1. Monotonicidade, convexidade e matrizes Monge

Aqui serão apresentados e explorados os conceitos de monotonicidade, convexidade e matrizes Monge, além disso, alguns resultados referentes a estes conceitos serão demonstrados. Estes conceitos são fundamentais para o desenvolvimento do restante do trabalho.

Definição 1.1 (Vetor monótono). *Seja $a \in \mathbb{Q}^n$ um vetor, a é dito monótono quando vale uma das propriedades abaixo.*

- *Se para todo $i, j \in [n]$, $i < j \Rightarrow a_i \leq a_j$, a é dito monótono crescente (ou só crescente).*
- *Se para todo $i, j \in [n]$, $i < j \Rightarrow a_i \geq a_j$, a é dito monótono decrescente (ou só decrescente).*

Sabemos que a monotonicidade de vetores pode ser aproveitada para agilizar alguns algoritmos importantes, por exemplo, a busca binária pode ser interpretada como uma otimização da busca linear para vetores monótonos.

Definição 1.2 (Função convexa). *Seja $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma função,*

- *se para todo par de pontos $x, y \in \mathbb{Q}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$ que respeita $0 \leq \lambda \leq 1$, vale $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, g é dita convexa e*
- *se para todo par de pontos $x, y \in \mathbb{Q}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$ que respeita $0 \leq \lambda \leq 1$, vale $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, g é dita côncava.*

Proposição 1.3. *A função $g(x) = x^2$ é convexa.*

Demonstração. Sejam $x, y, \lambda \in \mathbb{Q}$ onde vale $0 \leq \lambda \leq 1$. Queremos provar $(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$, isso equivale a

$$\lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2, \text{ ou seja}$$

$$(\lambda^2 - \lambda)(x^2) + ((1-\lambda)^2 - (1-\lambda))y^2 + 2(\lambda - \lambda^2)xy \leq 0, \text{ que é}$$

$$(\lambda^2 - \lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) = (\lambda^2 - \lambda)(x+y)^2 \leq 0.$$

□

É interessante definir convexidade também em termos de vetores.

Definição 1.4 (Vetor convexo). *Seja $a \in \mathbb{Q}^n$ um vetor,*

- *se para todo $i, j, k \in [n]$, $i < j < k \Rightarrow a_j \leq \frac{(j-k)a_i + (i-j)a_k}{i-k}$, a é dito convexo e*
- *se para todo $i, j, k \in [n]$, $i < j < k \Rightarrow a_j \geq \frac{(j-k)a_i + (i-j)a_k}{i-k}$, a é dito côncavo.*

Assim como a monotonicidade, a convexidade também é usualmente explorada para agilizar algoritmos, por exemplo, se um vetor é convexo podemos definir o valor mínimo do vetor com uma busca ternária ao invés de percorrer todo o vetor.

Definição 1.5. *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, definimos quatro vetores a seguir.*

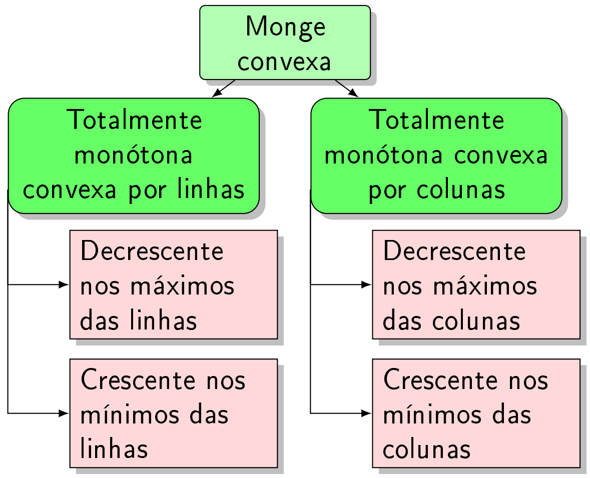

FIGURA 1.6. Comportamento dos vetores de índices ótimos em relação à convexidade.

- *O vetor de índices de máximos das linhas de A guarda na posição i o número* $\max\{j \in [m] \mid A[i][j] \geq A[i][j'] \text{ para todo } j' \in [m]\}$.
- *O vetor de índices de mínimos das linhas de A guarda na posição i o número* $\min\{j \in [m] \mid A[i][j] \leq A[i][j'] \text{ para todo } j' \in [m]\}$.
- *O vetor de índices de máximos das colunas de A guarda na posição j o número* $\max\{i \in [n] \mid A[i][j] \geq A[i'][j] \text{ para todo } i' \in [n]\}$.
- *O vetor de índices de mínimos das colunas de A guarda na posição j o número* $\min\{i \in [n] \mid A[i][j] \leq A[i'][j] \text{ para todo } i' \in [n]\}$.

