Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MEU TFG

Autor: Víctor Rubio Jiménez

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 18 d'abril de 2025

Abstract

My wonderful abstract.

Resum

- Explicar diferència entre Continu i Diferenciable i totes les restriccions
- Explicar C1 i mobius
- Mirar tor ambient space isometric embeddings square flat torus
- MIrar article Nash, Gromov
- Mirar quin Cn agafa al paper band
- Mirar Sung Jin Oh
- Mirar millora de Kuiper

Agraïments

Bla, bla, bla

Índex

Capítol 1

Introducció

Objectius del treball

- Explicats

Estructura de la memòria

Tremendo HEM DE MIRAR DE POSAR LA DEMOSTRACIÓ DE QUE NOSEQUÈ SEMPRE HI HA UN PUNT EL·LIPTIC

Guia de lectura

Faig servir encabiment, que potser hauria de dir immersió?

Capítol 2

Comencem

2.1 Temes de les reunions

Sigui $\mathcal{M}$ una varietat diferenciable amb una distància d, i sigui

$$\nu = \{(x, v) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n : v \in T_x\mathcal{M}^\perp\}.$$

Per qualsevol $\varepsilon > 0$, definim el subconjunt

$$\nu_\varepsilon = \{(x, v) \in \nu : ||v|| < \varepsilon\}$$

i l'aplicació

$$\begin{aligned} \sigma : \nu_\varepsilon &\to \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto x + v \end{aligned}$$

Teorema 2.1.1. *Si ε és prou petit, aleshores $\sigma : \nu_\varepsilon \to \sigma(\nu_\varepsilon)$ és homeomorfisme.*

Prova. (Meva, està molt millor al John M. Lee) Primer, volem veure que σ és injectiva. Suposem que $\mathcal{M}$ és C^∞ (amb C^2 hauria de ser prou). Donat qualsevol punt $x \in \mathcal{M}$ existeix un entorn prou petit U_x de x en $\mathcal{M}$ tal que ν_1 és injectiva. Això és degut al fet que, localment, la varietat és aproximadament igual al seu espai tangent.

Sigui x_0 el punt amb l'entorn U_{x_0} més petit que verifica la propietat anterior, i sigui y_0 el punt de $\mathcal{M} \setminus U_{x_0}$ tal amb el vector $w_0 \in T_{y_0}\mathcal{M}$ més curt tal que existeix algun $v_0 \in T_{x_0}\mathcal{M}$ tal que $x_0 + v_0 = y_0 + w_0$. Sigui $l = ||w_0||$. Aleshores, posant $\varepsilon = l/2$, tenim que σ és injectiva.

Pel que fa a la exhaustivitat, $\sigma : \nu_\varepsilon \to \sigma(\nu_\varepsilon)$ és exhaustiva per definició. A més, en ser la suma de dos vectors en $\mathbb{R}^n$, σ és contínua.

Cal veure que la inversa σ^{-1} és contínua. Sigui $a \in \sigma(\nu_\varepsilon)$. Aleshores, existeixen $x \in \mathcal{M}$ i $v \in \mathbb{R}^n$ tals que $a = \sigma(x, v) = x + v$. Com σ^{-1} projecta punts de $\sigma(\nu_\varepsilon)$ en el punt de ν_ε més proper, tenim que σ^{-1} és contínua. Per tant, σ és un homeomorfisme. $\square$

Observació 2.1.2. D'aquí surt el que fa servir Nash per allò del conjunt que no admet dues perpendiculars.

Capítol 3

Suavitat i Varietats

3.1 Introducció al capítol

En aquest capítol ens ocuparem de definir i comentar algunes de les nocions bàsiques de geometria diferencial i de varietats diferenciables i suaus. La referència principal per aquest capítol és Lee (2013).

A un nivell intuïtiu, les varietats suaus (*smooth manifolds*) són espais topològics que, localment, es poden veure com espais euclidians $\mathbb{R}^n$, i tals que hi sigui possible fer càlcul infinitesimal. Si bé és fàcil entendre la noció de suavitat (*smoothness*) en els exemples senzills de corbes i superfícies immerses en $\mathbb{R}^3$, cal tenir en compte que no és cap requeriment per a una varietat suau que sigui immersa en un espai ambient $\mathbb{R}^n$, sinó que s'haurà de treballar en termes intrínsecs. Aquest fet és molt rellevant en una de les aplicacions més interessants de la geometria diferencial, la teoria de la relativitat general, on l'espai-temps es modela com una varietat diferenciable de dimensió 4 i on no hi ha cap espai ambient en el sentit clàssic. Un altra subtilesa és que la noció de suavitat no pot ser una propietat purament topològica, ja que no és preservada per homeomorfismes. L'exemple més evident és el d'un cercle i un quadrat, que són homeomorfs en $\mathbb{R}^2$, però el cercle és suau mentre que el quadrat no ho és. Aquí podem escriure més quan haguem acabat el capítol.

3.2 Varietats topològiques

Definició 3.2.1. *Sigui M un espai topològic. Diem que M és una **varietat topològica de dimensió** n si es compleixen les propietats següents:*

- *M és Hausdorff, és a dir, si per a cada $p, q \in M$ amb $p \neq q$ existeixen entorns oberts $U \subseteq M$ i $V \subseteq M$ de p i q respectivament tals que $U \cap V = \emptyset$,*
- *M verifica el segon axioma de numerabilitat, és a dir, existeix una base numerable de la topologia de M,*
- *M és localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$, és a dir, per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert $U \subseteq M$ de p que és homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$.*

Es pot posar un exemple

Per tal de poder descriure localment els punts de les varietats i de poder operar amb ells, serà útil introduir el concepte de carta coordenada.

Definició 3.2.2. *Sigui M una varietat topològica de dimensió n. Diem que un parell (U, φ) és una **carta coordenada de** M si U és un obert de M i $\varphi : U \to \hat{U}$ és un homeomorfisme* *amb un obert $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem U el* ***domini de la carta*** *i φ la* ***funció coordenada****.*

Observació 3.2.3. De la definició de carta coordenada, observem que no tota varietat topològica M es pot cobrir amb una única carta coordenada. Per exemple, si M és homeomorf al cercle $\mathbb{S}^1$ amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^2$, no es pot trobar cap aplicació $\varphi : M \to \mathbb{R}$ que sigui un homeomorfisme amb un obert de $\mathbb{R}$, ja que $\mathbb{S}^1$ és compacte.

Es pot posar un exemple.

A continuació, donarem algunes propietats de les varietats topològiques i les cartes coordenades, sense reproduir les demostracions explícitament.

Lema 3.2.4. *Tota varietat topològica es pot recobrir amb numerables cartes coordenades.*

Lema 3.2.5. *Tota varietat topològica té una base numerable de boles coordenades amb adherència compacta.*

Proposició 3.2.6. *Sigui M una varietat topològica. Aleshores,*

- *M és localment arc-connexa.* Aquí utilitzo arc-connexa com a sinònim de connex per camins.
- *M és connex si i només si és arc-connex.*
- *Els components connexos de M són els seus components arc-connexos.*
- *M té un conjunt numerable de components connexos, i cada un d'ells és un obert i una varietat topològica connexa.*

Proposició 3.2.7. *Tota varietat topològica és localment compacta. És a dir, per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert U de p tal que $U \subseteq K$ per algun compacte $K \subseteq M$.*

Definició 3.2.8. *Diem que una col·lecció $\mathcal{X}$ de subconjunts d'un espai topològic M és* ***localment finita*** *si per a cada $p \in M$ existeix un entorn obert U de p tal que $U \cap X = \emptyset$ per a tots $X \in \mathcal{X}$ excepte un nombre finit d'ells.*

Definició 3.2.9. *Donat un recobriment per oberts $\mathcal{U}$ d'un espai topològic M, diem que un recobriment per oberts $\mathcal{V}$ és un* ***subrecobriment de $\mathcal{U}$*** *si per a cada $V \in \mathcal{V}$ existeix $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.*

Definició 3.2.10. *Diem que un espai topològic M és* ***paracompacte*** *si qualsevol recobriment per oberts de M té un subrecobriment localment finit.*

Teorema 3.2.11. *Tota varietat topològica és paracompacta. De fet, donat un recobriment per oberts $\mathcal{X}$ i qualsevol base $\mathcal{B}$ de la topologia de M, existeix un subrecobriment numerable localment finit $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ format només d'elements de $\mathcal{B}$.*

Aquesta demostració està en el Lee, no té gaire a veure amb el tema així que potser no la posem, però bueno, allà està.

3.3 Estructura suau

3.4 Suavitat

L'Ignasi m'ha dit que el que hauria de ressaltar més és la diferència entre C^1 i C^∞. Potser podria comentar alguns dels resultats que són vàlids en un i no en l'altre? El que hi ha aquí ho estic traient de wikipedia. Preguntar a l'Ignasi per una font més bona.

Definició 3.4.1. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-*vegades derivable contínuament*, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si la derivada d'ordre k,*

$$f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f,$$

existeix i és contínua en U. Anomenem l'índex k suavitat de f. Diem que f és suau *o* infinitament derivable *si existeix la derivada de qualsevol ordre.*

Observacions 3.4.2.

- f és 0 vegades derivable contínuament si i només si f és contínua.
- Si f és k vegades derivable contínuament, aleshores també és j vegades derivable contínuament per $0 \leq j \leq k$.

Definició 3.4.3. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

De la mateixa manera, podem definir aquests conceptes per funcions de diverses variables.

