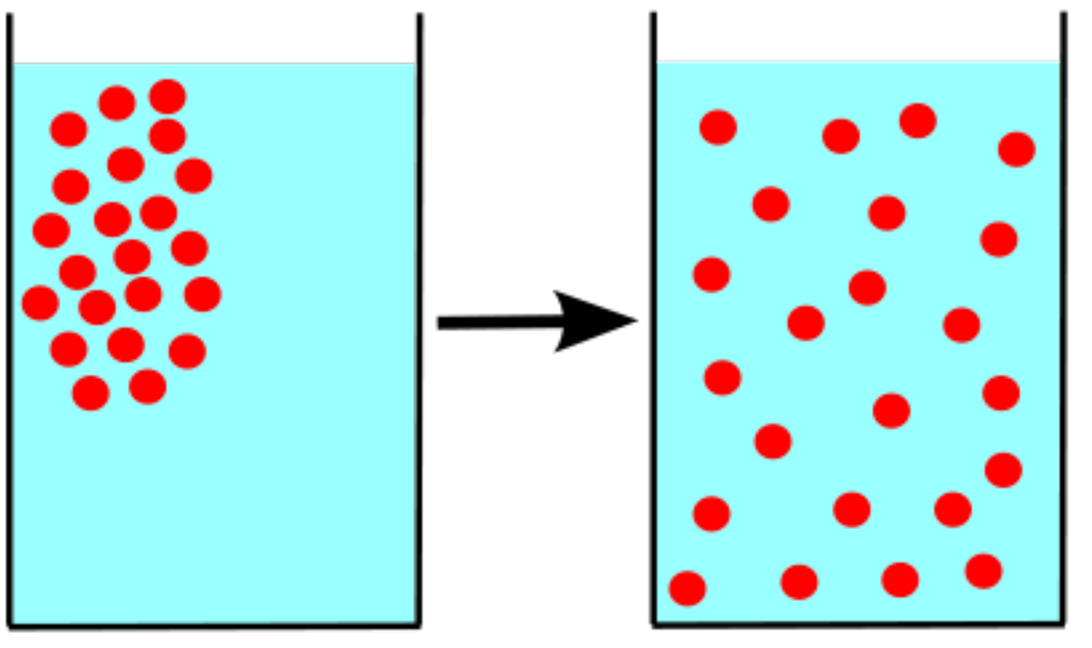
AGG0012 – Problemas Integrados em Ciências da Terra II

Bloco I - aula 3
Equação de Difusão
Victor Sacek

O que é difusão

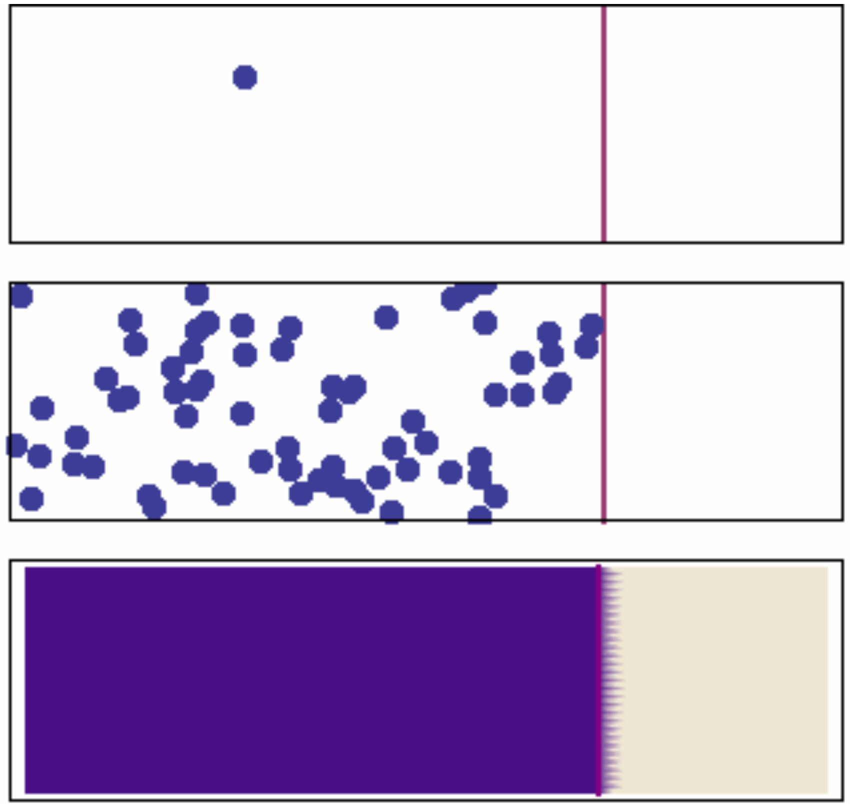


https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion

Difusão

- É um processo de transporte de massa ou de energia que ocorre em regiões onde existem diferenças de concentração. O transporte por difusão dá-se de regiões de alta concentração para regiões de baixa concentração.

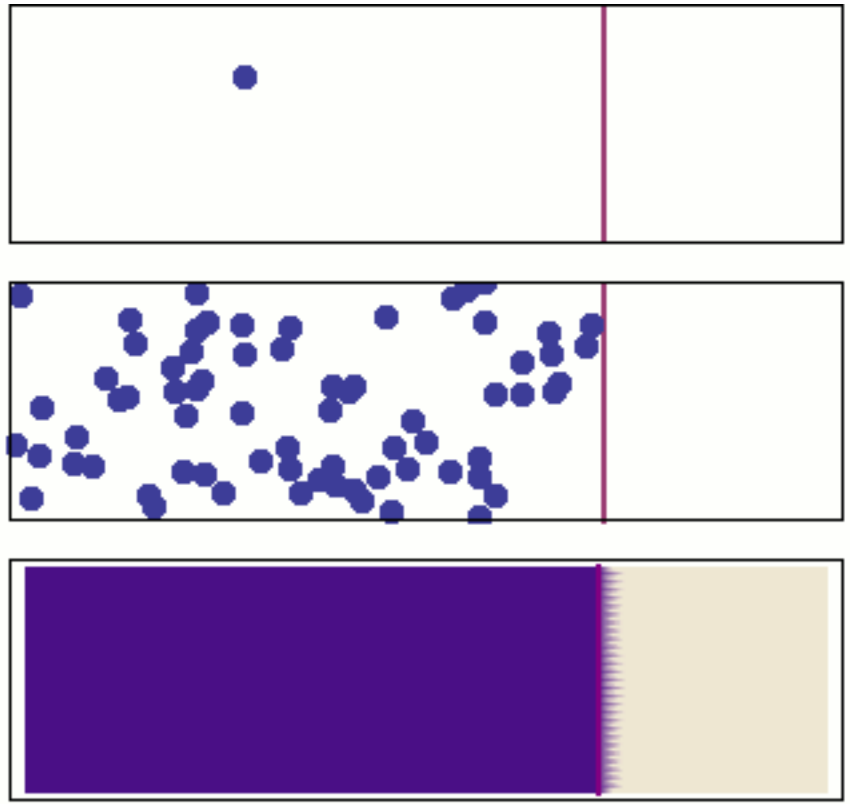
- O transporte por difusão é quantificado pela densidade de fluxo ϕ, que é a quantidade de substância ou energia transportada por unidade de área por unidade de tempo.



Difusão

- É um processo de transporte de massa ou de energia que ocorre em regiões onde existem diferenças de concentração. O transporte por difusão dá-se de regiões de alta concentração para regiões de baixa concentração.

- O transporte por difusão é quantificado pela densidade de fluxo ϕ, que é a quantidade de substância ou energia transportada por unidade de área por unidade de tempo.



Série Fundação de Isaac Asimov

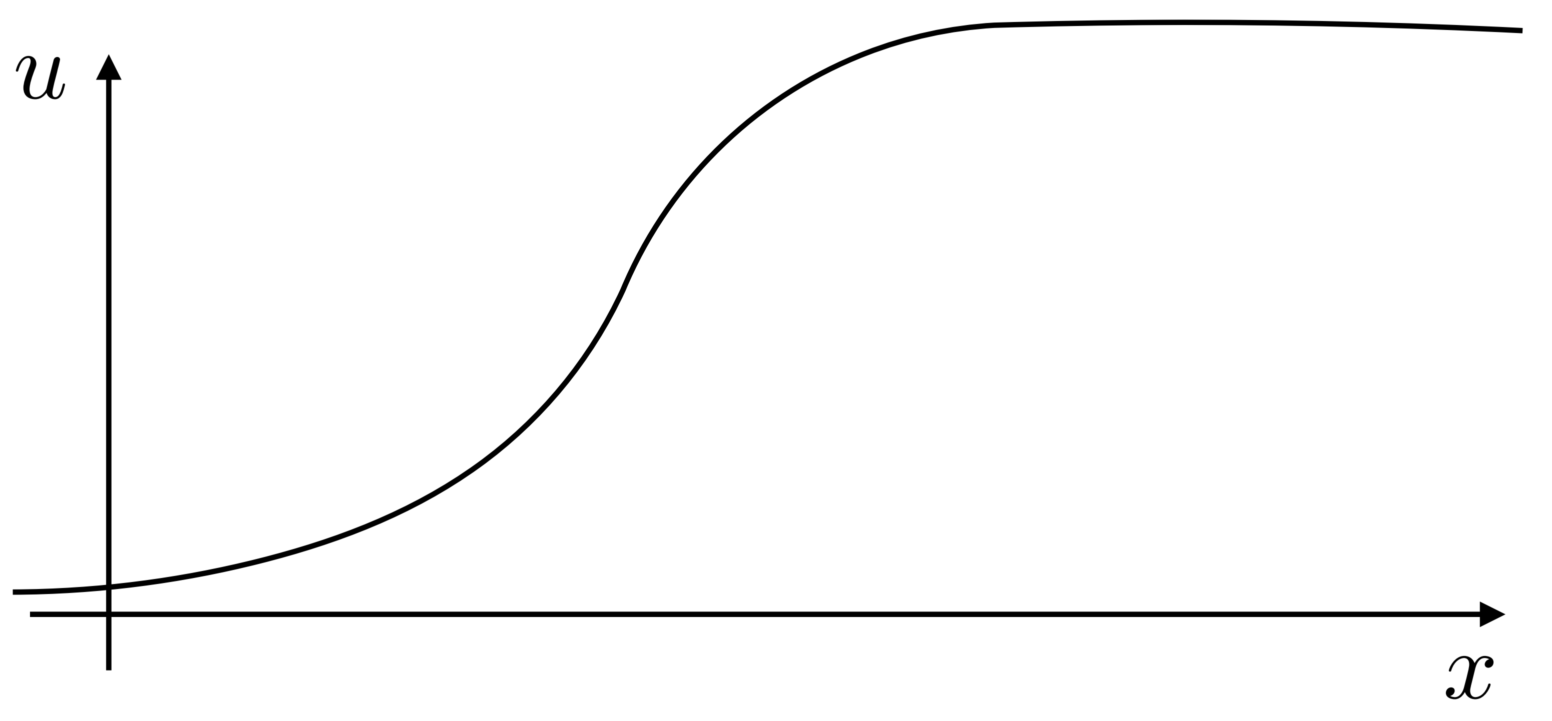
Série Fundação de Isaac Asimov

"Há uma série muito antiga de Isaac Asimov - os romances da Fundação - na qual os cientistas sociais entendem a verdadeira dinâmica da civilização e a salvam. Isso é o que eu queria ser. E isso não existe, mas a economia é o mais próximo que se pode chegar. Então, como eu era adolescente, embarquei nessa." - Paul Krugman, Prêmio Nobel de Economia de 2008

Primeira Lei de Fick

- Para muitos problemas físicos, a difusão segue a primeira lei de Fick, em que o fluxo é proporcional à variação da concentração e ocorre no sentido contrário a concentração.

