el canvi en les derivades acaba sent

$$\left|\left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\text{final}} - \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\text{inicial}}\right| \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O(1/\lambda_1) + \cdots + O(1/\lambda_\nu) + \cdots$$

LA VERITAT ÉS QUE NO SÉ D'ON SURTEN ELS TRES PUNTS DEL FINAL.
- A **Global considerations and convergence** volem veure quina λ s'ha d'agafar.
  - B_1 és el màxim error que volem en l'aproximació del canvi mètric, $a_\nu \left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right)$.
  - B_2 és el màxim error $O(1/\lambda)$ que volem en el canvi de les primeres derivades.
  - B_3 és la cota de $\overline{z}^\alpha - z^\alpha$.
- Després d'una etapa, la nova mètrica induïda és $h'_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Posem $h'_{ij} = g_{ij} - \delta'_{ij}$, on $\delta'_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}$ i e_{ij} és un terme d'error. Per tal que la successió convergeixi, necessitem que δ'_{ij} sigui estrictament més petita que δ_{ij}. Si imposem que en tot punt de N_p el màxim dels components de e_{ij} sigui menor o igual a un sisè del màxim de δ_{ij}, aleshores el màxim de δ'_{ij} serà menor o igual a dos terços del màxim de δ_{ij}. MIRAR SI AIXÒ ÉS ALGUNA NORMA C^k O ALGO.
- Volem que δ'_{ij} sigui definida positiva, que ho podem assegurar si imposem que la mida de e_{ij} sigui més petita que un cert ε_p que depèn de l'entorn compacte N_p. Com cada entorn se superposa amb un nombre finit σ d'altres entorns, es poden trobar límits per e_{ij} tal que el que busquem sigui cert en tots ells. Anomenem ε_p^* el mínim d'aquestes limitacions.
- L'error ve de l'aproximació de δ_{ij} per β_{ij} i dels passos. Per tant, imposant $(\delta_{ij} - \beta_{ij}) < \varepsilon_p^*$, tenim que $(\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij} - \frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij}) < \frac{1}{2}\varepsilon_p^*$. Així, podem imposar que en un entorn N_p els passos tinguin aquesta seqüència de B_1: $B_{11} \leq \frac{1}{4}\varepsilon_p^*$, $B_{12} \leq \frac{1}{8}\varepsilon_p^*$, $B_{13} \leq \frac{1}{16}\varepsilon_p^*$, etc.
- A **Performability of the steps** simplement diu que a cada pas tenim una immersió C^∞ i que tot és definit positiu. La única font de negativitat és l'error, però això sempre es pot contenir amb λ.
- A **General organization** es fa aquest resum:
  - El procés es fa en una sèrie d'etapes que prenen una immersió curta C^∞ i en retornen una amb un error mètric com a molt $2/3$ del de l'anterior.
  - La varietat es divideix en entorns N_p.
  - Cada etapa es divideix en passos. A cada etapa, la correcció és pesada per φ_p i dividida per tal que la duguin a terme les passes.
  - Si la varietat és oberta, hi ha un nombre infinit de passos per etapa, però a cada porció compacta hi ha un nombre finit.
- A **Convergence of the immersion** diu que necessitem que les B_3 del pas r de l'etapa s siguin més petites que $2^{-(r+s)}$, i el mateix per B_2. La manera per fer-ho és escollir que la mida de β_{ij} estigui entre $9/10$ i $9/8$ de la de δ_{ij}. Això fa que el canvi en les derivades estigui limitat per una geomètrica de raó $\sqrt{5/6}$ MIRAR AIXÒ, de manera que les funcions C^∞ convergeixen uniformement a una de C^1.

