MAC0343: Prova 1

20 de Setembro de 2016

Victor Sena Molero - 8941317

Problema 1

Seja $A \in R^{m\times n}$ uma matriz. Prove que vale precisamente uma das seguintes alternativas:

i existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $Ax = 0$ e $x \neq 0$;

ii existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y < 0$.

Resposta. Queremos provar que vale exatamente um entre (i) e (ii). Para provar isso, vamos considerar um PL e seu dual.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.a.} \quad & y \in \mathbb{R}^m \\ & A^T y \leq c \end{aligned} \tag{2}$$

Vamos provar, primeiro que vale pelo menos um entre (i) e (ii). Assuma, para a matriz A de 1 e 2 que não vale (i), então, no programa 1, $x = 0$ é o único ponto viável. Temos, então, que para todo $c \in \mathbb{R}^n$, 1 é viável e tem solução ótima $\min c^T x = 0$.
Pelo teorema 12 (Dualidade Forte de PL), segue que 2 é viável, portanto, existe $A^T y \leq c$. Basta escolher $c < 0$ e temos que $A^T y < 0$, ou seja, vale (ii).
Agora, vamos provar que vale no máximo 1 entre (i) e (ii). Assuma que vale (i) e (ii), então, existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y < 0$, escolhemos, nos programas 1 e 2, $b = 0$ e $c = A^T y$, assim, temos que 2 é viável. Além disso, já que vale (i), existe $0 \neq x \in \mathbb{R}^n_+$.
Pelo teorema 7 (Dualidade Fraca de PL), $c^t x \geq b^T y = 0^T y = 0$, porém, já que $c < 0$ e $0 \neq x \geq 0$, $c^T x < 0$, uma contradição. Com isso, concluímos que vale exatamente 1 dentre (i) e (ii). □

Problema 2

Sejam $X, S \in \mathbb{S}^n$. Prove que $0 \prec S \preceq X \Rightarrow 0 \prec X^{-1} \preceq S^{-1}$.

Problema 3

Sejam $X, S \in \mathbb{S}^n$. Prove que

i $X, S \in \mathbb{S}^n_+ \implies X \circ S \succeq 0$;

Resposta. Se $S \succeq 0$, pelo Teorema 20 (item (iii)), existe uma matriz $H \in R^{m\times n}$ para algum m e um vetor $s \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $S = \sum_{i=1}^{m} s_i (He_i)(He_i)^T$. Escolhemos tais H e s, assim, para todo $q \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$q^T (X \circ S) q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i q_j X_{i,j} S_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (q_i q_j X_{i,j} \sum_{k=1}^{m} s_k H_{k,i} H_{k,j}),$$ que pode ser escrito como

$$\sum_{k=1}^{m} s_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(q \circ (He_k))_i (q \circ (He_k)_j X_{i,j},$$

Se definirmos a matriz $Q = q\mathbb{1}^T$, temos,

$$q^T(X \circ S)q = \sum_{k=1}^{m} s_k((Q \circ H)e_k)^T X (Q \circ H)e_k,$$

já que para todo $k \in [m]$, vale que $(Q \circ H)e_k \in \mathbb{R}^n$ e $s_k \geq 0$, e, além disso, $X \succeq 0$,

$$q^T(X \circ S)q \geq \sum_{k=1}^{m} s_k 0 \geq 0.$$

Portanto, $(X \circ S) \succeq 0$. □

ii $X, S \in \mathbb{S}^n_{++} \implies X \circ S \succ 0$;

Resposta. Se $S \succ 0$, pelo Exercício 21 (item (iii)), existe uma matriz $H \in R^{m\times n}$ para algum m e um vetor $s \in \mathbb{R}^m_{++}$ tal que $S = \sum\limits_{i=1}^{m} s_i(He_i)(He_i)^T$ e o $\operatorname{span}(\{He_k \mid k \in [m]\}) = \mathbb{R}^n$. Escolhemos tais H e s, assim, para todo $q \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$q^T(X \circ S)q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i q_j X_{i,j} S_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(q_i q_j X_{i,j} \sum_{k=1}^{m} s_k H_{k,i} H_{k,j}),$$ que pode ser escrito como

$$\sum_{k=1}^{m} s_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(q \circ (He_k))_i (q \circ (He_k)_j X_{i,j},$$

Se definirmos a matriz $Q = q\mathbb{1}^T$, temos,

$$q^T(X \circ S)q = \sum_{k=1}^{m} s_k((Q \circ H)e_k)^T X (Q \circ H)e_k,$$

já que para todo $k \in [m]$, vale que $(Q \circ H)e_k \in \mathbb{R}^n$ e $s_k > 0$, e, além disso, $X \succ 0$,

$$q^T(X \circ S)q > \sum_{k=1}^{m} s_k 0 > 0.$$

Portanto, $(X \circ S) \succ 0$. □

iii $X, S \in \mathbb{S}^n_{++} \implies X \circ S \succeq (X^{-1} \circ S^{-1})^{-1}$;

iv $X, S \in \mathbb{S}^n_{++} \implies X \circ S \succeq (X \circ S)^{-1}$.

