1. Introdução

1.1. **Sobre o Trabalho.**

1.2. **Notação.**

1.3. **Matrizes.** Explicar o que são matrizes online e offline.

1.4. **Implementações.** Explicar os padrões que estou usando pra implementar os programas. Por exemplo: Funções como argumentos, 0-index (em contraste com o 1-index do pseudo-código) e wrappers.

2. Monotonicidade, convexidade e matrizes Monge

Aqui serão apresentados e explorados os conceitos de monotonicidade, convexidade e matrizes Monge, além disso, alguns resultados referentes a estes conceitos serão demonstrados. Estes conceitos são fundamentais para o desenvolvimento do restante do trabalho.

Definição 2.1 (Vetor monótono)**.** *Seja $a \in \mathbb{Q}^n$ um vetor, a é dito monótono quando vale uma das propriedades abaixo.*

- *Se para todo $i, j \in [n]$, $i < j \Rightarrow a_i \leq a_j$, a é dito monótono crescente (ou só crescente).*
- *Se para todo $i, j \in [n]$, $i < j \Rightarrow a_i \geq a_j$, a é dito monótono decrescente (ou só decrescente).*

Sabemos que a monotonicidade de vetores pode ser aproveitada para agilizar alguns algoritmos importantes, por exemplo, a busca binária pode ser interpretada como uma otimização da busca linear para vetores monótonos.

Definição 2.2 (Função convexa)**.** *Seja $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma função,*

- *se para todo par de pontos $x, y \in \mathbb{Q}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$ que respeita $0 \leq \lambda \leq 1$, vale $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, g é dita convexa e*
- *se para todo par de pontos $x, y \in \mathbb{Q}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$ que respeita $0 \leq \lambda \leq 1$, vale $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, g é dita côncava.*

Proposição 2.3. *A função $g(x) = x^2$ é convexa.*

Demonstração. Sejam $x, y, \lambda \in \mathbb{Q}$ onde vale $0 \leq \lambda \leq 1$. Queremos provar $(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$, isso equivale a

$$\lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2, \text{ ou seja}$$

$$(\lambda^2 - \lambda)(x^2) + ((1-\lambda)^2 - (1-\lambda))y^2 + 2(\lambda - \lambda^2)xy \leq 0, \text{ que é}$$

$$(\lambda^2 - \lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) = (\lambda^2 - \lambda)(x+y)^2 \leq 0.$$

□

É interessante definir convexidade também em termos de vetores.

Definição 2.4 (Vetor convexo)**.** *Seja $a \in \mathbb{Q}^n$ um vetor,*

- *se para todo $i, j, k \in [n]$, $i < j < k \Rightarrow a_j \leq \frac{(j-k)a_i + (i-j)a_k}{i-k}$, a é dito convexo e*
- *se para todo $i, j, k \in [n]$, $i < j < k \Rightarrow a_j \geq \frac{(j-k)a_i + (i-j)a_k}{i-k}$, a é dito côncavo.*

Assim como a monotonicidade, a convexidade também é usualmente explorada para agilizar algoritmos, por exemplo, se um vetor é convexo podemos definir o valor mínimo do vetor com uma busca ternária ao invés de percorrer todo o vetor.

Definição 2.5. *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, definimos quatro vetores a seguir.*

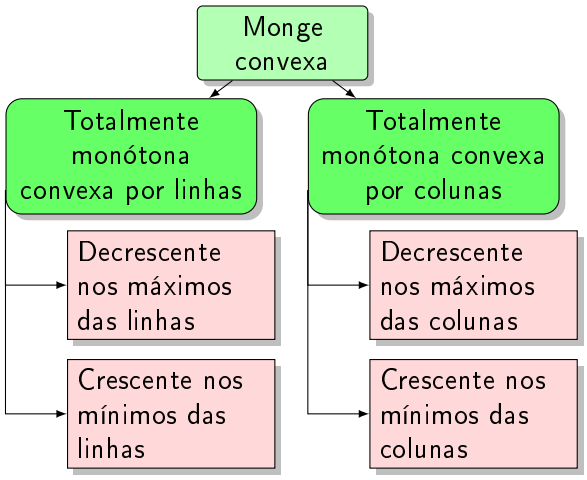

FIGURA 2.6. Comportamento dos vetores de índices ótimos em relação à convexidade.

- *O vetor de índices de máximos das linhas de A guarda na posição i o número* $\max\{j \in [m] \mid A[i][j] \geq A[i][j']$ *para todo* $j' \in [m]\}$.
- *O vetor de índices de mínimos das linhas de A guarda na posição i o número* $\min\{j \in [m] \mid A[i][j] \leq A[i][j']$ *para todo* $j' \in [m]\}$.
- *O vetor de índices de máximos das colunas de A guarda na posição j o número* $\max\{i \in [n] \mid A[i][j] \geq A[i'][j]$ *para todo* $i' \in [n]\}$.
- *O vetor de índices de mínimos das colunas de A guarda na posição j o número* $\min\{i \in [n] \mid A[i][j] \leq A[i'][j]$ *para todo* $i' \in [n]\}$.

Note que o máximo de uma linha (ou coluna) foi definido como o maior índice que atinge o máximo e o de mínimo foi definido como o menor índice que atinge o mínimo. Esta escolha foi feita para simplificar o Lema 2.9.

Dada uma matriz, encontrar estes vetores é um problema central para este trabalho. Neste momento é interessante classificar algumas matrizes de acordo com propriedades que vão nos ajudar a calcular os vetores de mínimos e máximos de maneira especialmente eficiente.

A Figura 2.6 resume as relações de implicação da classificação que será realizada. Os conceitos ilustrados nela serão apresentados a seguir.

Definição 2.7 (Matriz monótona)**.** *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ uma matriz. Se A tiver o vetor de índices de máximos das linhas monótono, A é dita monótona nos máximos das linhas.*

Valem também as definições análogas para mínimos ou colunas e pode-se especificar monotonicidade crescente ou decrescente.

