Verifiably Truthful Mechanisms

Victor Sena Molero

Universidade de São Paulo

victorsenam@gmail.com

1 de dezembro de 2017

Título

mechanism: Mecanismo. Algoritmo que recebe as preferências dos jogadores e decide o resultado.

truthful: Verdadeiro. A prova de estratégia.

verifiable: Verificável. É fácil (polinomial) convencer o jogador de que o mecanismo é verdadeiro.

O objetivo é desenvolver mecanismos a verdadeiros verificáveis e compará-los com os mecanismos verdadeiros gerais.

Procedimento

1. Especificar formalmente os mecanismos.
2. Construir um algoritmo que decide se o mecanismo é verdadeiro.
3. Analisar a qualidade dos mecanismos verdadeiros verificáveis.

Os autores consideram que o procedimento é o principal legado do artigo.

Parte I : Especificar formalmente os mecanismos

- Foco em "*facility location*", o problema do ar condicionado.
  - n jogadores escolhem em $\mathbb{R}$.
  - Custo $C(x_k, y) = |x_k - y|$. x_k é a preferência do jogador k e y é o resultado do jogo.
  - Progresso recente sobre a qualidade destes.
  - Já foi um bom primeiro exemplo ("*proof of concept*") para perguntas sobre mecanismos.

Parte I : Especificar formalmente os mecanismos

- Foco em "*facility location*", o problema do ar condicionado.
  - n jogadores escolhem em $\mathbb{R}$.
  - Custo $C(x_k, y) = |x_k - y|$. x_k é a preferência do jogador k e y é o resultado do jogo.
  - Progresso recente sobre a qualidade destes.
  - Já foi um bom primeiro exemplo ("*proof of concept*") para perguntas sobre mecanismos.
- Mecanismos determinísticos:
  - Árvores de decisão binária que comparam escolhas.
  - Cada folha retorna uma combinação convexa das escolhas.
- Mecanismos aleatorizados:
  - Escolhe um mecanismo determinístico aleatoriamente e usa ele.
  - Vamos descrever um formato mais conciso para manter a eficiência.

Parte II : Construir o algoritmo de verificação

- Caso determinístico:
  - Polinomial no tamanho da árvore e em n.
  - Não dá pra melhorar.
- Caso aleatorizado:
  - Universalmente a verdadeiro (= *universal truthfulness*).
  - Os resultados são equivalentes.

Conclusão

Verificável significa ter uma árvore polinomial na quantidade de jogadores.

Parte III : Analisar a qualidade dos verificáveis

- Aproximação:
  - Custo social (= *social cost*)
  - Custo máximo (= *custo máximo*)
- Resultados multiplicativos e justos.

	Custo social	Custo máximo
Verdadeiro	1	2
Univ. Verdadeiro	1	2
Verdadeiro Verificável	$\Theta(\frac{n}{\log(n)})$	2
Univ. Verdadeiro Verificável	$1 + \epsilon$	2

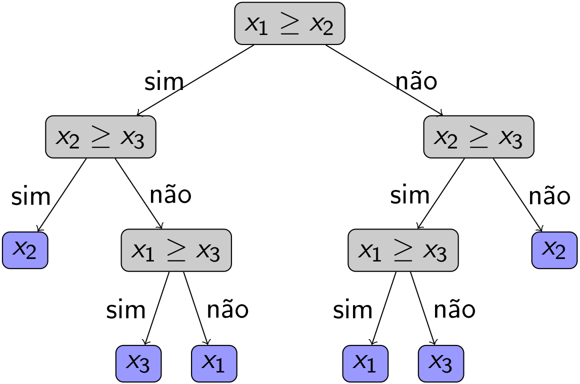
Parte I

Especificar formalmente os mecanismos

Mecanismos determinísticos

Exemplo

Mediana de 3 jogadores.



Mecanismos aleatorizados

- Seleciona uma árvore determinística e usa ela.

Mecanismos aleatorizados

- Seleciona uma árvore ~~determinística~~ e usa ela.
- A r-ésima árvore:
  - Escolhida com chance p_r.
  - Possui um inteiro m_r.
  - Possui uma distribuição de probabilidade sobre subsequências de x com tamanho m_r.
  - Sorteia a sequência e alimenta em uma árvore determinística com parâmetro em $\mathbb{R}^{m_r}$.

Exemplo

Mediana de um subconjunto aleatório uniforme de 3 jogadores.

