Cafeteria

OBI 2025

Sobre a solução

- A solução resolve todas as subtarefas.
- Complexidade de tempo: $O(1)$.

Explicação

O problema consiste em determinar se existe algum número de doses de café que podem ser adicionadas à xícara tal que a quantidade restante seja um número entre a e b.

Formalmente, o problema consiste em determinar o valor-verdade da seguinte proposição:

$$\exists x \in \mathbb{N}(a \leq c - d \cdot x \leq b)$$

Isso pode ser resolvido de forma iterativa, encontrando o menor valor de x tal que:

$$c - d \cdot x \leq b$$

e verificando se:

$$a \leq c - d \cdot x$$

Esse problema também pode ser resolvido utilizando as definições matemáticas:

$$a \leq c - d \cdot x \leq b$$

Isolando o x da desigualdade da esquerda:

$$a \leq c - d \cdot x$$
$$a - c \leq -(d \cdot x)$$
$$c - a \geq d \cdot x$$
$$\frac{c - a}{d} \geq x$$

Isolando o x da desigualdade da direita:

$$c - d \cdot x \leq b$$
$$-(d \cdot x) \leq b - c$$
$$d \cdot x \geq c - b$$
$$x \geq \frac{c - b}{d}$$

Assim, obtemos:

$$\frac{c - b}{d} \leq x \leq \frac{c - a}{d}$$

Sabendo que os valores são inteiros, arredondamos os valores para cima e para baixo (*ceil* e *floor*), da esquerda para a direita.

$$\left\lceil \frac{c - b}{d} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \frac{c - a}{d} \right\rfloor$$

Para que o intervalo não seja vazio, isto é, para que exista ao menos um valor $x \in \mathbb{N}$ válido, verificamos se o final do intervalo é maior ou igual ao início. Em caso positivo, a resposta para o problema é sim, em caso contrário, a resposta é não.

$$\left\lceil \frac{c - b}{d} \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{c - a}{d} \right\rfloor$$