Definició 3.4.4. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}$ una funció real contínua. Diem que f és k-vegades derivable contínuament, amb $k \in \mathbb{N}_0$, si totes les seves derivades parcials d'ordre k,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

tals que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, existeixen i són contínues en U. És a dir, si f és k-vegades derivable contínuament en cada component de U.

Definició 3.4.5. *Anomenem classe de diferenciabilitat $C^k(U)$, amb $k \in \mathbb{N}_0$ l'espai de les funcions k-vegades derivables contínuament en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Anomenem $C^\infty(U)$ l'espai de les funcions infinitament derivables en U.*

Observacions 3.4.6. Potser caldria donar la definició explícita en el cas de funcions de diverses variables.

- Moltes vegades, en lloc de $C^k(U)$ es fa servir $C^k(U; \mathbb{R}^m)$ per a funcions $f : U \to \mathbb{R}^m$.
- També escriurem simplement C^k en lloc de $C^k(U)$ si el domini és clar pel context.

3.4.1 Classes de diferenciabilitat com espais normats

A continuació definirem normes en $C^k(U)$ i $C^\infty(U)$ que ens permetran tractar-les com espais vectorials normats.

Definició 3.4.7. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció. Definim la norma $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ de f com*

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)},$$

on $\|\cdot\|_{L^\infty(U)}$ és la norma del suprem en U, tal que $\|g\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x \in U} |g(x)|$.

Aquí podríem proposar i demostrar que $\|\cdot\|_{C^k(U)}$ és efectivament una norma, ho tenim a `https://proofwiki.org/wiki/C%5Ek_Norm_is_Norm`. També cal decidir si definim explícitament la D^α.

3.5 Fonaments de geometria diferencial

Aquí hauriem de parlar d'embedding preferiblement.

Capítol 4

Teorema Nash-Kuiper C^1

4.1 Introducció al capítol

En aquesta secció enunciarem i demostrarem els quatre teoremes d'immersions isomètriques C^1 de John Forbes Nash Jr., seguint l'article en què els va publicar el 1954 a Annals of Mathematics, Nash (1954).
explicar una mica el context i tal. Bàsicament, dir que és un teorema sorprenent perquè no se l'esperava ningú, explicar que el que fa és dividir en etapes i passos, i explicar que Kuiper fa una millora de la demostració de Nash per a una dimensió menys.

4.2 Enunciat dels teoremes

Hauria de fer servir $\mathbb{R}^k$ en comptes de E^k?
Teorema 4.2.1. *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió n té un encabiment isomètric C^1 en E^{2n}.*
Teorema 4.2.2. *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió n té una immersió isomètrica C^1 en E^{2n} i un encabiment isomètric C^1 en E^{2n+1}.*
Teorema 4.2.3. *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ en E^k amb $k \geq n+2$, aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètric en E^k.*
Teorema 4.2.4. *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ curta en E^k amb $k \geq n+2$ que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètric en E^k del mateix tipus.*

4.3 Demostració

Comencem amb una varietat diferenciable Riemanniana M de dimensió n, amb una mètrica intrínseca donada per un tensor mètric g_{ij}. L'objectiu principal serà trobar una immersió isomètrica d'aquesta varietat M en algun espai euclidià.

Suposem que tenim una immersió de M en un espai euclidià $\mathbb{R}^k$.

$$\begin{aligned} f : M &\to \mathbb{R}^k \\ \{x^i\} &\mapsto \{z^\alpha(x^1, \ldots, x^n)\} \end{aligned}$$

Aleshores, la mètrica induïda en M és

$$h_{ij} = \sum_{\alpha} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^j}. \tag{4.3.1}$$

Per tal de començar la demostració, el primer que necessitarem serà una immersió f que sigui de classe C^{∞} i *curta.*

Definició 4.3.1. *Una immersió $f : M \to \mathbb{R}^k$ és* ***curta*** *si la diferència de les mètriques $g_{ij} - h_{ij}$ és definida positiva.*

El més important d'aquesta definició és que, si f és curta, els vectors sobre M mai s'allarguen sota f. Aquesta primera immersió f és fàcil de trobar, en general, per a varietats tancades, mentre que per a varietats obertes cal entrar en més detalls. AQUÍ CITAR LA PART ON ES FA.

Un cop trobada aquesta immersió curta, l'estructura de la demostració dels teoremes de Nash consisteix en fer una successió de pertorbacions de f que, progressivament, disminueixen l'error mètric fins a trobar una immersió isomètrica en el límit. En general, el procés de pertorbació es divideix en **etapes** (en anglès, *stages*), i a cada etapa es divideix en **passos** (en anglès, *steps*). Així, la primera etapa prendrà la nostra immersió curta f i en retornarà una f_1 amb un error mètric com a molt la meitat del de f, que serà també C^{∞} i curta. Aquesta f_1 serà millorada en la segona etapa, i així successivament.

La manera en què l'error mètric disminueix en cada etapa és la següent: en la primera immersió, l'error mètric és

$$\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}. \tag{4.3.2}$$

En la segona etapa, l'error mètric serà

$$\bar{\delta}_{ij} = g_{ij} - \bar{h}_{ij} \approx \frac{1}{2}\delta_{ij}, \tag{4.3.3}$$

on $\bar{h}_{ij}$ és la mètrica induïda per f_1. Aquest error mètric anirà disminuint geomètricament després de cada etapa, i en el límit obtindrem una immersió isomètrica.

En cada etapa, el procés de pertorbació es divideix en passos. Cada pas afectarà només un entorn local de M, però s'hauran de dur a terme l'un rere l'altre, no simultàniament. Per tal de fer-ho, cal prendre un recobriment localment finit de M per conjunts tancats $\{N_p\}_p$. És a dir, tals que M és la unió de tots ells, i cada N_p interseca només un nombre finit d'altres N_q. Al Lee crec que s'explica el fet que sempre es pot trobar aquest recobriment per tancats.

Associarem a cada N_p una funció ponderació φ_p de classe C^{∞} positiva a l'interior de N_p i nul·la fora d'ell i a la frontera. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les φ_p valgui 1 en qualsevol punt. crec que això s'anomena una partició de la unitat. Mirar el Lee. En cada entorn tancat, voldrem que l'error mètric δ_{ij} sigui reduït en $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$ després d'una etapa. Per fer-ho, necessitem aproximar δ_{ij} per un tensor de classe C^{∞} i positiu β_{ij}.

Per tal de fer servir aquest β_{ij} per a reduir l'error mètric, necessitem el següent resultat:

Lema 4.3.2. *Sigui β_{ij} un tensor de classe C^{∞} i definit positiu, i sigui φ_p seguint la definició de més amunt. Aleshores, es poden trobar funcions no-negatives a_{ν} de classe C^{∞} i un nombre finit de funcions lineals $\psi^{\nu} = \psi^{\nu}(x^1, \ldots, x^n)$ tals que*

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_{\nu} a_{\nu} \left(\frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^i}\right) \left(\frac{\partial \psi^{\nu}}{\partial x^j}\right), \tag{4.3.4}$$

Observació 4.3.3. Cal remarcar que aquest lema només és cert si β_{ij} és definit positiu, i que el nombre de termes del sumatori és finit.

Prova (Aquesta és la demostració del Nash. És una mica llarga però s'entén bastant bé si la mires amb cura. El Sung-Jin Oh té una versió més curta amb una notació diferent.). El conjunt de les matrius simètriques definides positives de rang n és un con de dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$.Revisar d'on surt això, sembla bastant directe mirant quins coeficients es poden canviar. És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre W d'aquests entorns, on W depèn només de n.

Una matriu qualsevol representada per un punt interior d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{llll} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \dots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \dots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \dots \end{array}$$

els coeficients per q representacions diferents d'una matriu del con que pertany a l'interior de q símplexs diferents. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C^*_{\mu,\nu} = \frac{C_{\mu,\nu}\exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_\rho \exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

on cal considerar que els exponencials són nuls si qualsevol dels termes del seu sumatori ho és. Observem que aquests coeficients són C^∞ com a funcions de la matriu que representen. A més, per cada matriu, com a molt $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients $C^*_{\mu,\nu}$ són no-nuls.

Si ara considerem que β_{ij} defineix una aplicació de classe C^∞ de N_p al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \tag{4.3.5}$$

on $M_{(\mu,\nu)ij}$ són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu $M_{(\mu,\nu)ij}$ obtenim n autovectors unitaris ortogonals $\{V_r\}$ i els seus autovalors $\{v_r\}$.

Si ψ_r és per cada r la funció lineal dels paràmetres locals pels quals $\sqrt{v_r}V_r$ és el vector gradient Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer, tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{4.3.6}$$

i, substituint en 4.3.5, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{4.3.7}$$

i, agrupant termes en a_ν, obtenim el resultat. □

4.3.1 La pertorbació en un pas

En el pas associat a N_p en una etapa donada, caldrà fer una pertorbació de la immersió curta obtinguda anteriorment. Per fer-ho, Nash considera dos camps vectorials unitaris ortogonals entre ells i a la immersió en l'entorn N_p, representats per funcions de classe C^∞, ζ^α i η^α. És a dir, compleixen les següents propietats:

$$\sum_\alpha (\zeta^\alpha)^2 = 1, \tag{4.3.8}$$

$$\sum_\alpha (\eta^\alpha)^2 = 1, \tag{4.3.9}$$

$$\sum_\alpha \zeta^\alpha \eta^\alpha = 0, \tag{4.3.10}$$

$$\sum_\alpha \zeta^\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = 0. \tag{4.3.11}$$

Observació 4.3.4. És possible que això ho expliqui en algun altre lloc, però per ara ho deixo aquí. Estaria bé explicar el canvi que fa Kuiper, si hi ha espai, que jo crec que sí.

