Alguns problemas interessantes em Análise

Problema 1 (Princípio das Casas de Pombo)**.** Se m e n são naturais tais que $m < n$ então não existe uma injeção $f : I_m \to I_n$.

Problema 2 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder-Banach)**.** Dados os conjuntos X e Y, suponha que existam funções injetivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$. Prove que existe uma bijeção $h : X \to Y$.

Problema 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $s(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Prove que o conjunto $A = \{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado superiormente.

Problema 4. Prove que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável.

Problema 5. Um *corte de Dedekind* é um par ordenado (A, B) onde A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que A não possui elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $x < y$. Prove que, num corte de Dedekind (A, B), vale $\sup A = \inf A$. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind. Prove que existe uma bijeção $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

Problema 6. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números reais positivos. Mostre que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Problema 7. Definimos o n*-ésimo número de Fermat* como sendo $F_n = 2^{2^n} + 1$. Prove que, para todo $n \geq 0$, temos

$$\prod_{0 \leq k \leq n} F_k = F_{n+1} - 2.$$

Prove também que se m e n são dois naturais distintos, então F_m e F_n são primos entre si. Conclua que existem infinitos números primos.

Problema 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um isomorfismo de $\mathbb{R}$ em si mesmo. Prove que $f =$ identidade. Conclua que se K e L são corpos ordenados completos, então existe um único isomorfismo de K sobre L.

Problema 9. Mostre que o princípio da indução e o princípio da boa ordenação são equivalentes.

Problema 10. Um conjunto G de números reais chama-se um *grupo aditivo* quando $0 \in G$ e $x, y \in G \Rightarrow x - y \in G$. Dessa forma, $x \in G \Rightarrow -x \in G$ e $x, y \in G \Rightarrow x+y \in G$. Seja então $G \subset \mathbb{R}$ um grupo aditivo de números reais. Indiquemos com G^+ o conjunto dos números reais positivos pertencentes a G. Excetuando o caso trivial $G = \{0\}$, G^+ é não-vazio. Suponhamos pois $G \neq \{0\}$. Prove que, ou G é denso em $\mathbb{R}$, ou então $\inf G^+ \in G^+$ e $G = \{az : z \in \mathbb{Z}\}$. Conclua que, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional, os números reais da forma $m + n\alpha$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, constituem um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

Problema 11. Encontre uma sequência (x_n) e uma decomposição $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \cup \ldots$ de $\mathbb{N}$ como reunião de uma infinidade de subconjuntos infinitos tais que, para todo k, a subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_k}$ tenha limite a, mas não se tem $\lim x_n = a$.

Problema 12. Prove que toda sequência de números reais possui uma subsequência monótona. Conclua que toda sequência limitada possui uma subsequêcia convergente.

Problema 13. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ então $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

Problema 14. Prove que o conjunto dos valores de aderência da sequência $x_n = \cos(n)$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$.

Problema 15. Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ e $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$. Prove que a sequência (s_n) é limitada e que $\limsup s_n - \liminf s_n = \lim a_n$.

Problema 16. Seja $E \subset \mathbb{R}$ enumerável. Consiga uma sequência cujo conjunto dos valores de aderência é $\overline{E}$. Use este fato para mostrar que todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$ é o conjunto dos valores de aderência de alguma sequência.

Problema 17 (Teorema de Lindelöf)**.** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Toda cobertura de X por meio de abertos possui uma subcobertura enumerável.

Problema 18 (Teorema de Baire)**.** Se $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio então $S = F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup \ldots$ tem interior vazio.

Problema 19. Uma família de conjuntos $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ chama-se uma *cadeia* quando, para quaisquer $\lambda, \mu \in L$ tem-se $K_\lambda \subset K_\mu$ ou $K_\mu \subset K_\lambda$. Prove que se $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cadeia de compactos não-vazios então a intereseção $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ é não-vazia (e compacta).