Parte II

Construir o algoritmo de verificação

Mecanismos determinísticos: Definições

- Para todo mecanismo determinístico $\mathcal{M}$, folha $\mathcal{L}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
  - Resultado $\mathcal{M}(x)$.
  - Restrições $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$ no caminho até $\mathcal{L}$. Exemplo: $\{(x_1 \geq x_2), (x_2 < x_3), (x_1 \geq x_3)\}$.
  - Função $y_{\mathcal{L}}(x)$ na folha $\mathcal{L}$.

Mecanismos determinísticos: Definições

- Para todo mecanismo determinístico $\mathcal{M}$, folha $\mathcal{L}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
  - Resultado $\mathcal{M}(x)$.
  - Restrições $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$ no caminho até $\mathcal{L}$. Exemplo: $\{(x_1 \geq x_2), (x_2 < x_3), (x_1 \geq x_3)\}$.
  - Função $y_{\mathcal{L}}(x)$ na folha $\mathcal{L}$.
- Verdadeiro: Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in [n]$ e $x'_k \in \mathbb{R}$

$$C(x_k, \mathcal{M}(x)) \leq C(x_k, \mathcal{M}(x'_k, x)).$$

Mecanismos determinísticos: Algoritmo

- Testar todos os jogadores k.
- Testar todos os pares de folhas $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$.
- Existe um x e um x'_k tais que valem $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$,$\mathcal{C}_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k})$ e $C(x_k, y_{\mathcal{L}}(x)) > C(x_k, y_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k}))$?

Mecanismos determinísticos: Algoritmo

- Testar todos os jogadores k.
- Testar todos os pares de folhas $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$.
- Existe um x e um x_k' tais que valem $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$,$\mathcal{C}_{\mathcal{L}'}(x_k', x_{-k})$ e $C(x_k, y_{\mathcal{L}}(x)) > C(x_k, y_{\mathcal{L}'}(x_k', x_{-k}))$?

Vamos tentar colocar isso em um PL. O que atrapalha?

- Módulo na função de custo.
- Desigualdades estritas.

Mecanismos determinísticos: Algoritmo

- Testar todos os jogadores k.
- Testar todos os pares de folhas $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$.
- Existe um x e um x'_k tais que valem $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$,$\mathcal{C}_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k})$ e $C(x_k, y_{\mathcal{L}}(x)) > C(x_k, y_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k}))$?

Vamos tentar colocar isso em um PL. O que atrapalha?

- Módulo na função de custo. Testa tudo.
- Desigualdades estritas.

Mecanismos determinísticos: Algoritmo

- Testar todos os jogadores k.
- Testar todos os pares de folhas $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$.
- Existe um x e um x'_k tais que valem $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$,$\mathcal{C}_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k})$ e $C(x_k, y_{\mathcal{L}}(x)) > C(x_k, y_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k}))$?

Vamos tentar colocar isso em um PL. O que atrapalha?

- Módulo na função de custo. Testa tudo.
- Desigualdades estritas. Infla.

Mecanismos determinísticos: Algoritmo

- Testar todos os jogadores k.
- Testar todos os pares de folhas $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$.
- Existe um x e um x'_k tais que valem $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(x)$,$\mathcal{C}_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k})$ e $C(x_k, y_{\mathcal{L}}(x)) > C(x_k, y_{\mathcal{L}'}(x'_k, x_{-k}))$?

Vamos tentar colocar isso em um PL. O que atrapalha?

- Módulo na função de custo. Testa tudo.
- Desigualdades estritas. Infla.

Teorema

Um mecanismo determinístico representado por uma árvore T sobre um jogo de n jogadores pode ser verificado em tempo polinomial em $|T|$ e n.

Mecanismos determinísticos: Complexidade

Podemos fazer melhor?

Teorema

Sejam $n \geq 2$ e $\ell \leq n!$. Se existe um algoritmo que verifica todo mecanismo com ℓ folhas sobre um jogo de n jogadores, ele deve analisar toda folha.

Podemos fazer melhor?

Teorema

Sejam $n \geq 2$ e $\ell \leq n!$. Se existe um algoritmo que verifica todo mecanismo com ℓ folhas sobre um jogo de n jogadores, ele deve analisar toda folha.

- Suponha, por absurdo, que existe um que não analisa todas.

Mecanismos determinísticos: Complexidade

Podemos fazer melhor?

Teorema

Sejam $n \geq 2$ e $\ell \leq n!$. Se existe um algoritmo que verifica todo mecanismo com ℓ folhas sobre um jogo de n jogadores, ele deve analisar toda folha.

- Suponha, por absurdo, que existe um que não analisa todas.
- Construa $\mathcal{M}$ com ℓ folhas que realiza apenas comparações da forma $x_i < x_j$ onde $i < j$ e devolve sempre x_1 de forma que todas as folhas sejam atingíveis (sempre possível). Este é verdadeiro pois equivale a uma ditadura.

