

## Problema 1

Sejam  $\bar{S} \in \mathbb{S}_{++}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ . Prove que os conjuntos

$$\{X \in \mathbb{S}_{++}^n \mid \langle \bar{S}, X \rangle \leq \alpha\} \text{ e } \{X \in \mathbb{S}_{++}^n \mid \langle \bar{S}, X \rangle = \alpha\}$$

são não-vazios, convexos e compactos. Mostre ainda que o interior do primeiro conjunto não é vazio.

**Resposta.** Vamos chamar o primeiro conjunto de  $A$  e o segundo de  $B$ , isto é

$$A = \{X \in \mathbb{S}_{++}^n \mid \langle \bar{S}, X \rangle \leq \alpha\} \text{ e}$$

$$B = \{X \in \mathbb{S}_{++}^n \mid \langle \bar{S}, X \rangle = \alpha\}.$$

Agora, devemos provar algumas propriedades sobre  $A$  e  $B$ .

**Proposição 1.1.**  $A$  e  $B$  são não-vazios.

*Demonstração.* Já que  $\bar{S} \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $\bar{S} \neq 0$ , logo  $\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle \neq 0$ . Escolhermos  $\beta = \frac{\alpha}{\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle}$ . Já que  $\alpha > 0$  e  $\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle > 0$ ,  $\beta > 0$ . Agora, escolhemos  $\bar{X} = \beta \bar{S}$ . Temos que para todo  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$h^T \bar{X} h = h^T \beta \bar{S} h = \beta h^T \bar{S} h > 0,$$

portanto,  $\bar{X} \in \mathbb{S}_{++}^n \subseteq \mathbb{S}_{+}^n$ . Além disso,  $\langle \bar{S}, \bar{X} \rangle = \alpha$ . Logo,  $\bar{X} \in A$  e  $\bar{X} \in B$ . Portanto,  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposição 1.2.**  $A$  e  $B$  são convexos.

*Demonstração.* Agora, queremos mostrar que  $A$  e  $B$  são convexos. Sejam  $X, Y \in \mathbb{S}_{+}^n$  quaisquer escolhemos  $Z = (X + Y)/2$ . Temos que, para todo  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$h^T Z h = h^T (X + Y) h / 2 = (h^T X h + h^T Y h) / 2 > 0,$$

então  $Z \in \mathbb{S}_{++}^n$ , além disso,

$$\langle Z, \bar{S} \rangle = (\langle X, \bar{S} \rangle + \langle Y, \bar{S} \rangle) / 2.$$

Assim, se existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\langle X, \bar{S} \rangle = \langle Y, \bar{S} \rangle = \beta$ , então  $\langle Z, \bar{S} \rangle = \beta$ , ou seja,  $B$  é convexo. Além disso, se existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\langle X, \bar{S} \rangle \leq \beta$  e  $\langle Y, \bar{S} \rangle \leq \beta$ , então,  $\langle Z, \bar{S} \rangle \leq \beta$ , ou seja,  $A$  é convexo.  $\square$

**Proposição 1.3.**  $A$  e  $B$  são limitados.

*Demonstração.* Sejam  $T \in \mathbb{S}^n \setminus \{0\}$  e  $X \in A$ . Sabemos que  $A$  é limitado se e somente se existe  $\theta \in \mathbb{R}_{+}$  tal que  $X + \theta T \notin A$ .

Se  $\langle T, \bar{S} \rangle > 0$ , basta escolher  $\theta = \frac{\alpha - \langle X, \bar{S} \rangle}{\langle T, \bar{S} \rangle} + 1$ . Já que  $\alpha \geq \langle X, \bar{S} \rangle$ ,  $\theta \geq 1 > 0$ , logo,  $\theta \in \mathbb{R}_{+}$  e  $\langle X + \theta T, \bar{S} \rangle = \alpha + \langle T, \bar{S} \rangle > \alpha$ , logo,  $X + \theta T \notin A$ .

