

Trabalho 1

Análise de Sinais por Série de Fourier

Victor Sabiá Pereira Carpes
19100822

3 de novembro de 2021

1 Avaliação por série de Fourier do sinal dente de serra

1.1 Análise teórica

Temos um sinal periódico definido em um de seus períodos da seguinte forma:

$$x(t) = \frac{t}{2}, \quad 0 < t \leq 2$$

Seu período fundamental é $T_0 = 2$ e a sua frequência fundamental é $\omega_0 = \pi$.

1.1.1 Cálculo de A_0

A componente DC do sinal vai ser dada pela seguinte expressão:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t}{2} dt$$

$$A_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 t dt = \frac{1}{2}$$

1.1.2 Cálculo de a_k

Vamos calcular os coeficientes da sua série exponencial de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t}{2} e^{-jk\pi t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{4} \int_0^2 t e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-jk\pi t} (1 + j\pi k t)}{\pi^2 k^2} \right]_{t=0}^{t=2}$$

$$a_k = \frac{e^{-2j\pi k} (1 + 2j\pi k)}{4\pi^2 k^2} - \frac{1}{4\pi^2 k^2}$$

Como $k \in \mathbb{Z}^+$, temos que $e^{-2j\pi k} = 1, \forall k$:

$$a_k = \frac{1 + 2j\pi k}{4\pi^2 k^2} - \frac{1}{4\pi^2 k^2} = \frac{2j\pi k}{4\pi^2 k^2}$$

$$a_k = \frac{j}{2\pi k}$$

1.1.3 Cálculo de A_k

Vamos simplesmente utilizar $A_k = 2|a_k|$:

$$A_k = 2 \left| \frac{j}{2\pi k} \right| = \frac{1}{\pi k}$$

1.1.4 Cálculo de φ_k

Vamos simplesmente utilizar $\varphi_k = \text{Arg}(a_k)$:

$$\varphi_k = \text{Arg} \left(\frac{j}{2\pi k} \right) = \frac{\pi}{2}$$

1.1.5 Série de Fourier

a série completa vai ser dada pela seguinte expressão:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \cos \left(k\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

1.1.6 Série truncada de Fourier

A série truncada de Fourier é a mesma coisa que a série de Fourier, mas o somatório é finito, terminando em algum índice $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$x_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$$x_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi k} \cos \left(k\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

1.2 Simulação numérica

Vamos realizar a simulação para $-3 \leq t \leq 3$ com um passo $\Delta t = 10^{-3}$, plotando $x(t)$ e $x_n(t)$ e os erros $x_n(t) - x(t)$ e $[x_n(t) - x(t)]^2$.

Como métrica de erro, vamos utilizar inicialmente o somatório do erro quadrático, calculado usando

$$SEQ = \sum_{m=1}^M [x_n(m\Delta t) - x(m\Delta t)]^2$$

onde $M = \frac{T}{\Delta t}$ é a quantidade de pontos simulados que estão dentro de um período, neste caso $0 < t \leq 2$.

Outra métrica utilizada, que converge para $\Delta t \rightarrow 0$ é o valor RMS do erro, definido da seguinte forma:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [x_n(t) - x(t)]^2 dt}$$

Ambas as métricas foram utilizadas para se avaliar o erro, para os valores $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 10$ e $n = 50$.

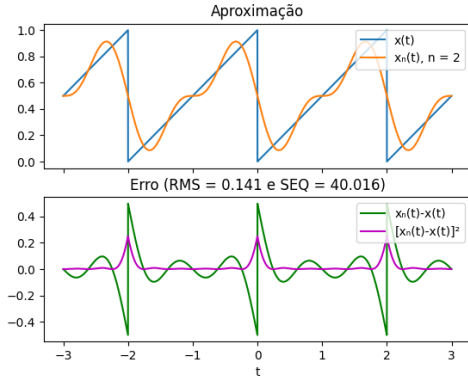


Figura 1: $n = 2$.

