Problema 3

Apresente uma versão desaleatorizada da 0.5-aproximação probabilística apresentada para o problema do $\textsc{MaxCut}(V, E, w)$.

Resposta. Primeiro, vamos definir o custo de um corte $\emptyset \neq S \subset V$ por

$$c(S) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in S \\ v \notin S}} w_{uv}.$$

Agora, definimos a variável aleatória X_S como o valor do corte de um conjunto S escolhido pelo algoritmo criado no item anterior. Temos que a esperança de X_S é dada por:

$$E[X_S] = \sum_{\emptyset \neq S \subset V} c(S).$$

Nosso algoritmo vai gerar um conjunto S que define o corte final. Para isso, vamos manter dois conjuntos $\hat{W}$ e $\hat{S}$, que representam, respectivamente, os elementos já processados pelo algoritmo e os elementos para os quais se escolheu pertencer a S. Isto é, ao último passo do algoritmo, teremos $\hat{W} = V$ e S será definido pelo $\hat{S}$ e retornado pelo algoritmo.
Vamos considerar um passo qualquer do algoritmo, ou seja, temos dois conjuntos $\hat{S}$ e $\hat{W}$ como definidos acima e queremos escolher um $v \in V \setminus \hat{W}$. Temos

$$E[X_S \mid \hat{W} \cap S = \hat{S}] = 0.5 * E[X_S \mid (\hat{W} \cup v) \cap S = \hat{S}] + 0.5 * E[X_S \mid (\hat{W} \cup v) \cap S = \hat{S} \cup v].$$

Portanto,

$$\max(E[X_S \mid (\hat{W} \cup v) \cap S = \hat{S}], E[X_S \mid (\hat{W} \cup v) \cap S = \hat{S} \cup v]) \geq E[X_S \mid \hat{W} \cap S = \hat{S}]. \tag{3.1}$$

Se pensarmos em esperanças condicionadas, podemos simplesmente escolher se $v \in S$ ou $v \notin S$ de acordo com a escolha que maximize $E[X_S|\hat{W} \cap S = \hat{S}]$. Pela desigualdade (3.1), a cada passo, esta esperança só aumenta. Portanto, se $\bar{W}$ e $\bar{S}$ são os $\hat{W}$ e $\hat{S}$ criados após o último passo do algorimto, temos

$$E[X_S \mid (\bar{W} \cap S) = \bar{S}] = E[X_S \mid (V \cap S) = \hat{S}] = E[X_S \mid S = \hat{S}] = c(\hat{S}),$$

porém, já que sempre escolhemos a opção que maximiza a esperança para formar $\hat{S}$ e $\hat{W}$, temos, por (3.1),

$$E[X_S \mid (\bar{W} \cap S) = \bar{S}] \geq E[X_S \mid (\hat{W} \cap S) = \hat{S}]$$

para quaisquer $\hat{W}$ e $\hat{S}$ gerados em qualquer passo do algoritmo. Já que, antes do primeiro passo, $\hat{W} = \hat{S} = \emptyset$, temos, para qualquer solução ótima S^*,

$$E[X_S \mid (\bar{S} \cap S) = \bar{S}] \geq E[X_S \mid (\emptyset \cap S) = \emptyset] = E[X_S] = \sum_{uv \in E} 0.5 w_{uv} = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in S^* \\ v \notin S^*}} 0.5 w_{uv} = 0.5 opt(V, E, w).$$

Portanto, sempre escolher a opção que maximize a esperança, ou seja, seguir o método das esperanças condicionadas, gera uma 0.5-aproximação para o problema $\textsc{MaxCut}(V, E, w)$. Podemos escrever o pseudo-código deste algoritmo agora. Primeiro, vamos escrever uma função auxiliar $\textsc{CalcEsp}(\hat{W}, \hat{S}, V, E, w)$ que calcula o valor $E[X_S \mid \hat{W} \cap S = \hat{S}]$.

função $\textsc{CalcEsp}(\hat{W}, \hat{S}, V, E, w)$
  $r \leftarrow 0$
  para $uv \in E$ **faça**
    se $u \in \bar{W}$ e $v \in \bar{W}$ **então**
      se $u \in \bar{S}$ xor $v \in \bar{S}$ **então**
        $r \leftarrow r + w_{uv}$
    senão se $u \in \bar{W}$ ou $v \in \bar{W}$ **então**
      $r \leftarrow r + \frac{1}{2} w_{uv}$
  devolve r

E, agora, podemos escrever o algoritmo $\textsc{MaxCut-Dealeatorizado}(V, E, w)$ que utiliza $\textsc{CalcEsp}$ como função auxiliar.

função $\textsc{MaxCut-Dealeatorizado}(V, E, w)$
  $\hat{W} \leftarrow \emptyset$
  $\hat{S} \leftarrow \emptyset$
  para $v \in V$ **faça**
    $\hat{W} \leftarrow \hat{W} \cup v$
    $a \leftarrow \textsc{CalcEsp}(\hat{W}, \hat{S} \cup v, V, E, w)$
    $b \leftarrow \textsc{CalcEsp}(\hat{W}, \hat{S}, V, E, w)$
    se $a \geq b$ **então**
      $\hat{S} \leftarrow \hat{S} \cup v$
  devolve $\hat{S}$

$\square$