Definição 2.8 (Matriz totalmente monótona)**.** *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ uma matriz.*

- *Se $A[i'][j] \leq A[i'][j']$ implica $A[i][j] \leq A[i][j']$ para todo $1 \leq i < i' \leq n$ e $1 \leq j < j' \leq m$, A é monótona convexa nas linhas.*

- *Se* $A[i][j'] \leq A[i'][j']$ *implica* $A[i][j] \leq A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$, A *é monótona convexa nas colunas.*
- *Se* $A[i'][j] > A[i'][j']$ *implica* $A[i][j] > A[i][j']$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$, A *é monótona côncava nas linhas.*
- *Se* $A[i][j'] > A[i'][j']$ *implica* $A[i][j] > A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$, A *é monótona côncava nas colunas.*

O motivo do uso dos termos "convexa" e "côncava" em relação a matrizes durante o texto são justificados pelo Teorema 2.15. Note que se uma matriz é totalmente monótona, todas as suas submatrizes são totalmente monótonas no mesmo sentido.

Lema 2.9. *Se* $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ *é uma matriz totalmente monótona convexa nas linhas, toda submatriz de* A *é monótona decrescente nos máximos das linhas e monótona crescente nos mínimos das linhas.*

Se A *é totalmente monótona côncava nas linhas, toda submatriz de* A *é monótona decrescente nos mínimos das linhas e monótona crescente nos máximos das linhas.*

As afirmações valem identicamente em termos de colunas.

Demonstração. Considere uma matriz A totalmente monótona convexa nas linhas. Sejam i e i' índices de linhas de A onde $i < i'$. Chamamos de j o índice de máximo da linha i e de j' o índice de máximo da linha i'. Queremos provar que os máximos são decrescentes, portanto, vamos supor por absurdo que $j < j'$. Com isso, teremos $A[i][j'] < A[i][j]$ e $A[i'][j] \leq A[i'][j']$. Porém, já que A é monótona convexa nas linhas, a segunda desigualdade implica em $A[i][j] \leq A[i][j']$, que contradiz a primeira. Portanto, os índices de máximos são decrescentes.

Agora, considere novamente dois índices i e i' quaisquer de linhas de A onde $i < i'$. Denotamos por j o índice de mínimo da linha i' e por j' o índice de mínimo da linha i (note e a inversão no uso de $'$). Vamos supor por absurdo que $j < j'$ e teremos $A[i'][j] \leq A[i'][j']$ e $A[i][j'] < A[i][j]$. E, novamente, usando o fato de que A é monótona convexa nas linhas, obtivemos uma contradição.

Finalmente, se A' é uma submatriz de A, então A' é totalmente monótona convexa nas linhas, portanto monótona crescente nos máximos das linhas e monótona decrescente nos mínimos das linhas.

As demonstrações no caso côncavo e nos casos relacionados a colunas são análogas. □

Definição 2.10 (Monge Convexidade)**.** *Seja* $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$.

(1) *Se vale* $A[i][j] + A[i'][j'] \leq A[i][j'] + A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$, A *é dita Monge convexa.*
(2) *Se vale* $A[i][j] + A[i'][j'] \geq A[i][j'] + A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$, A *é dita Monge côncava.*

A desigualdade que define as matrizes Monge é conhecida também por "Condição de Monge" ou "Desigualdade Quadrangular"[6][4].

Lema 2.11. *Se A é Monge convexa, A é totalmente monótona convexa tanto nas linhas quanto nas colunas.*

Se A é Monge côncava, A é totalmente monótona côncava tanto nas linhas quanto nas colunas.

Demonstração. Seja A uma matriz Monge convexa. Suponha que vale, para certos $i, i' \in [n]$ e $j, j' \in [m]$ onde $i < i'$ e $j < j'$, $A[i'][j] \leq A[i'][j']$, então, somamos esta desigualdade à definição de Monge convexa e obtemos $A[i][j] \leq A[i][j']$, ou seja, A é totalmente monótona convexa nas linhas.

Por outro lado, se vale, para certos $i, i' \in [n]$ e $j, j' \in [m]$ com $i < i'$ e $j < j'$, $A[i][j'] \leq A[i'][j']$, somamos esta desigualdade à definição de Monge convexa e obtemos $A[i][j] \leq A[i'][j]$, assim, A é totalmente monótona convexa nas colunas.

A prova para o caso côncavo é análoga. □

Teorema 2.12. *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$.*

Vale $A[i][j] + A[i+1][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+1][j]$ para todo $i \in [n]$ e $j \in [m]$ se e somente se A é Monge convexa.

Vale $A[i][j] + A[i+1][j+1] \geq A[i][j+1] + A[i+1][j]$ para todo $i \in [n]$ e $j \in [m]$ se e somente se A é Monge côncava.

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$. Se A é Monge convexa, trivialmente vale que $A[i][j] + A[i+1][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+1][j]$. Vamos mostrar que se vale $A[i][j] + A[i+1][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+1][j]$ para todo $i \in [n-1]$ e $j \in [m-1]$, a matriz é Monge convexa.

Sejam $i \in [n-1]$ e $j \in [m-1]$ quaisquer, vamos provar que $A[i][j] + A[i+a][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+a][j]$ para todo $0 < a \leq n - i$ com indução em a. A base, onde $a = 1$ vale pela hipótese, quando $a > 1$ assumimos que a tese vale com $a - 1$ e temos $A[i][j] + A[i+a-1][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+a-1][j]$ e, já que $i + a - 1 \in [n-1]$, vale $A[i+a-1][j] + A[i+a][j+1] \leq A[i+a-1][j+1] + A[i+a][j]$ e, somando as duas inequações, obtemos $A[i][j] + A[i+a][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+a][j]$. Isso conclui a prova proposta neste parágrafo.

Agora, sejam $i \in [n-1]$ e $j \in [m-1]$ quaisquer, vamos provar que $A[i][j] + A[i+a][j+b] \leq A[i][j+b] + A[i+a][j+b]$ para todo $0 < a \leq n - i$ e $0 < b \leq m - j$ por indução b. A base desta indução, onde $b = 1$, foi provada no parágrafo anterior. Se $b > 1$ assumimos que a tese vale para $b - 1$, escrevemos $A[i][j] + A[i+a][j+b-1] \leq A[i][j+b-1] + A[i+a][j]$, pela prova do parágrafo anterior, vale $A[i][j+b-1] + A[i+a][j+b] \leq A[i][j+b] + A[i+a][j+b-1]$ e, mais uma vez, somando as duas equações provamos a desigualdade $A[i][j] + A[i+a][j+b] \leq A[i][j+b] + A[i+a][j]$. Com isso provamos que A é Monge convexa.

A prova para o caso côncavo segue análogamente. □

As matrizes Monge são usadas para resolver uma série de problemas que serão explorados aqui. A condição de Monge é a mais forte apresentada neste trabalho e alguns dos algoritmos apresentados não dependem dela, apenas da monotonicidade ou total monotonicidade, ainda assim, ela leva a resultados úteis que nos permitem provar a pertinência dos algoritmos a problemas, mesmo que o algoritmo usado não se utilize da condição diretamente.