Caso contrário, pelo **Ex. 21**, já que  $X \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $T \notin \mathbb{S}_{+}^n \setminus 0$ . Logo, existe  $h \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$h^T T h < 0, \text{ portanto,}$$

se  $\theta = -\frac{h^T X h}{h^T T h} + 1$ ,  $\theta \geq 1 > 0$ . Logo,  $\theta \in \mathbb{R}_{+}$  e já que

$$h^T (X + \theta T) h = h^T X h + \theta h^T T h = 0 + h^T T h < 0,$$

$X + \theta T \notin \mathbb{S}_{++}^n$ , logo,  $X + \theta T \notin A$ . Assim, mostramos que  $A$  é limitado. Já que  $B \subseteq A$ ,  $B$  também é limitado.  $\square$

**Proposição 1.4.**  $A$  e  $B$  são fechados.

*Demonstração.* Sabemos que  $\mathbb{S}_{++}^n$  é fechado.  $C = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S} \rangle \leq \alpha\}$  é um semiespaço, logo, é fechado.  $D = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S} \rangle = \alpha\}$  é um hiperplano, logo, é fechado.  $A = \mathbb{S}_{++}^n \cap C$  e  $B = \mathbb{S}_{++}^n \cap D$ , ou seja, tanto  $A$  quanto  $B$  são fechados.  $\square$

**Proposição 1.5.** *A tem interior não vazio.*

*Demonstração.* Seja  $X = \frac{\alpha \bar{S}}{2\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle} \in A$ . Já que  $\mathbb{S}_{++}^n$  é aberto, existe um  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}_+$  tal que  $X + \theta T \in \mathbb{S}_{++}^n$  para todo  $T \in \mathbb{B}$  e  $\theta$  que respeite  $\bar{\theta} \geq \theta \in \mathbb{R}_+$ . Escolhemos agora  $\theta = \min(\bar{\theta}, \frac{\alpha}{4\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle})$ . Temos que, para todo  $T \in \mathbb{B}$ ,

$$\langle X + \theta T, \bar{S} \rangle = \langle X, \bar{S} \rangle + \theta \langle T, \bar{S} \rangle = \alpha/2 + \theta \langle T, \bar{S} \rangle,$$

por Cuchy-Schwartz (**Teo. 37**) e pela definição de  $\theta$ , respectivamente, temos

$$\alpha/2 + \theta \langle T, \bar{S} \rangle \leq \alpha/2 + \theta \langle \bar{S}, \bar{S} \rangle \leq \alpha/2 + \alpha/4 \leq \alpha.$$

Portanto, para todo  $T \in \mathbb{B}$ ,  $X + \theta T \in A$ , logo,  $X$  pertence ao interior de  $A$  e o interior de  $A$  é não-vazio.  $\square$

Com isso, temos que  $A$  e  $B$  são não-vazios, convexos e compactos e  $A$  tem interior não-vazio, como pedido pelo exercício.  $\square$

## Problema 2

Seja  $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função linear e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Seja  $w \in \mathbb{R}^m$  tal que  $w_1 \geq \dots \geq w_n$ . Formule o seguinte problema de otimização como um programa semidefinido:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && w^T \lambda^\downarrow(X) \\ &\text{sujeito a} && \mathcal{A}(X) = b, \\ &&& X \in \mathbb{S}^n. \end{aligned}$$

**Resposta.**

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && w^T \lambda^\downarrow(X) && \text{Minimizar} && \mu \\ &\text{sujeito a} && \mathcal{A}(X) = b, && \text{sujeito a} && \mathcal{A}(X) = b, \\ &&& X \in \mathbb{S}^n. && && X \in \mathbb{S}^n, \\ &&& && && \mu \in \mathbb{R}, \\ &&& && && w^T \lambda^\downarrow(X) \leq \mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vamos definir  $\gamma \in \mathbb{R}^{0 \oplus [n]}$  e  $\hat{w} \in \mathbb{R}^n$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(X), \quad \forall k \in [n], \\ \gamma_0 &= 0, \\ \hat{w}_k &= w_k - w_{k+1}, \quad \forall k \in [n-1], \\ \hat{w} &= w_n. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} w^T \lambda^\downarrow(X) &= \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i^\downarrow(X) = \sum_{i=1}^n w_i (\gamma_i(X) - \gamma_{i-1}(X)) = \sum_{i=1}^n w_i \gamma_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} w_i \gamma_{i-1}(X) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(X) (w_i - w_{i+1}) + \gamma_n(X) w_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i(X) \hat{w}_i = \hat{w}^T \gamma[n]. \end{aligned}$$

Além disso, já que  $\hat{w} \geq 0$ , para qualquer  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{w}^T \gamma[n] \leq \mu \Leftrightarrow \text{existe } \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \gamma[n] \leq \hat{\gamma} \text{ e } \hat{w}^T \hat{\gamma} \leq \mu.$$

Assim, podemos escrever (2.1) como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \mu \\ &\text{sujeito a} && \mathcal{A}(X) = b, \\ &&& X \in \mathbb{S}^n, \\ &&& \mu \in \mathbb{R}, \\ &&& \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n, \\ &&& \gamma[n] \leq \hat{\gamma}, \\ &&& w^T \lambda^\downarrow(X) \leq \mu. \end{aligned}$$

