Problema 1

Sejam $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. Prove que os conjuntos

$$\{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X\rangle \leq \alpha\} \text{ e } \{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X\rangle = \alpha\}$$

são não-vazios, convexos e compactos. Mostre ainda que o interior do primeiro conjunto não é vazio.

Resposta

Vamos chamar o primeiro conjunto de A e o segundo de B, isto é

$$A = \{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X\rangle \leq \alpha\} \text{ e}$$

$$B = \{X \in \mathbb{S}^n_{++} \mid \langle \bar{S}, X\rangle = \alpha\}.$$

Agora, devemos provar algumas propriedades sobre A e B.

Proposição 1.1. *A e B são não-vazios.*

Demonstração. Já que $\bar{S} \in \mathbb{S}^n_{++}$, $\bar{S} \neq 0$, logo $\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle \neq 0$. Escolhermos $\beta = \dfrac{\alpha}{\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle}$. Já que $\alpha > 0$ e $\langle \bar{S}, \bar{S}\rangle > 0$, $\beta > 0$. Agora, escolhemos $\bar{X} = \beta\bar{S}$. Temos que para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^T\bar{X}h = h^T\beta\bar{S}h = \beta h^T\bar{S}h > 0,$$

portanto, $\bar{X} \in \mathbb{S}^n_{++} \subseteq \mathbb{S}^n_{+}$. Além disso, $\langle \bar{S}, X\rangle = \alpha$. Logo, $\bar{X} \in A$ e $\bar{X} \in B$. Portanto, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 1.2. *A e B são convexos.*

Demonstração. Agora, queremos mostrar que A e B são convexos. Sejam $X, Y \in \mathbb{S}^n_{+}$ quaisquer escolhemos $Z = (X+Y)/2$. Temos que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^TZh = h^T(X+Y)h/2 = (h^TXh + h^TYh)/2 > 0,$$

então $Z \in \mathbb{S}^n_{++}$, além disso,

$$\langle Z, \bar{S}\rangle = (\langle X, \bar{S}\rangle + \langle Y, \bar{S}\rangle)/2.$$

Assim, se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X, \bar{S}\rangle = \langle Y, \bar{S}\rangle = \beta$, então $\langle Z, \bar{S} = \beta$, ou seja, B é convexo. Além disso, se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X, \bar{S}\rangle \leq \beta$ e $\langle Y, \bar{S}\rangle \leq \beta$, então, $\langle Z, \bar{S}\rangle \leq \beta$, ou seja, A é convexo. $\square$

Proposição 1.3. *A e B são limitados.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathbb{S}^n \setminus \{0\}$ e $X \in A$. Sabemos que A é limitado se e somente se existe $\theta \in \mathbb{R}_+$ tal que $X + \theta T \notin A$.
Se $\langle T, \bar{S} > 0\rangle$, basta escolher $\theta = \dfrac{\alpha - \langle X, \bar{S}\rangle}{\langle T, \bar{S}\rangle} + 1$. Já que $\alpha \geq \langle X, \bar{S}\rangle$, $\theta \geq 1 > 0$, logo, $\theta \in \mathbb{R}_+$ e $\langle X + \theta T, \bar{S}\rangle = \alpha + \langle T, \bar{S}\rangle > \alpha$, logo, $X + \theta T \notin A$.
Caso contrário, pelo **Ex. 21**, já que $X \in \mathbb{S}^n_{++}$, $T \notin \mathbb{S}^n_{+} \setminus 0$. Logo, existe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$h^TTh < 0, \text{ portanto,}$$

se $\theta = -\dfrac{h^TXh}{h^TTh} + 1$, $\theta \geq 1 > 0$. Logo, $\theta \in \mathbb{R}_+$ e já que

$$h^T(X+\theta T)h = h^TXh + \theta h^TTh = 0 + h^TTh < 0,$$

$X + \theta T \notin \mathbb{S}^n_{++}$, logo, $X + \theta T \notin A$. Assim, mostramos que A é limitado. Já que $B \subseteq A$, B também é limitado. $\square$

Proposição 1.4. *A e B são fechados.*

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{S}^n_{++}$ é fechado. $C = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S} \rangle \leq \alpha\}$ é um semiespaço, logo, é fechado. $D = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle X, \bar{S} \rangle = \alpha\}$ é um hiperplano, logo, é fechado. $A = \mathbb{S}^n_{++} \cap C$ e $B = \mathbb{S}^n_{++} \cap D$, ou seja, tanto A quanto B são fechados. □

Proposição 1.5. *A tem interior não vazio.*

Demonstração. □

Com isso, temos que A e B são não-vazios, convexos e compactos e A tem interior não-vazio.