Como consequência desta utilidade, iremos discutir um problema que será resolvido com um algoritmo apresentado somente na Seção 4, o algoritmo SMAWK. Ele não será explicado neste momento, utilizamos ele como caixa preta. Desta forma, poderemos introduzir estes resultados que são importantes em vários momentos deste texto e na aplicação prática dos conhecimentos discutidos aqui de forma suave e motivada.

Problema 2.13. *Definimos a função de custo c de cada vetor v definida* $c(v) = \left(\sum_{x \in v} x\right)^2$.

Dados dois inteiros k e n com $k \leq n$, e um vetor $v \in \mathbb{Q}_+^n$, queremos particionar o vetor a em k subvetores não-vazios de forma a maximizar a soma dos custos das partes, isto é, se queremos escolher um particionamento $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de v em subvetores de forma a minimizar $\sum_{i=1}^{k} c(v_{P_i})$.

Definimos a matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ de forma que, para todo $1 \leq i < j \leq n$ a entrada $A[i][j]$ guarda o custo de manter o subvetor $v[i\,..\,j]$ em uma partição e todas as outras entradas guardam o valor $-\infty$. Com esta matriz, podemos resolver o problema com programação dinâmica. Vamos resolver subproblemas de parâmetros i e ℓ da forma: Melhor particionamento de um subvetor $v[i+1\,..\,n]$ de v em k partes. Se E é uma matriz que guarda, na entrada $0 \leq i < n$ e $1 \leq \ell \leq n - i$ o valor ótimo do subproblema de parâmetros i e ℓ, poderemos descrever E com uma recorrência.

$$E[\ell][i] = \begin{cases} A[i][n] & \text{, se } \ell = 1, \\ \max_{j=i+1}^{n-\ell+1} A[i][j] + E[\ell-1][j] & \text{, se } n - i \geq \ell \text{ e} \\ -\infty & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Chamamos de não triviais pares de ℓ e i para os quais $E[\ell][i] = \max_{j=i+1}^{n-\ell+1} A[i][j] + E[\ell-1][j]$.

É fácil resolver o problema enunuciado em tempo $\mathcal{O}(kn^2)$, basta iterar crescentemente em ℓ, para cada ℓ, iterar decrescentemente nos valores de i para os quais ℓ e i são não triviais e testar todos os valores possíveis para j em cada passo. Vamos transformar a definição de E para deixá-la mais simples. Fixe i e ℓ para os quais $E[\ell][i] = \max_{j=i+1}^{n-\ell+1} A[i][j] + E[\ell-1][j]$. Quando $j <$

$i+1$, $A[i][j] = -\infty$ e quando $j > n - \ell + 1$, $E[\ell][j] = -\infty$, portanto, podemos escrever $E[\ell][i] = \max_{j=1}^{n} A[i][j] + E[\ell-1][j]$.

Para todos os pares ℓ e i não triviais e para todo $j \in [n]$, definimos $B_\ell[i][j] = A[i][j] + E[\ell-1][j]$. Além destas, definimos, para todo $0 \leq i < n$ e $j \in [n]$, $B_1[i][j] = A[i][n]$. Com isso, podemos reescrever a definição de E.

$$E[\ell][i] = \begin{cases} \max_{j=1}^{n} B_\ell[i][j] & \text{, se } n - i \geq \ell \text{ e} \\ -\infty & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Reduzimos o problema original para o problema de encontar máximos de linhas das matrizes B_ℓ para todo $\ell \in [n]$ e toda linha i tal que $n - i \geq \ell$. O algoritmo SMAWK encontra máximos de linhas de matrizes totalmente monótonas convexas nas linhas em tempo $\mathcal{O}(n+m)$ onde n e m são as quantidades de linhas e colunas na matriz. Vamos mostrar que as matrizes B_ℓ são totalmente monótonas convexas nas linhas para poder aplicar o SMAWK e resolver o Problema 2.13 eficientemente, isso será feito com a ajuda dos resultados abaixo.

Lema 2.14. *Sejam $A, B \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ matrizes e $c \in \mathbb{Q}^m$ um vetor tais que para todo $i \in [n]$ e $j \in [m]$, $B[i][j] = A[i][j] + c[j]$. Se A é Monge convexa, B é Monge convexa.*

O mesmo resultado vale se $c \in \mathbb{Q}^n$ e $B[i][j] = A[i][j] + c[i]$. O resultado análogo vale no caso da concavidade.

Demonstração. Sejam A, B e b definidos como no enunciado do teorema. Suponha que A é Monge convexa. Vale, para quaisquer $1 \leq i < i' \leq n$ e $1 \leq j < j' \leq m$, $A[i][j] + A[i'][j'] \leq A[i'][j] + A[i][j']$, logo, vale $A[i][j] + b[i] + A[i'][j'] + b[i'] \leq A[i'][j] + b[i'] + A[i][j'] + b[i]$ que é $B[i][j] + B[i'][j'] \leq B[i'][j] + B[i][j']$. A prova para o caso onde $c \in \mathbb{Q}^m$ e $B[i][j] = A[i][j] + c[j]$ é análoga, bem como as provas para os casos côncavos. □

Suponha que A é Monge convexa. Escrevemos, para toda entrada i, j de B_1, $B_1[i][j] = A[i][j] + A[j][n]$ e usamos o Lema 2.14 para mostar que B_1 é Monge convexa. Além disso, para todo $1 < \ell \leq k$, a matriz B_ℓ cabe perfeitamente nas condições do Lema 2.14, assim, basta provar que A é Monge convexa e provamos a pertinencia do algorimto SMAWK ao problema.

Teorema 2.15. *Sejam $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ uma matriz, $w \in \mathbb{Q}_+^n$ um vetor e $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma fução tais que para todo $i, j \in [n]$ vale $A[i][j] = g\left(\sum_{k=1}^{j} w_k - \sum_{k=1}^{i} w_k\right)$. Se g é convexa, A é Monge convexa. Similarmente, se g é côncava, A é Monge côncava.*

Antes de demonstrar este teorema, vamos provar que A é Monge convexa utilizando o resultado. Para um certo vetor $v \in \mathbb{Q}_+^n$, $A[i][j] =$

$\left(\sum_{k=(i+1)}^{j} v_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{j} v_k - \sum_{k=1}^{i} v_k\right)^2$, por definição. Assim, precisamos mostrar apenas que a função $g(x) = x^2$ é convexa, o que segue da Proposição 2.3.