El fet que Nash utilitzi dos camps vectorials unitaris ortogonals entre ells i a la immersió en l'entorn N_p restringeix severament la utilitat del seu resultat. En concret, per varietats Riemannianes de dimensió 2, com l'esfera o el tor, el que ens interessa idealment és obtenir immersions en l'espai euclidià tridimensional, per tal de poder-les representar visualment, mentre que el resultat de Nash dóna immersions en un espai euclidià de dimensió 4. Afortunadament, com veurem més endavant, Nicolaas H. Kuiper va modificar lleugerament la prova de Nash per rebaixar la codimensió de l'espai euclidià de $k = 2$ a $k = 1$.

Amb aquests camps vectorials, la pertorbació de la immersió curta z^α en un pas a l'entorn N_p és

$$\boxed{\overline{z}^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu) + \eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)} \tag{4.3.12}$$

on λ és una constant positiva tan gran com vulguem.

Ara cal veure que el canvi mètric $\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$ és aproximadament igual al terme ν del sumatori de 4.3.4.

Proposició 4.3.5. *El canvi mètric a l'entorn N_p en el pas associat a a_ν i ψ^ν donat per 4.3.12 compleix*

$$\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = a_\nu \frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial \psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.3.13}$$

Prova. Desenvolupant les derivades parcials i cancel·lant els termes que apareixen en ambdós costats, tenim

$$\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = \sum_\alpha \Bigg[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\eta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)\right)\Bigg] \tag{4.3.14}$$

Observem que cada en terme del sumatori apareixen quatre derivades similars, canviant ζ^α per η^α i cos per sin, així com i per j. Podem considerar una sola d'aquestes, per exemple

$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right)$. Desenvolupant-la, tenim

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) &= \left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^i}\right)\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\\ &\quad + \zeta^\alpha \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{a_\nu}\right)\cos(\lambda\psi^\nu)\\ &\quad - \zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}\sin(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Observem que els dos primers termes d'aquesta suma són $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, de manera que es pot prendre λ prou gran per fer-los tan petits com vulguem. Així,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) = -\zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}\sin(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

El producte d'aquest terme amb la derivada respecte de x^j en 4.3.14 és, per tant,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\zeta^\alpha \frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu)\right) = (\zeta^\alpha)^2 a_\nu \sin^2(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Sumant aquest resultat amb el corresponent a η^α, obtenim que el terme α del sumatori de 4.3.14 és

$$\begin{aligned}&(\zeta^\alpha)^2 a_\nu \sin^2(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + (\eta^\alpha)^2 a_\nu \cos^2(\lambda\psi^\nu)\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ &= ((\zeta^\alpha)^2\sin^2(\lambda\psi^\nu) + (\eta^\alpha)^2\cos^2(\lambda\psi^\nu))a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} =\\ &\qquad = \sum_\alpha\left[((\zeta^\alpha)^2\sin^2(\lambda\psi^\nu) + (\eta^\alpha)^2\cos^2(\lambda\psi^\nu))a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\\ &\qquad = a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\left(\sin^2(\lambda\psi^\nu)\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 + \cos^2(\lambda\psi^\nu)\sum_\alpha(\eta^\alpha)^2\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ &\qquad = a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\end{aligned}$$

on per a la darrera igualtat hem usat que $\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 = \sum_\alpha(\eta^\alpha)^2 = 1$. □

Amb aquesta última proposició s'ha demostrat que la pertorbació indueix un canvi mètric molt proper al que volem, amb un error $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. De la mateixa manera, observem que la pertorbació en un pas, 4.3.12, és $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. A continuació, volem veure quin és el canvi en les primeres derivades després d'una etapa del procés en un entorn N_p. És a dir, volem aproximar l'efecte de totes les pertorbacions associades a cada pas de l'etapa. Per fer-ho, primer notem que el canvi en les primeres derivades associat al pas ν és el següent:

$$\left|\frac{\partial \overline{z}^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right| \le 2\sqrt{a_\nu}\left|\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right| + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.3.15}$$

Proposició 4.3.6. *El canvi en les primeres derivades associat a una etapa del procés en un entorn N_p és*

$$\left| \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{abans} - \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{després} \right| \\ \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) + \cdots, \quad (4.3.16)$$

on K és una constant que depèn només de la dimensió n de la varietat i les diferents λ_ν són els paràmetres de les pertorbacions.

Prova. Considerem l'element i de la diagonal de les matrius de 4.3.4:

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ii} = \sum_\nu a_\nu \left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)^2 = \sum_\nu \left(\sqrt{a_\nu}\left|\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right|\right)^2.$$

Recordem de la prova del lema 4.3.4 que hi ha com a molt $M = W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients no nuls del sumatori, on W és una constant que només depèn de la dimensió n de la varietat. Així doncs, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_\nu \sqrt{a_\nu}\left|\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right| \leq \left(M\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ii}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (K\varphi_p\beta_{ii})^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(K\beta_{ii})}.$$

Combinant aquest resultat amb 4.3.15, obtenim que el canvi en les primeres derivades associat a una etapa del procés en un entorn N_p és

$$\left|\frac{\partial\overline{z}^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right| \leq \sqrt{K\beta_{ii}} + O\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) + \cdots + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) + \cdots.$$

□

4.3.2 Convergència dels passos en una etapa

He de mirar si realment aquest és el títol que toca.

A continuació ens interessa veure quines són les constants $\{\lambda_\nu\}$ necessàries en les diferents passes d'una etapa per tal que el procés convergeixi tal com desitgem.

Definició 4.3.7. *Sigui N_p un entorn de M, i considerem el pas ν d'una etapa donada.*

- *Anomenem B_1 l'error d'ordre $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ màxim permès en l'aproximació del canvi mètric per $a_\nu\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right)$ en 4.3.13, per tots els parells (i,j) i tots els punts de l'entorn N_p.*
- *Anomenem B_2 l'error d'ordre $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ màxim permès en l'aproximació del canvi de les primeres derivades en 4.3.15, per tots els punts de l'entorn N_p.*
- *Anomenem B_3 la cota superior permesa del canvi $\overline{z}^\alpha - z^\alpha$ en N_p.*

Observació 4.3.8. Es pot trobar una pertorbació que compleixi les condicions anteriors per a qualsevol B_1, B_2 i B_3 donats, ja que tots tres disminueixen quan λ augmenta i aquesta pot ser presa arbitràriament gran.

Recordem que l'efecte desitjat després d'una etapa és prendre una mètrica induida h_{ij} i trobar-ne una h'_{ij} que redueixi a la meitat l'error mètric δ_{ij}. És a dir, la nova mètrica h'_{ij} ha de complir

$$h'_{ij} =\approx h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad (4.3.17)$$

que també podem escriure com

$$h'_{ij} = g_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}, \tag{4.3.18}$$

on e_{ij} és el terme de l'error de l'aproximació. Així, la diferència entre la mètrica de la nova immersió i la original és

$$\delta'_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} - e_{ij}. \tag{4.3.19}$$

A continuació, ens volem assegurar que δ'_{ij} sigui definit positiu, i que el tensor d'error e_{ij} sigui prou petit per permetre la convergència del procés.

Notació 1. *Per un tensor donat T_{ij} en un entorn N_p, escrivim $|T_{ij}|_{N_p}$ per denotar el màxim dels valors absoluts dels components de T_{ij} en N_p. Aquesta és una bona aproximació de la mida del tensor T_{ij} en N_p. Cal mirar si hi ha una millor notació*

Proposició 4.3.9. *Sigui N_p un entorn de M. En una etapa donada del procés, existeix una successió $\{B_{1\nu}\}_\nu$, on $B_{1\nu}$ és el B_1 de la definició 4.3.2 al pas ν, tal que, després de fer tots els passos en N_p*

- *δ'_{ij} és definit positiu en N_p.*
- *e_{ij} és prou petit per assegurar que el procés convergeix després de fer totes les etapes.*
- *La convergència és tal que la mida de δ'_{ij} és aproximadament $2/3$ de la mida de δ_{ij} després de cada etapa.* No m'agrada gaire com està descrita aquesta proposició

Prova. En N_p, sempre es pot trobar una constant real $\varepsilon_p > 0$ tal que, si imposem

$$|e_{ij}|_{N_p} \leq \varepsilon_p, \tag{4.3.20}$$

aleshores $\delta'_{ij} = \delta_{ij} - e_{ij}$ és definit positiu.

Si també imposem que, després d'una etapa,

$$\max|e_{ij}|_{N_p} \leq \frac{1}{6}\min|\delta_{ij}|_{N_p}, \tag{4.3.21}$$

podem prendre 4.3.19 i veure que

$$\begin{aligned}\max|\delta'_{ij}|_{N_p} &= \max\left|\frac{1}{2}\delta_{ij} - e_{ij}\right|_{N_p} \leq \max\left|\frac{1}{2}\delta_{ij}\right|_{N_p} + \max|e_{ij}|_{N_p} \\ &\leq \frac{1}{2}\max|\delta_{ij}|_{N_p} + \frac{1}{6}\min|\delta_{ij}|_{N_p} \leq \frac{2}{3}\max|\delta_{ij}|_{N_p}. \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Amb això queda demostrat que es pot escollir e_{ij} tal que la mida de δ'_{ij} és aproximadament $2/3$ de la mida de δ_{ij} després de cada etapa. Així, és clar que la diferència entre la mètrica de la immersió i g_{ij} convergeix a 0 en el límit.