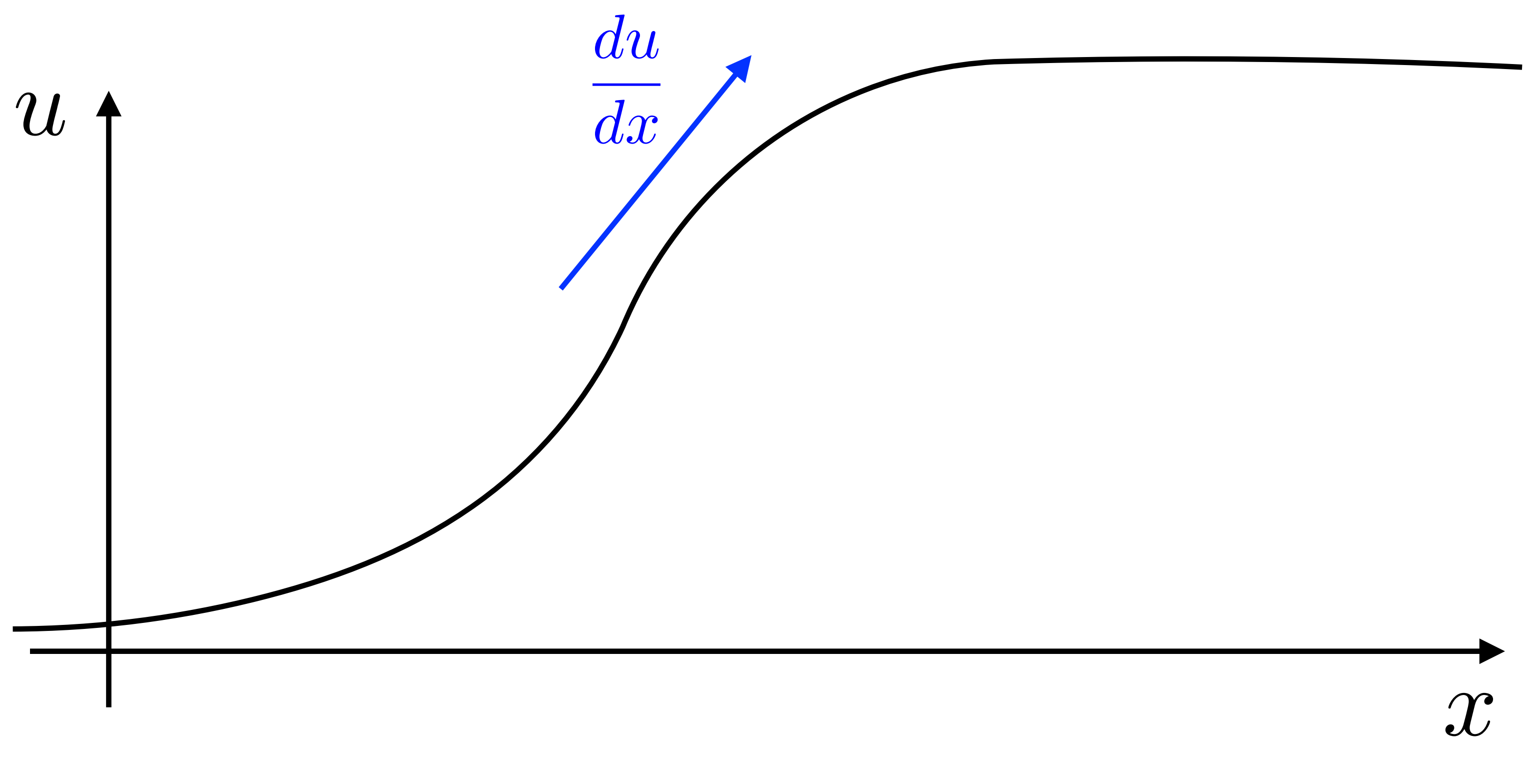
- Em 1D:



Primeira Lei de Fick

- Para muitos problemas físicos, a difusão segue a primeira lei de Fick, em que o fluxo é proporcional à variação da concentração e ocorre no sentido contrário a concentração.

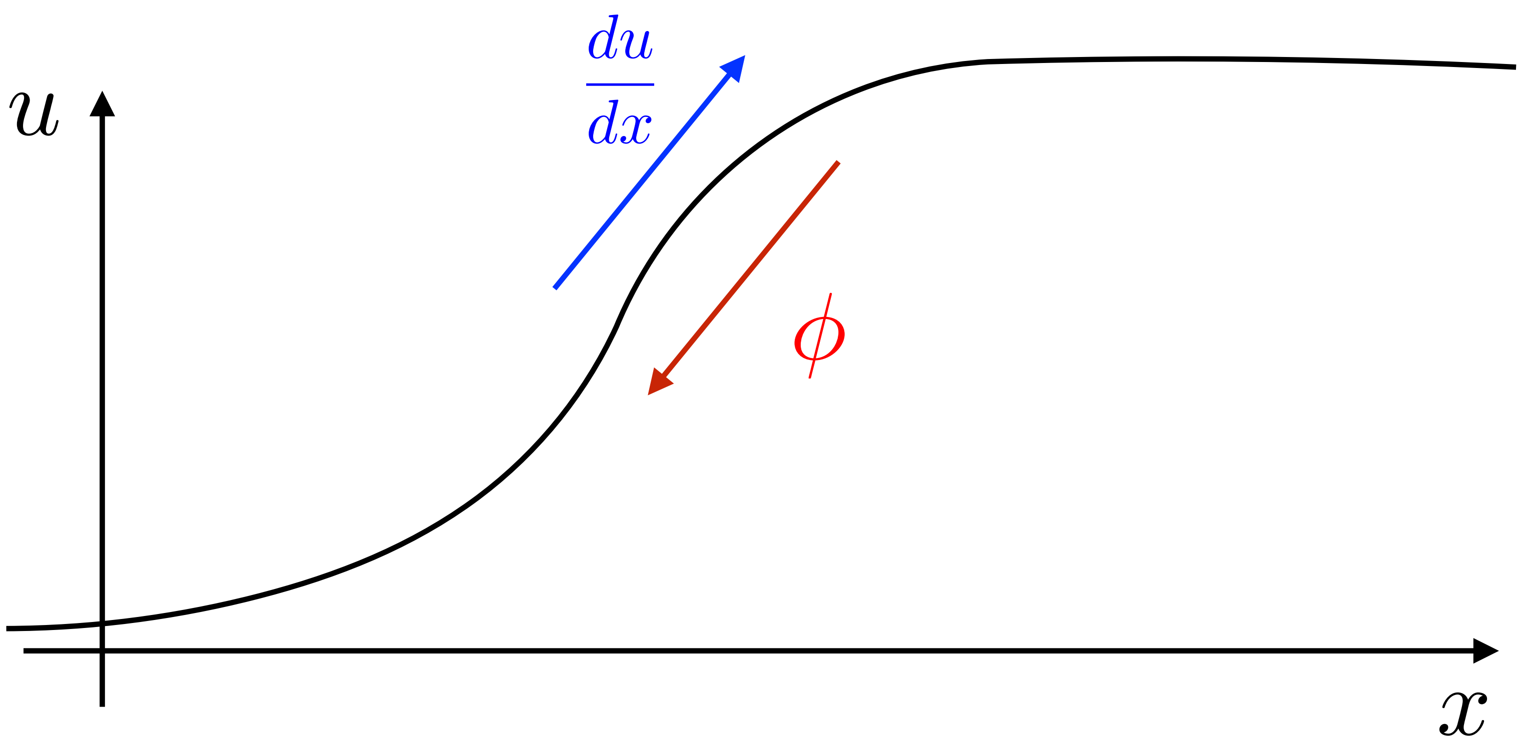
- Em 1D:



Primeira Lei de Fick

- Para muitos problemas físicos, a difusão segue a primeira lei de Fick, em que o fluxo é proporcional à variação da concentração e ocorre no sentido contrário a concentração.

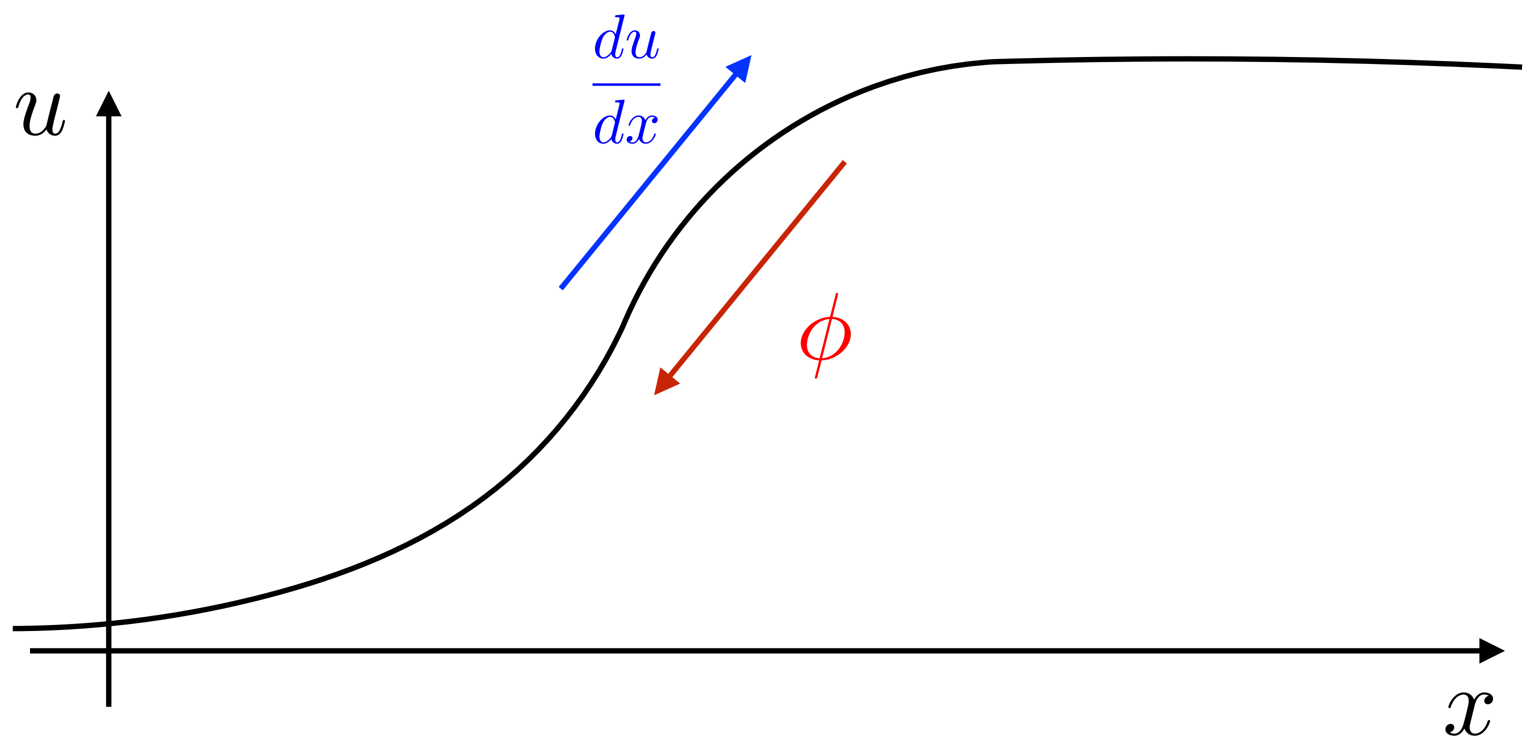
- Em 1D:



Primeira Lei de Fick

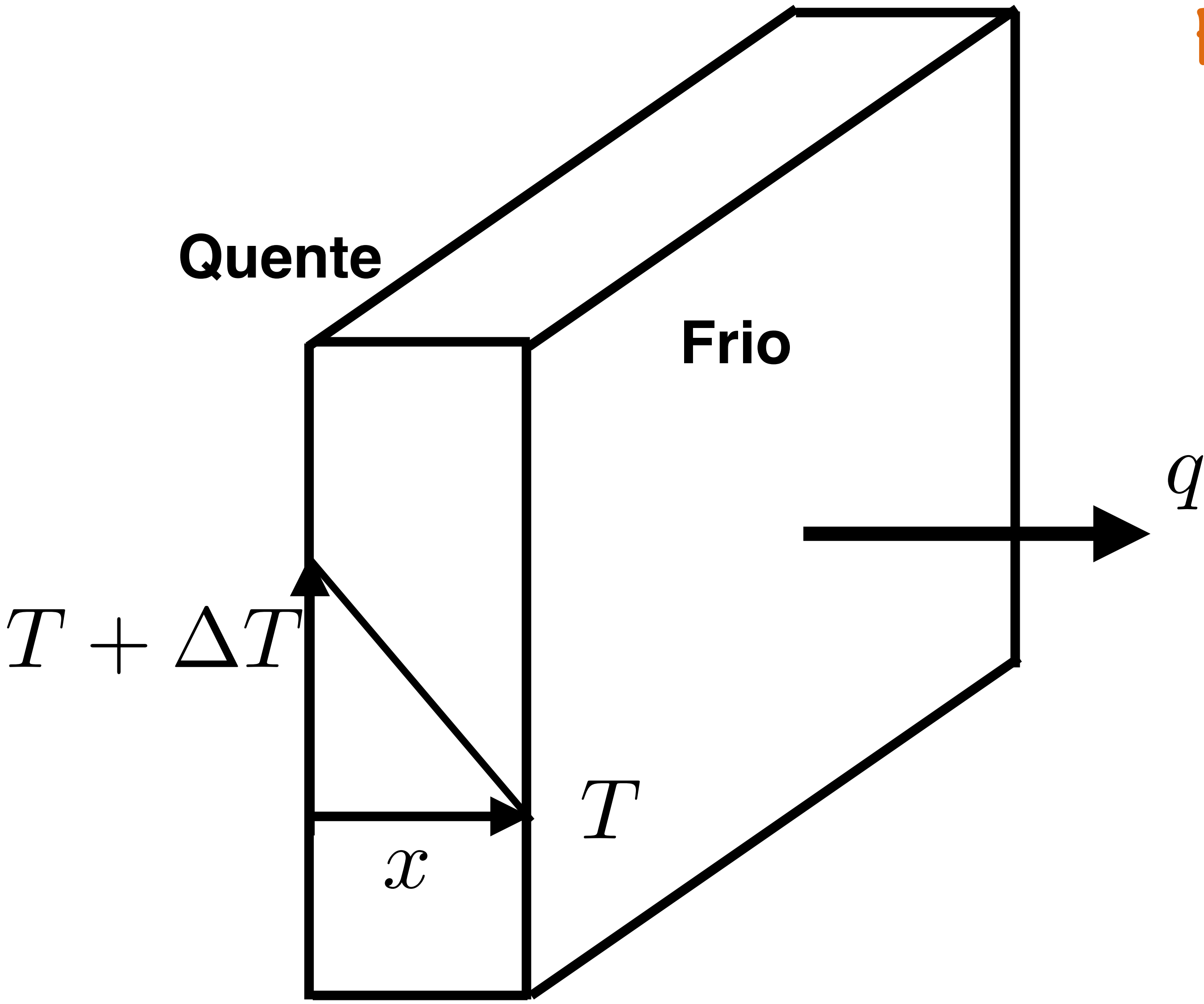
- Para muitos problemas físicos, a difusão segue a primeira lei de Fick, em que o fluxo é proporcional à variação da concentração e ocorre no sentido contrário a concentração.

- Em 1D:



$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

Exemplo: Condução de calor



Fluxo de calor

Temperatura

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

Condutividade

$q \quad [\mathrm{W/m^2}]$

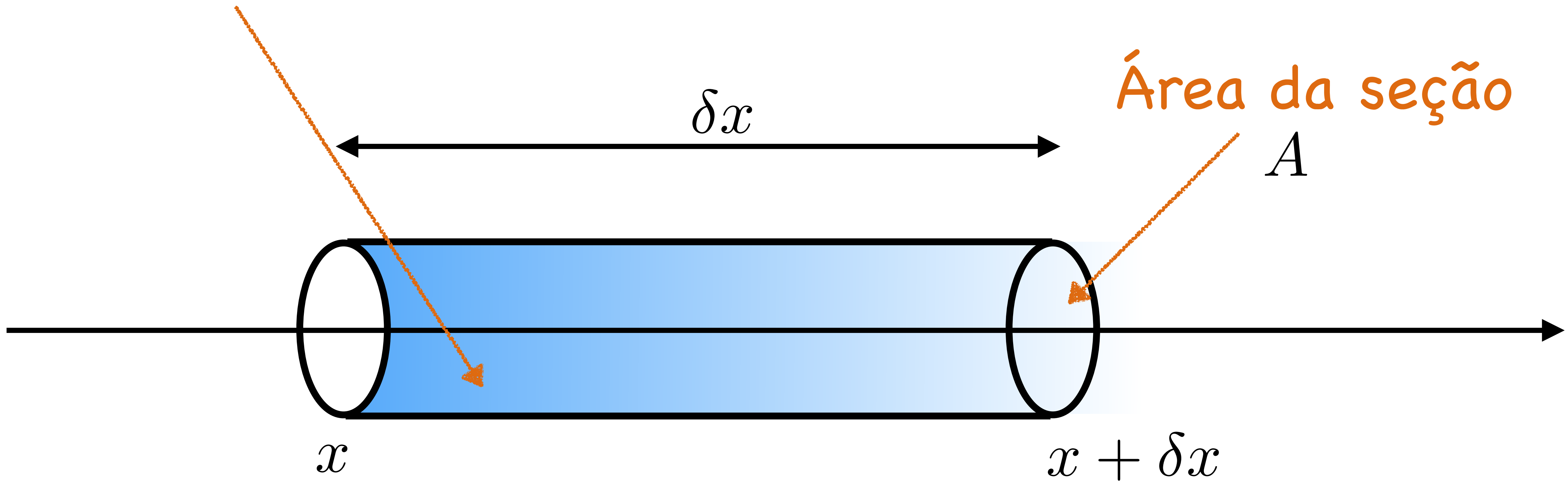
$T \quad [\mathrm{K}]$

$k \quad [\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}]$

Dedução

Concentração u
variável no tempo
e no espaço

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

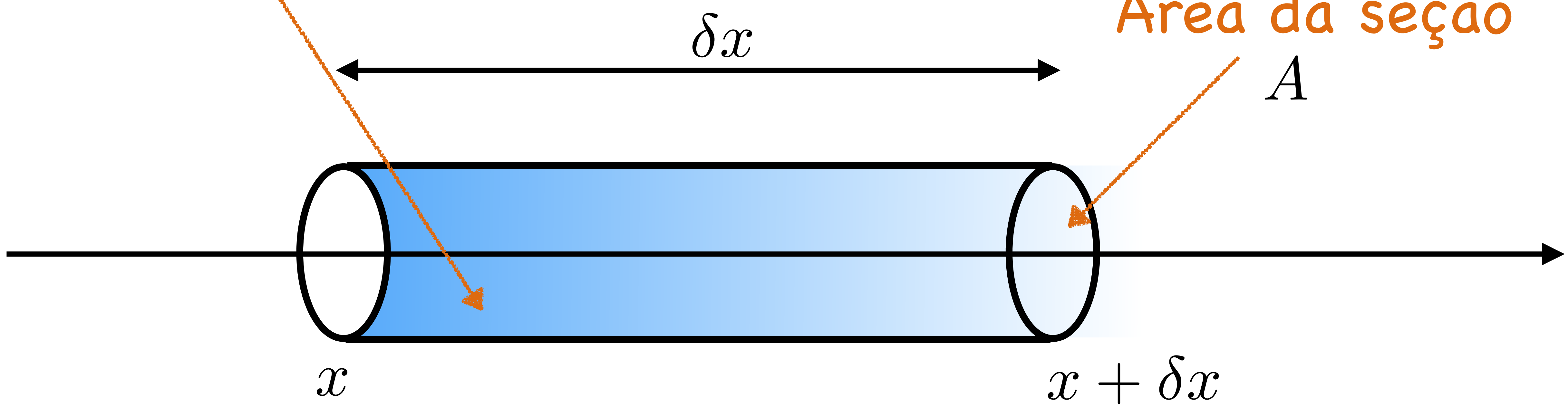


Dedução

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

Concentração u <u>variável no tempo</u>
<u>e no espaço</u>

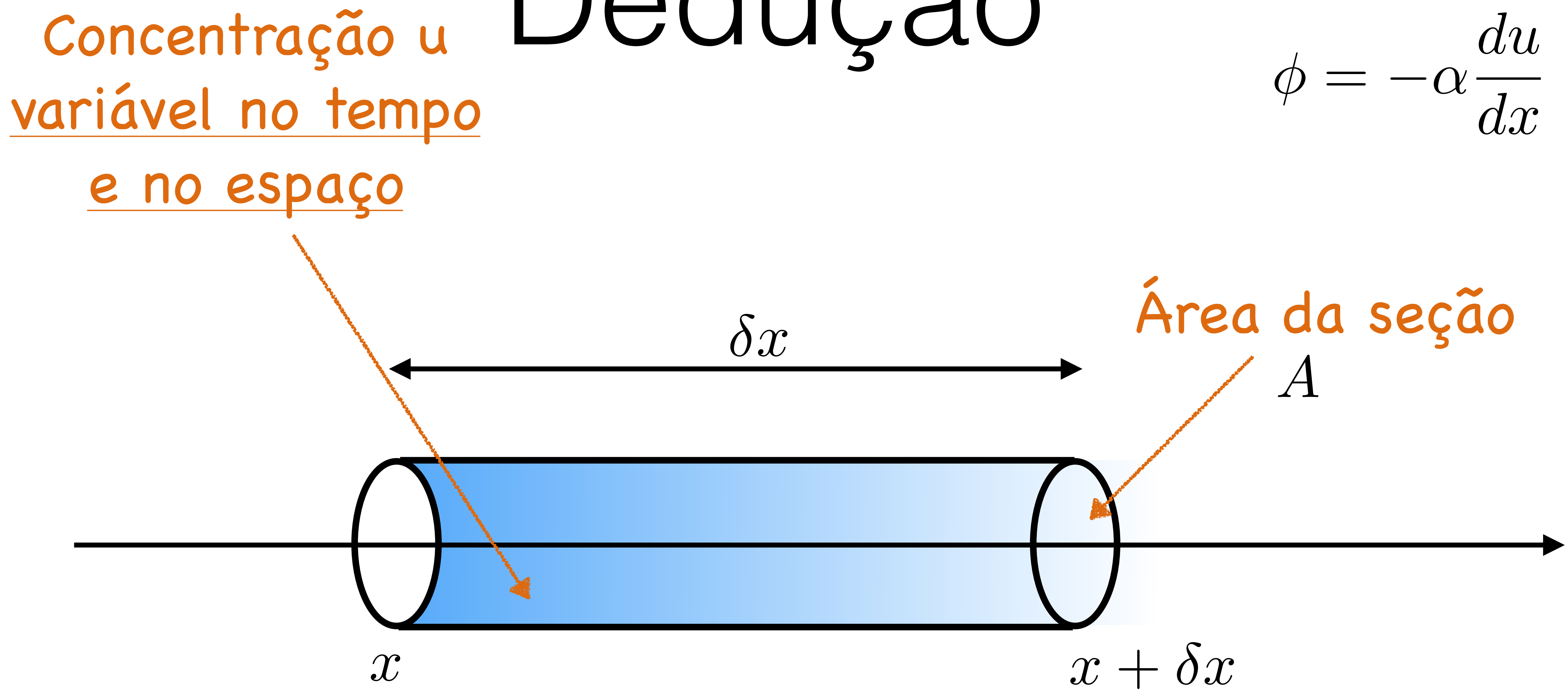
Área da seção A



Volume: $\delta V = A \delta x$

Dedução

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$



Volume: $\delta V = A \delta x$

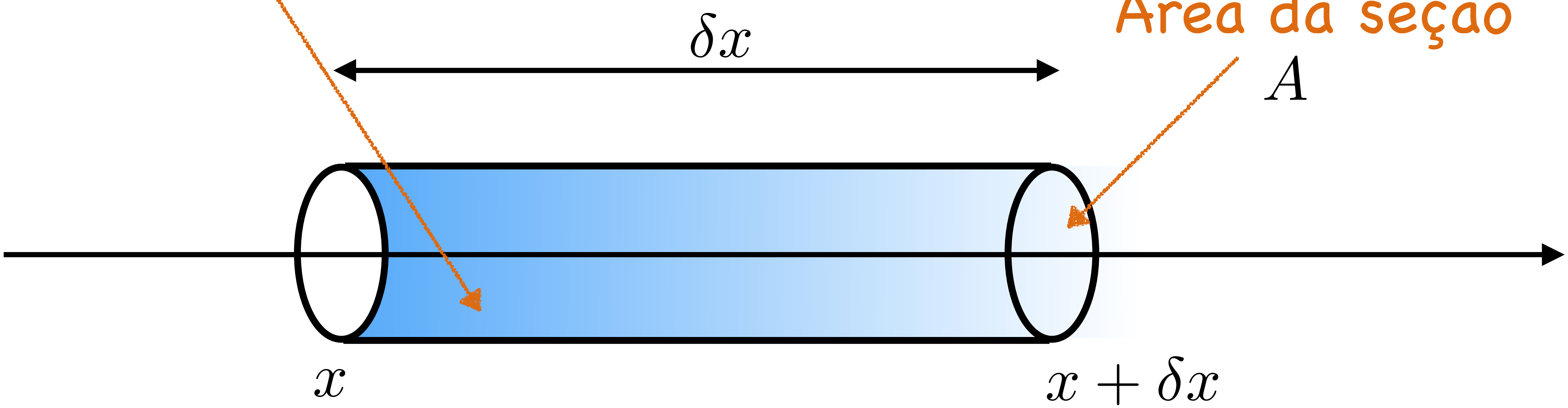
No instante t:

Dedução

Concentração u variável no tempo e no espaço

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

Área da seção A



Volume: $\delta V = A\delta x$

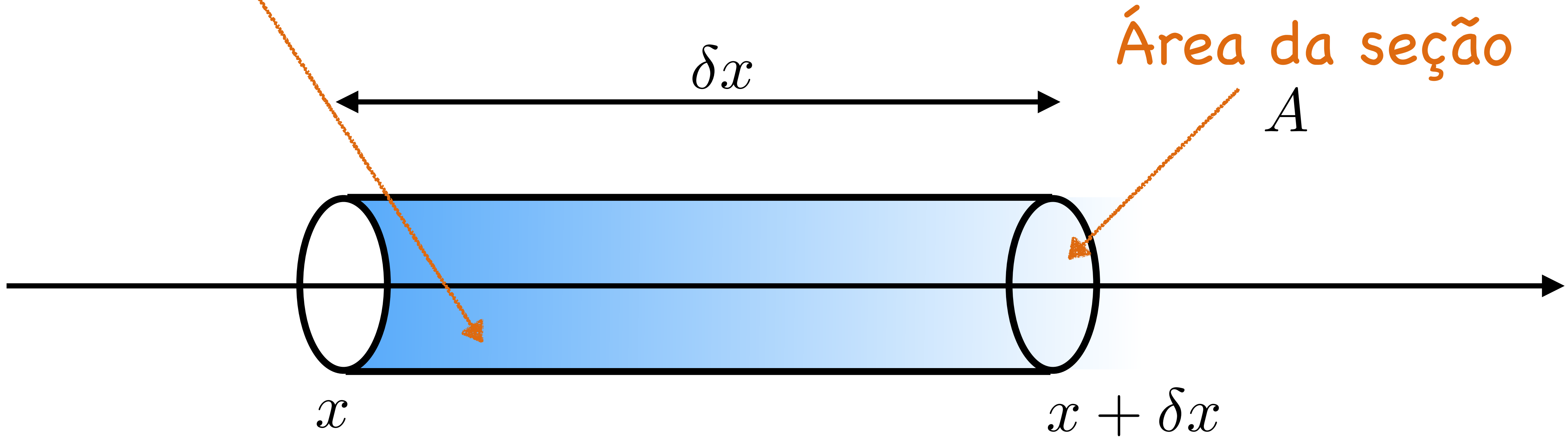
No instante t:

Fluxo em x:

Dedução

Concentração u variável no tempo e no espaço

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$



Volume: $\delta V = A \delta x$

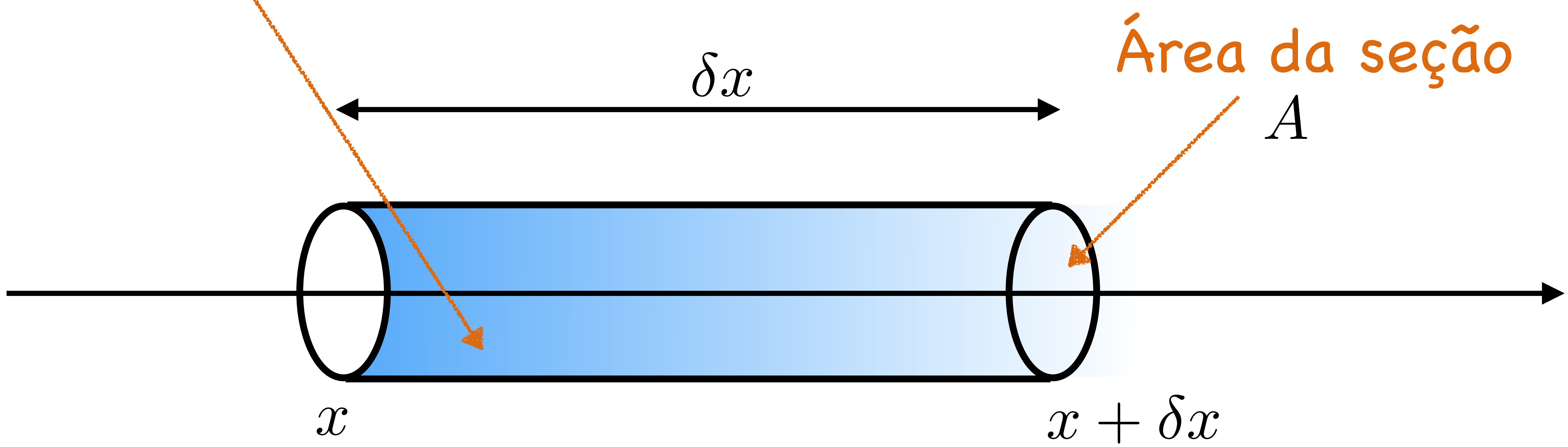
No instante t:

Fluxo em x: $$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx}$$

Dedução

Concentração u variável no tempo e no espaço

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$



Volume: $\delta V = A\delta x$

No instante t:

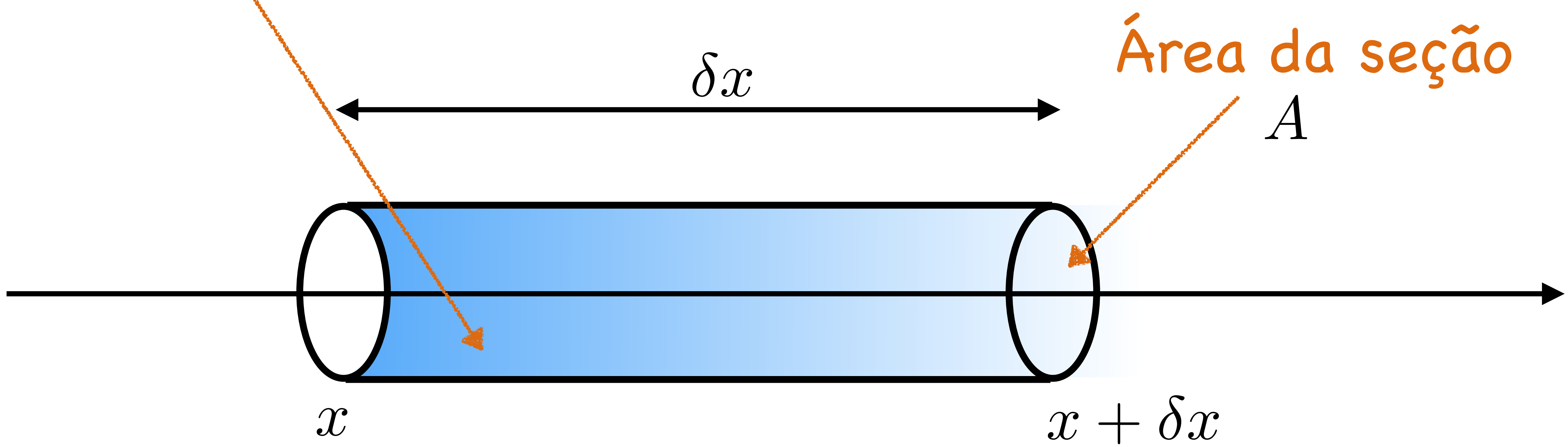
Fluxo em x: $\phi(x) = -\alpha \dfrac{du(x,t)}{dx}$

Fluxo em $x + \delta x$:

Dedução

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

Concentração u variável no tempo e no espaço

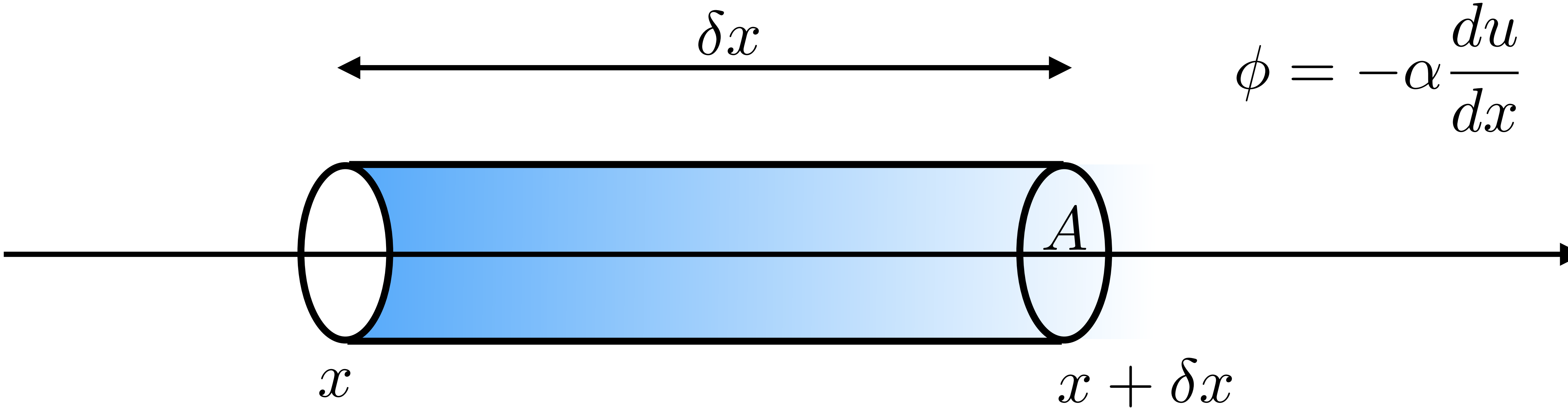


Volume: $\delta V = A \delta x$

No instante t:

Fluxo em x: $\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx}$

Fluxo em $x + \delta x$: $\phi(x + \delta x) = -\alpha \frac{du(x + \delta x, t)}{dx}$

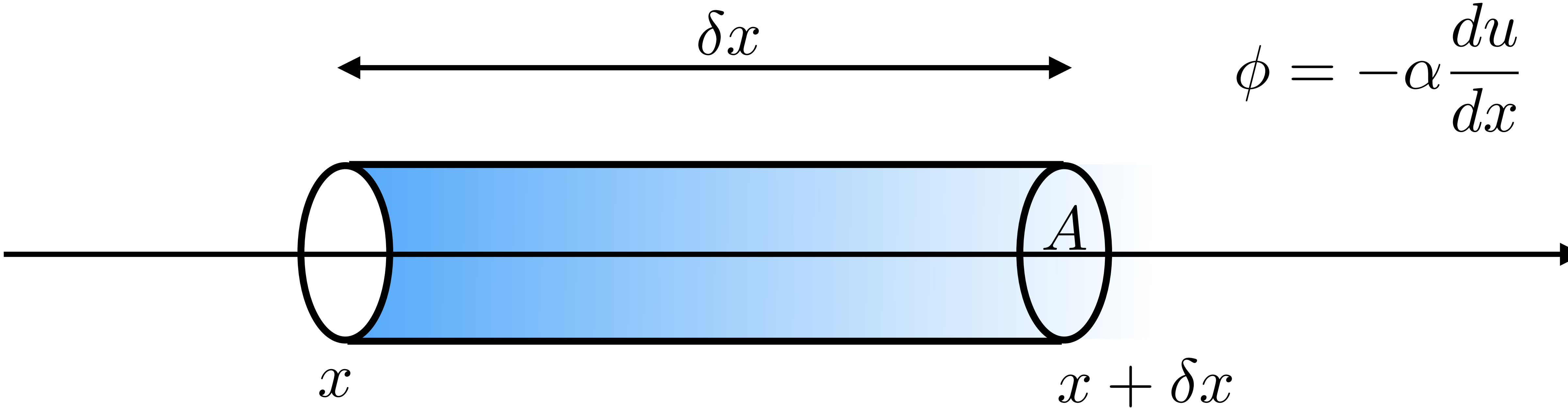


$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

$$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx}$$

$$\phi(x + \delta x) = -\alpha \frac{du(x + \delta x, t)}{dx}$$

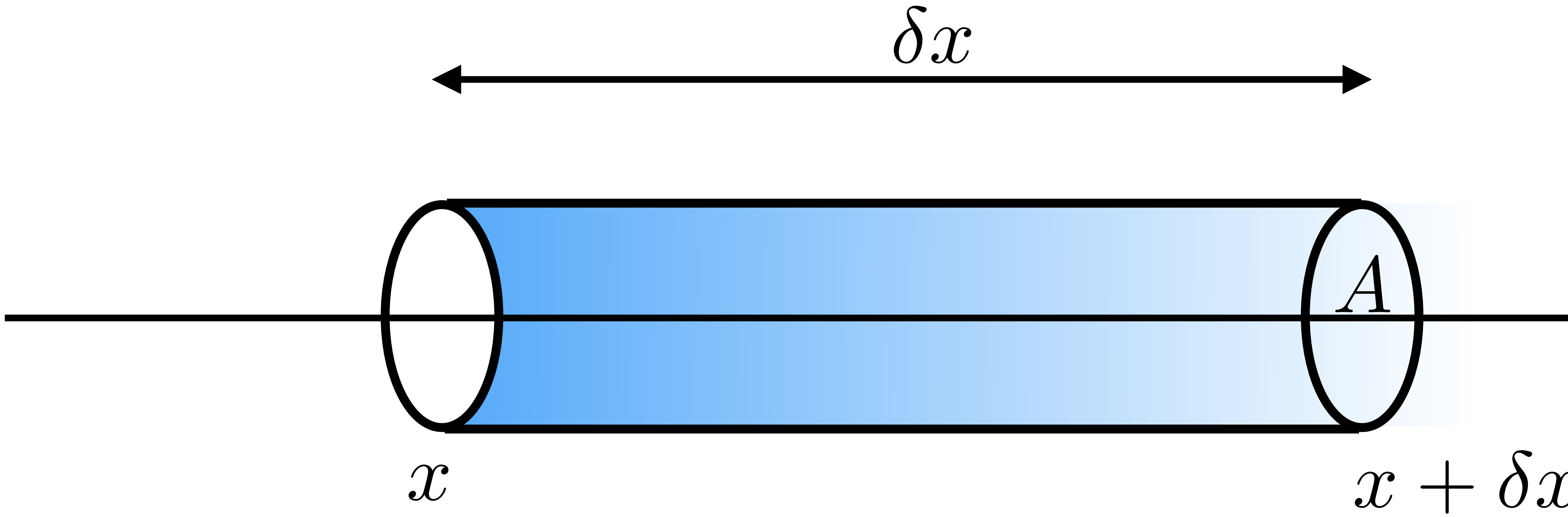
$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$



$$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx} \qquad \phi(x+\delta x) = -\alpha \frac{du(x+\delta x, t)}{dx}$$

Entre os instantes t e $t+\delta t$, uma certa quantidade de substância entra no volume em x e outra quantidade sai em $x+\delta x$

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

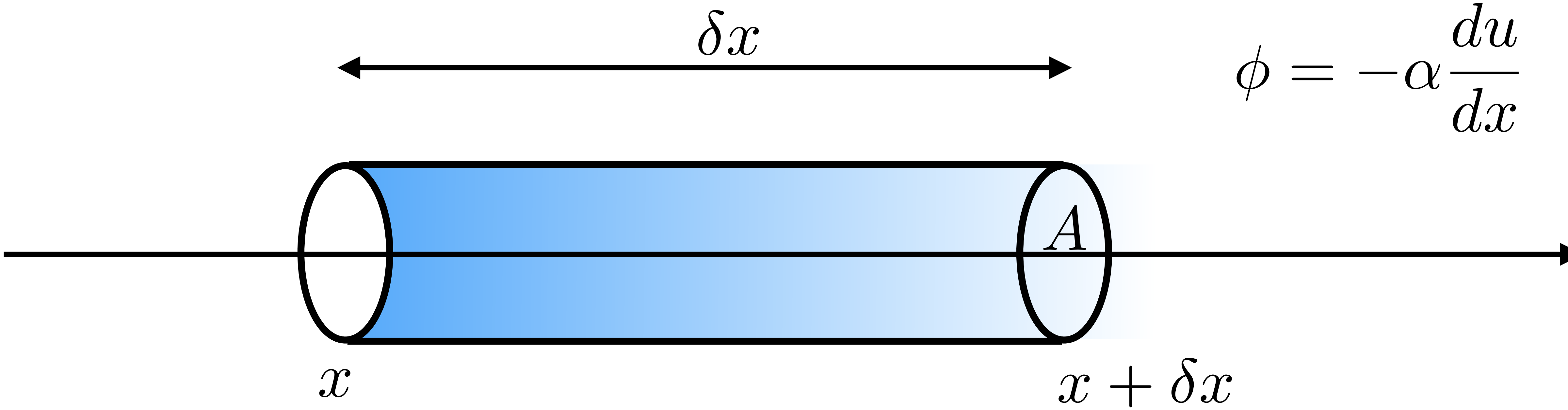


$$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx} \qquad \phi(x+\delta x) = -\alpha \frac{du(x+\delta x,t)}{dx}$$