Com isso já que o nosso problema se reduziu a encontrar, para todos os $\ell \in [k]$ os máximos das linhas da matriz B_ℓ e estas são Monge convexas, estas também são totalmente monótonas convexas por linhas e podemos encontrar seus máximos em $\mathcal{O}(n)$, resolvendo o problema todo em $\mathcal{O}(kn)$.

Nos falta provar o Teorema 2.15.

Demonstração. Sejam A e g quaisquer que respeitem as condições do enunciado. Sejam ainda $i, i', j, j' \in [n]$ onde $i < i'$ e $j < j'$. Escrevemos $a = \sum_{k=1}^{i'} w_k - \sum_{k=1}^{i} w_k$, $b = \sum_{k=1}^{j'} w_k - \sum_{k=1}^{j} w_k$ e $z = \sum_{k=1}^{j} w_k - \sum_{k=1}^{i'} w_k$. Desta forma, temos $g(z) = A[i'][j]$, $g(z+a+b) = A[i][j']$, $g(z+a) = A[i][j]$ e $g(z+b) = A[i'][j']$, portanto, $g(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$ se e somente se $A[i][j] + A[i'][j'] \leq A[i][j'] + A[i'][j]$ (A é Monge convexa).

Com isso, vamos provar que se g é convexa, A é Monge convexa. Sejam $i, i', j, j' \in [n]$ onde $i < i'$ e $j < j'$. Definimos a, b e z como acima. Sabemos $0 \leq a$ e $0 \leq b$. Consideramos o caso onde $0 < a \leq b$. Temos $0 < a \leq b < a+b$, ou seja, $z < z+a \leq z+b < z+a+b$. Definimos $\lambda = \frac{a}{a+b}$. Já que $z+a = \lambda z + (1-\lambda)(z+a+b)$ e $z+b = (1-\lambda)z + \lambda(z+a+b)$, por convexidade de g, obtemos $g(z+a) \leq \lambda g(z) + (1-\lambda)g(z+a+b)$ e $g(z+b) \leq \lambda g(z+a+b) + (1-\lambda)g(z)$. Somando, obtemos $g(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$.

Se considerarmos o caso onde $0 < b \leq a$, seguimos o mesmo raciocínio e obtemos, novamente, $g(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$. Falta considerar o caso onde $0 = a = b$, neste caso, $g(z) = g(z+a) = g(z+b) = g(z+a+b)$ e vale $(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$. Portanto, A é Monge convexa. □

3. Divisão e Conquista

Nesta seção será apresentada uma técnica que chamamos de Divisão e Conquista. A ideia é citada em [3] e é um tópico recorrente em competições de programação, sendo conhecida como "Divide and Conquer Optimization" [1] [2] e geralmente aplicada a problemas de programação dinâmica. Além disso, as hipóteses deste algoritmo são mais fracas do que as do algoritmo SMAWK, apresentado na Seção 4, portanto, todo problema para o qual aquela solução pode ser aplicada, esta também pode. Ao final desta seção, apresentamos exemplos de aplicações em programação dinâmica.

Dada uma matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, listamos os casos de uso deste algoritmo:

- Se A é monótona crescente nos mínimos das linhas podemos encontrar os índices de mínimos das linhas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(n))$,
- se A é monótona decrescente nos mínimos das linhas podemos encontrar os índices de mínimos das linhas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(n))$,
- se A é monótona crescente nos máximos das linhas podemos encontrar os índices de máximos das linhas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(n))$,
- se A é monótona decrescente nos máximos das linhas podemos encontrar os índices de máximos das linhas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(n))$,
- se A é monótona crescente nos mínimos das colunas podemos encontrar os índices de mínimos das colunas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(m))$,
- se A é monótona decrescente nos mínimos das colunas podemos encontrar os índices de mínimos das colunas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(m))$,
- se A é monótona crescente nos máximos das colunas podemos encontrar os índices de máximos das colunas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(m))$ e
- se A é monótona decrescente nos máximos das colunas podemos encontrar os índices de máximos das colunas em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(m))$.

Apresentaremos o caso em que A é crescente nos mínimos das linhas. É fácil manipular o algorimto para trabalhar com os outros casos.

3.1. **Técnica.** Dada uma matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ monótona crescente nos máximos das linhas, queremos encontrar o vetor de índices de máximos das linhas de A. Isto é, para todo $i \in [n]$, queremos encontrar

$$R[i] = \min\{j \mid A[i][j] \geq A[i][j'] \text{ para todo } j' \in [n]\}.$$

Se, para alguma linha i, encontrarmos o valor $R[i]$, sabemos, já que A é monótona convexa, que para todo $i' < i$, $R[i'] \leq R[i]$ e, para todo $i' > i$, $R[i'] \geq R[i]$, isto é, sabemos que os máximos de menor índice das outras linhas se encontram nas submatrizes $A[1\,..\,i-1][1\,..\,R[i]]$ e $A[i+1\,..\,n][R[i]\,..\,m]$. Basta, agora, seguindo o paradigma de divisão e conquista, resolver o mesmo problema para estas submatrizes e conseguimos resolver o problema original.

Algoritmo 3.1 Mínimos das linhas com divisão e conquista

```
1: função FindRowMax_DC(A, r_s, r_t, c_s, c_t)
2:     ℓ ← ⌈(r_s + r_t)/2⌉
3:     R[ℓ] ← min{j | A[i][j] ≥ A[i][j'] para todo j' ∈ [c_s .. c_t]}
4:     se i > r_s então
5:         R[r_s .. ℓ − 1] ← FindRowMax_DC(A, r_s, ℓ − 1, c_s, R[ℓ])
6:     se i < r_t então
7:         R[ℓ + 1 .. r_t] ← FindRowMax_DC(A, ℓ + 1, r_t, R[ℓ], c_t)
8:     devolve R
```

3.2. **Análise.** Será feita uma análise do tempo de execução do algoritmo acima no pior caso assumindo que as atribuições feitas nas linhas 5 e 7 custam tempo constante, futuramente, em 3.3, iremos apresentar uma implementação em C++ que está de acordo com a análise realizada.

