Problema 1

Sejam $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. Prove que os conjuntos

$$\{X \in \mathbb{S}^n_+ \mid \langle \bar{S}, X\rangle \leq \alpha\} \text{ e } \{X \in \mathbb{S}^n_+ \mid \langle \bar{S}, X\rangle = \alpha\}$$

são não-vazios, convexos e compactos. Mostre ainda que o interior do primeiro conjunto não é vazio.

Resposta. Vamos chamar o primeiro conjunto de A e o segundo de B, isto é

$$A = \{X \in \mathbb{S}^n_+ \mid \langle \bar{S}, X\rangle \leq \alpha\} \text{ e}$$

$$B = \{X \in \mathbb{S}^n_+ \mid \langle \bar{S}, X\rangle = \alpha\}.$$

Agora, devemos provar algumas propriedades sobre A e B.

Proposição 1.1. *A e B são não-vazios.*

Demonstração. Já que $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$, $\bar{S} > 0$, logo $\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle \neq 0$. Escolhemos $\beta = \dfrac{\alpha}{\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle}$. Já que $\alpha > 0$ e $\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle > 0$, $\beta > 0$. Agora, escolhemos $\bar{X} = \beta\bar{S}$. Temos que para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^T\bar{X}h = h^T\beta\bar{S}h = \beta h^T\bar{S}h > 0,$$

portanto, $\bar{X} \in \mathbb{S}^n_{++} \subseteq \mathbb{S}^n_+$. Além disso, $\langle \bar{S}, \bar{X}\rangle = \beta\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle = \alpha$. Logo, $\bar{X} \in A$ e $\bar{X} \in B$. Portanto, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. □

Proposição 1.2. *A e B são convexos.*

Demonstração. Agora, queremos mostrar que A e B são convexos. Sejam $X, Y \in \mathbb{S}^n_+$ quaisquer escolhemos $Z = (X + Y)/2$. Temos que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^TZh = h^T(X + Y)h/2 = (h^TXh + h^TYh)/2 > 0,$$

então $Z \in \mathbb{S}^n_+$, além disso,

$$\langle Z, \bar{S}\rangle = (\langle X, \bar{S}\rangle + \langle Y, \bar{S}\rangle)/2.$$

Assim, se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X, \bar{S}\rangle = \langle Y, \bar{S}\rangle = \beta$, então $\langle Z, \bar{S}\rangle = \beta$, ou seja, B é convexo. Além disso, se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X, \bar{S}\rangle \leq \beta$ e $\langle Y, \bar{S}\rangle \leq \beta$, então, $\langle Z, \bar{S}\rangle \leq \beta$, ou seja, A é convexo. □

Proposição 1.3. *A e B são limitados.*

Demonstração. Seja $\bar{X} \in A$. Sabemos que A é limitado se e somente se existe $\hat{\theta} \in \mathbb{R}_+$ tal que $\bar{X} + \theta\mathbb{B} \not\subseteq A$ para todo $\theta \geq \hat{\theta}$. Seja $T \in \mathbb{B}$, temos dois casos:
Se $\langle T, \bar{S}\rangle > 0$, basta escolher $\bar{\theta} = \dfrac{\alpha - \langle \bar{X}, \bar{S}\rangle}{\langle T, \bar{S}\rangle} + 1$. Já que $\alpha \geq \langle \bar{X}, \bar{S}\rangle$, $\theta\hat{\geq}1$, logo, $\hat{\theta} \in \mathbb{R}_+$ e, para todo $\theta \geq \hat{\theta}$,

$$\langle \bar{X} + \theta T, \bar{S}\rangle = \langle \bar{X}, \bar{S}\rangle + \theta\langle T, \bar{S}\rangle \geq \langle \bar{X}, \bar{S}\rangle + \alpha - \langle \bar{X}, \bar{S}\rangle + \langle T, \bar{S}\rangle = \alpha + \langle T, \bar{S}\rangle > \alpha$$

Caso contrário, pelo **Teo. 20**, já que $\bar{X} \in \mathbb{S}^n_+$, $T \notin \mathbb{S}^n_+ \setminus 0$. Logo, existe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$h^TTh < 0, \text{ portanto,}$$

se $\hat{\theta} = -\dfrac{h^T\bar{X}h}{h^TTh} + 1$, $\hat{\theta} \in \mathbb{R}_+$ e, para todo $\theta \geq \hat{\theta}$,

$$h^T(\bar{X} + \theta T)h = h^T\bar{X}h + \theta h^TTh \leq 0 + h^TTh < 0,$$

então $\bar{X} + \theta T \notin \mathbb{S}^n_+$, logo, $\bar{X} + \theta T \notin A$. Basta, então, escolher $\hat{\theta} = \max\limits_{T\in\mathbb{B}}\left(\max\left(\dfrac{\alpha - \langle \bar{X}, \bar{S}\rangle}{\langle T, \bar{S}\rangle}, -\dfrac{h^T\bar{X}h}{h^TTh}\right)\right)$ e, assim, mostramos que A é limitado. Já que $B \subseteq A$, B também é limitado. □