Note que o máximo de uma linha (ou coluna) foi definido como o maior índice que atinge o máximo e o de mínimo foi definido como o menor índice que atinge o mínimo. Esta escolha foi feita para simplificar o Lema 1.9.

Dada uma matriz, encontrar estes vetores é um problema central para este trabalho. Neste momento é interessante classificar algumas matrizes de acordo com propriedades que vão nos ajudar a calcular os vetores de mínimos e máximos de maneira especialmente eficiente.

A Figura 1.6 resume as relações de implicação da classificação que será realizada. Os conceitos ilustrados nela serão apresentados a seguir.

Definição 1.7 (Matriz monótona)**.** *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ uma matriz. Se A tiver o vetor de índices de máximos das linhas monótono, A é dita monótona nos máximos das linhas.*

Valem também as definições análogas para mínimos ou colunas e pode-se especificar monotonicidade crescente ou decrescente.

Definição 1.8 (Matriz totalmente monótona)**.** *Seja $A \in \mathbb{Q}^{n\times m}$ uma matriz.*

- *Se $A[i'][j] \leq A[i'][j']$ implica $A[i][j] \leq A[i][j']$ para todo $1 \leq i < i' \leq n$ e $1 \leq j < j' \leq m$, A é monótona convexa nas linhas.*

- *Se* $A[i][j'] \leq A[i'][j']$ *implica* $A[i][j] \leq A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$*,* A *é monótona convexa nas colunas.*
- *Se* $A[i'][j] > A[i'][j']$ *implica* $A[i][j] > A[i][j']$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$*,* A *é monótona côncava nas linhas.*
- *Se* $A[i][j'] > A[i'][j']$ *implica* $A[i][j] > A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$*,* A *é monótona côncava nas colunas.*

O motivo do uso dos termos "convexa" e "côncava" em relação a matrizes durante o texto são justificados pelo Teorema 1.15. Note que se uma matriz é totalmente monótona, todas as suas submatrizes são totalmente monótonas no mesmo sentido.

Lema 1.9. *Se* $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ *é uma matriz totalmente monótona convexa nas linhas, toda submatriz de* A *é monótona decrescente nos máximos das linhas e monótona crescente nos mínimos das linhas.*

Se A *é totalmente monótona côncava nas linhas, toda submatriz de* A *é monótona decrescente nos mínimos das linhas e monótona crescente nos máximos das linhas.*

As afirmações valem identicamente em termos de colunas.

Demonstração. Considere uma matriz A totalmente monótona convexa nas linhas. Sejam i e i' índices de linhas de A onde $i < i'$. Chamamos de j o índice de máximo da linha i e de j' o índice de máximo da linha i'. Queremos provar que os máximos são decrescentes, portanto, vamos supor por absurdo que $j < j'$. Com isso, teremos $A[i][j'] < A[i][j]$ e $A[i'][j] \leq A[i'][j']$. Porém, já que A é monótona convexa nas linhas, a segunda desigualdade implica em $A[i][j] \leq A[i][j']$, que contradiz a primeira. Portanto, os índices de máximos são decrescentes.

Agora, considere novamente dois índices i e i' quaisquer de linhas de A onde $i < i'$. Denotamos por j o índice de mínimo da linha i' e por j' o índice de mínimo da linha i (note e a inversão no uso de $'$). Vamos supor por absurdo que $j < j'$ e teremos $A[i'][j] \leq A[i'][j']$ e $A[i][j'] < A[i][j]$. E, novamente, usando o fato de que A é monótona convexa nas linhas, obtivemos uma contradição.

Finalmente, se A' é uma submatriz de A, então A' é totalmente monótona convexa nas linhas, portanto monótona crescente nos máximos das linhas e monótona decrescente nos mínimos das linhas.

As demonstrações no caso côncavo e nos casos relacionados a colunas são análogas. $\square$

Definição 1.10 (Monge Convexidade)**.** *Seja* $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$*.*

(1) *Se vale* $A[i][j] + A[i'][j'] \leq A[i][j'] + A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$*,* A *é dita Monge convexa.*

(2) *Se vale* $A[i][j] + A[i'][j'] \geq A[i][j'] + A[i'][j]$ *para todo* $1 \leq i < i' \leq n$ *e* $1 \leq j < j' \leq m$*,* A *é dita Monge côncava.*

A desigualdade que define as matrizes Monge é conhecida também por "Condição de Monge" ou "Desigualdade Quadrangular"[1].

Lema 1.11. *Se A é Monge convexa, A é totalmente monótona convexa tanto nas linhas quanto nas colunas.*

Se A é Monge côncava, A é totalmente monótona côncava tanto nas linhas quanto nas colunas.

