Problema 1

Sejam $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. Prove que os conjuntos

$$\{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X \rangle \leq \alpha\} \text{ e } \{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X \rangle = \alpha\}$$

são não-vazios, convexos e compactos. Mostre ainda que o interior do primeiro conjunto não é vazio.

Resposta

Vamos chamar o primeiro conjunto de A e o segundo de B, isto é

$$A = \{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X \rangle \leq \alpha\} \text{ e}$$

$$B = \{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X \rangle = \alpha\}.$$

Agora, devemos provar algumas propriedades sobre A e B.

Proposição 1.1. *A e B são não-vazios.*

Demonstração. Já que $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$, $\bar{S} \neq 0$, logo $\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle \neq 0$. Escolhermos $\beta = \dfrac{\alpha}{\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle}$. Já que $\alpha > 0$ e $\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle > 0$, $\beta > 0$. Agora, escolhemos $\bar{X} = \beta \bar{S}$. Temos que para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^T \bar{X} h = h^T \beta \bar{S} h = \beta h^T \bar{S} h > 0,$$

portanto, $\bar{X} \in \mathbb{S}^n_{++} \subseteq \mathbb{S}^n_{+}$. Além disso, $\langle \bar{S}, X \rangle = \alpha$. Logo, $\bar{X} \in A$ e $\bar{X} \in B$. Portanto, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. □

Proposição 1.2. *A e B são convexos.*

Demonstração. Agora, queremos mostrar que A e B são convexos. Sejam $X, Y \in \mathbb{S}^n_{+}$ quaisquer escolhemos $Z = (X + Y)/2$. Temos que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^T Z h = h^T (X + Y) h/2 = (h^T X h + h^T Y h)/2 > 0,$$

então $Z \in \mathbb{S}^n_{++}$, além disso,

$$\langle Z, \bar{S} \rangle = (\langle X, \bar{S} \rangle + \langle Y, \bar{S} \rangle)/2.$$

Assim, se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X, \bar{S} \rangle = \langle Y, \bar{S} \rangle = \beta$, então $\langle Z, \bar{S} = \beta$, ou seja, B é convexo. Além disso, se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X, \bar{S} \rangle \leq \beta$ e $\langle Y, \bar{S} \rangle \leq \beta$, então, $\langle Z, \bar{S} \rangle \leq \beta$, ou seja, A é convexo. □

Proposição 1.3. *A e B são limitados.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathbb{S}^n \setminus \{0\}$ e $X \in A$. Sabemos que A é limitado se e somente se existe $\theta \in \mathbb{R}_+$ tal que $X + \theta T \notin A$.

Se $\langle T, \bar{S} > 0 \rangle$, basta escolher $\theta = \dfrac{\alpha - \langle X, \bar{S} \rangle}{\langle T, \bar{S} \rangle} + 1$. Já que $\alpha \geq \langle X, \bar{S} \rangle$, $\theta \geq 1 > 0$, logo, $\theta \in \mathbb{R}_+$ e $\langle X + \theta T, \bar{S} \rangle = \alpha + \langle T, \bar{S} \rangle > \alpha$, logo, $X + \theta T \notin A$.

Caso contrário, pelo **Ex. 21**, já que $X \in \mathbb{S}^n_{++}$, $T \notin \mathbb{S}^n_{+} \setminus 0$. Logo, existe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$h^T T h < 0, \text{ portanto,}$$

se $\theta = -\dfrac{h^T X h}{h^T T h} + 1$, $\theta \geq 1 > 0$. Logo, $\theta \in \mathbb{R}_+$ e já que

$$h^T (X + \theta T) h = h^T X h + \theta h^T T h = 0 + h^T T h < 0,$$

$X + \theta T \notin \mathbb{S}^n_{++}$, logo, $X + \theta T \notin A$. Assim, mostramos que A é limitado. Já que $B \subseteq A$, B também é limitado. □