Entre os instantes t e $t + \delta t$, uma certa quantidade de substância entra no volume em x e outra quantidade sai em $x + \delta x$

Entrada em x: $\phi(x) A \delta t$

$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

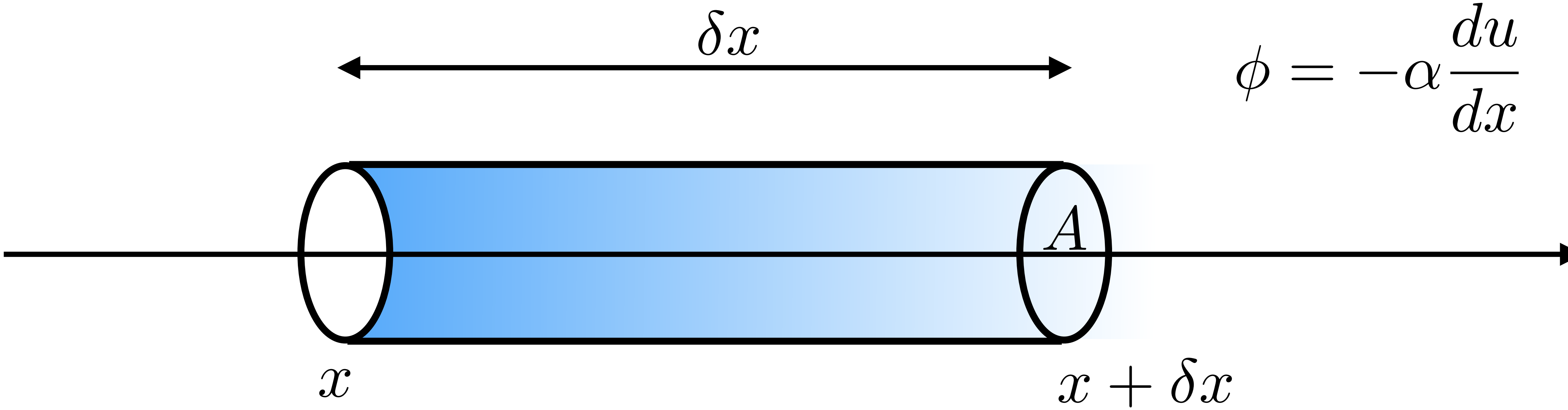


$$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx} \qquad \phi(x+\delta x) = -\alpha \frac{du(x+\delta x, t)}{dx}$$

Entre os instantes t e $t + \delta t$, uma certa quantidade de substância entra no volume em x e outra quantidade sai em $x + \delta x$

Entrada em x: $\phi(x) A \delta t$

Saída em $x + \delta x$: $\phi(x+\delta x) A \delta t$



$$\phi = -\alpha \frac{du}{dx}$$

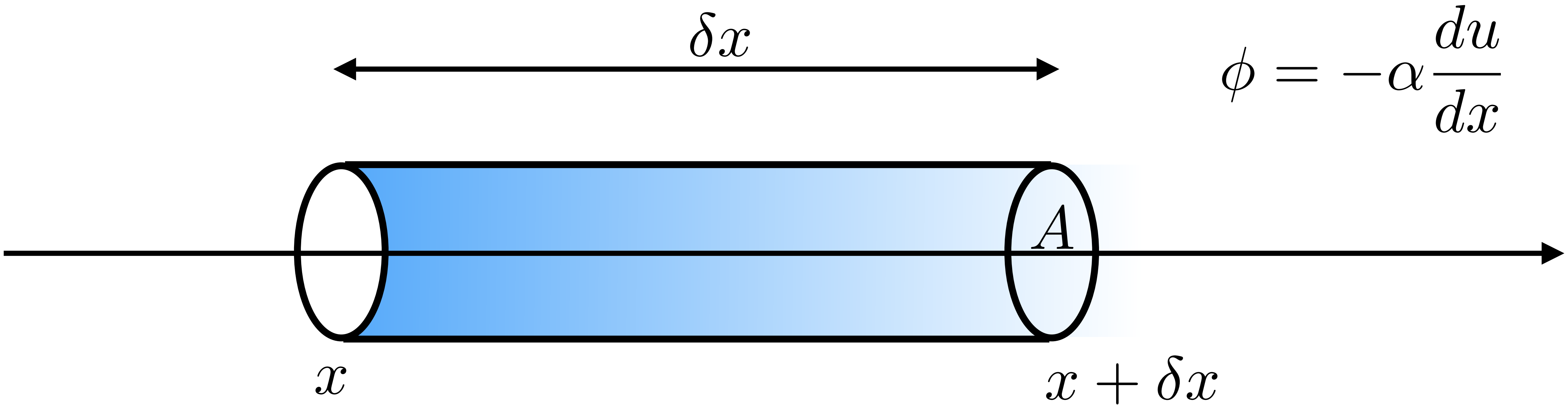
$$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx} \qquad \phi(x+\delta x) = -\alpha \frac{du(x+\delta x,t)}{dx}$$

Entre os instantes t e $t + \delta t$, uma certa quantidade de substância entra no volume em x e outra quantidade sai em $x + \delta x$

Entrada em x: $\phi(x) A \delta t$

Saída em $x + \delta x$: $\phi(x+\delta x) A \delta t$

Variação total de substância: $\delta M = \phi(x) A \delta t - \phi(x+\delta x) A \delta t$



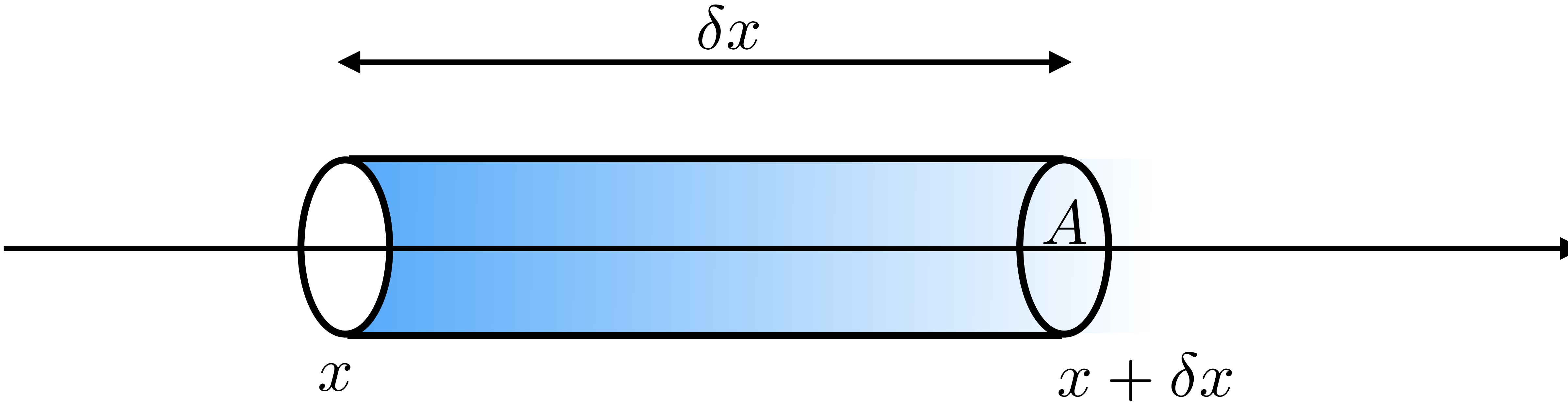
$$\phi(x) = -\alpha \frac{du(x,t)}{dx} \qquad \phi(x+\delta x) = -\alpha \frac{du(x+\delta x, t)}{dx}$$

Entre os instantes t e $t + \delta t$, uma certa quantidade de substância entra no volume em x e outra quantidade sai em $x + \delta x$

Entrada em x: $\phi(x) A \delta t$

Saída em $x + \delta x$: $\phi(x+\delta x) A \delta t$

Variação total de substância:
$$\begin{aligned} \delta M &= \phi(x) A \delta t - \phi(x+\delta x) A \delta t \\ &= [\phi(x) - \phi(x+\delta x)] A \delta t \end{aligned}$$

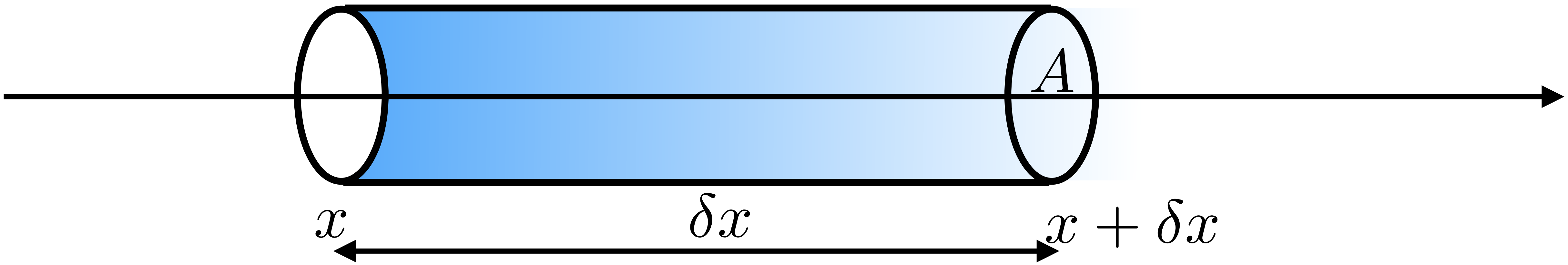


Quantidade total de substância no instante t

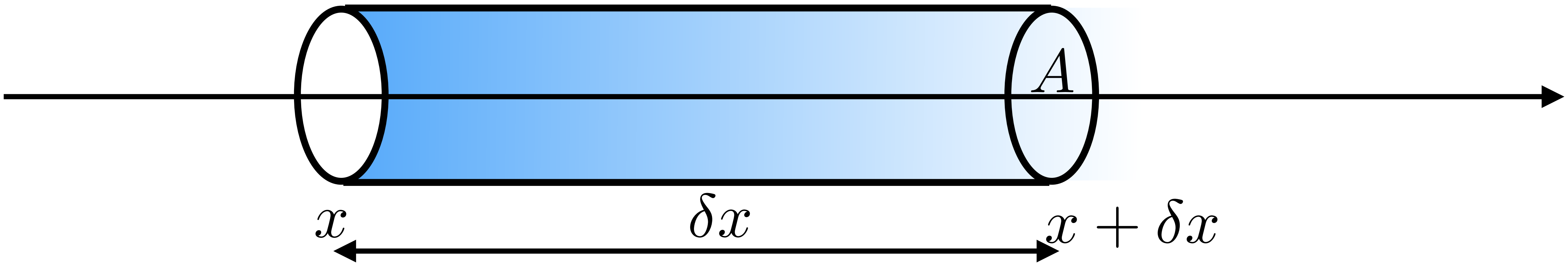
$$M(t) = \delta V \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2}$$

