

# Alguns problemas interessantes em Análise

**Problema 1** (Princípio das Casas de Pombo). Se  $m$  e  $n$  são naturais tais que  $m < n$  então não existe uma injecção  $f : I_m \rightarrow I_n$ .

**Problema 2** (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder-Banach). Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$ , suponha que existam funções injetivas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$ . Prove que existe uma bijeção  $h : X \rightarrow Y$ .

**Problema 3.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defina  $s(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Prove que o conjunto  $A = \{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$  não é limitado superiormente.

**Problema 4.** Prove que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável.

**Problema 5.** Um *corte de Dedekind* é um par ordenado  $(A, B)$  onde  $A$  e  $B$  são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que  $A$  não possui elemento máximo,  $A \cup B = \mathbb{Q}$  e, dados  $x \in A$  e  $y \in B$  quaisquer, tem-se  $x < y$ . Prove que, num corte de Dedekind  $(A, B)$ , vale  $\sup A = \inf B$ . Seja  $\mathcal{D}$  o conjunto dos cortes de Dedekind. Prove que existe uma bijeção  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Problema 6.** Sejam  $x_1, \dots, x_n$  números reais positivos. Mostre que

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

**Problema 7.** Definimos o  $n$ -ésimo número de Fermat como sendo  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Prove que, para todo  $n \geq 0$ , temos

$$\prod_{0 \leq k \leq n} F_k = F_{n+1} - 2.$$

Prove também que se  $m$  e  $n$  são dois naturais distintos, então  $F_m$  e  $F_n$  são primos entre si. Conclua que existem infinitos números primos.

**Problema 8.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um isomorfismo de  $\mathbb{R}$  em si mesmo. Prove que  $f =$  identidade. Conclua que se  $K$  e  $L$  são corpos ordenados completos, então existe um único isomorfismo de  $K$  sobre  $L$ .

**Problema 9.** Mostre que o princípio da indução e o princípio da boa ordenação são equivalentes.

**Problema 10.** Um conjunto  $G$  de números reais chama-se um *grupo aditivo* quando  $0 \in G$  e  $x, y \in G \Rightarrow x - y \in G$ . Dessa forma,  $x \in G \Rightarrow -x \in G$  e  $x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$ . Seja então  $G \subset \mathbb{R}$  um grupo aditivo de números reais. Indiquemos com  $G^+$  o conjunto dos números reais positivos pertencentes a  $G$ . Excetuando o caso trivial  $G = \{0\}$ ,  $G^+$  é não-vazio. Suponhamos pois  $G \neq \{0\}$ . Prove que, ou  $G$  é denso em  $\mathbb{R}$ , ou então  $\inf G^+ \in G^+$  e  $G = \{az : z \in \mathbb{Z}\}$ . Conclua que, se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é irracional, os números reais da forma  $m + n\alpha$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$ , constituem um subconjunto denso em  $\mathbb{R}$ .

**Problema 11.** Encontre uma sequência  $(x_n)$  e uma decomposição  $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \dots \cup \mathbb{N}_k \cup \dots$  de  $\mathbb{N}$  como reunião de uma infinidade de subconjuntos infinitos tais que, para todo  $k$ , a subsequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_k}$  tenha limite  $a$ , mas não se tem  $\lim x_n = a$ .

**Problema 12.** Prove que toda sequência de números reais possui uma subsequência monótona. Conclua que toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

**Problema 13.** Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  séries de termos positivos. Se  $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$  e  $\sum b_n$  converge então  $\sum a_n$  converge. Se  $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$  então  $\sum a_n$  converge se, e somente se,  $\sum b_n$  converge.

**Problema 14.** Prove que o conjunto dos valores de aderência da sequência  $x_n = \cos(n)$  é o intervalo fechado  $[-1, 1]$ .

**Problema 15.** Sejam  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$  e  $s_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1}a_n$ . Prove que a sequência  $(s_n)$  é limitada e que  $\limsup s_n - \liminf s_n = \lim a_n$ .

**Problema 16.** Seja  $E \subset \mathbb{R}$  enumerável. Consiga uma sequência cujo conjunto dos valores de aderência é  $\bar{E}$ . Use este fato para mostrar que todo conjunto fechado  $F \subset \mathbb{R}$  é o conjunto dos valores de aderência de alguma sequência.

**Problema 17** (Teorema de Lindelöf). Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um conjunto arbitrário. Toda cobertura de  $X$  por meio de abertos possui uma subcobertura enumerável.

**Problema 18** (Teorema de Baire). Se  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$  são fechados com interior vazio então  $S = F_1 \cup \dots \cup F_n \cup \dots$  tem interior vazio.

**Problema 19.** Uma família de conjuntos  $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$  chama-se uma *cadeia* quando, para quaisquer  $\lambda, \mu \in L$  tem-se  $K_\lambda \subset K_\mu$  ou  $K_\mu \subset K_\lambda$ . Prove que se  $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma cadeia de compactos não-vazios então a interseção  $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$  é não-vazia (e compacta).