Demonstração. Seja A uma matriz Monge convexa. Suponha que vale, para certos $i, i' \in [n]$ e $j, j' \in [m]$ onde $i < i'$ e $j < j'$, $A[i'][j] \leq A[i'][j']$, então, somamos esta desigualdade à definição de Monge convexa e obtemos $A[i][j] \leq A[i][j']$, ou seja, A é totalmente monótona convexa nas linhas.

Por outro lado, se vale, para certos $i, i' \in [n]$ e $j, j' \in [m]$ com $i < i'$ e $j < j'$, $A[i][j'] \leq A[i'][j']$, somamos esta desigualdade à definição de Monge convexa e obtemos $A[i][j] \leq A[i'][j]$, assim, A é totalmente monótona convexa nas colunas.

A prova para o caso côncavo é análoga. □

As matrizes Monge são usadas para resolver uma série de problemas que serão explorados aqui. A condição de Monge é a mais forte apresentada aqui. Alguns dos algoritmos apresentados não dependem dela, apenas da monotonicidade ou total monotonicidade, ainda assim, ela leva a resultados úteis que nos permitem provar a pertinência dos algoritmos a alguns problemas, mesmo que o algoritmo usado não se utilize da condição diretamente.

Como consequência desta utilidade, iremos discutir um problema que será resolvido com um algoritmo apresentado somente na Seção **??**, o algoritmo SMAWK. Ele não será explicado neste momento, utilizamos ele como caixa preta. Isto é motivado pelo fato de que o pensamento apresentado aqui não é útil somente para o algoritmo SMAWK, ele é útil também em vários dos outros momentos deste trabalho.

Problema 1.12. *Dados dois inteiros k e n com $k \leq n$, um vetor de pesos $a \in \mathbb{Q}_+^n$ e uma matriz de custos $A[i][j] = \left(\sum_{k=i+1}^{j} a_k\right)^2$. Queremos particionar o vetor a em k partes não-vazias de forma a maximizar a soma dos custos das partes, isto é, queremos escolher um vetor $r \in \mathbb{N}^{[0\,..\,k]}$ de índices tal que $1 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{k-1} < r_k = n$ de forma que $\sum_{i=1}^{k} A[r_{i-1}][r_i]$ seja máximo.*

Podemos resolver este problema com programação dinâmica. Vamos preencher a matriz $E \in \mathbb{Q}^{k \times n}$ definida recursivamente para todo $k' \in [k]$ e $n' \in [n]$:

$$E[k'][n'] = \begin{cases} A[1][n'] & \text{, se } k' = 1, \\ \max_{i=k'-1}^{n'-1} E[k'-1][i] + A[i][n'] & \text{, se } k' \leq n', \\ \text{indefinida} & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

A recorrência acima nos dá em cada entrada $E[k'][n']$ o maior valor possível alcançado particionando o vetor $a[1\,..\,n']$ em k' partes não vazias. Podemos preencher esta tabela trivialmente em tempo $O(kn^2)$, basta iterarar primeiro pelos índices k' crescentemente. O caso onde $k' = 1$ é resolvido trivialmente e os casos maiores podem ser resolvidos, um por vez, testando todas as possibilidades de máximo para todo n'.

Fixamos um $k' > 1$. Vamos utilizar o algoritmo SMAWK para agilizar a solução deste subproblema. Este algoritmo é capaz de resolver o Problema 1.13 (descrito abaixo) em tempo $O(n)$. Precisamos provar, então, que o subproblema resolvido para cada k' é equivalente ao Problema 1.13.

Problema 1.13. *Dada uma matriz $A \in \mathbb{A}^{n \times n}$ totalmente monótona convexa nas colunas, encontrar o vetor de máximos das colunas de A.*

Definimos a matriz $B_{k'}$ para todo $i, n' \in \mathbb{N}$ onde $k' - 1 \leq i < n' \leq n$ como $B_{k'}[i][n'] = E[k'-1][i] + A[i][n']$. Note que já que k' é fixo, já descobrimos os valores da entrada da matriz E na linha $k' - 1$. Encontrar o índice i que atinge o máximo em $E[k'][n']$ é exatamente encontrar o índice de máximo da coluna n' na matriz $B_{k'}$, formalmente,

$$\max_{i=k'-1}^{n'-1} B_{k'}[i][n'] = \max_{i=k'-1}^{n'-1} E[k'-1][i] + A[i][n'].$$

Portanto, basta mostrar que $B_{k'}$ é monótona convexa nas colunas. Para isso, vamos mostrar, com a ajuda dos resultados abaixo, que $B_{k'}$ é Monge convexa.

Lema 1.14. *Sejam $A, B \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ matrizes e $c \in \mathbb{Q}^n$ um vetor tais que para todo $i \in [n]$ e $j \in [m]$, $B[i][j] = A[i][j] + c[i]$. Se A é Monge convexa, B é Monge convexa.*

O mesmo resultado vale se $c \in \mathbb{Q}^m$ e $B[i][j] = A[i][j] + c[j]$.