Se A é uma matriz e r_s, r_t, c_s e c_t são índices tais que $r_t - r_s = n > 0$ e $c_t - c_s = m > 0$, o tempo gasto por FindRowMax_DC(A, r_s, r_t, c_s, c_t) pode ser expresso pela seguinte recorrência:

$$T(n,m) = \begin{cases} m & \text{, se } n = 1, \\ m + \max\limits_{j\in[m]} T(1,j) & \text{, se } n = 2, \\ m + \max\limits_{j\in[m]} \left\{ \begin{array}{c} T(\lceil n/2\rceil - 1, m-j+1) \\ +T(\lfloor n/2\rfloor, j) \end{array} \right\} & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 3.2. *Para todo $n, m \geq 1$, $T(n,m) \leq (m+n)\lg(2n)$ e, portanto, a técnica da divisão e conquista consegue encontrar o máximo de todas as linhas em tempo $\mathcal{O}((m+n)\lg(n))$*

Demonstração. Vamos usar indução em n para provar a tese. Se $n = 1$ e $m \geq 1$, $T(1,m) = m \leq (m+1)\lg(2)$. Se $n = 2$ e $m \geq 1$, existe $j \in [m]$ tal que $T(2,m) = m + r \leq 2m \leq (m+2)\lg(4)$. Agora, se $n \geq 3$ e $m \geq 1$, existe um $j \in [m]$ tal que

$$T(n,m) = m + T(\lceil n/2\rceil - 1, j) + T(\lfloor n/2\rfloor, m-j+1).$$

Assumimos para $1 \leq n' < n$ e $m' \geq 1$ que $T(n',m') \leq (m'+n')\lg(2n')$. Com isso, já que $1 \leq \lceil n/2\rceil - 1 < n$, $1 \leq \lfloor n/2\rfloor < n$, $j \geq 1$ e $m - j + 1 \geq 1$, temos, com a equação acima e o fato de que $\lceil n/2\rceil - 1 \leq \lfloor n/2\rfloor \leq n/2$,

$$\begin{aligned} T(n,m) &\leq m + (j + \lceil n/2\rceil - 1 + m - j + 1 + \lfloor n/2\rfloor)\lg(n) \\ &= m + (m+n)\lg(n) < (m+n)(\lg(n)+1) = (m+n)\lg(2n). \end{aligned}$$

□

3.3. **Implementação.** Para implementar o Algoritmo 3.1 com a complexidade desejada, devemos tomar cuidado com as atribuições feitas nas linhas 5 e 7. A forma como elas foram apresentadas sugere que os vetores R recebidos pelas funções sejam recebidos e copiados para o vetor R. Ao invés de fazer isso, passaremos o endereço do vetor R recursivamente e garantir

que cada chamada só complete o subvetor $R[r_c \,..\, r_t]$, referente a seu subproblema. Além disso, como explicado na Seção 1.4, a matriz A será passada como uma função e não como uma matriz.

A implementação em C++ do algoritmo apresentado, levando em conta as considerações acima, pode ser encontrada em `implementacao/FindRowMax_DC.cpp`.

3.4. **Aplicação em programação dinâmica.** Utilizaremos a técnica apresentada aqui para resolver uma adaptação do problema "Internet Trouble" da Final Brasileira da Maratona de Programação de 2016. A prova em questão pode ser encontrada no link `http://maratona.ime.usp.br/hist/2016/resultados/contest.pdf`.

Problema 3.3. *Definimos a função de custo c de cada vetor v definida* $c(v) = \sum_{i=1}^{|v|} \min(i-1, m-i)v_i$.

Sejam n e k inteiros onde $1 \leq k \leq n$ e seja $h \in \mathbb{N}^n$ um vetor, queremos encontrar uma partição P de h em até k subvetores $h_{P_1}, h_{P_2}, \ldots, h_{P_k}$ de forma que $\sum_{i=1}^{k} c(h_{P_i})$.

Podemos dar ao problema acima a interpretação do problema "Internet Trouble" citado. Temos várias cidades dispostas em uma linha e queremos escolher $k+1$ destas cidades para instalar torres de distribuição de energia de forma a minimizar o custo de alimentar todas as cidades com energia. Nesta adaptação, as cidades 1 e n são escolhas obrigatórias. Se na cidade de índice i existem h_i habitantes, o custo de tranferir energia de uma torre a d cidades de distância para esta cidade é dado por dh_i. Note que, se há uma torre na própria cidade, o custo é considerado 0.

Definimos, para todo $1 \leq i \leq j \leq n$ o custo $A[i][j]$ de escolher o subvetor $v[i \,..\, j]$ como uma das partições. Os valores com índices de linhas maiores do que índices de colunas não fazem sentido na nossa modelagem, portanto, queremos torná-los inválidos, já o problema é de minimização definimos seus valores como $+\infty$. Assim, para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$A[i][j] = \begin{cases} c(v[i \,..\, j]) & \text{, se } i < j \text{ e} \\ +\infty & \text{, c.c.} \end{cases}$$

Queremos resolver o problema com programação dinâmica. Definimos, para todo $\ell \leq k$ e $i \leq n$ com $\ell \leq n - i + 1$ o problema de encontrar o melhor particionamento do subvetor $v[i \,..\, n]$ em ℓ partes. Definimos como $E[\ell][i]$ o valor ótimo atingido neste subproblema. Se $\ell = 1$, escrevemos $E[\ell][i] = A[i][n]$ e se $1 < \ell \leq k$ escrevemos $E[\ell][i] = \min_{j=i}^{n-\ell+2} A[i][j] + E[\ell-1][j]$. Esta recorrência define um programa dinâmico que pode ser resolvido trivialmente em tempo $\mathcal{O}(kn^2)$.

Com $\ell > 1$, definindo $B_\ell[i][j] = A[i][j] + E[\ell - 1][j]$ podemos reescrever $E[\ell][i] = \min_{j=i}^{n-\ell+2} B[i][j]$ e, se definirmos $B_\ell[i][j] = +\infty$ para todo i que desrespeite $i \leq j$ ou $\ell \leq n - i + 1$, teremos $E[\ell][i] = \min_{j=1}^{n} B_\ell[i][j]$. Esta formulação reduz o problema de programação dinâmica a encontrar, para todo $1 \leq \ell \leq k$ fixo, os mínimos das linhas da matriz B_ℓ. Com isso, basta provar que B_ℓ é monótona crescente nos mínimos das linhas e aplicar a técnica da divisão e conquista para resolver o problema em tempo $\mathcal{O}(kn\log(n))$.

