

MAC0343: Prova 1

20 de Setembro de 2016

Victor Sena Molero - 8941317

Problema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz. Prove que vale precisamente uma das seguintes alternativas:

i existe $x \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $Ax = 0$ e $x \neq 0$;

ii existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y < 0$.

Resposta. Queremos provar que vale exatamente um entre (i) e (ii). Para provar isso, vamos considerar um PL e seu dual.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.a.} \quad & y \in \mathbb{R}^m \\ & A^T y \leq c \end{aligned} \tag{2}$$

Vamos provar, primeiro que vale pelo menos um entre (i) e (ii). Assuma, para a matriz A de 1 e 2 que não vale (i), então, no programa 1, $x = 0$ é o único ponto viável. Temos, então, que para todo $c \in \mathbb{R}^n$, 1 é viável e tem solução ótima $\min c^T x = 0$.

Pelo teorema 12 (Dualidade Forte de PL), segue que 2 é viável, portanto, existe $A^T y \leq c$. Basta escolher $c < 0$ e temos que $A^T y < 0$, ou seja, vale (ii).

Agora, vamos provar que vale no máximo 1 entre (i) e (ii). Assuma que vale (i) e (ii), então, existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y < 0$, escolhemos, nos programas 1 e 2, $b = 0$ e $c = A^T y$, assim, temos que 2 é viável. Além disso, já que vale (i), existe $0 \neq x \in \mathbb{R}_+^n$.

Pelo teorema 7 (Dualidade Fraca de PL), $c^T x \geq b^T y = 0^T y = 0$, porém, já que $c < 0$ e $0 \neq x \geq 0$, $c^T x < 0$, uma contradição. Com isso, concluímos que vale exatamente 1 dentre (i) e (ii). \square

Problema 2

Sejam $X, S \in \mathbb{S}^n$. Prove que $0 \prec S \preceq X \Rightarrow 0 \prec X^{-1} \preceq S^{-1}$.

Problema 3

Sejam $X, S \in \mathbb{S}^n$. Prove que

i $X, S \in \mathbb{S}_+^n \Rightarrow X \circ S \succeq 0$;

ii $X, S \in \mathbb{S}_{++}^n \Rightarrow X \circ S \succ 0$;

iii $X, S \in \mathbb{S}_{++}^n \Rightarrow X \circ S \succeq (X^{-1} \circ S^{-1})^{-1}$;

iv $X, S \in \mathbb{S}_{++}^n \Rightarrow X \circ S \succeq (X \circ S)^{-1}$.

Problema 4

Seja n um inteiro positivo. Determine o valor ótimo do seguinte programa semidefinido:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \mathbf{1}^T + 4z_1 \\
 \text{s.a.} \quad & y \in \mathbb{R}^n, \\
 & z \in \mathbb{R}^{n+1}, \\
 & \begin{bmatrix} -y_j & -z_j \\ -z_j & 2z_{j+1} \end{bmatrix} \succeq a, \quad \forall j \in [n], \\
 & z_{n+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Problema 5

Seja $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$. Considere o programa semidefinido

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \langle C, X \rangle \\
 \text{s.a.} \quad & \langle A_i, X \rangle, \quad \forall i \in [m], \\
 & x \in \mathbb{S}_+^n,
 \end{aligned} \tag{4}$$

onde $n := m := 3$,

$$C := e_1 e_2^T + e_2 e_1^T, A_1 := e_2 e_2^T, A_2 := e_1 e_3^T + e_3 e_1^T, A_3 := -C + 2e_3 e_3^T \text{ e } b := 2\gamma e_3$$

Problema 6

Seja $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{E}$ um cone convexo e fechado num espaço euclidiano. Prove que $K^{**} = K$.

Problema 7

Seja $X \in \mathbb{S}^n$. Prove que $X \succ 0 \iff \det(X[\{1, \dots, k\}]) > 0$ para todo $k \in [n]$.

Resposta. Seja $X \in \mathbb{S}^n$, vamos provar a tese sugerida pelo enunciado por indução em n . Se $n = 1$, temos que $X \succ 0 \iff X > 0 \iff \det(X) > 0$. Agora tome por hipótese de indução que a tese vale para $n - 1$. Seja, então, $X \in \mathbb{S}^n$. X pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}y \\ y^T \alpha \end{bmatrix}.$$

Vamos provar a ida, ou seja, assumamos que $X \succ 0$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, $h^T X h > 0$, podemos definir

$$h = \begin{bmatrix} \bar{h} \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos que $h^T X h = \bar{h}^T \bar{X} \bar{h} > 0$ para todo $\bar{h} \in \mathbb{R}^{n-1}$, logo, $\bar{X} \succ 0$. Assim, $\det(X[\{1, \dots, k\}]) > 0$ para todo $k \in [n - 1]$. Além disso, $\det(X) = \det(\bar{X}) \det(\alpha - y^T \bar{X} y)$. Pelo Ex. 18 (Complemento de Schur),

$\alpha - y^T \bar{X} y > 0$, já que $X \succ 0$. Assim, $\det(X) > 0$. Logo, provamos que $X \succ 0 \implies \det(X[\{1, \dots, k\}]) > 0$ para todo $k \in [n]$.

Agora precisamos assumir que $\det(X[\{1, \dots, k\}]) > 0$ e provar que $X \succ 0$. Mais uma vez, usaremos a mesma decomposição que utilizamos na prova da ida. E chegamos, novamente, à fórmula $\det(X) = \det(\bar{X})\det(\alpha - y^T \bar{X} y)$. Sabemos que $\det(X) > 0$ e $\det(\bar{X}) > 0$, logo $\det(\alpha - y^T \bar{X} y) > 0$, porém, $\alpha - y^T \bar{X} y \in \mathbb{R}$, logo, só tem determinante positivo se for positivo, portanto, novamente pelo Ex. 18, $X \succ 0$. \square

Problema 8

Prove que $\text{int}(\mathbb{S}_+^n) = \mathbb{S}_{++}^n$.

Resposta. Primeiro, vamos provar $\mathbb{S}_{++}^n \subseteq \text{int}(\mathbb{S}_+^n)$. Seja $x \in \mathbb{S}_{++}^n$ e $\epsilon = \max_{\substack{u \in \mathbb{B} \\ h^T u h \neq 0}} \left| \frac{h^T x h}{h^T u h} \right|$.

Temos que para todo $u \in \mathbb{B}$

$$h^T(x + \epsilon u)h = h^T x h + \epsilon h^T u h,$$

o que nos dá dois casos:

1. se $h^T u h \geq 0$, $h^T(x + \epsilon u)h \geq h^T x h > 0$;
2. se $h^T u h < 0$, $h^T(x + \epsilon u)h = h^T u h + \epsilon h^T u h \geq h^T x h - h^T x h = 0$.

Desta forma, em todos os casos possíveis, $h^T x h \geq 0$, logo, $x \in \mathbb{S}_+^n$.

Agora, vamos provar que $\text{int}\mathbb{S}_+^n \subseteq \mathbb{S}_{++}^n$. Seja $x \in \text{int}(\mathbb{S}_+^n)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{B}$,

$$h^T(x + \epsilon u)h \geq 0, \text{ portanto}$$

$$h^T x h + \epsilon h^T u h \geq 0.$$

Escolha $u = -I/\sqrt{(n)}$ e qualquer $h \neq 0$.

$$h^T x h - \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \geq 0,$$

$$h^T x h \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \geq 0, \text{ ou seja}$$

$$x \in \mathbb{S}_{++}^n.$$

Com isso, concluímos que $\text{int}(\mathbb{S}_+^n) = \mathbb{S}_{++}^n$. \square