Demonstração. Sejam A, B e b definidos como no enunciado do teorema. Suponha que A é Monge convexa. Vale, para quaisquer $1 \leq i < i' \leq n$ e $1 \leq j < j' \leq m$, $A[i][j] + A[i'][j'] \leq A[i'][j] + A[i][j']$, logo, vale $A[i][j] + b[i] + A[i'][j'] + b[i'] \leq A[i'][j] + b[i'] + A[i][j'] + b[i]$ que é $B[i][j] + B[i'][j'] \leq B[i'][j] + B[i][j']$. A prova para o caso onde $c \in \mathbb{Q}^m$ e $B[i][j] = A[i][j] + c[j]$ é análoga. $\square$

Com este resultado, é fácil ver que, desde que A seja Monge convexa, B_1 será Monge convexa e a Monge convexidade será mantida para todo $B_{k'}$ com $1 \leq k' \leq k$. O teorema a seguir nos ajuda a mostrar que A é Monge convexa.

Teorema 1.15. *Sejam $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ uma matriz, $w \in \mathbb{Q}_+^n$ um vetor e $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma fução tais que para todo $i, j \in [n]$ vale $A[i][j] = g\left(\sum_{k=1}^{j} w_k - \sum_{k=1}^{i} w_k\right)$. Se g é convexa, A é Monge convexa. Similarmente, se g é côncava, A é Monge côncava.*

Antes de apresentar uma prova para o teorema acima, vamos mostrar a utilidade dele no nosso problema atual, o que deve ajudar na compreensão de seu enunciado.

Queremos mostrar que A é Monge convexa, porém, para um certo vetor $a \in \mathbb{Q}_+^n$, $A[i][j] = \left(\sum_{k=(i+1)}^{j} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{j} a_k - \sum_{k=1}^{i} a_k\right)^2$, por definição. Assim, precisamos mostrar apenas que a função $g(x) = x^2$ é convexa, o que segue da Proposição 1.3. Agora, como explicado acima, todas as matrizes $B_{k'}$ são Monge convexas e podemos aplicar o algoritmo SMAWK para todo k', resolvendo o Problema 1.12 em tempo $O(kn)$.

Agora, nos resta provar o Teorema 1.15.

Demonstração. Sejam A e g quaisquer que respeitem as condições do enunciado. Sejam ainda $i, i', j, j' \in [n]$ onde $i < i'$ e $j < j'$. Escrevemos $a = \sum_{k=1}^{i'} w_k - \sum_{k=1}^{i} w_k$, $b = \sum_{k=1}^{j'} w_k - \sum_{k=1}^{j} w_k$ e $z = \sum_{k=1}^{j} w_k - \sum_{k=1}^{i'} w_k$. Desta forma, temos $g(z) = A[i'][j]$, $g(z + a + b) = A[i][j']$, $g(z + a) = A[i][j]$ e $g(z+b) = A[i'][j']$, portanto, $g(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$ se e somente se $A[i][j] + A[i'][j'] \leq A[i][j'] + A[i'][j]$ (A é Monge convexa).

Com isso, vamos provar que se g é convexa, A é Monge convexa. Sejam $i, i', j, j' \in [n]$ onde $i < i'$ e $j < j'$. Definimos a, b e z como acima. Sabemos $0 \leq a$ e $0 \leq b$. Consideramos o caso onde $0 < a \leq b$. Temos $0 < a \leq b < a + b$, ou seja, $z < z + a \leq z + b < z + a + b$. Definimos $\lambda = \frac{a}{a+b}$. Já que $z + a = \lambda z + (1 - \lambda)(z + a + b)$ e $z + b = (1 - \lambda)z + \lambda(z + a + b)$, por convexidade de g, obtemos $g(z + a) \leq \lambda g(z) + (1 - \lambda)g(z + a + b)$ e $g(z+b) \leq \lambda g(z+a+b)+(1-\lambda)g(z)$. Somando, obtemos $g(z+a)+g(z+b) \leq g(z) + g(z + a + b)$.

Se considerarmos o caso onde $0 < b \leq a$, seguimos o mesmo raciocínio e obtemos, novamente, $g(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$. Falta considerar o caso onde $0 = a = b$, neste caso, $g(z) = g(z+a) = g(z+b) = g(z+a+b)$ e vale $(z+a)+g(z+b) \leq g(z)+g(z+a+b)$. Portanto, A é Monge convexa. $\square$

Referências

[1] F. Frances Yao. Efficient dynamic programming using quadrangle inequalities. In *Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '80, pages 429–435, New York, NY, USA, 1980. ACM.