Mecanismos determinísticos: Complexidade

Podemos fazer melhor?

Teorema

Sejam $n \geq 2$ e $\ell \leq n!$. Se existe um algoritmo que verifica todo mecanismo com ℓ folhas sobre um jogo de n jogadores, ele deve analisar toda folha.

- Suponha, por absurdo, que existe um que não analisa todas.
- Construa $\mathcal{M}$ com ℓ folhas que realiza apenas comparações da forma $x_i < x_j$ onde $i < j$ e devolve sempre x_1 de forma que todas as folhas sejam atingíveis (sempre possível). Este é verdadeiro pois equivale a uma ditadura.
- Existe uma folha $\mathcal{L}$ não analisada. Construa $\mathcal{M}'$ idêntico a $\mathcal{M}$ porém tal que $y_{\mathcal{L}}(x) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Este não é verdadeiro. Existe um vetor de preferências x distintas que alcança a folha $\mathcal{L}$. O jogador que prefere o menor valor tem incentivo para mentir.

Mecanismos determinísticos: Complexidade

Podemos fazer melhor?

Teorema

Sejam $n \geq 2$ e $\ell \leq n!$. Se existe um algoritmo que verifica todo mecanismo com ℓ folhas sobre um jogo de n jogadores, ele deve analisar toda folha.

- Suponha, por absurdo, que existe um que não analisa todas.
- Construa $\mathcal{M}$ com ℓ folhas que realiza apenas comparações da forma $x_i < x_j$ onde $i < j$ e devolve sempre x_1 de forma que todas as folhas sejam atingíveis (sempre possível). Este é verdadeiro pois equivale a uma ditadura.
- Existe uma folha $\mathcal{L}$ não analisada. Construa $\mathcal{M}'$ idêntico a $\mathcal{M}$ porém tal que $y_{\mathcal{L}}(x) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Este não é verdadeiro. Existe um vetor de preferências x distintas que alcança a folha $\mathcal{L}$. O jogador que prefere o menor valor tem incentivo para mentir.
- Já que o algoritmo nunca analisa a folha $\mathcal{L}$, ele vai dar o mesmo resultado para os dois mecanismos e está incorreto.

Mecanismos determinísticos: Complexidade

Teorema

Seja $n \geq 2$. Qualquer algoritmo que verifique mecanismos de tamanho superpolinomial em n toma tempo superpolinomial em n no pior caso.

Esse teorema define o que é um mecanismo verificável independente do nosso algoritmo.
Um mecanismo determinístico é verificável se sua árvore tem tamanho polinomial em n.

Mecanismos aleatorizados

- Universalmente verdadeiros. Independente das escolhas.
- Esperado verdadeiro seria uma alternativa.
- Basta verificar se todas as árvores são a prova de estratégia.

Teorema

Um mecanismo aleatorizado pode ser verificado em tempo polinomial em n e $\sum_{i=1}^{K} |T_i|$. Não é possível se livrar dos T_i, também.

Parte III

Analisar a qualidade dos verificaveis.

Qualidade dos mecanismos

- Exigir que mecanismos sejam verificáveis só é útil se estes forem "bons".
- Quão bem eles aproximam o custo social e o custo máximo?

Mecanismos deterministicos

- Custo máximo:

  Ótimo Média entre os extremos.

  Verdadeiro Ditadura. Fator 2. Melhor possível (resultado antigo).

  Verificável Ditadura.

- Custo social:

  Ótimo Mediana.

  Verdadeiro Mediana. Fator 1.

  Verificável O melhor fator que conseguimos é $\Theta\left(\frac{n}{\log(n)}\right)$.

Mecanismos aleatorizados

- Custo social esperado

$$\mathbb{E}[C(x, \mathcal{M}(x))] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} C(x_i, \mathcal{M}(x))\right]$$

- Custo máximo esperado

$$\mathbb{E}[\mathrm{mc}(x, \mathcal{M}(x))] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1}^{n} C(x_i, \mathcal{M}(x))\right]$$

Mecanismos aleatorizados

- Custo máximo:

  Verdadeiro Ditadura. Fator 2. Melhor possível (resultado novo).

  Verificável Ditadura.

- Custo social:

  Verdadeiro Mediana. Fator 1.

  Verificável Ditador aleatório garante $2 - \frac{2}{n}$. O melhor fator que conseguimos é $1 + \epsilon$.