Hem obtingut dues restriccions a la mida de e_{ij} que cal complir, 4.3.20 i 4.3.21. Ara cal relacionar-les amb les passes de l'etapa, per tal d'obtenir la successió $\{B_{1\nu}\}_\nu$ desitjada.

Primer de tot, recordem que els entorns N_p poden intersecar amb altres entorns N_q. Així, els canvis que fem en N_p poden afectar a N_q. Afortunadament, el nombre d'entorns que intersequen cada N_p és finit. Si N_p interseca amb σ entorns N_q, incloent N_p mateix, aleshores podem prendre les restriccions de N_p, dividir-les per σ, i imposar-les a tots els N_q. Sigui ε_p^* el mínim de totes aquestes restriccions sobre l'error de N_p.

Notem que hi ha dues fonts de l'error en N_p: el primer és l'aproximació preliminar de δ_{ij} pel tensor β_{ij}, i el segon és l'error acumulat per les passes individuals. Per tant, imposant $|\delta_{ij} - \beta_{ij}|_{N_p} \leq \varepsilon_p^*$ obtenim

$$\left| \frac{1}{2}\varphi_p \delta_{ij} - \frac{1}{2}\varphi_p \beta_{ij} \right|_{N_p} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_p^*. \tag{4.3.23}$$

Ens resta $\frac{1}{2}\varepsilon_p^*$ per a l'error de les passes individuals, que podem assignar de la següent manera:

$$B_{1\nu} \leq \frac{1}{2^{\nu+1}}\varepsilon_p^*. \tag{4.3.24}$$

De manera que l'error total obtingut sumant 4.3.23 i 4.3.24 és menor que

$$\frac{1}{2}\varepsilon_p^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}}\varepsilon_p^* = \varepsilon_p^*.$$

Així, hem trobat la successió $\{B_{1\nu}\}_\nu$ desitjada. $\square$

4.4 Apunts del paper de Nash del 1954

- Parlar abans de la diferència entre el punt de vista extrínsec i intrínsec de la geometria, un cop haguem parlat de geodif.
- Veurem que una varietat de dimensió n es pot ficar en un espai E^{2n}, on aquí diem que E^k és l'espai euclidià de dimensió k.
- Interessant que el procés de les correccions sempre augmenta les distàncies localment, motiu pel qual el primer ha de ser curt. Diu Nash que l'anem "estirant".
- Mirar el tema de si la caracterització de una immersió curta és diferent que a la que dona SJO.
- Si la varietat és tancada només cal canviar l'escala de E^k per fer la immersió curta. Si és oberta cal fer una cosa més complicada.
- Coses a tenir en compte:
  - g_{ij} és la mètrica intrínseca, h_{ij} és la mètrica induïda.
  - $\{x^i\}$ són les coordenades en la varietat M.
  - $\{z^\alpha\}$ són les coordenades en E^k.
  - Amb la immersió, $z^\alpha = z^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$.
  - La mètrica induïda és $h_{ij} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^j}$. Normalment estaria multiplicat per una $g_{\alpha\beta}$ que no apareix perquè en aquest cas és la mètrica euclidiana.
- Cada correcció es va fent en infinites "etapes", cada una d'elles corregint la correcció de la etapa anterior. L'important aquí és que cada correcció manté el fet que la immersió sigui curta, tot i que cada vegada menys. Cada etapa ens hi hauria d'apropar la meitat del camí. Per exemple, després de la primera, l'error hauria de ser

$$g_{ij} - \overline{h_{ij}} \approx \frac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})$$

- Ho fem d'aquesta manera perquè així ens assegurem que cada correcció només ha d'augmentar la mètrica.
- Cada etapa es divideix en passes (passos?), que afecten només localment la immersió augmentant la mètrica en una sola direcció.
- Per tal de dividir en passos, dividim la varietat en una sèrie d'entorns amb n paràmetres C^∞ no singulars, i cada entorn es pot trobar amb un nombre finit d'altres entorns.
- Per cada un d'aquests entorns, per exemple N_p, prenem una funció φ_p positiva a l'interior de N_p i 0 fora d'ell. Definim aquestes funcions tals que la suma de totes les φ_p valgui 1 en qualsevol punt. (Això com es fa? Diu que és estàndard però em sembla una mica complicat si ha de ser C^∞.) Això serveix per distribuir la çàrrega"de la correcció.
- En cada entorn, la çàrrega"de la correcció es divideix també entre les passes. Sigui $\delta_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ l'error mètric després d'unes quantes etapes. A la propera voldríem augmentar la mètrica més o menys $\frac{1}{2}\delta_{ij}$, de manera que a l'entorn N_p voldríem augmentar la mètrica en $\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij}$. Per fer-ho haurem de trobar un tensor definit positiu β_{ij} que sigui C^∞ i aproximi δ_{ij}.

- $$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  on x^i són coordenades de l'entorn N_p, a_ν funcions no-negatives C^∞ i ψ^ν funcions lineals en x^i.

- A l'apartat **The normal fields**, diu que necessita dos camps vectorials unitaris C^∞ normals a la immersió i ortogonals entre ells, ζ^α i η^α. Això és lo de la co-dimensió 2 que després Kuiper canvia a 1.

- La pertorbació associada a a_ν i ψ^ν és

  $$\boxed{\overline{z}^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\cos(\lambda\psi^\nu) + \eta^\alpha\frac{\sqrt{a_\nu}}{\lambda}\sin(\lambda\psi^\nu)} \tag{4.4.1}$$

  on λ és un paràmetre que podem triar.

- El canvi mètric és $\sum_\alpha \frac{\partial\overline{z}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{z}^\alpha}{\partial x^j} - \sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}$. No cal calcular tots els termes en detall, perquè molts contenen $1/\lambda$ o $1/\lambda^2$ i, per tant, convergeixen uniformement a 0 quan $\lambda \to \infty$. Altres termes es cancel·len. CALDRIA FER AIXÒ A MÀ.

- λ no fa desaparèixer els termes en què s'ha derivat les trigonomètriques, perquè en surt una λ de dins. Ara bé, ens queden termes de l'estil $\sum_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\zeta^\alpha\sqrt{a_\nu}(-\sin(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$, o amb les i i j bescanviades o amb η^α en comptes del ζ^α. Cadascun d'aquests termes són 0, ja que ζ i η són normals a la immersió.

- La resta de termes tindran el producte de dues funcions trigonomètriques o el quadrat d'una d'elles. Les que tinguin el producte també contenen $\zeta^\alpha\eta^\alpha$, i desapareixen per ortogonalitat.

- El que queda, doncs és

  $$\sum_\alpha(\zeta^\alpha)^2 a_\nu(\sin^2(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} + \sum_\alpha(\eta^\alpha)^2 a_\nu(\cos^2(\lambda\psi^\nu))\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  i si traiem factor comú i usem que els vectors són unitaris, ens queda

  $$a_\nu\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}$$

  que és el que volíem.

- I amb això veiem que l'error mètric és $O(1/\lambda)$.

- A **Size of immersion...** repetim que la pertorbació canvia segons $O(1/\lambda)$ després de cada passa. Mirant el que fa a la primera derivada, veiem el canvi que fa en un entorn totes les passes d'una etapa, i queda que el canvi en les derivades acaba sent

  $$\left|\left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\text{final}} - \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\text{inicial}}\right| \leq 2\sqrt{K\beta_{ii}} + O(1/\lambda_1) + \cdots + O(1/\lambda_\nu) + \cdots$$

  LA VERITAT ÉS QUE NO SÉ D'ON SURTEN ELS TRES PUNTS DEL FINAL.

- A **Global considerations and convergence** volem veure quina λ s'ha d'agafar.
  - B_1 és el màxim error que volem en l'aproximació del canvi mètric, $a_\nu\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j}\right)$.

- B_2 és el màxim error $O(1/\lambda)$ que volem en el canvi de les primeres derivades.
- B_3 és la cota de $\overline{z}^\alpha - z^\alpha$.