Quantidade total de substância no instante $t + \delta t$

$$M(t+\delta t) = \delta V \frac{u(x,t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2}$$

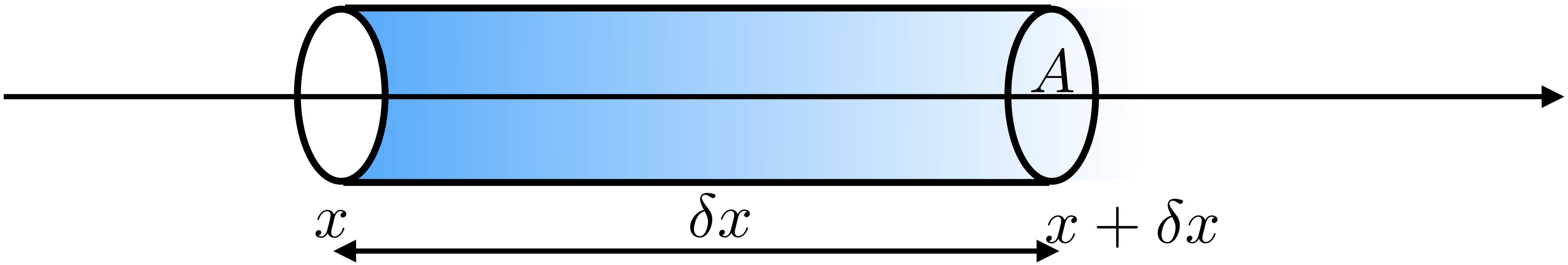


Pela conservação de massa temos:



Pela conservação de massa temos:

$$\delta M = M(t + \delta t) - M(t)$$

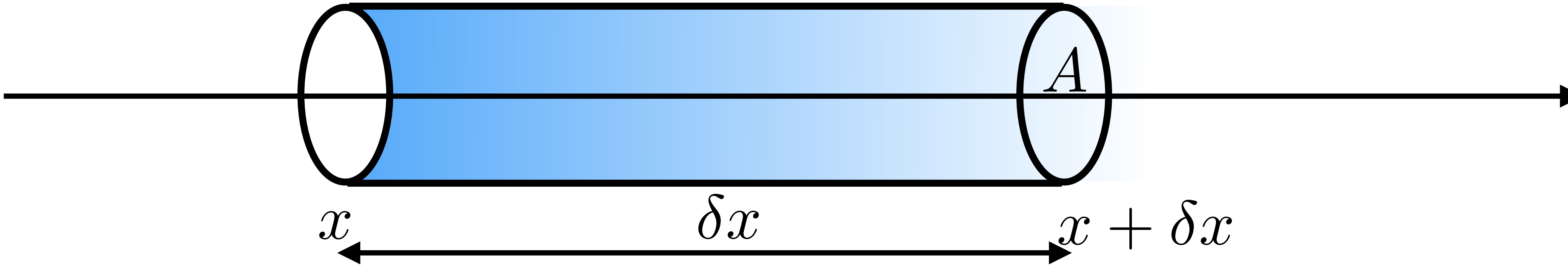


Pela conservação de massa temos:

$$\delta M = M(t+\delta t) - M(t)$$

$$[\phi(x) - \phi(x+\delta x)]A\delta t =$$

$$\delta V\left[\frac{u(x,t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2}\right]$$



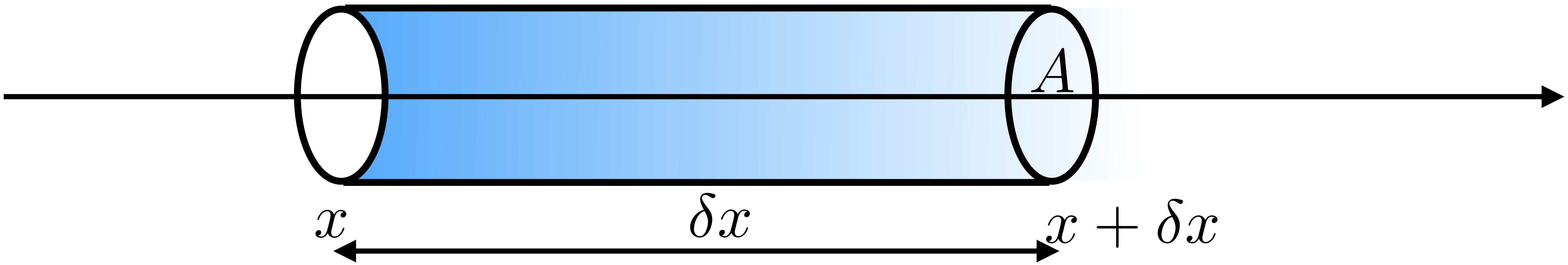
Pela conservação de massa temos:

$$\delta M = M(t+\delta t) - M(t)$$

$$[\phi(x) - \phi(x+\delta x)]A\delta t =$$

$$\delta V \left[\frac{u(x,t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2} \right]$$

Como $\phi(x) = -\alpha \dfrac{du(x,t)}{dx}$ e $\phi(x+\delta x) = -\alpha \dfrac{du(x+\delta x,t)}{dx}$



Pela conservação de massa temos:

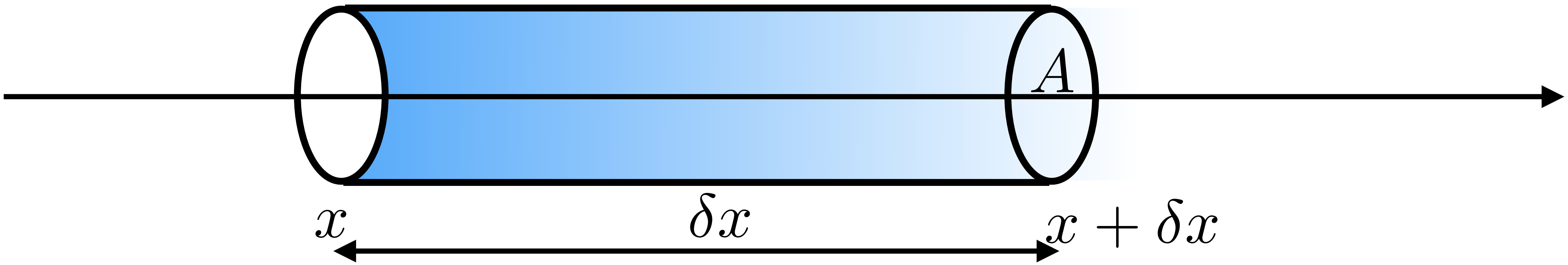
$$\delta M = M(t + \delta t) - M(t)$$

$$[\phi(x) - \phi(x + \delta x)]A\delta t =$$

$$\delta V \left[\frac{u(x, t + \delta t) + u(x + \delta x, t + \delta t)}{2} - \frac{u(x, t) + u(x + \delta x, t)}{2} \right]$$

Como $\phi(x) = -\alpha \dfrac{du(x, t)}{dx}$ e $\phi(x + \delta x) = -\alpha \dfrac{du(x + \delta x, t)}{dx}$

$$\alpha \left[\frac{du(x + \delta x, t)}{dx} - \frac{du(x, t)}{dx} \right] A\delta t =$$



Pela conservação de massa temos:

$$\delta M = M(t+\delta t) - M(t)$$

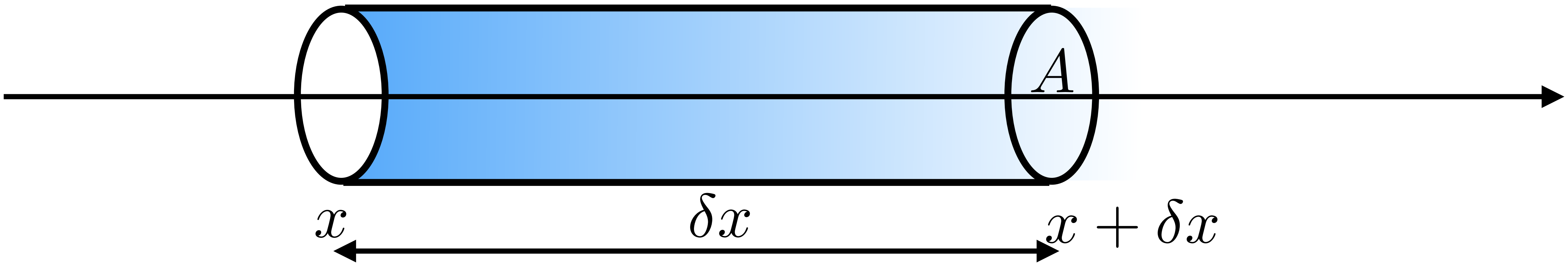
$$[\phi(x) - \phi(x+\delta x)]A\delta t =$$

$$\delta V \left[\frac{u(x,t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2} \right]$$

Como $\phi(x) = -\alpha \dfrac{du(x,t)}{dx}$ e $\phi(x+\delta x) = -\alpha \dfrac{du(x+\delta x,t)}{dx}$

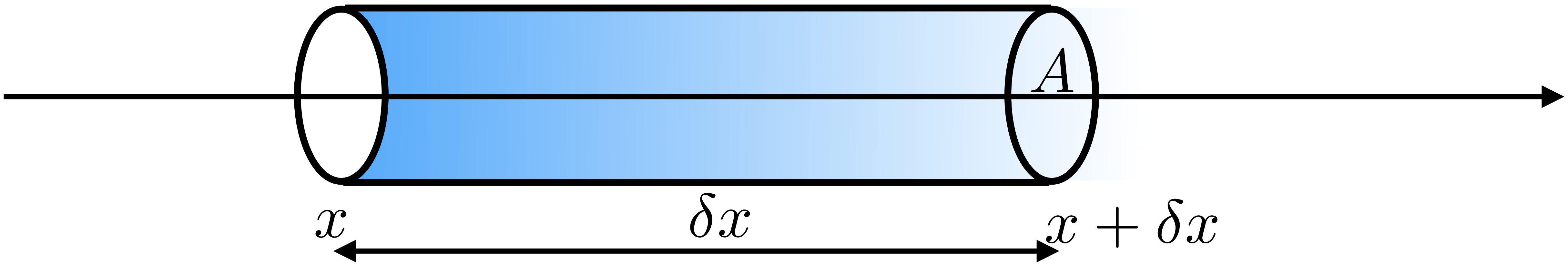
$$\alpha \left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right] A\delta t =$$

$$A\delta x \left[\frac{u(x,t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2} \right]$$



$$\alpha \left[\frac{du(x+\delta x, t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right] A\delta t =$$