A restrição  $\gamma[n] \leq \hat{\gamma}$  equivale a

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(X) \leq \hat{\gamma}_k, \forall k \in [n],$$

pelo **Teo. 54**, para todo  $k \in [n]$ ,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^\downarrow(X) \leq \hat{\gamma}_k \Leftrightarrow \exists Y \in \mathbb{S}^n \text{ e } \eta \in \mathbb{R} \text{ e } [\nu - k\eta - \text{Tr}(Y)] \oplus Y \oplus [Y - X + \eta I] \in \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{S}_+^n \oplus \mathbb{S}_+^n,$$

que contém apenas restrições lineares. Desta maneira, conseguimos formular (2.1) como um programa semidefinido. □

### Problema 3

Seja  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função linear. Sejam  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $c \oplus R^m \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ . Formule o seguinte problema de otimização como um programa cônico e 2a. ordem:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \langle c \oplus \delta, x \oplus \mu \rangle \\ &\text{sujeito a} && \mathcal{A}(x \oplus \mu) = b, \\ &&& \|x\|^2 \leq \mu, \\ &&& x \oplus \mu \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

**Resposta.** Sabemos que, dados  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \leq \mu &\Leftrightarrow \|x\|^2 \leq 1\mu \Leftrightarrow \|x\|^2 \leq \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\|x \oplus \frac{\mu-1}{2}\|^2 \leq \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \|x \oplus \frac{\mu-1}{2}\| \leq \frac{\mu+1}{2} \Leftrightarrow x \oplus \frac{\mu-1}{2} \oplus \frac{\mu+1}{2} \in \hat{\mathbb{L}}^{n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever (3.1) como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \langle c \oplus \delta, x \oplus \mu \rangle \\ &\text{sujeito a} && \mathcal{A}(x \oplus \mu) = b, \\ &&& x \oplus \left(\frac{\mu-1}{2}\right) \oplus \left(\frac{\mu+1}{2}\right) \in \hat{\mathbb{L}}^{n+1}, \\ &&& x \oplus \mu \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que é um programa cônico de 2a. ordem. □

## Problema 4

Considere o programa semidefinido  $\max\{\langle C, X \rangle : \mathcal{A}(X) = b, X \in \mathbb{S}_+^n\}$ , onde  $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função linear,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $C \in \mathbb{S}^n$ . Sponha que tanto esse programa como o seu dual possuem pontos de Slater. Prove que, se a região viável do primal é limitada, então a região viável do dual é ilimitada.

**Resposta.** Sem resposta. □

## Problema 5

Sejam  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in \mathbb{R}^n$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$ . Sejam  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ . Formule o seguinte problema de otimização como um programa cônico de 2a. ordem:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && c^T x \\ & \text{sujeito a} && a_i^T x \leq b_i, \quad \forall i \in [m], \forall a_i \in \bar{a}_i + \epsilon_i \mathbb{B}, \\ & && x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (5.1)$$

**Resposta.** Temos, para todo  $i \in [n]$ ,

$$\begin{aligned} a_i^T x \leq b_i \forall a_i \in \bar{a}_i + \epsilon_i \mathbb{B} &\Leftrightarrow \max_{a_i \in \bar{a}_i + \epsilon_i \mathbb{B}} (a_i^T x) \leq b_i \Leftrightarrow \max_{u \in \mathbb{B}} (\bar{a}_i + \epsilon_i u)^T x \leq b_i \Leftrightarrow \\ &\bar{a}_i + \epsilon_i \max_{u \in \mathbb{B}} (u^T x) \leq b_i \Leftrightarrow \bar{a}_i + \epsilon_i \max_{u \in ||x|| \mathbb{B}} (u^T x) / ||x|| \leq b_i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por Cauchy-Schwartz, sabemos

$$\max_{u \in \mathbb{R}^n} (u^T x) = x^T x,$$

logo,

$$\max_{u \in ||x|| \mathbb{B}} (u^T x) = x^T x,$$

portanto, (5.2) vale se e somente se

$$\bar{a}_i^T x + \epsilon_i \frac{x^T x}{||x||} = \bar{a}_i^T x + \epsilon_i ||x|| \leq b_i \Leftrightarrow ||x|| \leq (b_i - \bar{a}_i^T x) / \epsilon_i \Leftrightarrow x \oplus \frac{b_i - \bar{a}_i^T x}{\epsilon_i} \in \hat{\mathbb{L}}^n.$$

