Lista 3

Victor Sena Molero - 8941317

March 15, 2016

Ex Bônus-1. Prove que toda árvore equi-bicolorida tem pelo menos uma folha de cada cor.

Proof. Dada uma árvore G equi-bicolorida com as cores azul e vermelha. Sabemos que G tem pelo menos duas folhas, pois é uma árvore. Seja u uma folha de G, podemos assumir, sem perda de generalidade, que u é vermelha.

Vamos definir uma função $p : V(G) \setminus u \to V(G)$ na árvore G. Esta função vai denotar o pai de um vértice da árvore em relação ao vértice u da seguinte maneira: Se temos dois vértices, v e w tais que $p(v) = w$, então, w é vértice que antecede v no caminho de u até v. Natualmente, esta definição é inválida para o vértice u, já que não há um antecessor de u no caminho de u para u. A definição é única para todo vértice, pois, já que G é uma árvore, os caminhos de u para qualquer vértice v são únicos.

Além disso, se dois vértices v e w quaisquer são adjacentes, $p(v) = w$ ou $p(w) = v$. Vou provar isto agora. Primeiro, se v é adjacente a w, $v \neq w$, pois o grafo é simples. Agora podemos separar o problema em dois casos:

1. Se $v = u$ ou $w = u$, vamos assumir, s.p.g. que $v = u$, logo, $w \neq u$, mas, se w é adjacente a u, existe um caminho que vai de u até w composto por apenas uma aresta, entre u e w. Logo, u é o antecessor de w no caminho, então $p(w) = u = v$. Se $w = u$, com o mesmo argumento, temos $p(v) = u = w$.

2. Se $v \neq u$ e $w \neq u$, e podemos separar em mais dois casos

   (a) Se v aparece no caminho S entre u e w. Então existe um caminho de u até v que não passa por w (basta pegar um prefixo de S) e se concatenarmos este caminho à aresta que vai de v a w temos um caminho até w onde v é o antecessor de w, logo, $p(w) = v$.

   (b) Se v não aparece no caminho S entre u e w. Então temos um caminho de u até w que não passa por v e podemos concantenar a aresta de v para w a este caminho e obter um caminho entre u e v onde w é antecessor de v, logo, $p(v) = w$.

Assim, temos que, em todo caso possível, ou $p(v) = w$ ou $p(w) = v$.

Agora, vou provar que se v não é uma folha, existe algum vértice w tal que $p(w) = v$. Isto é verdade pois, já que v é uma folha, existem dois vértices distintos adjacentes a v, pelo menos, já que só um deles pode ser $p(v)$, todos os que não forem $p(v)$ devem ser w tais que $p(w) = v$. Já que existe mais de um adjacente, existe pelo menos um w. Ou seja, $\forall v \in V(G)$, ou v é folha ou $\exists w \in V(G) : p(w) = v$.

Se definirmos o conjunto de vértices azuis como C_A e o de vermelhos como C_V, a função p está bem definida para todo $v \in C_V \setminus u$. Além disso, já que $\forall v$, $p(v)$ é adjacente a v, temos que, se $v \in C_V$, $p(v) \in C_A$. Logo, podemos definir uma restrição da função p sobre o conjunto $C_V \setminus u$ e chamá-la q. Assim, a função $q : C_V \setminus u \to C_A$ se comporta exatamente igual à p em todo seu domínio.

Agora, vamos assumir, por absurdo, que não existem folhas azuis. Então, temos que, $\forall v \in C_A, \exists w \in V(G) : p(w) = v$. Além disso, sabemos que se $p(w) \in C_A, w \in C_V \setminus u$ e que se $w \in C_V \setminus u, p(w) = q(w)$. Logo, podemos reescrever a afirmação acima como

$$\forall v \in C_A, \exists w \in C_V \setminus u : q(w) = v$$

O que quer dizer, exatamente, que q é uma sobrejeção de $C_V \setminus u$ em C_A, ou seja, $|C_V \setminus u| \geq |C_A|$ e já que $u \in C_V$, $C_V \setminus u \subset C_V$, logo $|C_V| > |C_V \setminus u| \geq |C_A|$. Ou seja, $|C_V| > |C_A|$ e, já que G é equibicolorido, $|C_V| = |C_A|$, um absurdo.

Assim, existe pelo menos uma folha azul em G.

$\square$