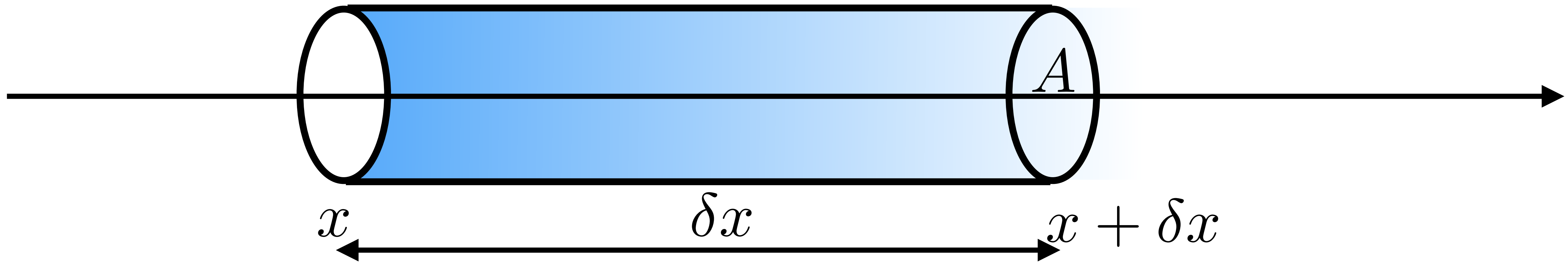
$$A\delta x \left[\frac{u(x, t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2} \right]$$



$$\alpha \left[\frac{du(x+\delta x, t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right] A\delta t =$$

$$A\delta x \left[\frac{u(x, t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2} \right]$$

$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right]}{\delta x} =$$

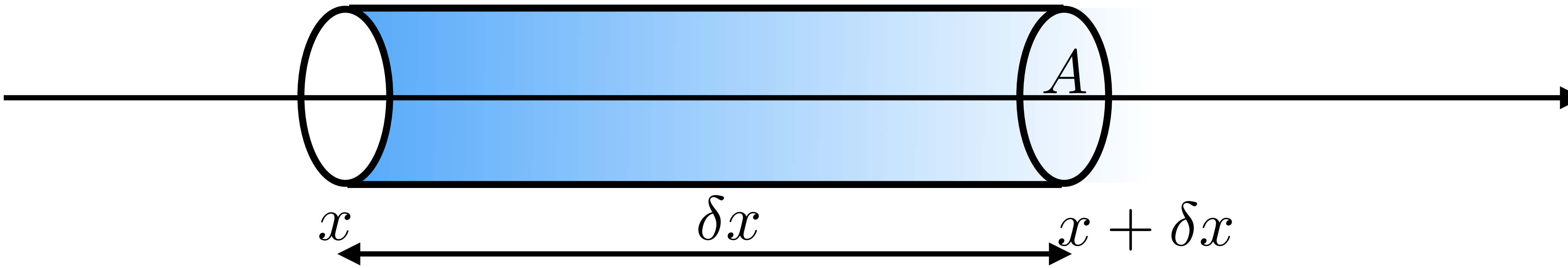


$$\alpha \left[\frac{du(x+\delta x, t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right] A\delta t =$$

$$A\delta x \left[\frac{u(x, t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2} \right]$$

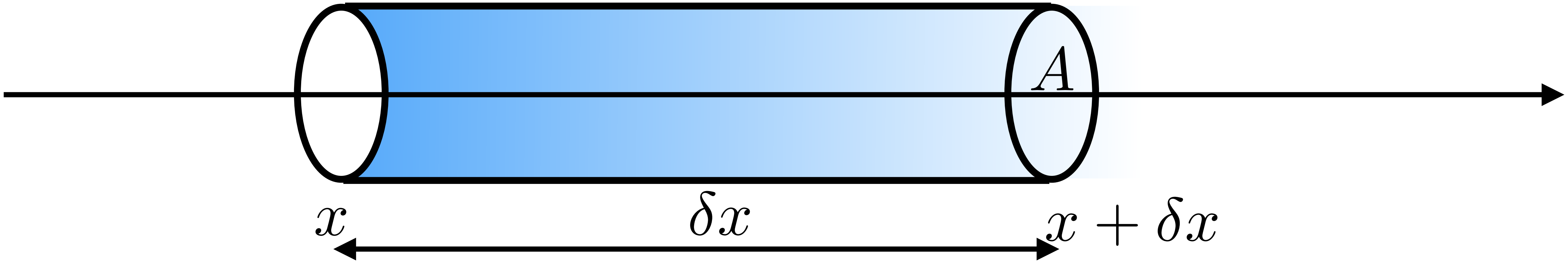
$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right]}{\delta x} =$$

$$\left[\frac{u(x, t+\delta t) + u(x+\delta x, t+\delta t)}{2\delta t} - \frac{u(x,t) + u(x+\delta x, t)}{2\delta t} \right]$$



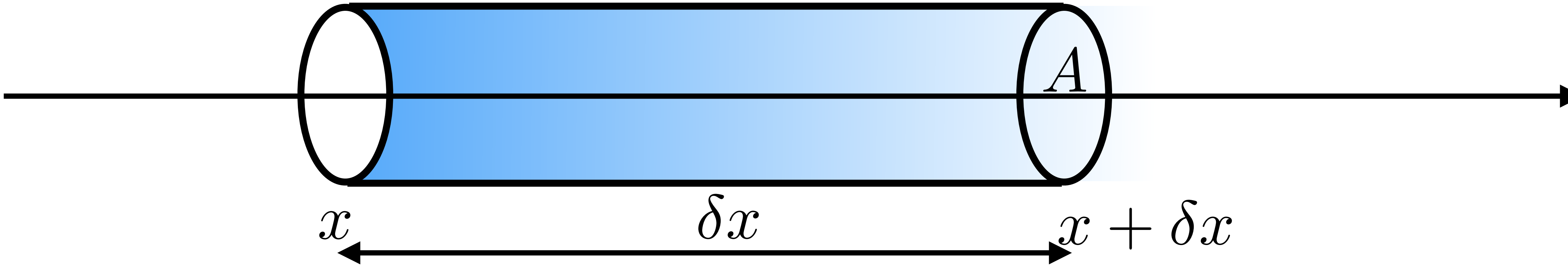
$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right]}{\delta x} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{u(x, t+\delta t) - u(x,t)}{\delta t} - \frac{u(x+\delta x, t+\delta t) - u(x+\delta x, t)}{\delta t} \right]$$



$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx}\right]}{\delta x} = \frac{1}{2}\left[\frac{u(x,t+\delta t) - u(x,t)}{\delta t} - \frac{u(x+\delta x,t+\delta t) - u(x+\delta x,t)}{\delta t}\right]$$

Para $\delta t \to 0$ e $\delta x \to 0$

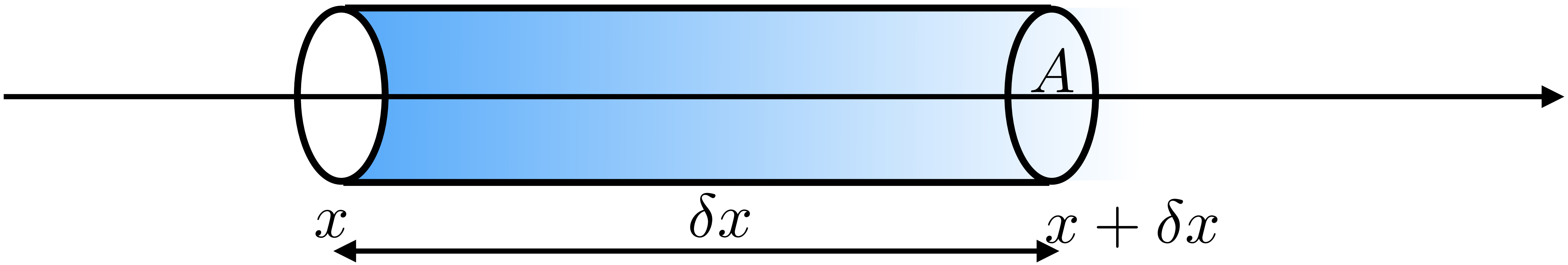


$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x, t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx} \right]}{\delta x} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{u(x, t+\delta t) - u(x,t)}{\delta t} - \frac{u(x+\delta x, t+\delta t) - u(x+\delta x, t)}{\delta t} \right]$$

Para $\delta t \to 0$ e $\delta x \to 0$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}$$



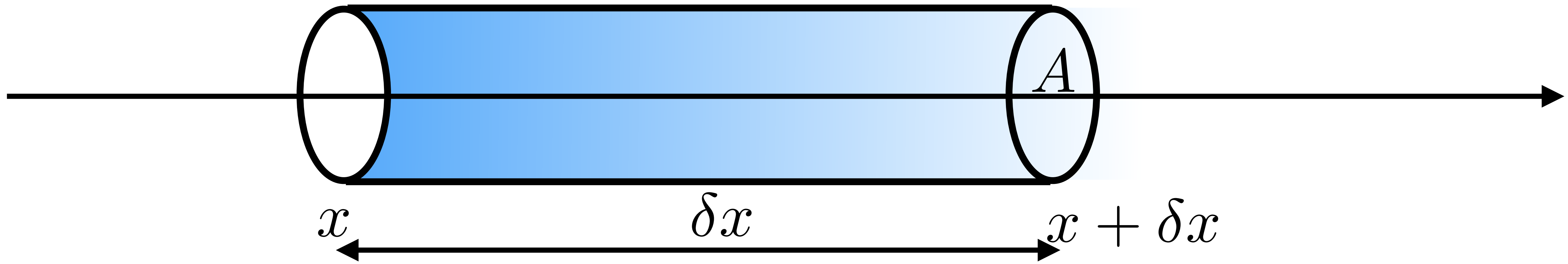
$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx}\right]}{\delta x} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u(x,t+\delta t)-u(x,t)}{\delta t} - \frac{u(x+\delta x,t+\delta t)-u(x+\delta x,t)}{\delta t}\right]$$

Para $\delta t \to 0$ e $\delta x \to 0$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$



$$\alpha \frac{\left[\frac{du(x+\delta x,t)}{dx} - \frac{du(x,t)}{dx}\right]}{\delta x} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u(x,t+\delta t)-u(x,t)}{\delta t} - \frac{u(x+\delta x,t+\delta t)-u(x+\delta x,t)}{\delta t}\right]$$

Para $\delta t \to 0$ e $\delta x \to 0$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\boxed{\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}}$$

Equação de difusão

Como calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ numericamente?

```
d_u = (u[1:]-u[:-1])/dx
```

diferença entre valores consecutivos dividida pelo espaçamento

```
xx = x[:-1]+dx/2
```

valores de x no meio do espaçamento

```
dd_u = (d_u[1:]-d_u[:-1])/dx
```

```
xxx = xx[:-1]+dx/2
```

Exercício

- Considerando que a nossa função *u(x,t)* seja,

$$u(x, t_0) = e^{-x^2}$$

em um certo instante t_0, determine

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

com $\alpha = 4$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Exercício

- Considerando que a nossa função *u(x,t)* seja,

$$u(x, t_0) = 4x + 2$$

em um certo instante t_0, determine

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

com $\alpha = 4$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Exercício

- Enviar os dois scripts para a Janine, juntamente com as figuras resultantes.
- As figuras devem conter as curvas de u e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$