Proposição 1.4. *A e B são fechados.*

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{S}^n_{++}$ é fechado. $C = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S} \rangle \leq \alpha\}$ é um semiespaço, logo, é fechado. $D = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S} \rangle = \alpha\}$ é um hiperplano, logo, é fechado. $A = \mathbb{S}^n_{++} \cap C$ e $B = \mathbb{S}^n_{++} \cap D$, ou seja, tanto A quanto B são fechados. □

Proposição 1.5. *A tem interior não vazio.*

Demonstração. Seja $X = \dfrac{\alpha \bar{S}}{2\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle} \in A$. Já que $\mathbb{S}^n_{++}$ é aberto, existe um $\bar{\theta} \in \mathbb{R}_+$ tal que $X + \theta T \in \mathbb{S}^n_{++}$ para todo $T \in \mathbb{B}$ e θ que respeite $\bar{\theta} \geq \theta \in \mathbb{R}_+$. Escolhemos agora $\theta = \min(\bar{\theta}, \dfrac{\alpha}{4\langle \bar{S}, \bar{S} \rangle})$. Temos que, para todo $T \in \mathbb{B}$,

$$\langle X + \theta T, \bar{S} \rangle = \langle X + \bar{S} \rangle + \theta \langle T, \bar{S} \rangle = \alpha/2 + \theta \langle T, \bar{S} \rangle,$$

por Cachy-Schwartz (**Teo. 37**) e pela definição de θ, respectivamente, temos

$$\alpha/2 + \theta \langle T, \bar{s} \rangle \leq \alpha/2 + \theta \langle \bar{S}, \bar{S} \rangle \leq \alpha/2 + \alpha/4 \leq \alpha.$$

Portanto, para todo $T \in \mathbb{B}$, $X + \theta T \in A$, logo, X pertence ao interior de A e o interior de A é não-vazio. □

Com isso, temos que A e B são não-vazios, convexos e compactos e A tem interior não-vazio, como pedido pelo execício.

Problema 2

Seja $\mathcal{A} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear e $b \in \mathbb{R}^m$. Seja $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $w_1 \geq \cdots \geq w_n$. Formule o seguinte problema de otimização como um programa semidefinido:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w^T \lambda^{\downarrow}(X) \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n. \end{array}$$

Resposta

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w^T \lambda^{\downarrow}(X) \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n. \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mu \\ \text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\ & X \in \mathbb{S}^n, \\ & \mu \in \mathbb{R}, \\ & w^T \lambda^{\downarrow}(X) \leq \mu. \end{array} \tag{2.1}$$

Vamos definir $\gamma \in \mathbb{R}^{0 \oplus [n]}$ e $\hat{w} \in \mathbb{R}^n$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\gamma_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\downarrow}(X), && \forall k \in [n], \\ &\gamma_0 = 0, \\ &\hat{w}_k = w_k - w_{k+1}, && \forall k \in [n-1], \\ &\hat{w} = w_n. \end{aligned}$$

Temos

$$w^T\lambda^{\downarrow}(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i\lambda_i^{\downarrow}(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\gamma_i(X) - \gamma_{i-1}(X)) = \sum_{i=1}^{n} w_i\gamma_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} w_i\gamma_{i-1}(X) =$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i(X)(w_i - w_{i+1}) + \gamma_n(X)w_n = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(X)\hat{w}_i = \hat{w}^T\gamma[n].$$

Além disso, já que $\hat{w} \geq 0$, para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\hat{w}^T\gamma[n] \leq \mu \Leftrightarrow \text{existe } \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \gamma[n] \leq \hat{\gamma} \text{ e } \hat{w}^T\hat{\gamma} \leq \mu.$$

Assim, podemos escrever (**??**) como

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \mu \\
\text{sujeito a} & \mathcal{A}(X) = b, \\
& X \in \mathbb{S}^n, \\
& \mu \in \mathbb{R}, \\
& \hat{\gamma} \in \mathbb{R}^n, \\
& \gamma[n] \leq \hat{\gamma}, \\
& w^T\lambda^{\downarrow}(X) \leq \mu.
\end{array}$$