Custo social verificável aleatorizado

Teorema

Para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um mecanismo universalmente verdadeiro de tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$ que aproxima o custo social por um fator de $1 + \varepsilon$.

Como vai ser o mecanismo? Fixa um tamanho $t = \lceil \frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{(\varepsilon')^2} \rceil$ onde $\varepsilon' = \varepsilon/10$ e $\delta = \varepsilon/(2n)$, sorteia t jogadores e tira a mediana dos x deles.

- É universalmente verdadeiro?
- É verificável? O mecanismo tem tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$?
- O fator de aproximação é $1 + \varepsilon$?

Custo social verificável aleatorizado

Teorema

Para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um mecanismo universalmente verdadeiro de tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$ que aproxima o custo social por um fator de $1 + \varepsilon$.

Como vai ser o mecanismo? Fixa um tamanho $t = \lceil \frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{(\varepsilon')^2} \rceil$ onde $\varepsilon' = \varepsilon/10$ e $\delta = \varepsilon/(2n)$, sorteia t jogadores e tira a mediana dos x deles.

- É universalmente verdadeiro? sim
- É verificável? O mecanismo tem tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$?
- O fator de aproximação é $1 + \varepsilon$?

Custo social verificável aleatorizado

Teorema

Para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um mecanismo universalmente verdadeiro de tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$ que aproxima o custo social por um fator de $1 + \varepsilon$.

Como vai ser o mecanismo? Fixa um tamanho $t = \lceil \frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{(\varepsilon')^2} \rceil$ onde $\varepsilon' = \varepsilon/10$ e $\delta = \varepsilon/(2n)$, sorteia t jogadores e tira a mediana dos x deles.

- É universalmente verdadeiro? sim
- É verificável? O mecanismo tem tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$? sim: $\mathcal{O}(2^{6t})$
- O fator de aproximação é $1 + \varepsilon$?

Custo social verificável aleatorizado

Teorema

Para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um mecanismo universalmente verdadeiro de tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$ que aproxima o custo social por um fator de $1 + \varepsilon$.

Como vai ser o mecanismo? Fixa um tamanho $t = \lceil \frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{(\varepsilon')^2} \rceil$ onde $\varepsilon' = \varepsilon/10$ e $\delta = \varepsilon/(2n)$, sorteia t jogadores e tira a mediana dos x deles.

- É universalmente verdadeiro? sim
- É verificável? O mecanismo tem tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$? sim: $\mathcal{O}(2^{6t})$
- O fator de aproximação é $1 + \varepsilon$? ...

Custo social verificável aleatorizado

Uma ε-mediana x de S é tal que $(\frac{1}{2} - \varepsilon)|S| < \pi(x) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)|S|$.

Lema

Um algoritmo que escolhe um subconjunto de t elementos de um conjunto S com n elementos e retorna sua mediana, retorna uma ε-mediana de S com probabilidade pelo menos $1 - \delta$ para todos os $\varepsilon, \delta < \frac{1}{10}$ tais que

$$\frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon^2} \leq t \leq \varepsilon n.$$

Particionamos S.

$$S_1 = \left\{x \in S \mid \pi(x) \leq \frac{n}{2} - \varepsilon n\right\}$$

$$S_2 = \left\{x \in S \mid \frac{n}{2} - \varepsilon n < \pi(x) < \frac{n}{2} + \varepsilon n\right\}$$

$$S_3 = \left\{x \in S \mid \pi(x) \geq \frac{n}{2} + \varepsilon n\right\}$$

Ao escolher t elementos de S, se menos que $t/2$ forem escolhidos de S_1 e menos que $t/2$ forem escolhidos de S_3, então a mediana sempre vai pertencer a S_2 e ser uma ε-mediana.

Qual é a probabilidade de escolher menos do que $t/2$ elementos de S_1? Criamos t Bernoullis. $X_i = 1$ se o i-ésimo ensaio caiu em S_1. Elas não são independentes, mas vale.

$$\mathbb{P}[X_i = 1] \leq \frac{\frac{n}{2} - \varepsilon n}{n - (i-1)} \leq \frac{\frac{n}{2} - \varepsilon n}{n - \varepsilon n} \leq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$$

Criamos t Bernoullis Y_i independentes com probabilidade $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$.