- ES MOLT IMPORTANT QUE ESCRIVIM ALGUNA COSA SOBRE LA DIFERÈNCIA ENTRE IMMERSIONS I INCRUSTACIONS.
- A **Isometric Imbeddings** QUAN PARLA DE CONJUNT LÍMIT CREC QUE ES REFEREIX A LA PART DEL CONJUNT OBERT MÉS LLUNYANA, EL QUE ESTARIA JUST A TOCAR DE LA FRONTERA diu que per incrustacions és bàsicament el mateix, però necessitem controlar les auto-interseccions. Per veure que pas a pas no n'hi ha, cal comprovar que per λ prou gran les evitem.
- Sigui M un conjunt tancat de l'incrustació que conté N_p al seu interior. M té un entorn obert H tal que no hi ha punt de H amb dues rectes perpendiculars a M. MIRAR AIXÒ, HI HA UNA CITA.
- Posem Q la unió del conjunt límit amb la part de la incrustació que no està a l'interior de M. Aleshores Q és tancat i una pertorbació prou petita de N_p^* no afectarà Q. AQUÍ NO SÉ QUÈ ÉS N_p^*. EN GENERAL, AQUEST APARTAT ÉS POSA MOLT TÈRBOL.
- A **Constructing the initial immersion** explica que si la varietat té dimensió n, sabem que es pot trobar una incrustació en E^{2n} no-singular i analítica. Es pot prendre aquesta immersió i escalar-la per a que sigui curta.
- Per un conjunt obert, podem recobrir la varietat per entorns N_p pesats amb funcions C^∞ φ_p amb paràmetres x_{pi} tals que $|x_{pi}| \leq 1$. Volem que en qualsevol punt de la varietat els conjunts d'aquest recobriment se superposin un nombre finit de vegades s, com a molt.
- Podem dividir els conjunts N_p en s classes, de manera que en cada classe no hi hagi conjunts que es superposin.
- Podem definir una incrustació en un espai $s(n+2)$ dimensional, a partir de funcions $u_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, $v_\sigma = \varepsilon_p^2 \varphi_p$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, i $w_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p x_{pi}$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, on x_{pi} la coordenada i-èssima de N_p i $\{\varepsilon_p\}_p$ és una successió monòtona decreixent de nombres positius que convergeix a 0.
- Observem: que totes aquestes funcions són C^∞, que dos punts de conjunts interiors a conjunts diferents tenen raons v_σ/u_σ diferents, i que punts interiors a un mateix entorn N_p tenen $w_{\sigma i}$ diferents. (EL CONJUNT LÍMIT ÉS L'ORIGEN PERÒ CAP PUNT ÉS ENVIAT A L'ORIGEN)
- Podem escollir que la incrustació sigui curta escollint la successió $\{\varepsilon_p\}_p$. Si la mètrica induïda pels primers p entorns és curta per un factor $\frac{1}{3}(2-1/p)$, podem escollor $p+1$ tal que sigui curta per un factor $1/3(2-1/(p+1))$. Amb això tenim una incrustació curta i C^∞ en $E^{s(n+2)}$, i a partir de projeccions podem arribar a E^{2n+1}
- A **General summary** enumera els quatre teoremes que ha demostrat en aquest article:
  - **Teorema 4.1.1.** *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una incrustació isomètrica C^1 en E^{2n}.*
  - **Teorema 4.1.2.** *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió n té una immersió isomètrica C^1 en E^{2n} i una incrustació isomètrica C^1 en E^{2n+1}.*

-

  Teorema 4.1.3. *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una immersió o incrustació C^∞ en E^k amb $k \geq n+2$, aleshores també té una immersió o incrustació, respectivament, isomètrica en E^k.*

-

  Teorema 4.1.4. *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió n té una immersió o incrustació C^∞ curta en E^k amb $k \geq n+2$ que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o incrustació, respectivament, isomètrica en E^k del mateix tipus.*

- Per últim, un comentari super interessant que fa és que potser es pot canviar $n+2$ per $n+1$ si es fa una una pertorbació diferent que només necessita una direcció, que crec que és just el que fa Kuiper!

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} \tag{4.1.2}$$

Lema 4.1.5. *L'equació 4.1.2 es pot satisfer amb les condicions necessàries.*

Prova. Les matrius simètriques definides positives formen un con de dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$.D'on surt això? És molt estrany És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials MIRAR A WIKIPEDIA EL QUE ÉS geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre W d'aquests entorns, on W depèn només de n.

Una matriu qualsevol representada per un punt d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{llll} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \dots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \dots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \dots \end{array}$$

els coeficients per q representacions d'una matriu del con. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C^*_{\mu,\nu} = \frac{C_{\mu,\nu}\exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_\rho \exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

de manera que aquests coeficients són C^∞ com a funcions de la matriu que representen. Per cada matriu, com a molt $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients $C^*_{\mu,\nu}$ són no-nuls.

Si ara considerem que β_{ij} defineix una aplicació C^∞ de N_p al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \tag{4.1.3}$$

on $M_{(\mu,\nu)ij}$ són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu $M_{(\mu,\nu)ij}$ obtenim n autovectors unitaris ortogonals $\{V_r\}$ i els seus autovalors $\{v_r\}$.