Problema 4

Seja n um inteiro positivo. Determine o valor ótimo do seguinte programa semidefinido:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{1}^T + 4z_1 \\
\text{s.a.} \quad & y \in \mathbb{R}^n, \\
& z \in \mathbb{R}^{n+1}, \\
& \begin{bmatrix} -y_j & -z_j \\ -z_j & 2z_{j+1} \end{bmatrix} \succeq a, \qquad \forall j \in [n], \\
& z_{n+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

Problema 5

Seja $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$. Considere o programa semidefinido

$$\begin{array}{rll} \max & \langle C, X\rangle & \\ \text{s.a.} & \langle A_i, X\rangle, & \forall i \in [m], \\ & x \in \mathbb{S}^n_+, & \end{array} \tag{4}$$

onde $n := m := 3$,

$$C := e_1e_2^T + e_2e_1^T,\ A_1 := e_2e_2^T,\ A_2 := e_1e_3^T + e_3e_1^T,\ A_3 := -C + 2e_3e_3^T \text{ e } b := 2\gamma e_3$$

Problema 6

Seja $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{E}$ um cone convexo e fechado num espaço euclidiano. Prove que $K^{**} = K$.

Problema 7

Seja $X \in \mathbb{S}^n$. Prove que $X \succ 0 \Longleftrightarrow det(X[\{1,\dots,k\}]) > 0$ para todo $k \in [n]$.

Resposta. Seja $X \in \mathbb{S}^n$, vamos provar a tese sugerida pelo enunciado por indução em n. Se $n = 1$, temos que $X \succ 0 \Leftrightarrow X > 0 \Leftrightarrow det(X) > 0$. Agora tome por hipótese de indução que a tese vale para $n-1$.
Seja, então, $X \in \mathbb{S}^n$. X pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X} y \\ y^T \alpha \end{bmatrix}.$$

Vamos provar a ida, ou seja, assuma que $X \succ 0$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, $h^TXh > 0$, podemos definir

$$h = \begin{bmatrix} \bar{h} \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos que $h^TXh = \bar{h}^T\bar{X}\bar{h} > 0$ para todo $\bar{h} \in \mathbb{R}^{n-1}$, logo, $\bar{X} \succ 0$. Assim, $det(X[\{1,\dots,k\}]) > 0$ para todo $k \in [n-1]$. Além disso, $det(X) = det(\bar{X})det(\alpha - y^T\bar{X}y)$. Pelo Ex. 18 (Complemento de Schur), $\alpha - y^T\bar{X}y > 0$, já que $X \succ 0$. Assim, $det(X) > 0$. Logo, provamos que $X \succ 0 \Longrightarrow det(X[\{1,\dots,k\}]) > 0$ para todo $k \in [n]$.
Agora precisamos assumir que $det(X[\{1,\dots,k\}]) > 0$ e provar que $X \succ 0$. Mais uma vez, usaremos a mesma decomposição que utilizamos na prova da ida. E chegamos, novamente, à fórmula $det(X) = det(\bar{X})det(\alpha - y^T\bar{X}y)$. Sabemos que $det(X) > 0$ e $det(\bar{X}) > 0$, logo $det(\alpha - y^T\bar{X}y) > 0$, porém, $\alpha - y^T\bar{X}y \in \mathbb{R}$, logo, só tem determinante positivo se for positivo, portanto, novamente pelo Ex. 18, $X \succ 0$. ☐

Problema 8

Prove que $\text{int}(\mathbb{S}^n_+) = \mathbb{S}^n_{++}$.

Resposta. Primeiro, vamos provar $\mathbb{S}^n_{++} \subseteq \text{int}(\mathbb{S}^n_+)$. Seja $x \in \mathbb{S}^n_{++}$ e $\epsilon = \max\limits_{\substack{u \in \mathbb{B} \\ h^Tuh \neq 0}} |\frac{h^Txh}{h^Tuh}|$.

Temos que para todo $u \in \mathbb{B}$

$$h^T(x + \epsilon u)h = h^Txh + \epsilon h^Tuh,$$

o que nos dá dois casos:

1. se $h^T uh \geq 0$, $h^T(x + \epsilon u)h \geq h^T xh > 0$;
2. se $h^T uh < 0$, $h^T(x + \epsilon u)h = h^T uh + \epsilon h^T uh \geq h^T xh - h^T xh = 0$.

Desta forma, em todos os casos possíveis, $h^T xh \geq 0$, logo, $x \in \mathbb{S}^n_+$.
Agora, vamos provar que $\text{int}\mathbb{S}^n_+ \subseteq \mathbb{S}^n_{++}$. Seja $x \in \text{int}(\mathbb{S}^n_+)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{B}$,

$$h^T(x + \epsilon u)h \geq 0, \text{ portanto}$$

$$h^T xh + \epsilon h^T uh \geq 0.$$

Escolha $u = -I/\sqrt{(n)}$ e qualquer $h \neq 0$.

$$h^T xh - \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \geq 0,$$

$$h^T xh \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \geq 0, \text{ ou seja}$$

$$x \in \mathbb{S}^n_{++}.$$

Com isso, concluímos que $\text{int}(\mathbb{S}^n_+) = \mathbb{S}^n_{++}$. □