Vamos, primeiramente, provar que A é Monge convexa. Queremos mostrar que vale, para todo $i, j \in [n]$, a desigualdade $A[i][j] + A[i+1][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+1][j]$ e usar o Teorema 2.12 para concluir que A é Monge convexa. Se $j < i+1$, $A[i'][j] = +\infty$, logo, já que $A[i][j'] \geq 0$, a desigualdade vale. Consideramos que $i < j$. Escrevemos $l = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$ e $r = \lceil \frac{i+j}{2} \rceil$, note que $r = \lfloor \frac{i+j+1}{2} \rfloor$.

Temos $A[i][j] = \sum_{k=i}^{j} \min(k-i, j-k)h_k = \sum_{k=i}^{l}(k-i)h_k + \sum_{k=l+1}^{j}(j-k)h_k$ e $A[i][j+1] = \sum_{k=i}^{j+1} \min(k-i, j-k+1)h_k = \sum_{k=i}^{r}(k-i)h_k + \sum_{k=r+1}^{j}(j-k+1)h_k$. Se $i+j$ é par, $l = r$ e vale $A[i][j+1] = \sum_{k=i}^{l}(k-i)h_k + \sum_{k=l+1}^{j}(j-k)h_k = A[i][j] + \sum_{k=l+1}^{j} h_k$. Se $i+j+1$ é ímpar, $r - 1 = l$ e $r = \frac{i+j+1}{2}$, logo $r - i = j - r + 1$ e teremos $(k-r)h_r = (j-r+1)h_r$, o que leva a $A[i][j+1] = \sum_{k=i}^{l}(k-i)h_k + \sum_{k=l+1}^{j}(j-k+1)h_k = A[i][j] + \sum_{k=l+1}^{j} h_k$.

O parágrafo acima nos mostrou que $A[i][j+1] = A[i][j] + \sum_{k=l+1}^{j} h_k$. Com um raciocínio parecido, conseguiremos concluir $A[i+1][j+1] = A[i+1][j] + \sum_{k=r+1}^{j} h_k$. Assim, $A[i][j+1] - A[i+1][j+1] = A[i][j] + \sum_{k=l+1}^{j} h_k - A[i+1][j] - \sum_{k=r+1}^{j} h_k$. Sabemos que $l \leq r$, portanto, obtivemos $A[i][j+1] - A[i+1][j+1] \geq A[i][j] - A[i+1][j]$, isto é $A[i][j] + A[i+1][j+1] \leq A[i][j+1] + A[i+1][j]$. Provamos que A é Monge convexa.

Sabemos que A é Monge convexa, pelo Teorema 2.14 todas as matrizes B_ℓ são Monge convexas, portanto, monótonas decrescentes nos mínimos das linhas e podemos aplicar a técnica da Divisão e Conquista para encontrar seus máximos de linhas em tempo $\mathcal{O}(n)$. Já que o problema consiste em encontrar estes máximos para todas as k matrizes B_ℓ, conseguimos resolver

o problema em tempo $\mathcal{O}(kn \lg(n))$. Vale notar que a Subseção 4.6 ensina a resolver este mesmo problema em tempo $\mathcal{O}(kn)$.

4. SMAWK

Nesta seção discutiremos o algoritmo SMAWK. Ele é conhecido pela sua aplicação no problema de encontrar o vértice mais distante de cada vértice num poígono convexo em tempo linear [3]. Ao final desta seção serão explicadas esta e outras aplicações deste algoritmo.

Dada uma matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, listamos os casos de uso deste algoritmo:

- Se A é totalmente monótona convexa ou côncava nas linhas podemos encontrar os índices de mínimos e máximos das linhas em tempo $\mathcal{O}(n+m)$ e
- se A é totalmente monótona convexa ou côncava nas colunas podemos encontrar os índices de mínimos e máximos das colunas em tempo $\mathcal{O}(n+m)$.

Apresentaremos o caso onde A é totalmente monótona convexa nas linhas e estamos interessados nos índices de mínimos. É fácil manipular o algoritmo para trabalhar com os outros casos.

4.1. **Técnica Primordial.** Para facilitar a compreensão do algoritmo SMAWK, iremos apresentar uma técnica parecida com a Divisão e Conquista apresentada na Seção 3 e mostrar uma otimização desta técnica que leva ao algoritmo SMAWK.

Dada uma matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ totalmente monótona convexa por linhas, queremos encontrar o menor índice de mínimo de cada uma das linhas de A. Se para uma dada linha i onde $i > 0$ e $i < n$ conhecermos os índices l e r de mínimos das linhas $i-1$ e $i+1$, respectivamente, já que A tem os índices de mínimos das linhas crescente (por ser totalmente monótona) basta buscar o índice de mínimo da linha i no intervalo entre l e r (inclusive). Além disso, se i é a primeira linha da matriz podemos considerar $l = 1$ ou se i é a última linha da matriz podemos considerar $r = n$ sem perder a validade do fato de que basta buscar entre l e r.

Após realizar as observações acima note que, já que A é totalmente monótona, remover qualquer linha de A mantém a total monotonicidade e não altera o índice de mínimo de outra linha. Com esta observação, concluímos que podemos remover todas as linhas pares da matriz, resolver o problema recursivamente para a matriz resultante e utilizar este resultado para calcular os índices de interesse para as linhas pares da matriz. Vamos provar que encontrar estes índices de mínimos custa tempo $\mathcal{O}(m)$.

Definimos a sequência t de forma que a i-ésima linha ímpar de A busca seu máximo entre as colunas t_{i-1} e t_i, inclusive. Sabemos que $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{\lfloor n/2 \rfloor} \leq n$. Podemos escrever o tempo gasto por todas as buscas de mínimo como $\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} t_i - t_{i-1} + 1 = \mathcal{O}(n+m)$, ou seja, o trabalho feito para encontrar os mínimos das colunas ímpares dados os mínimos das colunas pares custa tempo $\mathcal{O}(n+m)$.

Agora, com uma análise similar à realizada para a técnica da Divisão e Conquista é fácil concluir que uma implementação desta técnica que consiga remover as linhas pares da matriz (e adicionar elas de volta) em tempo $\mathcal{O}(1)$ resolve o problema em tempo $\mathcal{O}((n+m)\lg(n))$, assim como a técnica da divisão e conquista.

