Lista 3

Victor Sena Molero - 8941317

March 27, 2016

Ex 11. Prove que se G é uma árvore tal que $\Delta(G) \geq k$, então G tem pelo menos k folhas.

Prova. Seja G uma árvore tal que $\Delta(G) \geq k$ e seja u um vértice de grau máximo em G. Definimos $h = g_G(u) = \Delta(G) \geq k$.

Se $h = 0$, $k = 0$. Já que toda árvore tem pelo menos uma folha, toda árvore tem pelo menos zero folhas.

Se $h > 0$, temos que u tem h vizinhos. Seja x um vizinho de u. Vou provar que existe um caminho S_u de u para uma folha x' qualquer que tem como primeira aresta a $\{u, x\}$. Para encontrar este caminho basta pegar o maior caminho que começa em S_x e tem como primeira aresta $\{u, x\}$, agora, se o caminho não termina em uma folha, é possível extendê-lo, pois o ultimo vértice tem mais de uma aresta e só uma delas pertence ao caminho (já que ele é uma folha), portanto, só um dos vértices vizinhos pertencem ao caminho, se não, seria possível achar um ciclo em G. Ou seja, o maior caminho que começa em u e tem como primeira aresta $\{u, x\}$ termina em uma folha.

Agora escolhemos dois vértices x e y vizinhos de u, vamos provar que se os caminhos S_x e S_y têm mais de um vértice em comum, então $x = y$. Basta assumir que S_x e S_y têm mais de um vértice em comum e, agora, assumir, por absurdo que x e y são distintos. S_x e S_y começam em u e tem mais um vértice z em comum. Sabemos que a primeira aresta de S_x é $\{u, x\}$ e a primeira de S_y é $\{u, y\}$. Logo, z não vem está entre u e x no caminho S_x e nem entre u e y no caminho S_y. Assim, existe um caminho de u para z que tem como primeira aresta $\{u, x\}$ e um caminho de u para z que tem como primeira aresta $\{u, y\}$, logo, existem dois caminhos distintos de u para z, um absurdo.

Logo, cada vizinho de u gera um caminho para uma folha distinta. Já que existem h vizinhos de u, encontramos h folhas distintas em G. Então, G tem pelo menos h folhas, e $h \geq k$, logo, G tem pelo menos k folhas. □

Ex 12. Prove que um grafo conexo G possui pelo menos $|A(G)| - |V(G)| + 1$ circuitos.

Prova. Seja G um grafo conexo com $|V(G)|$ vértices. E seja $|C(G)|$ a quantidade de ciclos de G.

Se $|A(G)| = |V(G)| - 1$, então G é uma árvore. Logo, $|C(G)| = 0$, ou seja, $|C(G)| \geq |A(G)| - |V(G)| + 1 = 0$.

Assuma que, com $|A(G)| = k \geq |V(G)| - 1$, $|C(G)| \geq |A(G)| - |V(G)| + 1$. Se $|A(G)| = k + 1$, então, G é conexo e não é uma árvore. Logo, existe pelo menos uma aresta de G que não é uma ponte. Se removermos uma aresta a qualquer de G que não seja uma ponte, geramos o grafo G'. Já que a não é uma ponte em G, existe um ciclo em G que passa por a e, já que a não está em G' este ciclo não existe em G', além disso, $G' \subseteq G$, logo, todo ciclo de G' é também um ciclo de G, portanto, $|C(G')| < |C(G)|$.

Além disso, G' é um grafo conexo com k arestas, portanto, vale a hipótese indutiva e $|C(G')| \geq |A(G')| - |V(G')| + 1 = |A(G)| - |V(G)|$. Ou seja $|C(G)| > |C(G')| \geq |A(G)| -$

$|V(G)|$, logo, $|C(G)| \geq |A(G)| - |V(G)| + 1$.

Ou seja, por indução, $\forall G$ conexo, $|C(G)| \geq |A(G)| - |V(G)| + 1$. $\square$

Ex 13. Existem grafos simples com exatamente duas árvores geradoras distintas? Justifique.

Resposta. Não existem.

Seja G um grafo simples. Vamos separar em três casos.

Se $|A(G)| < |V(G)| - 1$ o grafo é desconexo e não possui nenhuma árvore geradora.

Se $|A(G)| = |V(G)| - 1$ o grafo é uma árvore, logo, possui apenas uma árvore geradora.

Se $|A(G)| > |V(G)| - 1$ o grafo possúi pelo menos um ciclo. Vou provar, por indução, que é possível remover arestas de G mantendo ele conexo até que ele tenha exatamente $|V(G)|$.

Se $|A(G)| = |V(G)|$, então basta não remover nenhuma aresta.