- Després d'una etapa, la nova mètrica induïda és $h'_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Posem $h'_{ij} = g_{ij} - \delta'_{ij}$, on $\delta'_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij} + e_{ij}$ i e_{ij} és un terme d'error. Per tal que la successió convergeixi, necessitem que δ'_{ij} sigui estrictament més petita que δ_{ij}. Si imposem que en tot punt de N_p el màxim dels components de e_{ij} sigui menor o igual a un sisè del màxim de δ_{ij}, aleshores el màxim de δ'_{ij} serà menor o igual a dos terços del màxim de δ_{ij}. MIRAR SI AIXÒ ÉS ALGUNA NORMA C^k O ALGO.
- Volem que δ'_{ij} sigui definida positiva, que ho podem assegurar si imposem que la mida de e_{ij} sigui més petita que un cert ε_p que depèn de l'entorn compacte N_p. Com cada entorn se superposa amb un nombre finit σ d'altres entorns, es poden trobar límits per e_{ij} tal que el que busquem sigui cert en tots ells. Anomenem ε^*_p el mínim d'aquestes limitacions.
- L'error ve de l'aproximació de δ_{ij} per β_{ij} i dels passos. Per tant, imposant $(\delta_{ij} - \beta_{ij}) < \varepsilon^*_p$, tenim que $(\frac{1}{2}\varphi_p\delta_{ij} - \frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij}) < \frac{1}{2}\varepsilon^*_p$. Així, podem imposar que en un entorn N_p els passos tinguin aquesta seqüència de B_1: $B_{11} \leq \frac{1}{4}\varepsilon^*_p$, $B_{12} \leq \frac{1}{8}\varepsilon^*_p$, $B_{13} \leq \frac{1}{16}\varepsilon^*_p$, etc.
- A **Performability of the steps** simplement diu que a cada pas tenim una immersió C^∞ i que tot és definit positiu. La única font de negativitat és l'error, però això sempre es pot contenir amb λ.
- A **General organization** es fa aquest resum:
  - El procés es fa en una sèrie d'etapes que prenen una immersió curta C^∞ i en retornen una amb un error mètric com a molt $2/3$ del de l'anterior.
  - La varietat es divideix en entorns N_p.
  - Cada etapa es divideix en passos. A cada etapa, la correcció és pesada per φ_p i dividida per tal que la duguin a terme les passes.
  - Si la varietat és oberta, hi ha un nombre infinit de passos per etapa, però a cada porció compacta hi ha un nombre finit.
- A **Convergence of the immersion** diu que necessitem que les B_3 del pas r de l'etapa s siguin més petites que $2^{-(r+s)}$, i el mateix per B_2. La manera per fer-ho és escollir que la mida de β_{ij} estigui entre $9/10$ i $9/8$ de la de δ_{ij}. Això fa que el canvi en les derivades estigui limitat per una geomètrica de raó $\sqrt{5/6}$ MIRAR AIXÒ, de manera que les funcions C^∞ convergeixen uniformement a una de C^1.
- ES MOLT IMPORTANT QUE ESCRIVIM ALGUNA COSA SOBRE LA DIFERÈNCIA ENTRE IMMERSIONS I encabiments.
- A **Isometric Imbeddings** QUAN PARLA DE CONJUNT LÍMIT CREC QUE ES REFEREIX A LA PART DEL CONJUNT OBERT MÉS LLUNYANA, EL QUE ESTARIA JUST A TOCAR DE LA FRONTERA diu que per encabiments és bàsicament el mateix, però necessitem controlar les auto-interseccions. Per veure que pas a pas no n'hi ha, cal comprovar que per λ prou gran les evitem.
- Sigui M un conjunt tancat de l'encabiment que conté N_p al seu interior. M té un entorn obert H tal que no hi ha punt de H amb dues rectes perpendiculars a M. MIRAR AIXÒ, HI HA UNA CITA.
- Posem Q la unió del conjunt límit amb la part de la encabiment que no està a l'interior

de M. Aleshores Q és tancat i una pertorbació prou petita de N_p^* no afectarà Q. AQUÍ NO SÉ QUÈ ÉS N_p^*. EN GENERAL, AQUEST APARTAT ÉS POSA MOLT TÈRBOL.

- A **Constructing the initial immersion** explica que si la varietat té dimensió n, sabem que es pot trobar una encabiment en E^{2n} no-singular i analítica. Es pot prendre aquesta immersió i escalar-la per a que sigui curta.
- Per un conjunt obert, podem recobrir la varietat per entorns N_p pesats amb funcions C^∞ φ_p amb paràmetres x_{pi} tals que $|x_{pi}| \leq 1$. Volem que en qualsevol punt de la varietat els conjunts d'aquest recobriment se superposin un nombre finit de vegades s, com a molt.
- Podem dividir els conjunts N_p en s classes, de manera que en cada classe no hi hagi conjunts que es superposin.
- Podem definir una encabiment en un espai $s(n+2)$ dimensional, a partir de funcions $u_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, $v_\sigma = \varepsilon_p^2 \varphi_p$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, i $w_\sigma = \varepsilon_p \varphi_p x_{pi}$ en conjunts de la classe σ i 0 en la resta, on x_{pi} la coordenada i-èssima de N_p i $\{\varepsilon_p\}_p$ és una successió monòtona decreixent de nombres positius que convergeix a 0.
- Observem: que totes aquestes funcions són C^∞, que dos punts de conjunts interiors a conjunts diferents tenen raons v_σ / u_σ diferents, i que punts interiors a un mateix entorn N_p tenen $w_{\sigma i}$ diferents. (EL CONJUNT LÍMIT ÉS L'ORIGEN PERÒ CAP PUNT ÉS ENVIAT A L'ORIGEN)
- Podem escollir que la encabiment sigui curta escollint la successió $\{\varepsilon_p\}_p$. Si la mètrica induïda pels primers p entorns és curta per un factor $\frac{1}{3}(2 - 1/p)$, podem escollor $p+1$ tal que sigui curta per un factor $1/3(2 - 1/(p+1))$. Amb això tenim una encabiment curta i C^∞ en $E^{s(n+2)}$, i a partir de projeccions podem arribar a E^{2n+1}
- A **General summary** enumera els quatre teoremes que ha demostrat en aquest article:
  - **Teorema 4.4.1.** *Qualsevol varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una encabiment isomètrica C^1 en E^{2n}.*
  - **Teorema 4.4.2.** *Qualsevol varietat Riemanniana de dimensió n té una immersió isomètrica C^1 en E^{2n} i una encabiment isomètrica C^1 en E^{2n+1}.*
  - **Teorema 4.4.3.** *Si una varietat Riemanniana tancada de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ en E^k amb $k \geq n+2$, aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètrica en E^k.*
  - **Teorema 4.4.4.** *Si una varietat Riemanniana oberta de dimensió n té una immersió o encabiment C^∞ curta en E^k amb $k \geq n+2$ que no se solapa amb el seu conjunt límit (si aquest existeix), aleshores també té una immersió o encabiment, respectivament, isomètrica en E^k del mateix tipus.*
- Per últim, un comentari super interessant que fa és que potser es pot canviar $n+2$ per $n+1$ si es fa una una pertorbació diferent que només necessita una direcció, que crec que és just el que fa Kuiper!

$$\frac{1}{2}\varphi_p\beta_{ij} = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^i}\frac{\partial\psi^\nu}{\partial x^j} \tag{4.4.2}$$

Lema 4.4.5. *L'equació 4.4.2 es pot satisfer amb les condicions necessàries.*

Prova. Les matrius simètriques definides positives formen un con de dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$.D'on surt això? És molt estrany És possible cobrir aquest con amb conjunts simplicials MIRAR A WIKIPEDIA EL QUE ÉS geomètrics oberts, de tal manera que cada punt del con estigui cobert per, com a molt, un nombre W d'aquests entorns, on W depèn només de n.

Una matriu qualsevol representada per un punt d'un símplex és combinació lineal de les matrius que representen els vèrtexs del símplex. Podem posar

$$\begin{array}{llll} C_{1,1}; & C_{1,2}; & C_{1,3}; & \dots \\ C_{2,1}; & C_{2,2}; & C_{2,3}; & \dots \\ \vdots & & & \\ C_{q,1}; & C_{q,2}; & C_{q,3}; & \dots \end{array}$$

els coeficients per q representacions d'una matriu del con. Ara podem escriure uns altres coeficients

$$C^*_{\mu,\nu} = \frac{C_{\mu,\nu}\exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\mu,\sigma}\}}{\sum_\rho \exp\{-\sum_\sigma 1/C_{\rho,\sigma}\}},$$

de manera que aquests coeficients són C^∞ com a funcions de la matriu que representen. Per cada matriu, com a molt $W[\frac{1}{2}n(n+1)+1]$ coeficients $C^*_{\mu,\nu}$ són no-nuls.

Si ara considerem que β_{ij} defineix una aplicació C^∞ de N_p al con, aleshores podem escriure

$$\beta_{ij} = \sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij} \tag{4.4.3}$$

on $M_{(\mu,\nu)ij}$ són les diferents matrius que representen els vèrtexs dels símplexs. Ara, per cada matriu $M_{(\mu,\nu)ij}$ obtenim n autovectors unitaris ortogonals $\{V_r\}$ i els seus autovalors $\{v_r\}$.

Si ψ_r és per cada r la funció lineal dels paràmetres locals pels quals $\sqrt{v_r}V_r$ és el vector gradient Aquesta és la part més rara, entenc que simplement es pot fer, tenim que

$$M_{(\mu,\nu)ij} = \sum_r \frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{4.4.4}$$

i, substituint en 4.3.5, tenim que

$$\beta_{ij} = \sum_r\sum_{\mu,\nu} C^*_{\mu,\nu} M_{(\mu,\nu)ij}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^i}\frac{\partial\psi_r}{\partial x^j} \tag{4.4.5}$$

i, agrupant termes en a_ν, obtenim el resultat. □

4.5 Explicació del Sung-Jin Oh

Teorema 4.5.1. *Sigui (M, g) una superfície, $N \geq \dim M + 1$ i $u : M \to \mathbb{R}^N$ una encabiment estrictament curta, és a dir, tal que la longitud de cada vector en M s'escurça (estrictament) sota ∇u. Aleshores u es pot aproximar uniformement per encabiments isomètriques C^1.*

Haurem d'explicar què és una encabiment isomètrica, i mirar si cal que li canviem el nom

Per exemple, l'homotècia $\mathbb{S}^2 \to \varepsilon\mathbb{S}^2$ amb $\varepsilon \in (0, 1)$ és una aplicació *curta.*
Observació 4.5.2. De fet, qualsevol encabiment C^2 isomètrica $u : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser igual a la encabiment estàndard $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : |X| = 1\}$ fins translació i rotació.

El teorema 4.5.1 es demostra amb *integració convexa.*

Sung-Jin Oh demostra aquí el Baby Nash theorem.