Si ψ_r és per cada r la funció lineal dels paràmetres locals pels quals $\sqrt{v_r}V_r$ és el vector gradient Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer, tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{4.1.4}$$

i, substituint en 4.1.3, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_r}{\partial x^j} \tag{4.1.5}$$

i, agrupant termes en a_ν, obtenim el resultat. □

4.2 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 4.2.1. *Sigui (M, g) una superfície, $N \geq \dim M + 1$ i $u : M \to \mathbb{R}^N$ una incrustació estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en M s'escurça (estrictament) sota ∇u. Aleshores u es pot aproximar uniformement per incrustacions isomètriques C^1.*

Haurem d'explicar què és una incrustació isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \to \varepsilon\mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació *curta.*
Observació 4.2.2. De fet, qualsevol incrustació C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la incrustació estàndard $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |X| = 1\}$ fins translació i rotació.

El teorema 4.2.1 es demostra amb *integració convexa.*

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D. Una aplicació $u : D \to \mathbb{R}^n$ és una *immersió* per ara direm incrustació als embeddings i immersions als *immersions* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x. La mètrica en D induïda per u és de la forma Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^\intercal(x)\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar isometries si $\nabla u^\intercal \nabla u = g$, i diem que és *(estrictament) curta* si $\nabla u(x)^\intercal \nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.
Teorema 4.2.3. *Sigui $n \geq 4$ i $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió isomètrica estrictament curta. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió isomètrica C^1 $\tilde{u} : D \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(D)} < \varepsilon$.Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*
Observació 4.2.4. Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix\cdot\xi}$, però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposem que per cada $I \in \mathcal{I}$ que existeixi $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{U}_I, \quad \overline{\overline{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\intercal \nabla u_1$. On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només agafo el primer terme.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla \overline{U}_I^\intercal \nabla U_I \right) - \sum_I \left(\nabla u^\intercal \nabla U_I + \nabla U_I^\intercal \nabla u \right) - \sum_{I,J:J \neq \overline{I}} \nabla U_I^\intercal \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt}.

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x)\mathbf{n}(x) e^{\lambda i x\cdot\xi},$$

amb $a : D \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \to \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{n}} = 1$. Per tal que sigui real, definim també $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x)\overline{\mathbf{n}}(x) e^{-\lambda i x\cdot\xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned}\nabla_j W &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x) e^{\lambda i x\cdot\xi} + \frac{1}{\lambda}\nabla_j (a(x)\mathbf{n}(x)) e^{\lambda i x\cdot\xi}\\ &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x) e^{\lambda i x\cdot\xi} + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS O(1/LAMBDA)!!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned}\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x) &= (-i\xi_i a(x) e^{-\lambda i x\cdot\xi})(i\xi_j a(x) e^{\lambda i x\cdot\xi})\overline{\mathbf{n}}(x)\cdot\mathbf{n}(x) + O(\frac{1}{\lambda})\\ &= \xi_i\xi_j a(x)^2 + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\intercal$. Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2\xi_i\xi_j$.

Exemple 4.2.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x)\xi\otimes\xi + b^2(x)\xi'\otimes\xi' + c^2(x)\xi''\otimes\xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi\otimes\xi$. Repetint-ho per $\xi'\otimes\xi'$ i $\xi''\otimes\xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.

Observació 4.2.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen d'x. Això es pot resoldre amb el següent lema.

Lema 4.2.7. *(Descomposició de l'error mètric) Sigui $\mathcal{P}$ l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en $\mathbb{R}^n$ i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0,\infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A)\xi_i^{(k)}\xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.

Observació 4.2.8. La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$ per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes q_{lin} i q_{alt} desapareguin fins a terme $O(1/\lambda)$.

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb W

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W = i\xi_j a(x) e^{ix\cdot\xi} \nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de $u(x)$, $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$. Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 (REVISAR!!!). Podem fer el mateix amb $\nabla_i W^\intercal \nabla_j u$ i obtenim

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = (-a^2(x)\xi_i\xi_j e^{2ix\cdot\xi})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

I ara només cal utilitzar que la incrustació té co-dimensió ≥ 2 per escollir un vector complex tal que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$ Com està definit aquest producte?. Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)$$

on $\zeta(x)$ i $\eta(x)$ són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent $T_{u(x)}u(D)$.