4.2. **Reduce.** Queremos agilizar a técnica apresentada acima. Para isso, vamos adicionar uma nova hipótese. Vamos supor que a matriz A é quadrada, ou seja, $n = m$. Lembre que a cada passo, removemos as $\lfloor n/2 \rfloor$ linhas pares da matriz gerando uma nova matriz A', resolvemos o problema recursivamente para A' e usamos a solução de A' para resolver para as linhas restantes de A. O problema é que quando removemos linhas da nossa A, ela deixa de ser quadrada e passa a ser uma matriz com mais colunas do que linhas, isto é, $m \geq n$. Chamamos de ótimas as células da matriz que são mínimo de alguma linha e as colunas que contém o índice de mínimo de pelo menos uma linha. Note que uma matriz contém no máximo n colunas ótimas, pois cada linha faz com que exatamente uma célula seja ótima. Queremos remover colunas não ótimas de uma matriz A com mais colunas do que linhas fazendo com que A se torne quadrada.

Vamos desenvolver o algoritmo REDUCE a partir de um índice de linha k e de algumas invariantes:

(1) Vale $1 \leq k \leq n$,
(2) apenas colunas não ótimas foram removidas da matriz e
(3) toda célula em uma coluna de índice menor ou igual a k que possua índice de linha menor do que índice de coluna é não ótima. A Figura 4.1 representa, em azul, a célula de índice k, k e, em preto, as células que, segundo esta invariante, são não ótimas.

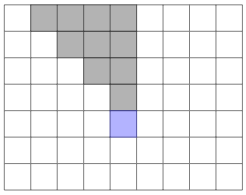

FIGURA 4.1. Invariante 3 do REDUCE.

Vamos comparar $A[k][k]$ com $A[k][k+1]$ e considerar dois casos. Em cada um dos casos, concluiremos que algumas células da matriz A são não ótimas. A Figura 4.2 mostra, hachuradas em vermelho, as células que são descobertas não ótimas quando $A[k][k] > A[k][k+1]$ e, com linhas verticais verdes, as células que são descobertas não ótimas quando $A[k][k] \leq A[k][k+1]$. Vamos provar estas implicações.

Se $A[k][k] > A[k][k+1]$, as entradas com índice de linha maior ou igual a k na coluna k são não ótimos. Primeiramente, a célula (k, k) é não ótima como consequência direta da desigualdade. Agora, suponha que existe alguma

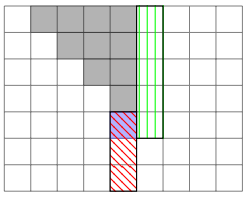

FIGURA 4.2. Casos do REDUCE.

linha $i > k$ tal que $A[i][k] \leq A[i][k+1]$. Pela total monotonicidade convexa por linhas de A, isso implica em $A[k][k] \leq A[k][k+1]$, um absurdo.

Se $A[k][k] \leq A[k][k+1]$, as células da coluna $k+1$ com índices de linha menores ou iguais a k são não ótimas. A célula $(k, k+1)$ é não ótima pela desigualdade apresentada. Supojnha que existe alguma linha $i < k$ tal que $A[i][k] > A[i][k+1]$. Pela contrapositiva da total monotonicidade, temos $A[k][k] > A[k][k+1]$, um absurdo.

Com estas observações estamos prontos para deduzir um algoritmo que elimina exatamente $m - n$ colunas de A.

Algoritmo 4.3 Algoritmo REDUCE

```
1:  função REDUCE(A)
2:      k ← 1
3:      while A tem mais linhas do que colunas do
4:          se A[k][k] > A[k][k+1] então
5:              Remove a coluna k
6:              k ← max(1, k − 1)
7:          senão
8:              se k = n então
9:                  Remove a coluna k + 1
10:             senão
11:                 k ← k + 1
12:     devolve A
```

É fácil ver que as invariantes são válidas neste algoritmo. Olhamos para o primeiro passo, $k = 1$, nenhuma coluna foi removida ainda e não há elementos com índices de linha e coluna menores do que k, logo, as Invariantes 1, 2 e 3 valem. Em todo passo do loop, $A[k][k+1]$ existe, pois $k \leq n$ e $n \leq m$. Consideramos o caso onde $A[k][k] > A[k][k+1]$, a Invariante 1 sempre se mantém trivialmente, já provamos que a coluna k é não ótima neste caso, portanto, a Invariante 2 se mantém mesmo após a remoção da coluna k. Agora, se $k = 1$, vale a 3 por vacuidade e, no caso contrário, já que a k decresce, a Invariante 3 também se mantém.

Em outro caso, valem $A[k][k] \leq A[k][k+1]$ e $k = n$. Foi provado que os elemntos de linhas menores ou iguals a k na coluna coluna $k+1$ são não ótimos, porém, isto representa toda a coluna $k+1$, assim, remover ela

mantém a Invariante 2. As outras duas invariantes se mantém trivialmente. Agora, falta considerar o caso onde $A[k][k] \leq A[k][k+1]$ e $k < n$. Neste caso, foi provado, novamente, que as células com índices menores ou iguais a k na coluna $k+1$ são inválidos. Estes são exatemente os elementos com índices de linhas menores do que índices de colunas na coluna $k+1$, o que faz com que a Invariante 3 se mantenha ao incrementarmos o valor de k. As outras duas invariantes se mantém trivialmente neste caso.

Além disso, o algoritmo, a cada passo, incrementa k ou remove uma coluna de A. Sabemos que k nunca passa de n e, já que a matriz tem m colunas, não podemos remover mais do que m colunas. Supondo que a cada remoção de coluna k seja decrementado, chegamos a uma quantidade máxima de $2m+n$ passos. Supondo que as remoções sejam feitas em tempo constante, o tempo de cada passo é constante, portanto, atingimos uma complexidade de $\mathcal{O}(m)$ operações no algoritmo REDUCE, já que $n \leq m$.

4.3. **SMAWK.** Recebemos uma matriz $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ totalmente monótona convexa por linhas. Primeiramente, vamos transformar a matriz A em uma matriz quadrada. Se A tem mais colunas do que linhas, basta aplicar o algorimto REDUCE em A para fazer com que ela fique quadrada e tenha os mesmos índices de mínimos. Se A tem mais linhas do que colunas, basta adicionar colunas sem que os mínimos ou a total monotonicidade sejam prejudicados, para isso, adicionamos, ao final da matriz, colunas $n - m$ com entradas infinitas.