Assumindo que vale se $|A(G)| = k \geq |V(G)|$, se $|A(G)| = k+1$, G tem pelo menos um ciclo, logo, tem pelo menos uma aresta que não é ponte, basta remover ela, o grafo continuará conexo e terá k arestas, vale a hipótese de indução, logo é possível continuar removendo arestas até que $|A(G)| = |V(G)|$.

Agora, aplicamos o que acabamos de provar para obter um grafo G' com os mesmos vértices de G, mas com exatamente $|V(G)|$ arestas tais que $A(G') \subseteq A(G)$. Uma árvore geradora de G' é uma árvore geradora de G, pois é um conjunto de arestas que pertencem a G, tornam G conexo e formam uma árvore.

Porém, G' tem um ciclo, já que todo ciclo tem pelo menos 3 arestas, existem pelo menos 3 arestas que podemos remover de G' para criar uma árvore, logo, G' tem pelo menos 3 árvores geradoras, portanto G tem pelo menos 3 árvores geradoras.

Assim, se conclui que nenhum grafo G simples tem exatamente 2 árvores geradoras. $\square$

Ex 14. Prove que todo grafo conexo G, simples e não-trivial, tem uma árvore geradora T tal que $G - A(T)$ é desconexo.

Prova. Vou primeiro provar que, seja G um grafo conexo, simples e não-trivial, se existe um particionamento em vértices de G com uma partição H tal que, para toda outra partição P existe uma aresta entre H e P e tal que cada partição possui uma árvore geradora, então existe uma árvore geradora de G que contém as árvores geradoras de cada uma das partições. Vou provar com indução na quantidade de partições. É fácil ver que existe pelo menos uma partição, já que é necessário que exista a partição H em questão. Logo, seja n é a quantidade de partições:

Se $n = 1$ temos apenas uma partição, logo, ela possui todos os vértices de G e já ela tem uma árvore geradora, G tem uma árvore geradora que contém as árvores geradoras de todas as partições.

Suponha que com $n = k \geq 1$ a afirmação seja verdadeira. Se $n = k + 1$, podemos escolher uma partição P qualquer do grafo que não seja H e remover todos vértices dela do grafo, gerando assim um grafo G' com um particionamento em vértices de k partições tal que cada uma delas possui uma árvore geradora e existe uma partição H tal que exista, em G', uma aresta entre H e cada uma das partições restantes. Vale, então, a hipótese de indução e G' tem uma árvore geradora que contém as árvores geradoras de cada uma das suas partições. Agora, basta adicionar a esta árvore a árvore geradora e P e uma aresta entre P e H para formar uma árvore geradora de G que contém as árvores de cada uma das partições.

Agora, vamos à prova principal. Seja G um grafo conexo, simples e não-trivial. Seja u um vértice qualquer de G. Se G é não trivial, $g_G(u) > 0$. Assim, u tem pelo menos um vizinho. Podemos escolher o subgrafo induzido de H de G que contém somente u e todos os vizinhos de u. O conjunto de todas as arestas de u forma uma árvore geradora T_H de H.

Seja $G' = G \setminus H$, G' não é necessáriamente conexo. Cada uma das componentes de G' possui uma árvore geradora. Cada uma das componentes K de G' possui uma árvore geradora e existe, em G, pelo menos uma aresta que leva de H em K. Ou seja, temos um particionamento em vértices de G onde cada partição tem uma árvore geradora e onde temos uma partição H tal que existe, em G, pelo menos uma aresta entre cada um das outras partições e H.

Ou seja, como provamos anteriormente, G tem uma árvore geradora T que contém a árvore geradora T_H de H. Já que T_H contém todas as arestas de u, remover as arestas dela desconecta o grafo, pois isola o vértice u. Então remover as arestas de T de G desconecta G, logo, $G - A(T)$ é desconexo. Então, qualquer grafo G conexo, simples e não-trivial tem uma árvore geradora T tal que $G - A(T)$ é desconexo. $\square$

Ex 15. Seja G um grafo conexo, T_1 e T_2 árvores geradoras distintas de G, seja α uma aresta de T_1. Prove que existe uma aresta β em T_2 tal que $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G.

Prova. Seja G um grafo conexo e T_1 uma árvore geradora de G. Seja também α uma aresta qualquer de T_1.

Se removermos α de T_1 temos duas árvores disjuntas P e Q. Agora tomamos T_2 uma árvore geradora de G distinta de T_1. Já que T_2 é uma árvore geradora de G existe um caminho entre todo par de vértices de G em T_2. Podemos então escolher um caminho S em T_2 entre um vértice qualquer de P e um vértice qualquer de Q.

Escolhemos, então, o ultimo vértice em S que pertence a P sabemos que o vértice seguinte pertence a Q, pois todo vértice do caminho pertence ou a P ou a Q. Logo, temos uma aresta em T_2 que leva um vértice de P a um vértice de Q. Basta chamá-la de β e adicionar a $T_1 - \alpha$ que teremos uma árvore que contém todos os vértices de G, ou seja, $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G. $\square$