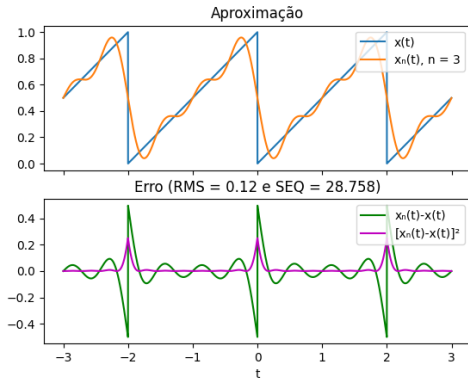


Figura 2: $n = 3$.

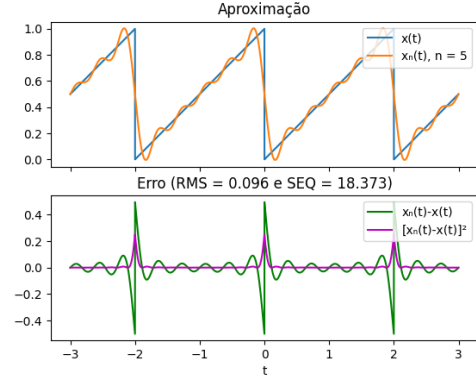


Figura 3: $n = 5$.

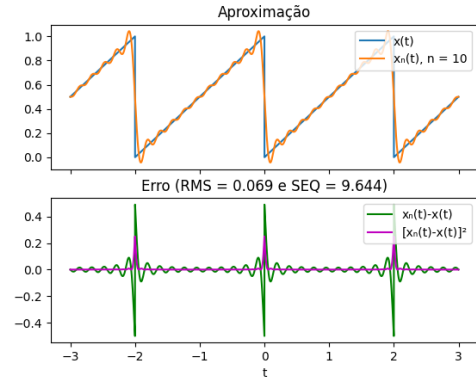


Figura 4: $n = 10$.

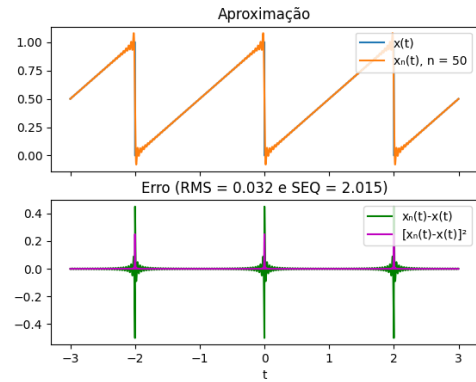


Figura 5: $n = 50$.

Podemos fazer uma simulação para vários valores de n para verificar que, quanto mais termos da série nós somarmos, menor o erro se tornará em ambas as métricas:

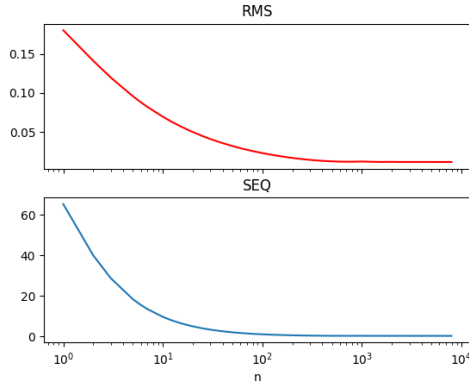


Figura 6: Erros SEQ e RMS em função de n para o sinal dente de serra.

Com o aumento da quantidade de termos, a série aproxima o sinal original cada vez melhor, mas nos pontos de descontinuidade nós sempre temos picos que ultrapassam o sinal desejado. Este fenômeno é chamado de fenômeno de Gibbs.

2 Avaliação por série de Fourier da onda quadrada

2.1 Análise teórica

Temos um sinal periódico definido em um de seus períodos da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t \leq 10 \\ -1 & \text{se } -10 < t \leq 0 \end{cases}$$

Seu período fundamental é $T_0 = 20$ e a sua frequência fundamental é $\omega_0 = \frac{\pi}{10}$.