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda}\left(\sin(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) + \cos(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)$$

amb les següents propietats:

  - Norma C^0 petita Explicar C-normes:

$$||W||_{C^0} \leq C\frac{||a||_{C^0}}{\lambda}$$

  - Terme principal en ∇W

$$\begin{aligned}\nabla W =& a(x)\left(\cos(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) - \sin(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)\\ &+ O_{||a||_{C^0},||\nabla a||_{C^0},||\nabla\zeta||_{C^0},||\nabla\eta||_{C^0}}(1/\lambda)\end{aligned}$$

  - Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W(x) - a^2(x)\xi_i\xi_j = O(1/\lambda)$$

  - Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

  - Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

Observació 4.2.9. Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor. Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned}\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) : &D\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}^2\\ &(x,t) \mapsto \gamma(x,t)\end{aligned}$$

on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posant $\dot{\gamma}$ la derivada respecte de t, tenim que

$$\nabla W^{\intercal}(x)\nabla W(x) = \left(\dot{\gamma}_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot{\gamma}_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)\right) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x cal trobar $\gamma(x, \cdot)$ tal que (1) $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = a^2$ i (2) $t \mapsto \dot{\gamma}(x,t)$ sigui 2π-periòdic i $\int \dot{\gamma} dt = 0$ De manera que $t \mapsto \gamma(x,t)$ també ha de ser 2π-periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat $\overline{D}$. IMPORTANT Per a després, NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ, que es carrega un terme a un error d'ordre $O(1/\lambda)$.

Lema 4.2.10 (Lema d'iteració). *Sigui $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió suau estrictament curta, tal que $h := g - \nabla u^{\intercal} \nabla u$ obeeix*

$$||h||_{C^0} \leq e_h \tag{4.2.1}$$

per algun $e_h > 0$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió suau estrictament curta $u_{[1]} = u + U$, on

$$\begin{aligned} ||U||_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ ||\nabla U||_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

i $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^{\intercal} \nabla u_{[1]}$ obeeix

$$||h_{[1]} - h||_{C^0} \leq \varepsilon. \tag{4.2.3}$$

Prova. Pel lema 4.2.7, tenim que h es pot escriure com

$$h(x) = \sum_k \Gamma_{(k)}^2(h(x)) \xi^{(k)} \otimes \xi^{(k)}$$

on per cada $h(x)$ hi ha com a molt K termes no-nuls.

Per la compacitat d' $h(D) \subseteq \mathcal{P}$, existeix un nombre finit de sumands que són funcions no-nul·lesNon-vanishing, mirar la traducció. Reanomenem aquests sumands d'aquesta manera:

$$\Gamma_{(1)}^2(h(x))\xi^{(1)} \otimes \xi^{(1)}, \Gamma_{(2)}^2(h(x))\xi^{(2)} \otimes \xi^{(2)}, \ldots, \Gamma_{(N)}^2(h(x))\xi^{(N)} \otimes \xi^{(N)}$$

Prenent la traça, veiem que

$$||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq ||h||_{C^0}^{1/2} \leq e_h^{1/2}$$

Mirar d'on surt això (Sembla Cauchy-Schwarz, però què passa amb la traça de h?) Ara podem fer N correccions a u de la mateixa manera que hem fet abans, en les direccions $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$, per cancel·lar aquests errors. En concret, per un $\delta > 0$, definim de manera recursiva $u_j = u_{j-1} + (1-\delta)^{1/2} U_j$, amb $u_0 = u$ i

$$U_j = \frac{\Gamma_{(j)}(h(x))}{\lambda_j} \left(\sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta_j(x) + \cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta_j(x)\right)$$

per uns certs λ_j i $\zeta_j, \eta_j : D \to \mathbb{R}^n$ unitaris.

Prenem $\delta > 0$ per tal d'assegurar curtedat estricta no sé com es diu shortness la veritat. De fet, fixem $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2e_h^{1/2}}$ per tal que $h \geq \delta I$. uiuiui això mirar-ho bé

Escollint λ_j prou gran, tenim

–

$$||U_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.2.4}$$

–
$$\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x\cdot\xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x\cdot\xi^{(j)})\eta) + \mathrm{err}_j, \quad ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.2.5}$$

–
$$h_j = h_{j-1} - (1-\delta)\Gamma^2_{(k)}(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \mathrm{err}'_j, \quad ||\mathrm{err}'_j||_{C^0} \ll \delta^2 \tag{4.2.6}$$

Les dues primeres són fàcils d'entendre, però la tercera l'hem de revisar.