**Problema 20.** Um número real  $a$  chama-se *ponto de condensação* de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  quando todo intervalo de centro  $a$  contém uma infinidade não-enumerável de pontos de  $X$ . Seja  $F_0$  o conjunto dos pontos de condensação de um fechado  $F \subset \mathbb{R}$ . Prove que  $F_0$  é um conjunto *perfeito* (isto é, fechado, sem pontos isolados) e que  $F \setminus F_0$  é enumerável. Conclua daí o *Teorema de Bendixson*: todo fechado da reta é reunião de um conjunto perfeito com um conjunto enumerável.

**Problema 21.** Não existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua que transforme todo número racional num irracional e vice-versa.

**Problema 22.** Dada uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , suponha que para cada  $\varepsilon > 0$  se possa obter uma função contínua  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  qualquer que seja  $x \in X$ . Então  $f$  é contínua.

**Problema 23.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponha que existam reais  $a_1, a_2, \dots, a_p$  distintos ( $p \geq 2$ ), tais que  $f(a_k) = a_{k+1}$ , se  $1 \leq k \leq p-1$  e  $f(a_p) = a_1$ . Prove que existe pelo menos um  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  tal que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

**Problema 24.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Prove que  $f$  é uniformemente contínua em  $(a, b)$  se, e somente se, existem  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ .

**Problema 25.** Se  $f : (a, b)$  é uniformemente contínua então  $f$  é limitada.

**Problema 26.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica então  $f$  é limitada.

**Problema 27.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. Prove que  $f$  tem máximo e que esse máximo é  $f(a)$  ou  $f(b)$ . Prove também que  $f$  é limitada superiormente.

**Problema 28.** Suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^1$  e periódica de período  $p > 0$ . Mostre que  $f$  é Lipschtziana.

**Problema 29.** Sejam  $f$  e  $g$  funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 1$ , e  $f'(x) = g(x)$ ,  $g'(x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Prove que  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Problema 30.** Considere funções  $f$  e  $g$  definidas em  $(-1, 1)$  com valores em  $\mathbb{R}$ , deriváveis em  $(-1, 1) \setminus \{0\}$ , integráveis em qualquer intervalo  $[a, b] \subset (-1, 1)$ , com  $g(x)g'(x) \neq 0$  se  $x \neq 0$ . Suponha que  $f(x) \sim o(g(x))$  para  $x \rightarrow 0$ . Se  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  e  $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ , mostre que  $F(x) \sim o(G(x))$  para  $x \rightarrow 0$ .

**Problema 31.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$ , com  $a \in I$ . Temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta_n \cdot h)}{n!} h^n.$$

Mais precisamente, para todo  $h$  tal que  $a+h \in I$ , podemos encontrar  $\theta_n = \theta_n(h)$ , com  $0 < \theta_n < 1$ , tal que a fórmula acima vale. Mostre que, se  $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ , seja qual for a função  $\theta_n$ , definida da maneira acima, tem-se  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_n(h) = \frac{1}{n+1}$ .

**Problema 32.** Demonstre que  $e^2$  é irracional.

**Problema 33.** Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e defina  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,  $x \in [a, b]$ . Prove que  $G$  é integrável.

**Problema 34.** Sejam  $p > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par, periódica de período  $p$  e integrável em todo intervalo  $[a, b]$  da reta. Fazendo  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$  e  $A = g(p/2)$ , calcule  $g\left(\frac{np}{2}\right)$  em função de  $A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Problema 35.** Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas no intervalo  $[0, 1]$  tomando valores em  $\mathbb{R}$ , ambas limitadas. Suponha que  $f$  é integrável e que  $f(x) = g(x)$  se  $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Prove que  $g$  é integrável e  $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ .

**Problema 36.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $f : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  integrável. Prove que existe uma partição  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$  de  $[a, b]$  tal que, para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ , tem-se  $\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x)dx$ .

**Problema 37.** Sejam  $a > 0$ ,  $M > 0$  e  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes derivável, satisfazendo  $|f''(x)| \leq M$  para todo  $x \in [0, a]$ . Admita que  $f(a/2) > \max\{f(0), f(a)\}$  e prove que  $|f'(0) + f'(a)| \leq aM$ .

**Problema 38.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f$  contínua, e  $u$  e  $v$  deriváveis. Seja  $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ . Prove que  $H$  é derivável e calcule  $H'(x)$ .

**Problema 39.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em todo intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e considere  $A(x) \int_0^x f(t)dt$ . É verdade que  $A$  é derivável? É verdade que se  $f$  é derivável em  $c \in \mathbb{R}$  então  $A'$  é contínua em  $c$ ?

**Problema 40.** Seja  $F_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ , com  $\alpha > 2$ . Prove que  $F_\alpha$  é derivável.