Sigui $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ el disc unitat, i $g = g_{ij}(x)$ una mètrica de D. Una aplicació $u : D \to \mathbb{R}^n$ és una *immersió* per ara direm encabiment als embeddings i immersions als *immersions* si $\nabla u(x)$ és injectiva per tot x. La mètrica en D induïda per u és de la forma Haurem de recordar i controlar el que era la mètrica induïda

$$\nabla u^\intercal(x)\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 u \nabla_1 u & \nabla_1 u \nabla_2 u \\ \nabla_2 u \nabla_1 u & \nabla_2 u \nabla_2 u \end{pmatrix}$$

Diem que l'aplicació és *isomètrica* també estaria bé comentar isometries si $\nabla u^\intercal \nabla u = g$, i diem que és *(estrictament) curta* si $\nabla u(x)^\intercal \nabla u(x) - g(x) \leq 0$ per tot $x \in D$.
Teorema 4.5.3. *[Baby Nash] Sigui $n \geq 4$ i $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió estrictament curta. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió isomètrica C^1 $\tilde{u} : D \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(D)} < \varepsilon$.Aquí cal motivar l'interès d'aquest resultat. Entenc que la idea és que partim d'una immersió que és estrictament curta i volem trobar una que sigui contínua i isomètrica. Vull mirar continuïtats.*
Observació 4.5.4. Aquest teorema necessita que la co-dimensió sigui com a mínim 2.

La manera de demostrar aquest resultat és a través d'un mètode iteratiu amb passos altament oscil·lants. Sigui $u_1 = u + U$ amb

$$U = \sum_{I \in \mathcal{I}} U_I$$

Volem que cada component U_I^j sigui complex, per tal que oscil·li com $e^{ix\cdot\xi}$, però que el resultat del sumatori sigui real. Així, imposem que per cada $I \in \mathcal{I}$ que existeixi $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{U}_I, \quad \overline{\overline{I}} = I.$$

Ara tenim un error mètric $h_1 = g - \nabla u_1^\intercal \nabla u_1$. On entenem que l'error mètric és la diferència entre la mètrica i la mètrica induïda per la immersió? Té sentit, però cal veure per què només agafo el primer terme.

$$h_1 = \left(h - \sum_I \nabla \overline{U}_I^\intercal \nabla U_I \right) - \sum_I \left(\nabla u^\intercal \nabla U_I + \nabla U_I^\intercal \nabla u \right) - \sum_{I,J : J \neq \overline{I}} \nabla U_I^\intercal \nabla U_J.$$

I anomenem els tres sumands, en ordre, $q_{\text{mèt}}$, q_{lin} i q_{alt}.

Volem una correcció que oscil·li en una sola direcció $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$. Posem

$$U_I = W = \frac{1}{\lambda} a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi},$$

amb $a : D \to \mathbb{R}$ i $\mathbf{n} : D \to \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{n}} = 1$. Per tal que sigui real, definim també $\overline{I} \in \mathcal{I}$ tal que

$$U_{\overline{I}} = \overline{W} = \frac{1}{\lambda} a(x)\overline{\mathbf{n}}(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi}.$$

Per eliminar el terme $q_{\text{mèt}}$, observem que

$$\begin{aligned}\nabla_j W &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + \frac{1}{\lambda}\nabla_j(a(x)\mathbf{n}(x))e^{\lambda i x\cdot\xi}\\ &= i\xi_j a(x)\mathbf{n}(x)e^{\lambda i x\cdot\xi} + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

EXPLICAR PER QUÈ ÉS O(1/LAMBDA)!!! De fet, explicar d'on surt la lambda aquesta. I, per tant,

$$\begin{aligned}\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x) &= (-i\xi_i a(x)e^{-\lambda i x\cdot\xi})(i\xi_j a(x)e^{\lambda i x\cdot\xi})\overline{\mathbf{n}}(x)\cdot\mathbf{n}(x) + O(\frac{1}{\lambda})\\ &= \xi_i\xi_j a(x)^2 + O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}$$

on definim $(\cdot)^* = (\bar{\cdot})^\intercal$. Així, l'oscil·lació és cancel·lada i en resulta un terme $a(x)^2\xi_i\xi_j$.

Exemple 4.5.5. EXPLICAR MILLOR AQUEST EXEMPLE Posem que per un cert $x \in D$, l'error h és de la forma

$$h(x) = a^2(x)\xi\otimes\xi + b^2(x)\xi'\otimes\xi' + c^2(x)\xi''\otimes\xi''$$

aleshores, amb això fem desaparèixer el terme $\xi\otimes\xi$. Repetint-ho per $\xi'\otimes\xi'$ i $\xi''\otimes\xi''$ aconseguim reduir l'error $h(x)$ a un terme $O(\frac{1}{\lambda})$.

Observació 4.5.6. EXPLICAR AQUESTA OBSERVACIÓ Aquest mètode requereix que h sigui curta, ja que $\nabla_i W^*(x)\nabla_j W(x)$ és un terme no-negatiu. De fet, per tal que h_1 sigui curt, necessitem que h sigui estrictament curt.

Ara bé, els autovectors ξ depenen d'x. Això es pot resoldre amb el següent lema.

Lema 4.5.7. *(Descomposició de l'error mètric) Sigui $\mathcal{P}$ l'espai de totes les matrius definides positives. Existeix una successió $\xi^{(k)}$ de vectors unitaris en $\mathbb{R}^n$ i una successió $\Gamma_{(k)} \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0,\infty))$ tals que*

$$A_{ij} = \sum_k \Gamma_k^2(A)\xi_i^{(k)}\xi_j^{(k)}$$

i aquesta suma és localment finita. És a dir, existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que per tot $A \in \mathcal{P}$ com a màxim N termes de $\Gamma_{(k)}$ són no-nuls.

Observació 4.5.8. La demostració d'aquest teorema no l'escrivim aquí explícitament. ESTÀ AL SUNG-JIN OH.

Fins ara no ha calgut especificar el vector $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{C}^n$ per tal de minimitzar l'error mètric, més enllà que necessitem que sigui unitari. Veurem que el podem escollir de tal manera que els termes q_{lin} i q_{alt} desapareguin fins a terme $O(1/\lambda)$.

- **Error de linearització.** Substituïm el terme amb W

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W = i\xi_j a(x)e^{ix\cdot\xi}\nabla_i u \cdot \mathbf{n} + O(1/\lambda)$$

i veiem que podem eliminar aquest component escollint un vector perpendicular a l'espai tangent de $u(x)$, $\mathbf{n}(x) \perp \nabla_j u(x)$. Això es pot fer perquè l'espai té co-dimensió 1 (REVISAR!!!). Podem fer el mateix amb $\nabla_i W^\intercal \nabla_j u$ i obtenim

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

- **Interferència altament oscil·lant.** De nou, substituïm el terme

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = (-a^2(x)\xi_i\xi_j e^{2ix\cdot\xi})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + O(1/\lambda).$$

I ara només cal utilitzar que la encabiment té co-dimensió ≥ 2 per escollir un vector complex tal que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$ Com està definit aquest producte?. Podem prendre, per exemple,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\zeta(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)$$

on $\zeta(x)$ i $\eta(x)$ són vectors reals unitaris ortogonals a l'espai tangent $T_{u(x)}u(D)$.

- **Forma final de la correcció.** Tot plegat, tenim una correcció de la forma

$$W(x) = \frac{a(x)}{\lambda}\left(\sin(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) + \cos(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)$$

amb les següents propietats:

  - Norma C^0 petita Explicar C-normes:

$$||W||_{C^0} \leq C\frac{||a||_{C^0}}{\lambda}$$

  - Terme principal en ∇W

$$\begin{aligned}\nabla W =& a(x)\left(\cos(\lambda x\cdot\xi)\zeta(x) - \sin(\lambda x\cdot\xi)\eta(x)\right)\\ &+ O_{||a||_{C^0},||\nabla a||_{C^0},||\nabla\zeta||_{C^0},||\nabla\eta||_{C^0}}(1/\lambda)\end{aligned}$$

  - Error mètric petit:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W(x) - a^2(x)\xi_i\xi_j = O(1/\lambda)$$

  - Error de linearització petit:

$$\nabla_i u^\intercal \nabla_j W + \nabla_i W^\intercal \nabla_j u = O(1/\lambda)$$

  - Error d'interferència petita:

$$\nabla_i W^\intercal \nabla_j W = O(1/\lambda)$$

Observació 4.5.9. Aquesta derivada es pot entendre si l'escrius i fas els passos. Mirar si cal explicar-ho millor. Una manera alternativa d'arribar a la forma general de la correcció és la següent. Definim

$$\begin{aligned}\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) : & D\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}^2\\ & (x,t) \mapsto \gamma(x,t)\end{aligned}$$

on $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posant $\dot{\gamma}$ la derivada respecte de t, tenim que

$$\nabla W^{\intercal}(x)\nabla W(x) = \left(\dot{\gamma}_1^2(x, \lambda x \cdot \xi) + \dot{\gamma}_2^2(x, \lambda x \cdot \xi)\right) \xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x cal trobar $\gamma(x, \cdot)$ tal que (1) $\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 = a^2$ i (2) $t \mapsto \dot{\gamma}(x,t)$ sigui 2π-periòdic i $\int \dot{\gamma} dt = 0$ De manera que $t \mapsto \gamma(x,t)$ també ha de ser 2π-periòdica i el seu origen ha de pertànyer al disc unitat tancat $\overline{D}$. IMPORTANT Per a després, NASH ANOMENA STEP A CADA ADDICIÓ D'UNA CORRECCIÓ, que es carrega un terme a un error d'ordre $O(1/\lambda)$.