Proposição 1.4. *A e B são fechados.*

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{S}^n_+$ é fechado. $C = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S}\rangle \leq \alpha\}$ é um semiespaço, logo, é fechado. $D = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S}\rangle = \alpha\}$ é um hiperplano, logo, é fechado. $A = \mathbb{S}^n_+ \cap C$ e $B = \mathbb{S}^n_+ \cap D$, ou seja, tanto A quanto B são fechados. □

Proposição 1.5. *A tem interior não vazio.*

Demonstração. Seja $X = \dfrac{\alpha \bar{S}}{2\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle} \in A$, $X \in \mathbb{S}_{++}$, pois $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$ e $\dfrac{\alpha}{2\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle}$.Já que $\mathbb{S}^n_{++}$ é aberto, existe um $\bar{\theta} \in \mathbb{R}_+$ tal que $X + \theta T \in \mathbb{S}^n_{++}$ para todo $T \in \mathbb{B}$ e θ que respeite $\bar{\theta} \geq \theta \in \mathbb{R}_+$. Escolhemos agora $\hat{\theta} = \min(\bar{\theta}, \dfrac{\alpha}{4\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle})$. Temos que, para todo $T \in \mathbb{B}$ e $\theta \leq \hat{\theta}$,

$$\langle X + \theta T, \bar{S}\rangle = \langle X + \bar{S}\rangle + \theta\langle T, \bar{S}\rangle = \alpha/2 + \theta\langle T, \bar{S}\rangle,$$

por Cachy-Schwartz (**Teo. 37**) e pela definição de θ, respectivamente, temos

$$\alpha/2 + \theta\langle T, \bar{s}\rangle \leq \alpha/2 + \theta\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle \leq \alpha/2 + \alpha/4 < \alpha.$$

Portanto, para todo $T \in \mathbb{B}$, $X + \theta T \in A$, logo, X pertence ao interior de A e o interior de A é não-vazio. □

Com isso, temos que A e B são não-vazios, convexos e compactos e A tem interior não-vazio, como pedido pelo execício. □

Problema 2

Seja $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear e $b \in \mathbb{R}^m$. Seja $w \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $w_1 \geq \cdots \geq w_n$. Formule o seguinte problema de otimização como um programa semidefinido:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w^T \lambda^{\downarrow}(X) \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n. \end{array}$$

Resposta.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w^T \lambda^{\downarrow}(X) \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n. \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mu \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n, \\ & \mu \in \mathbb{R}, \\ & w^T \lambda^{\downarrow}(X) \leq \mu. \end{array} \tag{2.1}$$

Vamos definir $\gamma_0 \oplus \gamma \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ e $\hat{w} \in \mathbb{R}^n$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\gamma_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda^{\downarrow}_i(X), \quad && \forall k \in [n], \\ &\gamma_0 = 0, \\ &\hat{w}_k = w_k - w_{k+1}, && \forall k \in [n-1], \\ &\hat{w}_n = w_n. \end{aligned}$$

Temos

$$w^T\lambda^{\downarrow}(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i\lambda_i^{\downarrow}(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\gamma_i(X) - \gamma_{i-1}(X)) = \sum_{i=1}^{n} w_i\gamma_i(X) - \sum_{i=1}^{n} w_i\gamma_{i-1}(X) = \\ \sum_{i=1}^{n} w_i\gamma_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} w_{i+1}\gamma_i(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(X)(w_i - w_{i+1}) + \gamma_n(X)w_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(X)\hat{w}_i = \hat{w}^T\gamma.$$

Além disso, já que $\hat{w} \geq 0$, para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\hat{w}^T\gamma \leq \mu \Leftrightarrow \text{existe } \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \gamma \leq \hat{\gamma} \text{ e } \hat{w}^T\hat{\gamma} \leq \mu.$$

Assim, podemos escrever (2.1) como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mu \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n, \\ & \mu \in \mathbb{R}, \\ & \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n, \\ & \gamma \leq \hat{\gamma}, \\ & w^T\lambda^{\downarrow}(X) \leq \mu. \end{array}$$