2.1.1 Cálculo de a_k

Vamos aplicar a seguinte fórmula:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{20} \int_{-10}^{10} x(t) e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt$$

Quebrando a integral em duas partes:

$$a_k = \frac{1}{20} \left(\int_{-10}^0 x(t) e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt + \int_0^{10} x(t) e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt \right)$$

$$a_k = \frac{1}{20} \left(\int_{-10}^0 -e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt + \int_0^{10} e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt \right)$$

$$a_k = \frac{1}{20} \left(\int_0^{10} e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt - \int_{-10}^0 e^{-\frac{jk\pi}{10} t} dt \right)$$

$$a_k = \frac{1}{20} \left(\left[-\frac{10 e^{-\frac{jk\pi}{10} t}}{jk\pi} \right]_{t=0}^{t=10} - \left[-\frac{10 e^{-\frac{jk\pi}{10} t}}{jk\pi} \right]_{t=-10}^{t=0} \right)$$

$$a_k = \left[\frac{e^{-\frac{jk\pi}{10} t}}{2jk\pi} \right]_{t=10}^{t=0} + \left[\frac{e^{-\frac{jk\pi}{10} t}}{2jk\pi} \right]_{t=-10}^{t=0}$$

$$a_k = \frac{1}{2jk\pi} - \frac{e^{-jk\pi}}{2jk\pi} + \frac{1}{2jk\pi} - \frac{e^{jk\pi}}{2jk\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{jk\pi} - \frac{e^{-jk\pi}}{2jk\pi} - \frac{e^{jk\pi}}{2jk\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{jk\pi} - \frac{1}{jk\pi} \left(\frac{e^{jk\pi} + e^{-jk\pi}}{2} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{jk\pi} - \frac{1}{jk\pi} \cdot \cos(k\pi)$$

$$a_k = \frac{1 - \cos(k\pi)}{jk\pi}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{jk\pi} & \text{para } k \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$

2.1.2 Série de Fourier

A série exponencial completa vai ser a seguinte:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(k\pi)}{jk\pi} \cdot e^{\frac{jk\pi}{10} t}$$

2.1.3 Série truncada de Fourier

A série truncada vai ser a mesma coisa que a série normal, mas o somatório é finito, do índice $k = -n$ até $k = n$:

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n \frac{1 - \cos(k\pi)}{jk\pi} \cdot e^{\frac{jk\pi}{10} t}$$

2.2 Simulação numérica

Vamos utilizar as mesmas métricas de erro que utilizamos com o sinal dente de serra, mas desta vez vamos utilizar $\Delta t = 10^{-2}$.

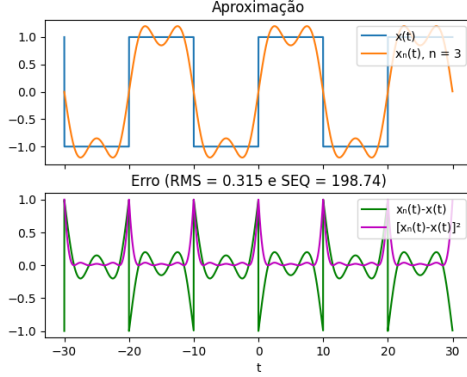


Figura 7: $n = 3$.

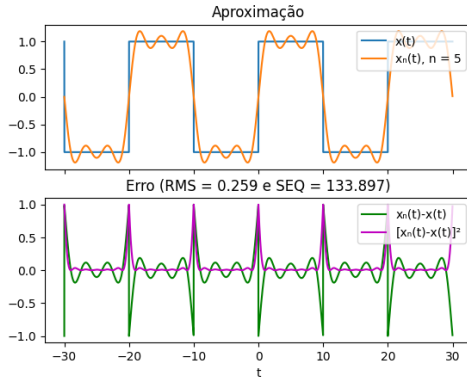


Figura 8: $n = 5$.

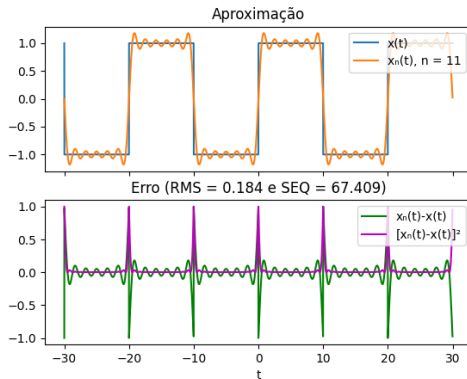


Figura 9: $n = 11$.

