Lista 7

Victor Sena Molero - 8941317

1 de maio de 2016

Ex 23. *Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 2k$ e tal que $g(v) \geq k \geq 1$ para todo v em G. Mostre que G tem um emparelhamento com pelo menos k arestas.*

Prova. Seja k um inteiro maior que 1 e G um grafo simples de ordem $n \geq 2k$ e tal que $\forall v \in V(G), g(v) \geq k$. Queremos demonstrar a tese de que G tem um emparelhamento E tal que $|E| \geq k$.

Primeiro, vamos provar que com $k = 1$, vale a tese. O grafo tem pelo menos uma aresta, pois todo vértice tem grau pelo menos 1, logo, basta escolher uma aresta qualquer e esta será o emparelhamento desejado.

Agora, suponha que a tese seja falsa com $k > 1$, então existe um contra exemplo para tal tese. Sabemos que se G for um grafo completo, ele tem um emparelhamento de tamanho k, logo, existe um contra-exemplo maximal, ou seja, um grafo tal que não vale a propriedade e, se adicionarmos uma aresta qualquer, a propriedade passa a valer.

Seja G tal contra-exemplo maximal. Escolhemos dois vértices não-adjacentes u e v quaisquer de G, se adicionarmos a aresta uv gerando o grafo G', criaremos um emparelhamento E' de tamanho k. Temos duas opções:

Se $uv \notin E'$, então E' é um emparelhamento em G, pois só contém arestas que pertencem a G.

Se $uv \in E'$, então $E' - uv$ é um emparelhamento de tamanho $k-1$ em G onde nem u nem v estão cobertos. Sabemos que $g(u) \geq k$ e $g(v) \geq k$, além disso, u e v não são adjacentes. Mais uma vez, três casos são possíveis:

u tem um vizinho x livre, desta forma, basta adicionar a aresta ux ao emparelhamento e gerar um emparelhamento em G de ordem k.

v tem um vizinho y livre, analogamente, obtemos um emparelhamento de ordem k.

Caso contrário, todos os vizinhos de u e v estão emparelhados com algum vértice. Suponha, por absurdo, que não existe nenhum par de vértices x, y emparelhado em E' onde u é vizinho de x e v é vizinho de y. Já que o emparelhamento tem tamanho $k-1$, temos exatamente $2(k-1)$ vértices emparelhados, porém, cada vizinho de u impossibilita um vizinho de v (e vice-versa), logo, deveríamos ter, no mínimo $g(u) + g(v)$ vértices emparelhados, porém $g(u) + g(v) \geq 2k > 2(k-1)$, um absurdo. Logo, existe um par x, y onde a aresta xy esta em E' e as arestas ux e vy estão em G, ou seja, existe um caminho alterante em G em relação ao emparelhamento E', portanto, podemos formar um novo emparelhamento E em G onde $|E| = |E'| + 1 = k$.

Ou seja, em todos os casos possíveis obtivemos um emparelhamento de ordem k no grafo G. □

Ex 24. *Seja G um grafo bipartido com pelo menos uma aresta. Mostre que exist eum emparelhamento que cobre todos os vértices de grau $\Delta(G)$.*

Prova. A afirmação é verdadeira.

Seja G um grafo conexo não-trivial simples e v um vértice qualquer de G. $g(v) \geq 1$, já que G é não-trivial e conexo. Escolhemos um emparelhamento maximal qualquer E de G. Se v é coberto por E está provada a tese.

Então escolhemos um vértice u qualquer adjacente a v. Se u não é coberto por E, então E não é maximal, pois poderia-se adicionar uv a E e gerar um emparelhamento que contém E propriamente. Logo, u é coberto por E. A aresta que cobre u vai a um outro vértice w. Removemos a aresta uw de E e adicionamos a aresta uv gerando um emparelhamento E'.

