Problema 11

Aplique o método dual ao problema da cobertura mínima por conjuntos (MinCC), definido na seção 2.2. Mostre que o algoritmo resultante é uma β-aproximação, onde β é o número máximo de conjuntos em que um elemento aparece.

Resposta. Primeiro, precisamos formular o primal e o dual do problema (MinCC). Seja E o conjunto de elementos do problema e $\mathcal{S}$ o conjunto de conjuntos. Seja, também $c \in \mathbb{Q}_{\geq}^{|\mathcal{S}|}$ o vetor de custos dos conjuntos em $\mathcal{S}$. Precisamos formular o primal e o dual usados na técnica dual nesta análise.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x & & \\
\text{s.a.} \quad & x(\delta(e)) \geq 1 & & \forall e \in E \\
& x_s \geq 0 & & \forall s \in \mathcal{S}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{1}^T y & & \\
\text{s.a.} \quad & y(s) \leq c_s & & \forall s \in \mathcal{S} \\
& y_e \geq 0 & & \forall e \in E
\end{aligned} \tag{2}
$$

Com $y(s) = \sum\limits_{e \in s} y_e$ para todo $s \in \mathcal{S}$ e $x(\delta(e)) = \sum\limits_{s \in \delta(e)} x_s$ para todo $e \in E$. O vetor $\tilde{x}$ tal que $\tilde{x}_s = 1 \forall s \in \mathcal{S}$ é uma solução viável do primal enquanto o vetor nulo é viável no dual. Assim, vale o teorema da dualidade forte e soluções ótimas deste programa devem respeitar folgas complementares e, também, se $\bar{x}$ é ótimo no primal e $\bar{y}$ é ótimo no dual,

$$\text{opt}(E, \mathcal{S}, c) \geq c^T x = \mathbb{1}^T.$$

Escolhemos, então, o conjunto C de todos os conjuntos de $\mathcal{S}$ que respeitam $\bar{y}(s) = c_s$. Já que valem folgas complementares, se $\bar{x}_s > 0$, então o conjunto s foi escolhido, logo, para todo $e \in E$, pelo menos um s foi escolhido tal que $e \in s$, assim, C é uma cobertura por conjuntos do conjunto E.

Agora, temos que

$$c(C) = \sum_{s \in \mathcal{S}} c_s = \sum_{s \in \mathcal{S}} \bar{y}(s),$$

agora, se cada elemento aparece no máximo β vezes em cada conjunto, temos que

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \bar{y}(s) \leq \beta \bar{y} E = \beta \text{opt}(E, ,c).$$

Assim, a estratégia apresentada é uma β-aproximação para o problema MinCC. □

Problema 12

O MinCA é um caso particular "fácil"do MinCC: existe um algoritmo polinomial que o resolve. Mostre que o método dual dá uma Δ-aproximação polinomial para o MinCA, onde Δ é o grau máximo em G.

Resposta. É possível modelar uma instância de MinCA(G, c) com uma instância de MinCC$(E, \mathcal{S}, c)$. Basta escolher $E = V(G)$, $\mathcal{S} = E(G)$ e usar o mesmo vetor de custos. Assim, temos que cada elemento de E pertence a no máximo Δ conjuntos de $\mathcal{S}$. Assim, o método dual dá uma Δ-aproximação para o problema. □