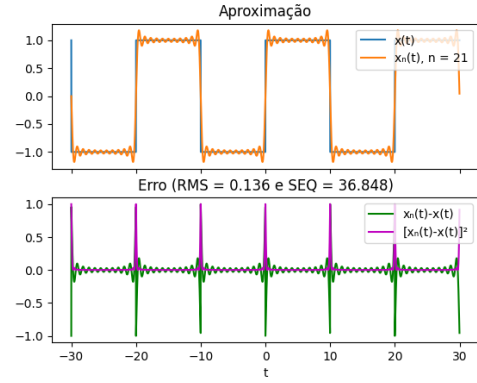


Figura 10: $n = 21$

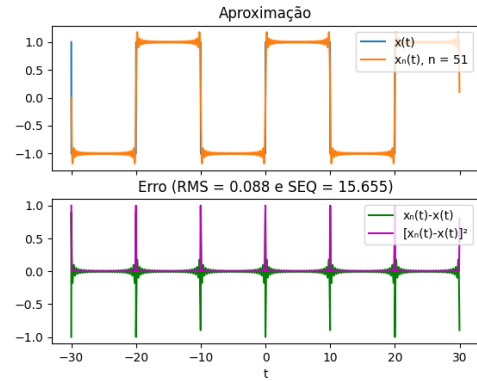


Figura 11: $n = 51$.

Mais uma vez, o erro diminui com o aumento da quantidade de termos da série, mas o fenômeno de Gibbs continua presente. Vamos dar uma olhada na onda quadrada no domínio da frequência:

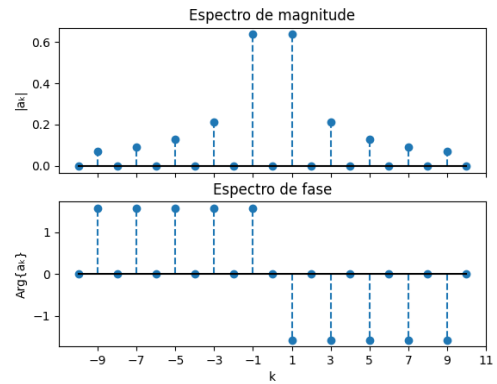


Figura 12: Espectros de magnitude e fase da onda quadrada.

3 Filtragem da onda quadrada pelo circuito RC

3.1 Análise teórica

3.1.1 Cálculo de $H(j\omega)$

Vamos começar determinando a função de transferência do filtro, aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \tau \frac{dy}{dt} + y(t) \right\} = \mathcal{L} \{ x(t) \}$$

$$\tau s Y(s) + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) \cdot (\tau s + 1) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

A resposta em frequência pode ser calculada a partir da função de transferência:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

3.1.2 Aplicação do filtro na onda quadrada

A resposta em frequência multiplica cada uma das componentes de $x(t)$ de acordo com as suas frequências:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{jk\pi\tau}{10} + 1} \frac{1 - \cos(k\pi)}{jk\pi} e^{\frac{jk\pi t}{10}}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{10}{jk\pi\tau + 10} \frac{1 - \cos(k\pi)}{jk\pi} e^{\frac{jk\pi t}{10}}$$

3.2 Simulação numérica

Vamos plotar os gráficos de $x(t)$ e $y_n(t)$ para diferentes valores de n :

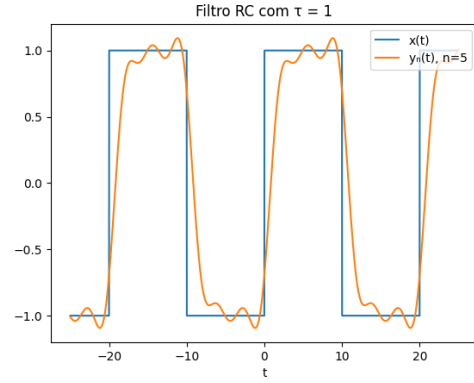


Figura 13: $n = 5$.

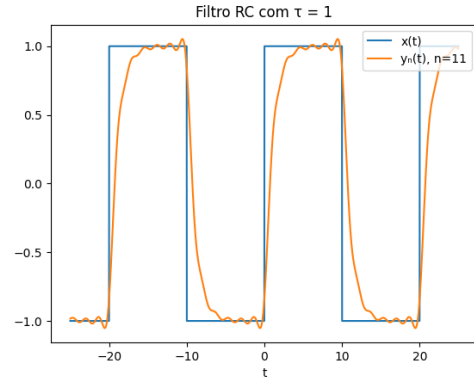


Figura 14: $n = 11$.

