Lista 5

Victor Sena Molero - 8941317

March 23, 2016

Ex 8. Descreva um algoritmo que, dados n inteiros no intervalo de 1 a k, preprocesse sua entrada e então responda em $O(1)$ qualquer consulta sobre quantos dos n inteiros dados caem em um intervalo $[a..b]$. O preprocessammento efetuado pelo seu algoritmo deve consumir tempo $O(n+k)$.

Resposta. Para resolver o problema em tempo linear podemos, primeiro, inicializar um vetor c de contagem de tamanho $k+1$ (de 0 a k, inclusive) com todos os valores iguais a 0 em tempo $O(k)$. Depois, precisamos percorrer o vetor de entrada v e, para cada valor v_i, somar 1 a c_{v_i}, isso é feito em $O(n)$.
Agora, basta acumular o valor do vetor c nele mesmo, ou seja, percorrer o vetor c de 1 a k efetuando $c_i = c_{i-1} + c_i$, que também custa $O(k)$. Assim, nosso algortimo preprocessa o vetor de maneira conveniente em $O(k) + O(n) + O(k) = O(n+k)$.
Para responder a uma query (a, b) basta imprimir o valor de $c_b - c_{a-1}$. O fato do valor $a-1$ ser consultado justifica a posição 0 no vetor c. Além disso, se não houver garantia de que $1 \leq a, b \leq k$ basta executar, antes de calcular a resposta, $a = min(max(a, 1), k)$ e $b = min(max(b, 1), k)$. □

Algoritmo.

```
function PRE_PROCESSA
    i ← 0
    while i ≤ k do
        c[i] ← 0
        i ← i + 1
    end while
    i ← 1
    while i ≤ n do
        c[v[i]] ← c[v[i]] + 1
        i ← i + 1
    end while
    i ← 1
    while i ≤ k do
        c[i] ← c[i − 1] + c[i]
        i ← i + 1
    end while
end function
```

function CONSULTA(a, b)
  $a = max(min(a, k), 1)$
  $b = max(min(b, k), 1)$
  return $c[b] - c[a-1]$
end function

□

Ex 13. Mostre como multiplicar dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ usando apenas três multiplicações reais. O seu algoritmo deve receber como entrada os números a, b, c e d e devolver os números $ac-bc$ (componente real do produto) e $ad+bc$ (componente imaginária do produto).

Algoritmo.
  $r_1 \leftarrow (a+b) * (c-d)$
  $r_2 \leftarrow b * c$
  $r_3 \leftarrow a * d$
  return $r_1 - r_2 + r_3, r_2 + r_3$

□