

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

VICTOR MANUEL DIAS SALIBA

Curso de Ciências Moleculares

Turma 30, n<sup>o</sup> USP 11807702

E-mail: victorsaliba13@usp.br

---

## Aplicações da Topologia Algébrica à Combinatória

---

**Projeto de Iniciação à Pesquisa que será  
realizado no Ciclo Avançado do Curso de  
Ciências Moleculares**

PROF. GUILHERME OLIVEIRA MOTA

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

E-mail: mota@ime.usp.br

PROF. YOSHIHARU KOHAYAKAWA

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

E-mail: yoshi@ime.usp.br

São Paulo, Julho de 2022

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

---

## Aplicações da Topologia Algébrica à Combinatória

---

Projeto de Iniciação à Pesquisa que será  
realizado no Ciclo Avançado do Curso de  
Ciências Moleculares

---

PROF. GUILHERME OLIVEIRA MOTA

---

PROF. YOSHIHARU KOHAYAKAWA

---

VICTOR MANUEL DIAS SALIBA

São Paulo, Julho de 2022

PROJETO PARA O CICLO AVANÇADO

## APLICAÇÕES DA TOPOLOGIA ALGÉBRICA À COMBINATÓRIA

VICTOR MANUEL DIAS SALIBA, GUILHERME OLIVEIRA MOTA E YOSHIHARU KOHAYAKAWA

RESUMO. Este é o projeto de pesquisa para o Ciclo Avançado de Victor Manuel Dias Saliba, a ser desenvolvido sob a supervisão de Guilherme O. Mota e Y. Kohayakawa, no Instituto de Matemática e Estatística, USP, no período de agosto de 2022 a junho de 2024 (4 semestres). Este projeto tem como áreas de concentração topologia, álgebra e combinatória. Este trabalho envolverá o estudo de uma mescla de análise, álgebra, combinatória e topologia. Um dos objetivos do projeto é assegurar que o aluno obtenha uma formação mais profunda em certas áreas da Matemática, para que ele possa ingressar em um programa de pós-graduação já com preparação específica.

### 1. INTRODUÇÃO, TEMA, OBJETIVOS E MÉTODO

O projeto para o Ciclo Avançado de Victor Manuel Dias Saliba terá como *tema* aplicações da *topologia algébrica à combinatória*. A literatura central inclui textos gerais e mais específicos sobre o tema, tais como Lovász [11], Coutinho [4], Kozlov [6], Aleksandrov [1] e Matoušek [12].

*Objetiva-se* um estudo de parte coerente e significativa da literatura acima, além da participação do aluno em alguns projetos específicos na parte avançada do projeto. Ao final do ciclo avançado, o aluno terá adquirido formação fundamental em certas áreas da matemática, e também terá estudado aplicações e métodos da topologia na combinatória.

O aluno adquirirá familiaridade com *métodos* da matemática para o estudo de problemas combinatórios, como métodos algébricos, geométricos e, principalmente, topológicos, além dos métodos puramente combinatórios.

### 2. TÓPICOS BÁSICOS DE ESTUDO

Listamos a seguir os tópicos básicos que o aluno estudará na primeira fase do projeto. Organizamos o material de acordo com a bibliografia fundamental, a saber, Botler, Collares, Martins, Mendonça, Morris e Mota [3], Spanier [13] e Aluffi [2].

**2.1. *Combinatória* (Botler, Collares, Martins, Mendonça, Morris e Mota [3]).** A escolha desse livro tem a motivação de introduzir o aluno à combinatória e mostrá-lo diferentes métodos da área. Parte considerável dos tópicos abordados nesse material, Capítulos 1–6, com seleções dos Capítulos 7–12, formarão um texto introdutório para essa área.

**2.2. *Algebraic Topology* (Spanier [13]).** O estudo de tópicos fundamentais da topologia algébrica será essencial para o prosseguimento do projeto. Para tanto, o aluno cursará disciplinas apropriadas e também estudará alguns tópicos mais avançados. Este livro será a bibliografia básica para os tópicos clássicos desta área.

2.3. **Algebra: chapter 0 (Aluffi [2]).** Esse material foi escolhido para poder providenciar um tratamento moderno à Álgebra. Serão abordados tanto tópicos clássicos, como grupos e módulos, quanto tópicos de suma importância para o projeto, como a álgebra homológica. O estudo dos tópicos será complementado por meio dos livros *Topics in Algebra*, de Herstein [5], e *Algebra*, de Lang [7].

2.4. **Literatura adicional.** Comentamos acima a bibliografia central deste projeto. Além dos trabalhos citados, servirão de suporte os livros *Elementos de Topologia Geral*, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, e *Homologia Básica*, todos de Lima [8], [9], [10].