Agora temos dois casos: Se w tiver alguém adjacente não coberto em E', podemos adicionar esta aresta e gerar um emparelhamento E' que cobre todos os vértices de E, se fosse possível adicionar uma aresta em E', seria possível adicionar a mesma aresta em E e E não seria maximal.

Se w não tiver nenhum vértice adjacente não coberto, não é possível adicionar nenhuma aresta de w em E, além disso, todos os outros vértices que estavam cobertos em E estão ainda cobertos em E', portanto, se fosse possível adicionar uma aresta que não contém w em E' seria possível adicionar a mesma aresta em E e E não seria maximal.

Assim, geramos um emparelhamento maximal E' a partir de E que cobre v. □

Ex 25. *Prove que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.*

Prova. Seja G uma árvore qualquer, vamos provar, por indução em $|V(G)|$ que G tem, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Se $|V(G)| = 0$, $E = \emptyset$ é um emparelhamento perfeito.

Com $k > 0$, assumindo que vale a tese com $|V(G)| < k$.

Assumindo que $|V(G)| = k$. Se G não contém nenhuma olha, então $k = 1$ e não existe um emparelhamento perfeito. Se G tem uma folha, seja u uma folha qualquer de G.

O vértice u é adjacente a apenas um outro vértice v, portanto, uv pertence a qualquer emparelhamento perfeito de G. Seja $H = G - u - v$, H é uma floresta. Nenhuma das arestas diferentes de uv podem pertencer a um emparelhamento perfeito, pois são adjacentes a uv, que pertence a todos.

A quantidade de emparelhamentos perfeitos em G é igual à quantidade de emparelhamentos perfeitos em H, pois um emparelhamento perfeito em H pode ser unido a uv gerando um emparelhamento perfeito em G e se houver um emparelhamento perfeito em G pode-se remover uv dele (que obrigatóriamente pertence a ele) e gerar um emparelhamento perfeito em H (já que nenhuma aresta adjacente a v diferente de uv pode pertencer ao emparelhamento perfeito em G).

Um emparelhamento perfeito E qualquer de G gera um emparelhamento perfeito em cada uma das árvores T de H, pois toda aresta de E diferente de uv pertence a uma árvore de T. Logo, pode-se escolher todas as arestas que pertencem à T em E, elas obrigatóriamente cobrem todas as arestas de T, pois, se não, G não seria um emparelhamento perfeito, logo, elas formam um emparelhamento perfeito em T.

Por hipótese de indução, toda árvore de H tem no máximo um emparelhamento perfeito. Podemos separar em dois casos:

Em um caso, existe pelo menos uma árvore T de H que não tem nenhum emparelhamento perfeito. Suponha, por absurdo, que G tem um emparelhamento perfeito, como provado, ele gera um emparelhamento perfeito em toda árvore de H, logo, há um emparelhamento perfeito em qualquer árvore de H, um absurdo. Portanto, se existe uma árvore de H sem emparelhamento, não existe emparelhamento perfeito em G.

No outro caso, toda árvore de H tem exatamente um emparelhamento perfeito. Então, G tem pelo menos um emparelhamento perfeito, basta unir os os emparelhamentos de todas as árvores de H à aresta uv, isso cobre todos os vértices de G e gera um emparelhamento perfeito. Por outro lado, G não tem dois emparelhamentos distintos. Seja E o emparelhamento descrito pela união dos emparelhamentos das árvores de H à aresta uv. Suponha, por absurdo, que G contém outro emparelhamento perfeito E' tal que $E \neq E'$. Assim, existe pelo menos uma aresta α em E que não pertence a E', seja T a árvore que contém α, sabemos que E' gera um emparelhamento perfeito em T que contém α, um absurdo pois T tem exatamente um emparelhamento perfeito e ele só contém arestas de E, ou seja, não contém α. Ou seja, nos dois casos, ou G não tem emparelhamentos perfeitos, ou G tem exatamente um emparelhamento perfeito. Logo, está provada a tese. $\square$