A restrição $\gamma \leq \hat{\gamma}$ equivale a

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\downarrow}(X) \leq \hat{\gamma}_k, \forall k \in [n],$$

pelo **Teo. 54**, para todo $k \in [n]$,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\downarrow}(X) \leq \hat{\gamma}_k \Leftrightarrow \exists Y \in \mathbb{S}^n \text{ e } \eta \in \mathbb{R} \text{ e } [\hat{\gamma}_k - k\eta - \mathrm{Tr}(Y)] \oplus Y \oplus [Y - X + \eta I] \in \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{S}_+^n \oplus \mathbb{S}_+^n,$$

que contém apenas restrições lineares. Desta maneira, conseguimos formular (2.1) como um programa semidefinido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \mu & \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, & \\ & X \in \mathbb{S}^n, & \\ & \mu \in \mathbb{R}, & \\ & Y_i \in \mathbb{S}^n, & \forall i \in [n], \\ & \eta \in \mathbb{R}^n, & \\ & \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n, & \\ & \gamma \leq \hat{\gamma}, & \\ & [\hat{\gamma}_i - i\eta_i - \mathrm{Tr}(Y_i)] \oplus Y_i \oplus [Y_i - X - \eta_i I] \in \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{S}_+^n \oplus \mathbb{S}_+^n, & \forall i \in [n]. \end{array}$$

$\square$

Problema 3

Seja $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ uma função linear. Sejam $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \oplus \delta \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$. Formule o seguinte problema de otimização como um progama cônico e 2a. ordem:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \langle c \oplus \delta, x \oplus \mu \rangle \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(x \oplus \mu) = b, \\ & ||x||^2 \leq \mu, \\ & x \oplus \mu \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}. \end{array} \tag{3.1}$$

Resposta. Sabemos que, dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}$,

$$||x||^2 \leq \mu \Leftrightarrow ||x||^2 \leq 1\mu \Leftrightarrow ||x||^2 \leq \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ||x||^2 + \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$||x \oplus \frac{\mu-1}{2}||^2 \leq \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ||x \oplus \frac{\mu-1}{2}|| \leq \frac{\mu+1}{2} \Leftrightarrow x \oplus \frac{\mu-1}{2} \oplus \frac{\mu+1}{2} \in \hat{\mathbb{L}}^{n+1}.$$

Com isso, podemos escrever (3.1) como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \langle c \oplus \delta, x \oplus \mu \rangle \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(x \oplus \mu) = b, \\ & x \oplus \left(\frac{\mu-1}{2}\right) \oplus \left(\frac{\mu+1}{2}\right) \in \hat{\mathbb{L}}^{n+1}, \\ & x \oplus \mu \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}, \end{array}$$

que é um programa cônico de 2a. ordem. □

Problema 4

Considere o programa semidefinido $\max\{\langle C, X\rangle : \mathcal{A}(X) = b, X \in \mathbb{S}^n_+\}$, onde $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função linear, $b \in \mathbb{R}^m$ e $C \in \mathbb{S}^n$. Sponha que tanto esse programa como o seu dual possuem pontos de Slater. Prove que, se a região viável do primal é limitada, então a região viável do dual é ilimitada.

Resposta. Sem resposta. □

Problema 5

Sejam $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_{++}$. Sejam $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Formule o seguinte problema de otimização como um programa cônico de 2a. ordem:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & a_i^T x \leq b_i, \quad \forall i \in [m], \forall a_i \in \bar{a}_i + \varepsilon_i \mathbb{B}, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{5.1}$$

Resposta. Temos, para todo $i \in [n]$,

$$a_i^T x \leq b_i \forall a_i \in \bar{a}_i + \varepsilon_i \mathbb{B} \Leftrightarrow \max_{a_i \in \bar{a}_i + \varepsilon_i \mathbb{B}} (a_i^T x) \leq b_i \Leftrightarrow \max_{u \in \mathbb{B}} ((\bar{a}_i + \varepsilon_i u)^T x) \leq b_i \Leftrightarrow$$
$$\bar{a}_i^T x + \varepsilon_i \max_{u \in \mathbb{B}} (u^T x) \leq b_i \Leftrightarrow \bar{a}_i^T x + \varepsilon_i \max_{u \in ||x|| \mathbb{B}} (u^T x)/||x|| \leq b_i. \tag{5.2}$$

Por Cauchy-Schwartz, sabemos

$$\max_{u \in \mathbb{R}^n} (u^T x) = x^T x,$$

logo,

$$\max_{u \in ||x||\mathbb{B}} (u^T x) = x^T x,$$

portanto, (5.2) vale se e somente se

$$\bar{a}_i^T x + \varepsilon_i \frac{x^T x}{||x||} = \bar{a}_i^T x + \varepsilon_i ||x|| \leq b_i \Leftrightarrow ||x|| \leq (b_i - \bar{a}_i^T x)/\varepsilon_i \Leftrightarrow x \oplus \frac{b_i - \bar{a}_i^T x}{\varepsilon_i} \in \hat{\mathbb{L}}^n.$$

