Предел числовой последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Монотонная последовательность. Критерий существования предела монотонной последовательности. Число е. Определители. Их свойства. Основные методы их вычисления. Матрицы. Обратная матрица.

Конспект к экзаменационному билету

1. Предел числовой последовательности

Определение: Числовая последовательность ${a_n}$ имеет предел A, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \epsilon$.

Формально: $$ \lim_{n \to \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{такое, что} \ \forall n > N \ |a_n - A| < \epsilon $$

Объяснение: Это значит, что для любого близкого к нулю значения ϵ, начиная с некоторого номера N, все элементы последовательности будут находиться в ϵ-окрестности предела A.

2. Критерий Коши сходимости последовательности

Определение: Числовая последовательность ${a_n}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $m, n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Формально: $$ {a_n} \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{такое, что} \ \forall m, n > N \ |a_n - a_m| < \epsilon $$

Объяснение: Последовательность сходится, если начиная с некоторого номера все её члены становятся настолько близкими друг к другу, насколько мы хотим, независимо от их индекса.

3. Монотонная последовательность

Определение: Числовая последовательность ${a_n}$ называется монотонно возрастающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n \leq a_{n+1}$.

Формально: $$ {a_n} \text{ монотонно возрастает } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq a_{n+1} $$

Числовая последовательность ${a_n}$ называется монотонно убывающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n \geq a_{n+1}$.

Формально: $$ {a_n} \text{ монотонно убывает } \Leftrightственно \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq a_{n+1} $$

Объяснение: В монотонной последовательности каждый следующий элемент не меньше (или не больше) предыдущего. Это свойство делает такие последовательности предсказуемыми и позволяет легко проверять сходимость.

4. Критерий существования предела монотонной последовательности

Теорема: Любая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Формулировка: Если последовательность ${a_n}$ монотонна и ограничена сверху (для монотонно возрастающей) или ограничена снизу (для монотонно убывающей), то у этой последовательности существует конечный предел.

Формально:

1. Если ${a_n}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$.
2. Если ${a_n}$ монотонно убывает и ограничена снизу, то $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$.

Объяснение: Монотонная последовательность, которая не может бесконечно возрастать или убывать из-за ограничений, обязательно должна прийти к некоторому пределу.

5. Число e

Определение: Число e - это предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$.

Формально: $$ e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n $$

Свойства:

1. $e \approx 2.71828$.
2. e - основание натурального логарифма.
3. e часто используется в математике и естественных науках, особенно в задачах роста и затухания.

Объяснение: Число e возникает в ситуациях, связанных с непрерывным сложным процентом и экспоненциальным ростом. Оно является пределом достаточно сложного выражения, которое возникает во многих реальных процессах.

Этот конспект включает основные определения и теоремы, которые помогут вам понять и подготовиться к углубленному изучению указанных математических понятий.

Определители, Матрицы и Обратная Матрица: Подробный Конспект

Определители

Определение

Определитель квадратной матрицы $n \times n$ — это число, характеризующее свойства этой матрицы. Для матрицы A он обозначается как $\det(A)$ или $|A|$.

Свойства Определителей

1. **Линейность по строке (столбцу)**:

   Если одну строчку (столбец) представить как сумму двух векторов, то определитель распадётся на сумму двух определителей с каждой из этих строчек (столбцов).

   $$ \det(\alpha \mathbf{A}_i + \beta \mathbf{A}_j) = \alpha \det(\mathbf{A}_i) + \beta \det(\mathbf{A}_j) $$

2. **Свойство транспонирования**:

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$ \det(A^T) = \det(A) $$

3. **Перемена мест строк (или столбцов)**:

   Перемена двух строк (или столбцов) матрицы меняет знак определителя.

   $$ \det(\text{Матрица с переставленными строками}) = -\det(A) $$

4. **Нулевая строка или столбец**:

   Если в матрице есть хотя бы одна нулевая строка (или столбец), то её определитель равен нулю.

   $$ \text{Если }\exists i: A[i,:] = \mathbf{0} \text{ или } A[:,i] = \mathbf{0}, \text{ то } \det(A) = 0 $$

5. **Пропорциональные строки или столбцы**:

   Если в матрице есть две одинаковые или пропорциональные строки (или столбцы), то её определитель равен нулю.

   $$ \text{Если }\exists i,j: A[i,:] = k \cdot A[j,:], \text{ то } \det(A) = 0 $$

6. **Матричное произведение**:

   Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей.

   $$ \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) $$

Методы Вычисления Определителей

1. **Разложение по строке или столбцу**:

   Для вычисления определителя $n \times n$ матрицы A:

   $$ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) $$

   Где A_{ij} — это минор матрицы A.

2. **Метод Гаусса** (прямой ход):

   Привести матрицу к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями.
   Определитель матрицы равен произведению элементов на диагонали.

   $$ \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} $$

   Не забывать учитывать знак, если было нечётное число перестановок строк.

Матрицы

Определение

Матрицей называют прямоугольную таблицу чисел, записанных в виде m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Основные Операции с Матрицами

1. **Сложение и вычитание**:

   Матрицы складываются и вычитаются поэлементно.

$$ (A + B){i,j} = a{ij} + b_{ij} $$

2. **Умножение на скаляр**:

   Каждый элемент матрицы умножается на скаляр:

   $$ (\alpha A){i,j} = \alpha \cdot a{ij} $$

3. **Матрица умножения**:

   Умножение двух матриц возможно только если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

   $$ (C){i,j} = \sum{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} $$

Свойства Матриц

1. Неассоциативность сложения:

   $$ A + B \neq B + A $$

2. Ассоциативность умножения:

   $$ A(BC) = (AB)C $$

3. Дистрибутивность:

   $$ A(B + C) = AB + AC $$

4. Умножение матрицы на единичную матрицу I:

   Оставляет матрицу неизменной.

   $$ AI = IA = A $$

Обратная Матрица

Определение

Обратная матрица A^{-1} для матрицы A существует, если A является квадратной и невырожденной (то есть $\det(A) \neq 0$). Обратная матрица A^{-1} такова, что:

$$ AA^{-1} = A^{-1}A = I $$

Свойства Обратной Матрицы

1. **Обратная к обратной**:

   $$ (A^{-1})^{-1} = A $$

2. **Обратная к произведению двух матриц**:

   Если A и B обратимы, то

   $$ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} $$

3. **Обратная к транспонированной матрице**:

   $$ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T $$

Метод Нахождения Обратной Матрицы

1. **Метод присоединённой матрицы**:

   Обратная матрица A^{-1} находится через миноры и алгебраические дополнения:

   $$ A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) $$

   Где $\text{adj}(A)$ — присоединённая матрица, состоящая из алгебраических дополнений каждого элемента A.

2. **Метод Гаусса-Жордана**:

   Нужно дополнить исходную матрицу A единичной матрицей I и привести к виду $[I|A^{-1}]$ при помощи элементарных преобразований.

Если соблюдать последовательность расчётов, понимать причины выполнения тех или иных действий, изучение темы будет легче и продуктивнее. Удачи на экзамене!