Denotamos $X = \sum_{i=1}^{t} X_i$ e $Y = \sum_{i=1}^{t} Y_i$. Vale que

$$\mathbb{P}\left[X \geq \frac{t}{2}\right] \leq \mathbb{P}\left[Y \geq \frac{t}{2}\right].$$

Custo social verificável aleatorizado: Prova do Lema

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[Y \geq \frac{t}{2}\right] &= \mathbb{P}\left[Y \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\frac{3}{2} - \varepsilon}\right)\mathbb{E}\left[Y\right]\right] && (1)\\
&\leq \mathbb{P}\left[Y \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\mathbb{E}\left[Y\right]\right] && (2)\\
&\leq \exp\left(-\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}\right)t}{3}\right) \leq \frac{\delta}{2} && (3)
\end{aligned}
$$

Onde (1) é provado a seguir, (2) é fácil e (3) usa a desigualdade de Chernoff e o fato de que $t \geq \frac{100\ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon^2}$.

Custo social verificável aleatorizado: Prova do Lema

$$\mathbb{P}\left[Y \geq \frac{t}{2}\right] = \mathbb{P}\left[Y \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\frac{3}{2} - \varepsilon}\right)\mathbb{E}\left[Y\right]\right] \tag{1}$$

$$\leq \mathbb{P}\left[Y \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\mathbb{E}\left[Y\right]\right] \tag{2}$$

$$\leq \exp\left(-\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}\right)t}{3}\right) \leq \frac{\delta}{2} \tag{3}$$

Onde (1) é provado a seguir, (2) é fácil e (3) usa a desigualdade de Chernoff e o fato de que $t \geq \frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon^2}$.

$\mathbb{P}(Z > (1+\alpha)\mu) \leq e^{-\frac{\alpha^2\mu}{3}}$ com $0 < \alpha < 1$.

Custo social verificável aleatorizado: Prova do Lema

Provar (1) é provar

$$\frac{t}{2} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\frac{3}{2} - \varepsilon}\right) \mathbb{E}[Y].$$

Sabemos que $\mathbb{E}[Y] = (\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{3})t$. Daí

$$\begin{aligned}\frac{t}{2} = \left(\frac{1}{1 - \frac{2\varepsilon}{3}}\right) \mathbb{E}[Y] &= \left(\frac{1 - 1 + \frac{2\varepsilon}{3}}{1 - \frac{2\varepsilon}{3}} + 1\right) \mathbb{E}[Y] \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{\frac{3}{2} - \varepsilon} + 1\right) \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

Teorema

Para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um mecanismo universalmente verdadeiro de tamanho $\mathcal{O}(\text{poly}(n))$ que aproxima o custo social por um fator de $1 + \varepsilon$.

Queríamos provar que o fator era $1 + \varepsilon$.
Dado um $0 < \varepsilon < 1/10$. Escolhemos $\varepsilon' = \varepsilon/10$, $\delta = \varepsilon/(2n)$ e $t = \lceil \frac{100 \ln(\frac{1}{\delta})}{(\varepsilon')^2} \rceil$.

Custo social verificável aleatorizado: Prova do Teorema

Seja x um vetor de preferências. Suponha que x está ordenado sem perda de generalidade. Defina $x_k = \mathcal{M}(x)$, x_m como a mediana de x, x_ℓ como a ε'-mediana que maximiza o custo social. Assuma s.p.g. que $\ell \leq m$ e defina também $\Delta = |x_\ell - x_m|$.

1. Se x_k é ε'-mediana. Separando o vetor de jogadores em x_k e x_m, podemos concluir que

$$\begin{aligned} C(x, x_k) \leq C(x, x_\ell) &\leq C(x, x_m) - \ell\Delta + (n - \ell)\Delta \\ &= C(x, x_\ell) + (n - 2\ell)\Delta. \end{aligned}$$

2. Caso contrário, $C(x, x_k) \leq |x_n - x_1|(n-1)$, $C(x, x_m) \geq |x_n - x_1|$ e $C(x, x_m) \geq \ell\Delta$.

Custo social verificável aleatorizado: Prova do Teorema

Já que o caso 1 tem probabilidade pelo menos $(1-\delta)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[C(x,x_k)]}{C(x,x_m)} &\leq \frac{(1-\delta)C(x,x_m)+\Delta(1-\delta)(n-2\ell)+\delta(n-1)|x_n-x_1|}{C(x,x_m)} \\
&\leq (1-\delta)+\frac{\Delta(1-\delta)(n-2\ell)}{\ell\Delta}+\frac{\delta(n-1)|x_n-x_1|}{|x_n-x_1|} \\
&= 1-\delta+(1-\delta)\frac{n}{\ell}-2(1-\delta)+\delta(n-1) \\
&\leq \delta n-1+(1-\delta)\frac{2}{1-2\varepsilon'} \\
&\leq 1+\delta n+5\varepsilon' = 1+\epsilon
\end{aligned}$$