Lista 2

Victor Sena Molero - 8941317

March 1, 2016

Ex 1.d. $T(n) = 7T(\lfloor n/3 \rfloor) + \Theta(n^2)$

Proof. Tentando achar um padrão

$$T(3^k) = 7T(3^{k-1}) + 3^{2k}$$

$$T(3^k) = 7(7T(3^{k-2}) + 3^{2k-2}) + 3^{2k} = 7^2T(3^{k-2}) + 3^{2k}(1 + 7 * 3^{-2})$$
$$T(3^k) = 7^2(7T(3^{k-3}) + 3^{2k-4}) + 3^{2k}(1 + 7 * 3^{-2}) = 7^3T(3^{k-3}) + 3^{2l}(1 + 7 * 3^{-2} + 7^2 * 3^{-4})$$

$$\vdots$$

Chutando e simplificando a fórmula genérica

$$T(3^k) = 7^k + 3^{2k}(\sum_{i=0}^{k-1} 7^i * 3^{-2i}) = 7^k + 3^{2k} * (7^k * 3^{-2k} - 1)/(7 * 3^{-2} - 1) =$$

$$= 7^k + (7^k - 3^{2k})/(7/9 - 1) = 7^k + (7^k - 3^{2k})/(-2/9) = 7^k + (3^{2k+2} - 9 * 7^k)/2 = (3^{2k+2} - 7^{k+1})/2$$

Fórmula simplificada

$$T(3^k) = (3^{2k+2} - 7^{k+1})/2$$

Vamos provar que ela é válida por indução. Caso $k = 0$ ($n = 1$):

$$T(3^0) = (3^2 - 7)/2 = (9 - 7)/2 = 1$$

como, esperado. Agora, assumindo que vale para $T(3^k)$ temos que

$$T(3^{k+1}) = 7(3^{2k+2} - 7^{k+1})/2 + 3^{2k+2} = (3^{2k+2}(7 + 2) - 7^{k+2})/2 =$$

$$= (3^{2k+4} - 7^{k+2})/2$$

Ou seja, a fórmula vale para $k + 1$, logo, por indução vale $\forall k \geq 0$. $\square$