Ou seja, podemos escrever (5.1) como

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & x \oplus \dfrac{b_i - \bar{a}_i^T x}{\varepsilon_i} \in \hat{\mathbb{L}}^n, \quad \forall i \in [m], \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

□

Problema 6

Considere o programa semidefinido

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \langle C, X \rangle \\ \text{sujeito a} & \langle e_1 e_1^T, X \rangle = 1, \\ & X \in \mathbb{S}^2_+, \end{array} \tag{P}$$

onde $C := e_1 e_2^T + e_2 e_1^T$. Mostre que

(i) (P) é ilimitado,

Resposta. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{X} := e_1 e_1^T + \alpha C + \alpha e_2 e_2^T$. Temos

$$\langle \bar{X}, e_1 e_1^T \rangle = 1$$

e, pela **Prop. 23**,

$$\bar{X} \succeq 0 \Leftrightarrow \alpha\alpha \leq \alpha^2,$$

ou seja, $\bar{S} \succeq 0$. Logo, $\bar{X}$ é viável em (P) e o seu valor objetivo é

$$\langle C, X \rangle = 2\alpha,$$

que varia livremente com α, ou seja, (P) é ilimitado. □

(ii) o dual de (P) é inviável e

Resposta. O dual de (P) é

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & y \\ \text{sujeito a} & y \in \mathbb{R}, \\ & y e_1 e_1^T \succeq C, \end{array} \tag{D}$$

pois se chamarmos $\mathcal{A}(X) := \langle C, X \rangle$, temos $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, portanto, a variável dual y deve pertencer a $\mathbb{R}$ e teremos também que a tranformação dual de $\mathcal{A}$ é $\mathcal{A}^*(y) = yC$.

Porém, par todo $y \in \mathbb{R}$,

$$ye_1e_1^T \succeq C \Leftrightarrow ye_1e_1^T - C \succeq 0,$$

mas, se definirmos $h := 1 \oplus (|y| + 1)$, teremos $h \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$h^T(ye_1e_1^T - C)h = y - 2(|y| + 1) = y - 2|y| - 2 \leq -2 < 0,$$

portanto, $ye_1e_1^T - C \not\succeq 0$, pela definição de $\mathbb{S}^n_+$. Assim, não existe y que respeite as restrições de (D) e este é inviável. □

(iii) para qualquer solução viável $\bar{X}$ de (P), não existe $D \in \mathbb{S}^2$ tal que $\bar{X} + \alpha D$ é viável para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $\langle C, D\rangle < 0$.

Resposta. Seja $D \in \mathbb{S}^2$, se $\langle C, D\rangle < 0$, já que $C \succeq 0$, $D \notin \mathbb{S}^2_+$, pelo **Teo. 20**. Logo, existe $h \in \mathbb{R}^2$ tal que $h^T Dh < 0$, portanto, se $\alpha = -\dfrac{h^T\bar{X}h}{h^T Dh} + 1$, teremos $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e também teremos

$$h^T(\bar{X} + \alpha D)h = h^T\bar{X}h + \alpha h^T Dh = h^T\bar{X}h - h^T\bar{X}h + h^T Dh < 0.$$

Portanto, $\bar{X} + \alpha D \notin \mathbb{S}^2_+$, logo, $\bar{X} + \alpha D$ é inviável. Ou seja, para todo D conseguimos um α que torna $\bar{X} + \alpha D$ inviável em (P). □

Problema 7

Sejam $Q_0, \dots, Q_m \in \mathbb{S}^n_+$, $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Formule o seguinte problema de otimização como um programa semidefinido:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2}x^T Q_0 x + c_0^T x \\ \text{sujeito a} & \frac{1}{2}x^T Q_i x + c_i^T x + b_i \leq 0, \quad \forall i \in [m] \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{7.1}$$

Resposta. Para todo $i \in [m]$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}x^T Q_i x + c_i^T x + b_i \leq 0 \Leftrightarrow \text{existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^T Q_i x \leq 2\alpha \text{ e } \alpha + c_i^T x + b_i \leq 0,$$

pelo **Ex. 18**, isso vale se e somente se

$$\text{existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{bmatrix} I & Q_i^{1/2}x \\ (Q_i^{1/2}x)^T & 2\alpha \end{bmatrix} \succeq 0 \text{ e } \alpha + c_i^T x + b_i \leq 0.$$

Logo, o programa (7.1) pode ser formulado como

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \alpha_0 + c_0^T x & \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} I & Q_i^{1/2}x \\ (Q_i^{1/2}x)^T & 2\alpha_i \end{bmatrix} \succeq 0, & \forall i \in 0 \oplus [m], \\ & \alpha_i + c_i^T x + b_i \leq 0 & \forall i \in [m], \\ & \alpha \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m, & \\ & x \in \mathbb{R}^n. & \end{array}$$

□