Lista 1

Victor Sena Molero - 8941317

February 23, 2016

Ex 1.a. $3^n \neq O(2^n)$

Proof. Suponha que 3^n é $O(2^n)$, logo,

$$\exists c, n_0 : 3^n \leq c2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$$

mas, já que $\lim_{n \to \infty}(3/2)^n$ para todo n natural, temos que

$$\exists m \in \mathbb{N}, m \geq n_0 : (3/2)^m > c$$

logo,

$$\exists m \in \mathbb{N}, m \geq n_0 : 3^m > c2^m$$

um absurdo, ou seja, 3^n não é $O(2^n)$ □

Ex 1.b. $\log_{10} n = O(\lg n)$

Proof.

$$\log_{10} n / \log_{10} 2 = \lg n$$

$$\log_{10} n = \log_{10} 2 * \lg n$$

logo, com $c = \log_{10} 2$ e $n_0 = 1$ temos

$$\log_{10} n \leq c \lg n \forall n \geq n_0$$

□

Ex 1.c. $\lg n = O(\log_{10} n)$

Proof.

$$\lg n / \lg 10 = \log_{10} n$$

$$\lg n = \lg 10 * \log_{10} n$$

logo, com $c = \lg 10$ e $n_0 = 1$ temos

$$\lg n \leq c \log_{10} n \forall n \geq n_0$$

□

Ex 4.a.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$

Proof. $f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$
Vamos provar, primeiramente $f(n) = O(g(n))$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \leq \sum_{i=1}^{n} n^k = n * n^k = n^{k+1}$$

agora, $f(n) = \Omega(g(n))$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} (n/2)^k \geq \lfloor n/2 \rfloor (n/2)^k \geq (n/2-1)(n/2)^k$$

para um $n \geq 4$, temos que $n/2 - 1 \geq n/4$, então

$$(n/2-1)(n/2)^k \geq (n/4)(n/2)^k = n^{k+1}/2^{k+2}$$

□

Ex 4.b.

$$\sum_{i=1}^{n} i/2^i \leq 2$$

Proof.

$$\sum_{i=1}^{n} i/2^i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} 1/2^i$$

Já que $\sum_{i=k}^{n} 1/2^i$ é uma soma de P.G. com razão $1/2$ e início em $1/2^k$

$$\sum_{i=k}^{n} 1/2^i = 1/2^k(1-1/2^n)/(1/2) = 1/2^{k-1}(1-1/2^n) = 1/2^{k-1} - 1/2^{n+k-1} \leq 1/2^{k-1}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} 1/2^i \leq \sum_{k=1}^{n} 1/2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 1/2^k \leq 1/2^{-1} = 2$$

□