Ou seja, podemos escrever (5.1) como

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && c^T x \\ & \text{sujeito a} && x \oplus \frac{b_i - \bar{a}_i^T x}{\epsilon_i} \in \hat{\mathbb{L}}^n, \quad \forall i \in [m], \\ & && x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

## Problema 6

Considere o programa semidefinido

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \langle C, X \rangle \\ & \text{sujeito a} && \langle e_1 e_1^T, X \rangle = 1, \\ & && X \in \mathbb{S}_+^2, \end{aligned} \quad (\text{P})$$

onde  $C := e_1 e_2^T + e_2 e_1^T$ . Mostre que

(i) (P) é ilimitado,

**Resposta.** Seja  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{X} := e_1 e_1^T + \alpha C + \alpha e_2 e_2^T$ . Temos

$$\langle \bar{X}, e_1 e_1^T \rangle = 1$$

e, pela **Prop. 23**,

$$\bar{X} \succeq 0 \Leftrightarrow \alpha \alpha \leq \alpha^2,$$

ou seja,  $\bar{S} \succeq 0$ . Logo,  $\bar{X}$  é viável em (P) e o seu valor objetivo é

$$\langle C, X \rangle = 2\alpha,$$

que varia livremente com  $\alpha$ , ou seja, (P) é ilimitado.  $\square$

(ii) o dual de (P) é inviável e

**Resposta.** O dual de (P) é

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && y \\ &\text{sujeito a} && y \in \mathbb{R}, \\ &&& yC \in \mathbb{S}_+^2, \end{aligned} \tag{D}$$

pois se chamarmos  $\mathcal{A}(X) := \langle C, X \rangle$ , temos  $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , portanto, a variável dual  $y$  deve pertencer a  $\mathbb{R}$  e teremos também que a transformação dual de  $\mathcal{A}$  é  $\mathcal{A}^*(y) = yC$ .

Porém, para todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\det(yC[0]) = 0$ , já que  $yC[0] = 0$ , portanto, pelo **Teo. 24**,  $yC[0] \notin \mathbb{S}_+^2$ , assim, não existe  $y$  que respeite às restrições de (D) e este é inviável.  $\square$

(iii) para qualquer solução viável  $\bar{X}$  de (P), não existe  $D \in \mathbb{S}^2$  tal que  $\bar{X} + \alpha D$  é viável para todo  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  e  $\langle C, D \rangle < 0$ .

**Resposta.** Se  $\langle C, D \rangle < 0$ , já que  $C \succeq 0$ ,  $D \notin \mathbb{S}_+^2$ , pelo **Teo. 20**. Logo, existe  $h \in \mathbb{R}^2$  tal que  $h^T D h < 0$ , portanto, se  $\alpha = -\frac{h^T \bar{X} h}{h^T D h} + 1$ , teremos  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  e também teremos

$$h^T (\bar{X} + \alpha D) h = h^T \bar{X} h + \alpha h^T D h = h^T \bar{X} h - h^T \bar{X} h + h^T D h < 0.$$

Portanto,  $\bar{X} + \alpha D \notin \mathbb{S}_+^2$ , logo,  $\bar{X} + \alpha D$  é inviável. Ou seja, para todo  $D$  conseguimos um  $\alpha$  que torna  $\bar{X} + \alpha D$  inviável em (P).  $\square$

## Problema 7

Sejam  $Q_0, \dots, Q_m \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Formule o seguinte problema de otimização como um programa semidefinido:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \frac{1}{2} x^T Q_0 x + c_0^T x \\ &\text{sujeito a} && \frac{1}{2} x^T Q_i x + c_i^T x + b_i \leq 0, \quad \forall i \in [m] \\ &&& x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{7.1}$$

**Resposta.** Para todo  $i \in [m]$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{1}{2}x^T Q_i x + c_i^T x + b_i \leq 0 \Leftrightarrow \text{existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^T Q_i x \leq 2\alpha \text{ e } \alpha + c_i^T x + b_i \leq 0,$$

pelo **Ex. 18**, isso vale se e somente se

$$\text{existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{bmatrix} I & Q_i^{1/2} x \\ (Q_i^{1/2} x)^T & 2\alpha \end{bmatrix} \succeq 0 \text{ e } \alpha + c_i^T x + b_i \leq 0.$$

Logo, o programa (7.1) pode ser formulado como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \alpha_0 + c_0^T x \\ &\text{sujeito a} && \begin{bmatrix} I & Q_i^{1/2} x \\ (Q_i^{1/2} x)^T & 2\alpha_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in 0 \oplus [m], \\ & && \alpha_i + c_i^T x + b_i \leq 0 \quad \forall i \in [m], \\ & && \alpha \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m, \\ & && x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□