Agora estamos prontos para descrever e aplicar o algoritmo SMAWK na matriz modificada. Vamos misturar as ideias apresentadas da técnica primordial, apresentada na Subseção 4.1, e do REDUCE, apresentado na Subseção 4.2. Em cada passo, removemos as linhas pares da matriz, aplicamos o algoritmo REDUCE para manter esta nova matriz quadrada e resolvemos o problema recursivamente para a nova matriz. Com a solução desta instância, descobrimos os resultados para as linhas restantes da matriz original. O Algoritmo 4.4 descreve este processo.

Algoritmo 4.4 Algoritmo SMAWK

```
1: função SMAWK(A)
2:     se A tem uma linha então
3:         A é uma matriz 1 × 1 e a resposta é trivial
4:     senão
5:         Retiramos as linhas pares de A gerando A'
6:         A'' ← REDUCE(A')
7:         SMAWK(A'')
8:         para i linha ímpar de A faça
9:             l ← 1 e r ← m
10:            se i > 1 então
11:                l ← índice de mínimo da linha i − 1
12:            se i < n então
13:                r ← índice de mínimo da linha i + 1
14:            Busca o índice de mínimo da linha i entre l e r, inclusive
```

4.4. **Análise.** O tempo gasto pelo algoritmo SMAWK depende apenas da dimensão n da matriz recebida. Escrevemos $T(n)$ a recorrência que define o tempo gasto pelo algoritmo para todo $n \geq 1$. Sabemos que $T(1) = \mathcal{O}(1)$. Com $n > 1$, a retirada de linhas pares será implementada em tempo constante, o algoritmo REDUCE é, então, aplicado a uma matriz com $\lfloor n/2 \rfloor$ linhas e n colunas, gastando tempo $\mathcal{O}(n)$ e depois os máximos das lunhas ímpares de A são achados à partir das linhas pares de A na forma descrita na Subseção 4.1, o que custa tempo $\mathcal{O}(n)$. Assim, para todo $n > 1$, $T(n) = \mathcal{O}(n) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$, o que nos leva a $T(n) = \mathcal{O}(n)$.

Se a matriz recebida tiver menos colunas do que linhas, a transformação inicial custa tempo $\mathcal{O}(n)$, no outro caso, custa tempo $\mathcal{O}(m)$, onde m é a quantidade de colunas. Assim, podemos escrever a complexidade no caso geral como $\mathcal{O}(n + m)$.

4.5. **Implementação.** Queremos encontrar uma maneira eficiente de remover as linhas pares da matriz, mas não podemos gerar explicitamente uma nova matriz. Queremos representar, a cada passo, todas as linhas que podem ser visitadas. Se k é um inteiro não negativo arbitrário, as linhas da matriz são da forma $1 + k$, as linhas visitáveis após a retirada de todas as pares são da forma $1 + 2k$, as visitáveis depois de duas remoções são da forma $1 + 4k$ e assim por diante, ou seja, depois de t remoções de linhas pares, podemos visitar as linhas da forma $1 + 2^t k$. Assim, basta guardar o inteiro $p = 2^t$ para representar todas as linhas que podem ser visitadas pelo algoritmo em um dado passo. Remover todas as linhas pares é dobrar o valor de p.

Agora, precisamos representar as colunas visitáveis em A. Já que não há uma regra fixa para a remoção de colunas, precisamos de alguma estrutura de dados que nos permita iterar pelos seus valores em ordem e remover um valor eficientemente sempre que visitado. Guardaremos uma lista duplamente ligada com todos os índices de colunas válidos, já que iteramos pelas

colunas e, quando removemos uma coluna, ela é sempre vizinha da atual ou a atual, as remoções são feitas em $\mathcal{O}(1)$. Após resolver o problema recursivamente, precisamos recuperar as informações desta lista ligada ao início da iteração para podermos descobrir os valores de mínimo nas linhas ímpares daquela matriz, para isso, basta, ao começo de cada passo, criar uma cópia da lista ligada original, o que é feito em $\mathcal{O}(n)$ e não afeta a análise do tempo do algoritmo.

No início do algoritmo, precisamos gerar a lista ligada original e, caso haja mais colunas do que linhas, aplicar uma vez o algoritmo REDUCE. Caso a quantidade de linhas seja maior do que a de colunas, precisamos criar uma nova matriz com colunas a mais do que a original. Já que nossas matrizes são representadas por funções, suponha que o algoritmo recebe uma função f e dois inteiros n, quantidade de linhas, e m, quantidade de colunas. Podemos criar uma função h definida, para todo $1 \leq i, j \leq n$ como $f(i, j)$ se $j \leq m$ e $+\infty$ caso contrário e substituir f por esta no restante do algoritmo.

A implementação em C++ do algoritmo apresentado, levando em conta as considerações acima, pode ser encontrada em `implementacao/SMAWK.cpp`.

4.6. **Aplicações.** O problema apresentado na Subseção 3.4 foi resolvido utilizando a técnica da divisão e conquista, porém, as matrizes para as quais aplicamos a técnica naquele exemplo são Monge convexas, portanto, totalmente monótonas convexas nas linhas, já que estavamos interessados em mínimos de linhas podemos aplicar o SMAWK ao invés da divisão e conquista para resolver estes problemas, conseguindo uma solução $\mathcal{O}(kn)$.

Como mencionado no início desta seção, a técnica apresentada aqui pode ser usada para resolver o problema de encontrar todos os pares de pontos mais distantes num polígono convexo em tempo $\mathcal{O}(n)$. Além disso, Aggarwal [3] mostrou a aplicação deste algoritmo em vários problemas de geometria computacional.

Referências

[1] https://www.quora.com/What-is-divide-and-conquer-optimization-in-dynamic-programming, May 2017.

[2] http://codeforces.com/blog/entry/8219, May 2017.

[3] Alok Aggarwal, Maria M. Klawe, Shlomo Moran, Peter Shor, and Robert Wilber. Geometric applications of a matrix-searching algorithm. *Algorithmica*, 2(1):195–208, 1987.

[4] Wolfgang Bein, Mordecai J. Golin, Lawrence L. Larmore, and Yan Zhang. The knuth-yao quadrangle-inequality speedup is a consequence of total monotonicity. *ACM Trans. Algorithms*, 6(1):17:1–17:22, December 2009.

[5] Zvi Galil and Kunsoo Park. Dynamic programming with convexity, concavity and sparsity. *Theoretical Computer Science*, 92(1):49 – 76, 1992.

[6] F. Frances Yao. Efficient dynamic programming using quadrangle inequalities. In *Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '80, pages 429–435, New York, NY, USA, 1980. ACM.