Lema 4.5.10 (Lema d'iteració)**.** *Sigui $u : D \to \mathbb{R}^n$ una immersió suau estrictament curta, tal que $h := g - \nabla u^{\intercal} \nabla u$ obeeix*

$$||h||_{C^0} \leq e_h \tag{4.5.1}$$

per algun $e_h > 0$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix una immersió suau estrictament curta $u_{[1]} = u + U$, on

$$\begin{aligned} ||U||_{C^0(D)} &\leq \varepsilon \\ ||\nabla U||_{C^0(D)} &\leq C e_h^{1/2} \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

i $h_{[1]} := g - \nabla u_{[1]}^{\intercal} \nabla u_{[1]}$ obeeix

$$||h_{[1]} - h||_{C^0} \leq \varepsilon. \tag{4.5.3}$$

Prova. Pel lema 4.5.7, tenim que h es pot escriure com

$$h(x) = \sum_k \Gamma_{(k)}^2(h(x))\xi^{(k)} \otimes \xi^{(k)}$$

on per cada $h(x)$ hi ha com a molt K termes no-nuls.

Per la compacitat d' $h(D) \subseteq \mathcal{P}$, existeix un nombre finit de sumands que són funcions no-nul·lesNon-vanishing, mirar la traducció. Reanomenem aquests sumands d'aquesta manera:

$$\Gamma_{(1)}^2(h(x))\xi^{(1)} \otimes \xi^{(1)}, \Gamma_{(2)}^2(h(x))\xi^{(2)} \otimes \xi^{(2)}, \ldots, \Gamma_{(N)}^2(h(x))\xi^{(N)} \otimes \xi^{(N)}$$

Prenent la traça, veiem que

$$||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq ||h||_{C^0}^{1/2} \leq e_h^{1/2}$$

Mirar d'on surt això (Sembla Cauchy-Schwarz, però què passa amb la traça de h?) Ara podem fer N correccions a u de la mateixa manera que hem fet abans, en les direccions $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)}$, per cancel·lar aquests errors. En concret, per un $\delta > 0$, definim de manera recursiva $u_j = u_{j-1} + (1-\delta)^{1/2} U_j$, amb $u_0 = u$ i

$$U_j = \frac{\Gamma_{(j)}(h(x))}{\lambda_j} \left(\sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta_j(x) + \cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta_j(x)\right)$$

per uns certs λ_j i $\zeta_j, \eta_j : D \to \mathbb{R}^n$ unitaris.

Prenem $\delta > 0$ per tal d'assegurar curtedat estricta no sé com es diu shortness la veritat. De fet, fixem $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2e_h^{1/2}}$ per tal que $h \geq \delta I$. uiuiui això mirar-ho bé

Escollint λ_j prou gran, tenim

–

$$||U_j||_{C^0} \ll \varepsilon \tag{4.5.4}$$

–

$$\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta) + \mathrm{err}_j, \quad ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \ll \varepsilon \quad (4.5.5)$$

–

$$h_j = h_{j-1} - (1-\delta)\Gamma^2_{(k)}(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \mathrm{err}'_j, \quad ||\mathrm{err}'_j||_{C^0} \ll \delta^2 \quad (4.5.6)$$

Les dues primeres són fàcils d'entendre, però la tercera l'hem de revisar.

On $h_j = g - \nabla u_j^\intercal \nabla u_j$.

Per tal de concloure la prova, verifiquem que $U = U_1 + \cdots + U_N$ i $u_{[1]} = u_N = u + U$ satisfan les propietats desitjades.

- És fàcil veure que $||U_j|| \ll \varepsilon$ implica $||U||_{C^0(D)} \ll \varepsilon$.
- A més, de $\nabla U_j = \Gamma_{(j)}(h)\xi^{(j)}(\cos(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\zeta - \sin(\lambda_j x \cdot \xi^{(j)})\eta) + \mathrm{err}_j$ i $||\Gamma_{(j)}(h)||_{C^0} \leq e_h^{1/2}$ tenim que $||\nabla U||_{C^0(D)} \leq K e_h^{1/2} + \sum_{j=1}^N ||\mathrm{err}_j||_{C^0} \leq 2K e_h^{1/2}$ si es prenen les constants adequades.
- Finalment, sumant els termes h_j obtenim

$$h_N = h - (1-\delta)\sum_{j=1}^N \Gamma^2_{(j)}(h)\xi^{(j)}\xi^{(j)} + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j = \delta h + \sum_{j=1}^N \mathrm{err}'_j$$

  i imposant que $u_{[1]} = u_N$ sigui estrictament curta, $h_{[1]} = h_N \geq \delta^2 I$, obtenim el resultat.

□

Ara podem iterar diverses vegades per concloure la prova del teorema 4.5.3.

Prova del teorema 4.5.3. Sigui $e_{h,[k]} > 0$ una successió tal que

$$\sum_k e_{h,[k]} \leq \epsilon, \quad \sum_k e_{h,[k]}^{1/2} < \infty.$$

Pel lema 4.5.10, obtenim una successió d'aplicacions suaus estrictament curtes $u_{[k]}$ tal que $u_{[0]} = u$ i

$$||g - \nabla u_{[k]}^\intercal \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k]}$$
$$||\nabla u_{[k+1]} - \nabla u_{[k]}||_{C^0} \leq C e_{h,[k]}^{1/2}$$
$$||u_{[k+1]} - u_{[k]}||_{C^0} \leq e_{h,[k+1]},$$

demostrant el teorema. □

revisar això últim perquè just estava parlant amb la marina

4.5.1 Extensions

Extensió a encabiments de varietats

Per estendre el teorema 4.5.3 a immersions a superfícies generals, només cal reduir a cartes coordenades. Per estendre'l a encabiments usem que, per la compacitat d'M, podem trobar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{x,y} \mathrm{dist}(u(x), u(y)) \geq \varepsilon.$$

Ara només cal dur a terme la construcció en un entorn de 0.01ε.entendre millor això últim perquè és bastant random

Refinament de Kuiper: encabiment de codimensió 1

Modificant la forma de la correcció, podem aconseguir la mateixa construcció amb només co-dimensió 1. Sigui $\eta : D \to \mathbb{R}^3$ el camp vectorial unitari en $u(D)$, i sigui

$$\zeta = \nabla u(\nabla u^\intercal \nabla u)^{-1}\xi.$$

Prenem

$$U = \frac{1}{\lambda}\Big(\gamma_1(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\zeta}(x) + \gamma_2(x, \lambda x \cdot \xi)\tilde{\eta}(x)\Big)$$

on

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{|\zeta|^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{|\zeta|},$$

i $u_1 = u + U$. Això porta a paper i boli

$$\nabla u_1^\intercal \nabla u_1 = \nabla u^\intercal \nabla u + \frac{1}{|\zeta|^2}\left(2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2\right)\xi \otimes \xi + O(1/\lambda).$$

De manera que per cada x i $a = a(x) \in \mathbb{R}$ volem que γ sigui tal que

- posar això amb la cosa aquella de (1) i (2)
- $(1 + \dot{\gamma}_1)^2 + \dot{\gamma}_2^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1,$
- $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$ és 2π-periòdica i $\int \dot{\gamma} \mathrm{d}t = 0$

i tal que $|\dot{\gamma}| \leq C|a|$. Això és possible perquè l'envolupant convexa de $\{(x, y) : (1+x)^2 + y^2 = |\zeta|^2 a^2 + 1\}$ conté el 0.

Capítol 5

Cinta de Moebius de paper òptima

5.1 Explicació del Schwartz

En aquesta secció expliquem el paper de Richard Evan Schwartz, en què demostra que la sinta de Moebius de paper òptima ha de tenir relació d'aspecte més gran que $\sqrt{3}$, i que qualsevol successió de cintes de Moebius amb relació d'aspecte convergint a $\sqrt{3}$ convergeix a la cinta de Moebius triangular.

5.1.1 Introducció al problema

Definició 5.1.1. *Una* cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte λ *és una aplicació infinitament diferenciable (suau)* $I : M_\lambda \to \mathbb{R}^3$*, on* M_λ *és la cinta de Moebius plana obtinguda amb la següent identificació d'un rectangle*

$$M_\lambda = ([0, \lambda] \times [0, 1])/\sim, \qquad (0, y) \sim (\lambda, 1 - y)$$

Una aplicació isomètrica *és una aplicació que preserva longituds d'arc. L'aplicació és una* encabiment *si és injectiva, i una* immersió *en general Interessant veure si aquesta notació la seguim utilitzant o si se l'ha inventat. Sigui* $\Omega = I(M_\lambda)$*. Diem que* Ω *està* incrustada *si* I *és una encabiment.*

Exemple 5.1.2. Anomenem *cinta de Moebius de paper triangular* la cinta de Moebius de paper de relació d'aspecte $\lambda = \sqrt{3}$.

el shwartz menciona aquí uns papers que expliquem més sobre la banda de moebius, si volem escriure més sobre el tema els podem utilitzar.

Teorema 5.1.3 (Principal)**.** *Una cinta de Moebius de paper suau incrustada en* $\mathbb{R}^3$ *té relació d'aspecte més gran que* $\sqrt{3}$.

Teorema 5.1.4 (Límit Triangular)**.** *Sigui* $I_n : M_{\lambda_n} \to \mathbb{R}^3$ *una successió de cintes de Moebius de paper suaus incrustades, tals que* $\lambda_n \to \sqrt{3}$*. Aleshores,* I_n *convergeix uniformement a una cinta de Moebius de paper triangular, llevat d'isometria.*

5.1.2 Definicions

Definició 5.1.5. *Sigui* $I : M_\lambda \to \Omega$ *una cinta de Moebius de paper incrustada. Un* plec *"doblec"o alguna cosa així? a* Ω *és un segment de recta* B' *que talla a través de* Ω *i té els seus extrems a la frontera.*

Veurem més endavant que tota cinta de Moebius de paper incrustada té una foliació per plecs.