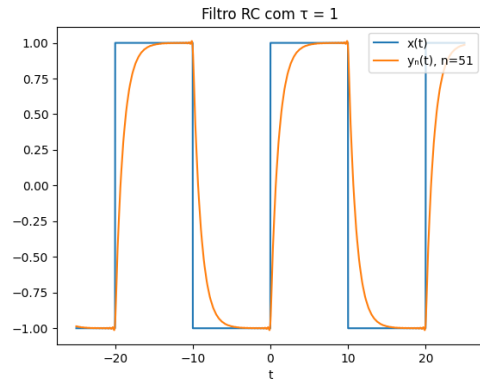


Figura 15: $n = 51$.

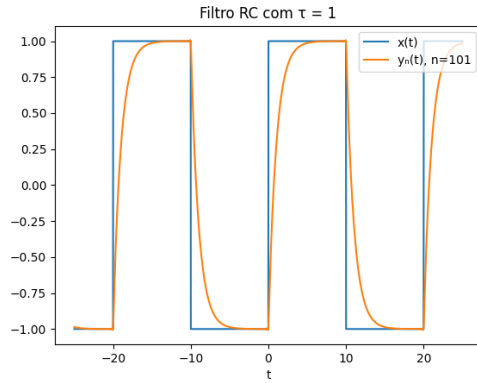


Figura 16: $n = 101$.

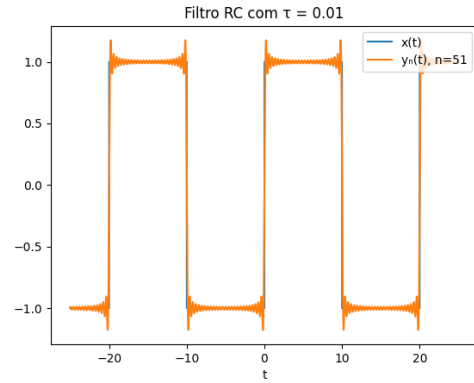


Figura 18: $\tau = 0,01$.

Conforme aumentamos a quantidade de termos da série, cada vez mais a curva se aproxima das exponenciais crescentes e decrescentes características de capacitores carregando e descarregando.

Vamos alterar o valor de τ e ver como o circuito reage:

Como podemos ver, a diminuição da constante de tempo faz com que o capacitor carregue e descarregue de forma mais rápida, o que torna a sua tensão muito próxima da própria onda quadrada. Em outras palavras, a frequência de corte foi aumentada.

Vamos dar uma olhada no gráfico de $H(k\omega_0)$:

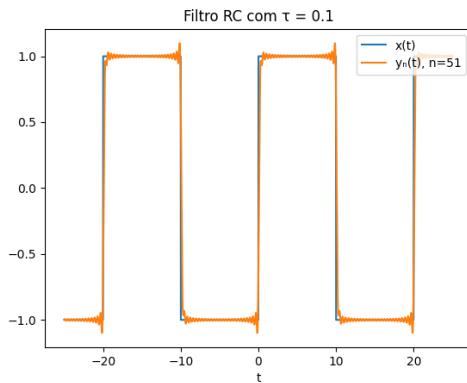


Figura 17: $\tau = 0,1$.

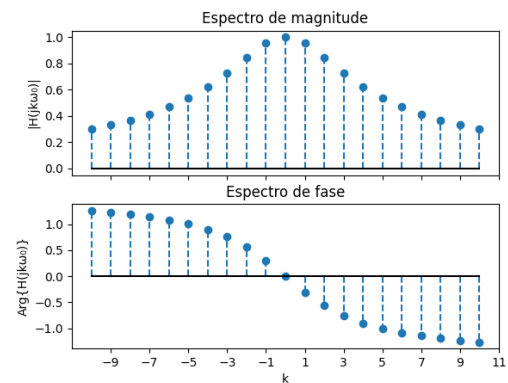


Figura 19: Gráfico de $H(jk\omega_0)$.

Como esperado, quanto maior a frequência, maior vai ser a atenuação aplicada pelo filtro. Como o capacitor apresenta inércia de tensão, ele resiste às mudanças muito rápidas, atenuando as frequências mais altas, característica de um filtro passa-baixa.