### 3. TÓPICOS AVANÇADOS

Após o aluno adquirir uma base das áreas de álgebra, topologia algébrica e combinatória, ele concentrará seus esforços no estudo da topologia algébrica combinatória e nas aplicações da topologia algébrica à combinatória através dos livros *Combinatorial Algebraic Topology*, de Kozlov [6], e *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, de Matoušek [12]. Discutimos brevemente os livros citados acima nas duas seções a seguir e incluímos uma bibliografia adicional que poderá ser usada como apoio.

3.1. **Combinatorial Algebraic Topology (Kozlov [6]).** A primeira parte do livro constitui um rápido passeio pelas principais ferramentas da topologia algébrica, incluindo as classes características de Stiefel-Whitney, que são necessárias para as partes posteriores. A segunda parte contém uma discussão aprofundada das principais técnicas de pesquisa da topologia algébrica combinatória. Por fim, as aplicações são o foco principal da terceira parte. O principal benefício para o aluno ao estudar esse livro será a perspectiva de pesquisa neste campo da matemática.

O livro *Combinatorial Topology*, de Aleksandrov [1], também será consultado, e servirá de suporte para o estudo desse livro.

3.2. **Using the Borsuk-Ulam Theorem (Matoušek [12]).** A ‘conjectura de Kneser’, apresentada por Martin Kneser em 1955, é um problema aparentemente inocente sobre a partição dos  $k$ -subconjuntos de um  $n$ -conjunto em subfamílias que se cruzam. Sua solução surpreendente por Lovász apresentou um uso inesperado do teorema de Borsuk-Ulam, ou seja, de um resultado genuinamente topológico sobre mapas contínuos na esfera. Esse livro explora a visão de Lovász, e também o trabalho de muitos outros (como Vrećica e Zivaljević, e Sarkaria), e, em particular, como fundou-se uma excitante área da matemática que conecta combinatória, teoria dos grafos e topologia algébrica. O relato desta área e suas ramificações pelo autor é um relato elegante e coerente da topologia combinatória.

O estudo do livro será complementado por referências como Coutinho [4] e Lovász [11].

### REFERÊNCIAS

- [1] P. S. Aleksandrov. *Combinatorial Topology*. Courier Corporation, 1998.
- [2] P. Aluffi. *Algebra: chapter 0*. American Mathematical Society, 2021.
- [3] F. Botler et al. *Combinatória*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2021.
- [4] G. Coutinho. *Topological Methods in Combinatorics and Game Theory*. 2021.

- [5] I. Herstein. *Topics in Algebra*. John Wiley e Sons, 2006.
- [6] D. Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology*. Springer, 2008.
- [7] S. Lang. *Algebra*. Springer, 2012.
- [8] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [9] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.
- [10] E. L. Lima. *Homologia Básica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [11] L. Lovász. *Topological Methods in Combinatorics*. 2016.
- [12] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*. Springer, 2003.
- [13] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1989.

APÊNDICE A. PROPOSTA DE GRADE DE DISCIPLINAS DO CICLO AVANÇADO

Ano	Semestre	Código	Matéria	Sistema	Créditos
2022	2°	CCM0318	Iniciação à Pesquisa I	Graduação	12
		MAC5770	Introdução à Teoria dos Grafos	Pós-Graduação	10
		MAT0265	Grupos	Graduação	4
		MAT0225	Funções Analíticas	Graduação	4
2023	1°	CCM0328	Iniciação à Pesquisa II	Graduação	12
		MAT5741	Topologia Geral	Pós-Graduação	10
		MAT0264	Anéis e Corpos	Graduação	4
	2°	CCM0418	Iniciação à Pesquisa III	Graduação	12
		MAT6684	Topologia Algébrica	Pós-Graduação	10
		MAT0234	Medida e Integração	Graduação	4
2024	1°	CCM0428	Iniciação à Pesquisa IV	Graduação	12
		MAT5866	Topologia Algébrica II	Pós-Graduação	10
		MAT5721	Introdução à Análise Funcional	Pós-Graduação	10

Total de créditos: 110 créditos.

A.1. **Outras Disciplinas.** Além disso, dependendo do desenvolvimento do projeto e do oferecimento, poderão ser cursadas algumas das seguintes disciplinas:

1. MAC5771 - Teoria dos Grafos, pós-graduação, 10 créditos.
2. ? - Combinatória I, graduação, ? créditos.
3. ? - Combinatória II, graduação, ? créditos.
4. MAT0501 - Anéis e Módulos, graduação, 4 créditos.
5. MAT6603 - Introdução à Teoria das Categorias, pós-graduação, 10 créditos.
6. MAT6202 - Introdução à Teoria dos Conjuntos, pós-graduação, 10 créditos.
7. MAT4010 - Tópicos de Álgebra, pós-graduação, 10 créditos.
8. MAT5867 - Tópicos Avançados de Topologia Geral, pós-graduação, 10 créditos.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RUA DO MATÃO 1010, 05508-090 SÃO PAULO, SP

*Email address:* victorsaliba13@usp.br, mota@ime.usp.br, yoshi@ime.usp.br