Lista 9

Victor Sena Molero - 8941317

18 de maio de 2016

1 Exercícios

Ex 32 (a)**.** *Exiba um grafo planar de ordem 8 cujo complemento também é planar.*

Resposta. Queremos criar um grafo planar G de grau 8 cujo complemento também é planar. Definimos $H_{a,b}$ para qualquer par de inteiros a, b onde $a \leq b$ como um grafo completo com vértices $\{a, a+1, \dots, b\}$. Agora, basta definir $V(G) = \{1, 2, \dots, 8\}$ e $A(G) = A(H_{1,4}) \cup A(H_{3,6}) \cup A(H_{5,8})$. Tanto G quanto seu complementar são planares. □

Ex 32 (b)**.** *Exiba um grafo não planar cujo complemento não é planar.*

Resposta. Para obter tal grafo, basta escolher um K_5 e adicionar 5 novos vértices de grau 1, cada um conectado a uma aresta distinta do K_5. Este grafo é não planar pois contém um K_5 e, em seu complemento, todos os vértices novos são adjacentes entre si, formando, também, um K_5. □

Ex 33. *Mostre que se G é um grafo simples conexo planar com cintura $k \geq 3$, então*

$$|A(G)| \leq k(|V(G)| - 2)/(k - 2)$$

Prova. Foi mostrado na apostila, sob o nome de corolário 8.6, que Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n - 6$. Queremos mostrar que se G é um grafo simples conexo planar com cintura $k \geq 3$, então $|A(G)| \leq k(|V(G)| - 2)/(k-2)$. Já que G tem cintura pelo menos 3, então $|V(G)| \geq 3$, logo, ele vale na hipótese do corolário citado, assim, $|A(G)| \leq 3|V(G)| - 6 = 3(|V(G)| - 2)$. Já que $3 \leq k/(k-2) \forall k \geq 3$, então $|A(G)| \leq k(|V(G)| - 2)/(k-2)$. □

Ex 34. *Mostre que se* $|V(G)| = 11$ *então* G *ou seu complemento não é planar.*

Prova. Seja G um grafo tal que $|V(G)| = 11$, suponha, por absurdo que G e $\bar{G}$ são planares. Definimos $a = max(|V(G)|, |V(\bar{G})|$ e $b = min(|V(G)|, |V(\bar{G})|)$, assim $a + b = 11$ e, já que G e seu complementar são planares, $a \leq 3|V(G)| - 6 = 27$ e $b \leq 27$, mas

$$a + b = 55$$

$$55 - b = a \leq 27$$

$$b \geq 28$$

Um absurdo, logo, ou G ou seu complementar são não-planares. □

Ex 35. *Um grafo planar* G *é auto-dual se é isomorfo ao seu dual (geométrico)* G^**.*

Ex 35 (a)**.** *Mostre que se* G *é auto-dual, então* $2|V(G)| = |A(G)| + 2$*.*

Prova. Seja G um grafo planar auto-dual e G^* seu dual. Já que G é isomorfo a G^*, $|V(G)| = |V(G^*)|$. Já que G é planar $|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2$. Além disso, se G e G^* são duais, $|F(G)| = |V(G^*)|$. Assim

$$|F(G)| = |V(G^*)| = |V(G)|$$

, assim

$$|V(G)| - |A(G)| + |V(G)| = 2$$

, ou seja

$$2|V(G)| = |A(V)| + 2$$

$\square$

Ex 35 (b)**.** *Mostre que nem todo grafo G com $2|V(G)| = |A(G)| + 2$ é auto-dual.*

Prova. Basta escolher um triângulo e adicionar um loop em um dos vértices. Este é um grafo que respeita a igualdade dada e não é auto-dual, seu dual é um grafo de três vértices, onde um par deles é conectado por 3 arestas, outro par é conectado por uma aresta e o par restante não é adjacente. $\square$