On $h_j = g - \nabla u_j^\intercal \nabla u_j$.

Per tal de concloure la prova, verifiquem que $U = U_1 + \cdots + U_N$ i $u_{[1]} = u_N = u + U$ satisfan les propietats desitjades.

- És fàcil veure que $||U_j|| \ll \varepsilon$ implica $||U||_{C^0(D)} \ll \varepsilon$.
- A més, de $\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x\cdot\xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x\cdot\xi^{(j)})\eta) + \mathrm{err}_j$ i $||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq e_h^{1/2}$ tenim que $||\nabla U||_{C^0(D)} \leq K e_h^{1/2} + \sum_{j=1}^N ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \leq 2Ke_h^{1/2}$ si es prenen les constants adequades.
- Finalment, sumant els termes h_j obtenim
$$h_N = h - (1-\delta)\sum_{j=1}^N \Gamma^2_{(j)}(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j = \delta h + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j$$
i imposant que $u_{[1]} = u_N$ sigui estrictament curta, $h_{[1]} = h_N \geq \delta^2 I$, obtenim el resultat.

□

Ara podem iterar diverses vegades per concloure la prova del teorema 4.2.3.

Prova del teorema 4.2.3. Sigui $e_{h,[k]} > 0$ una successió tal que
$$\sum_k e_{h,[k]} \leq \epsilon, \quad \sum_k e_{h,[k]}^{1/2} < \infty.$$
Pel lema 4.2.10, obtenim una successió d'aplicacions suaus estrictament curtes $u_{[k]}$ tal que $u_{[0]} = u$ i
$$\begin{aligned} ||g - \nabla u_{[k]}^\intercal \nabla u_{[k]}||_{C^0} &\leq e_{h,[k]} \\ ||\nabla u_{[k+1]} - \nabla u_{[k]}||_{C^0} &\leq C e_{h,[k]}^{1/2} \\ ||u_{[k+1]} - u_{[k]}||_{C^0} &\leq e_{h,[k+1]}, \end{aligned}$$
demostrant el teorema. □

revisar això últim perquè just estava parlant amb la marina

4.2.1 Extensions

Extensió a incrustacions de varietats

Per estendre el teorema 4.2.3 a immersions a superfícies generals, només cal reduir a cartes coordenades. Per estendre'l a incrustacions usem que, per la compacitat d'M, podem trobar $\varepsilon > 0$ tal que
$$\inf_{x,y} \mathrm{dist}(u(x), u(y)) \geq \varepsilon.$$
Ara només cal dur a terme la construcció en un entorn de 0.01ε.entendre millor això últim perquè és bastant random

Refinament de Kuiper: incrustació de codimensió 1

Modificant la forma de la correcció, podem aconseguir la mateixa construcció amb només co-dimensió 1. Sigui $\eta : D \to \mathbb{R}^3$ el camp vectorial unitari en $u(D)$, i sigui

$$\zeta = \nabla u(\nabla u^\intercal \nabla u)^{-1}\xi.$$

Prenem

$$U = \frac{1}{\lambda}\Big(\gamma_1(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\zeta}(x) + \gamma_2(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\eta}(x)\Big)$$

on

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{|\zeta|^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{|\zeta|},$$

i $u_1 = u + U$. Això porta a paper i boli

$$\nabla u_1^\intercal \nabla u_1 = \nabla u^\intercal \nabla u + \frac{1}{|\zeta|^2}\left(2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2\right)\xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x i $a = a(x) \in \mathbb{R}$ volem que γ sigui tal que

- posar això amb la cosa aquella de (1) i (2)
- $(1 + \dot{\gamma}_1)^2 + \dot{\gamma}_2^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1$,
- $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$ és 2π-periòdica i $\int \dot{\gamma} \mathrm{d}t = 0$

i tal que $|\dot{\gamma}| \leq C|a|$. Això és possible perquè l'envolupant convexa de $\{(x, y) : (1+x)^2+y^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1\}$ conté el 0.

Capítol 5

Conclusions

Hem après un munt

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY) *Nom del treball.* Cambridge University Press.

Oh, S. J. (2018) *The Nash C^1 isometric embedding theorem.* LINK O PUBLISHER?

Nash, J. (1954) C^1 *isometric imbeddings.* Annals of Mathematics, 60(3), 383-396.