Definició 5.1.6. *Sigui B' un plec. Anomenem* pre-plec *a la preimatge $B = I^{-1}(B')$.*

Degut al fet que I no incrementa distàncies, és fàcil veure que els pre-plecs també són segments de recta, i que M_λ té una foliació per pre-plecs.

5.1.3 Lemes addicionals

Per demostrar el teorema principal, es necessiten aquests dos lemes.
Lema 5.1.7 (T). *Una cinta de Moebius de paper incrustada suau té un*

Capítol 6

Apunts d'integració convexa

El que segueix són apunts del seminari *Convex Integration, Staircase Laminates and Applications* d'en Daniel Faraco, de part de la Universitat Autònoma de Madrid, el dia 17 de març de 2025. BGSMATH2025.

6.1 Dia 1

La integració convexa comença amb l'article de Nash sobre les encabiments C^1. La pregunta era si pots posar una esfera de manera isomètrica en una esfera més petita. Fiques una varietat $2D$, l'esfera, en una esfera en $\mathbb{R}^3$.

La condició **d'isometria** és que $Du^\intercal Du = g$. Nash comença amb una immersió curta i troba una d'isomètrica.

Esculls adequadament les pertorbacions de la immersió i obtens el resultat, com ja sabem. El resultat no és particularment útil, potser, però el mètode concret que fa servir és el que anomenem **integració convexa**, que és molt útil. En general, si hi ha una sèrie de PDE i les dones a través del límit d'unes pertorbacions, donada una subsolució final.

$$u^\infty = \lim_{N\to\infty} u^N,$$

on $u^{N+1} - u^N = \omega_q$ i ω_q té paràmetres d'oscil·lació i concentració λ_q i τ_q, amb direccions $\eta_k^1 \eta_k^2$. i funcions oscil·lants ϕ.

Considerarem que les aplicacions curtes són **límits febles**, on els límits febles tals que

$$\fint_E u_\gamma \to \fint_E \overline{u}$$

FORMULA 1, són **course grain solutions**. Diu que en aplicacions a PDE, la solució seria "micro" i el límit feble seria "macro".

Gromov és potser qui comença a desenvolupar aquest mètode de Nash. Altres van veure que això servia en dinàmica de fluids.

Laminats d'escala són un mètode inventat pel Faraco per resoldre equacions el·líptiques isotròpiques. Es fan en tres passos:

(1) Escriure el problema com una inclusió diferencial: trobar un conjunt $K \subseteq M^{m\times n}$ tal que $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ i $Du(x) \in K$ a.e. $x \in \Omega$, on K és un conjunt tancat euclidià que representa les dades del problema.

(2) Aproximar la solució per K per

$$\int \mathrm{dist}_K(Du)^p \leq \varepsilon$$

.

(3) Combinar moltes solucions aproximades per construir una solució exacta.

Veurem aquí tota una sèrie d'aplicacions.

Teoria de Calderón Zygmund

Tenint en compte aquestes propietats i definició de la transformada de Fourier, FORMULA 2.

Per Plancherel, FORMULA 3, les derivades estan controlades per la laplaciana en la norma L^2. Però en L^1 això no és cert:
Teorema 6.1.1. *$\forall N, \Omega$ regular $\exists f_N$ amb $\int |\partial_{x1x2} f| \geq N$ i $\sup\{|\partial_{x1x1}|, |\partial_{x2x2}|\} \leq 1$*

Equacions el·líptiques i aplicacions quasiconformals

En electrostàtica, si u és el potencial elèctric, aleshores

- $\mathrm{div}(\rho\nabla u) = 0$ on ρ la conductivitat.
- Condició de frontera $u|_{\partial\Omega} = g$
- Quan $\rho = 1$: $\mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u$

El·lipticitat quantitativa:

$$\frac{1}{K} I \leq \rho(x) \leq KI$$

La solució feble en forma distribucional és

$$\int_\Omega \rho\nabla u\nabla\phi \mathrm{d}x = 0, \quad ,\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

La manera d'arribar a això és amb la primera variació del funcional d'energia

$$I[u] = \int_\Omega \rho|\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

Però hem de veure quin és l'espai en què això té sentit. En general, necessitem $W^{1,2}(\Omega)$. La pregunta és si són solucions febles honestes. Hi ha qui les anomena solucions molt febles.

I ara està parlant de coses del BIMR que no arribo a entendre.

6.2 Dia 2

Mirarem C-Z en L^1, equacions el·líptiques, homeomorfismes patològics etc., on el que ens interessa és que els podem escriure $Df(x) \in E \subseteq M^{m\times n}$.

El mètode que explicarà sera trobar $Df(x) \in E \subseteq M^{m\times n}$ tal que hi ha un exponent crític p a (J) tal que $Df \in L^{p,\infty} \subset \cap_{q<p} L^q \setminus L^p$.

Pel que fa a CZ ens interessa veure que no és vàlid en L^1. És a dir, que exiteis u tal que $\int |\partial_{x1x2} u| = \infty$ però $|\partial_{x1x1}| + |\partial_{x2x2}| \leq 1$.

Vam deduir l'operador estrella de Hodge, $\star$, per equacions el·líptiques. Les derivades conformes i anticonformes es poden escriure com coordenades complexes d'una matriu 2×2.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_-, a_+)$, aleshores $\partial_{\bar{z}} f = \pm\kappa\overline{\partial_z f}$. Escrivim $Df \in E_{\pm\kappa} = \{a_- = \pm\kappa a_+\}$. Si tenim una matriu conforme i diagonal, aleshores està en una diagonal. El que tenim ara és en dos plans, $a_- = -\kappa a_+$ i $a_- = \kappa a_+$. MIRAR DIBUIX.

Beltrami no lineals

$\partial_{\bar{z}} f = \mu\partial_z f$, $\partial_{\bar{z}} f = v\overline{\partial_z f}$, $\partial_{\bar{z}} f = \mu\partial_z f + v\overline{\partial_z f}$ es poden posar en una certa forma.

6.3 Dia 3

Recordem que el que volem, donat $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, descriure

$$Du(x) \in K \quad \text{a.e. x} \quad (I)$$

Quina és la integrabilitat de Du? I volem reformular el problema com:

$$\exists g.d.v_u \text{ tal que ...}$$

6.4 Dia 4

Volem, com sempre, $Du \in K$ tal que $Du \in L^{p,\infty} \setminus L^p$ per algun p crític. Això és el mateix que fer una distribució de gradients tq el suport de $v_u \in K$, $v_u(x : |x| \geq t) \approx t^{-p}$. Que serà el mateix que construir un laminat d'escala tal que $v_u \in \mathcal{SL}^p(K)$

Recordem que diem que A i B són rang 1 connectades si $A - B = a \otimes n$ tal que $\det(A - B) = 0$. Per tant, $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda s_A + (1-\lambda)s_B$ és (aprox) distribució de gradients.

Amb això podem trobar ua funció amb distribució de gradients només un en A i un en B (l'espai gradient vius a l'espai de les matrius, generat per $(10, 00)$ i $(00, 01)$) Aleshores les direccions de rang 1 són les horitzontals i verticals. El centre de masses d'una mesura generada (en horitzontal) per A i B està en el segment entre A i B.

Les propietats que té la distribució de gradients per tal que funcionin és que siguin afins a trossos amb condicions afins de frontera, que ens fa més fàcil generar laminats. Si tenim $ABABAB$ haurem de posar a la frontera lateral una regió d'interpolació, i no hi ha problema canviant per exemple B per $DEDEDE$ o alguna cosa així. Cada vegada que fem aquest procés, que la massa de A es divideix entre B i C i la de B entre D i E, tenim una altra distribució gradient. Ara bé, amb això només podem fer coses amb matrius connectades rang 1. Ara bé, si no són connectades rang 1 això no funciona. El que hem construit fins ara eren prelaminats, els laminats són els límits de successions de prelaminats a mesura que fem més i més petites les cantonades.

La gran contribució de Tartar és que ser un camp gradient és només que el rotacional sigui 0. Anul·lar el rotacional és com resoldre un sistema d'equacions de primer ordre, per exemple $\mathcal{L}(z) = A_{ijk}\partial_j z^k$. Per cada operador diferencial existeix el que anomenem con d'ones Λ_L, el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tal que si $I \in \Lambda_L$ aleshores exiteix una direcció ξ tal que per qualsevol $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenim que $\mathcal{L}(h)$ LHA TRET :(, que generalitza el concepte de connexió de rang 1.

Aquesta teoria no es restringeix només a gradients, sinó també a coses de Fraday blablabla.

Definició de laminat escala: tenim un conjunt $K \in M^{d\times m}$ on vull que es suporti, i $A \notin K$. Aleshores l'esglaó n serà $\omega_1 = (1-\gamma_n)\mu_n + \gamma_n\delta_{A_n}$ i tal, de manera que anem pujant i suportant-nos on toca.

Capítol 7

Conclusions

Hem après un muntHI HA UNA EXPLICACIó DE COM CITAR AL CAMPUS

Bibliografia

Autor1, A., & Autor2, B. (ANY) *Nom del treball.* Cambridge University Press.

Oh, S. J. (2018) *The Nash C^1 isometric embedding theorem.* LINK O PUBLISHER?

Nash, J. (1954) *C^1 isometric imbeddings.* Annals of Mathematics, 60(3), 383-396.

Lee, J. M. (2013) *Introduction to smooth manifolds.* Springer.