Problema 20. Um número real a chama-se *ponto de condensação* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando todo intervalo de centro a contém uma infinidade não-enumerável de pontos de X. Seja F_0 o conjunto dos pontos de condensação de um fechado $F \subset \mathbb{R}$. Prove que F_0 é um conjunto *perfeito* (isto é, fechado, sem pontos isolados) e que $F \setminus F_0$ é enumerável. Conclua daí o *Teorema de Bendixson*: todo fechado da reta é reunião de um conjunto perfeito com um conjunto enumerável.

Problema 21. Não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que transforme todo número racional num irracional e vice-versa.

Problema 22. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Então f é contínua.

Problema 23. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existam reais $a_1, a_2, \ldots, a_p$ distintos ($p \geq 2$), tais que $f(a_k) = a_{k+1}$, se $1 \leq k \leq p-1$ e $f(a_p) = a_1$. Prove que existe pelo menos um $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Problema 24. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f é uniformemente contínua em (a, b) se, e somente se, existem $\lim_{x \to a+} f(x)$ e $\lim_{x \to b-} f(x)$.

Problema 25. Se $f : (a, b)$ é uniformemente contínua então f é limitada.

Problema 26. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica então f é limitada.

Problema 27. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexa. Prove que f tem máximo e que esse máximo é $f(a)$ ou $f(b)$. Prove também que f é limitada superiormente.

Problema 28. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja de classe $\mathcal{C}^1$ e periódica de período $p > 0$. Mostre que f é Lipschtziana.

Problema 29. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, e $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 30. Considere funções f e g definidas em $(-1, 1)$ com valores em $\mathbb{R}$, deriváveis em $(-1, 1) \setminus \{0\}$, integráveis em qualquer intervalo $[a, b] \subset (-1, 1)$, com $g(x)g'(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. Suponha que $f(x)$ é $o(g(x))$ para $x \to 0$. Se $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, mostre que $F(x)$ é $o(G(x))$ para $x \to 0$.

Problema 31. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, com $a \in I$. Temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a + \theta_n \cdot h)}{n!}h^n.$$

Mais precisamente, para todo h tal que $a + h \in I$, podemos encontrar $\theta_n = \theta_n(h)$, com $0 < \theta_n < 1$, tal que a fórmula acima vale. Mostre que, se $f^{(n+1)(a)} \neq 0$, seja qual for a função θ_n, definida da maneira acima, tem-se $\lim_{h \to 0} \theta_n(h) = \frac{1}{n+1}$.

Problema 32. Demonstre que e^2 é irracional.

Problema 33. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e defina $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, $x \in [a, b]$. Prove que G é integrável.

Problema 34. Sejam $p > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par, periódica de período p e integrável em todo intervalo $[a, b]$ da reta. Fazendo $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ e $A = g(p/2)$, calcule $g\left(\frac{np}{2}\right)$ em função de A para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 35. Sejam f e g funções definidas no intervalo $[0, 1]$ tomando valores em $\mathbb{R}$, ambas limitadas. Suponha que f é integrável e que $f(x) = g(x)$ se $x \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Prove que g é integrável e $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Problema 36. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ integrável. Prove que existe uma partição $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$ de $[a, b]$ tal que, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)dx = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)dx$.

Problema 37. Sejam $a > 0$, $M > 0$ e $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, satisfazendo $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [0, a]$. Admita que $f(a/2) > \max\{f(0), f(a)\}$ e prove que $|f'(0) + f'(a)| \leq aM$.

Problema 38. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f contínua, e u e v deriváveis. Seja $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Prove que H é derivável e calcule $H'(x)$.

Problema 39. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e considere $A(x) \int_0^x f(t)dt$. É verdade que A é derivável? É verdade que se f é derivável em $c \in \mathbb{R}$ então A' é contínua em c?

Problema 40. Seja $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, com $\alpha > 2$. Prove que F_α é derivável.