Lista 8

Victor Sena Molero - 8941317

May 9, 2016

1 Exercícios

Ex 27. *Seja G um grafo de ordem n. Mostre que se n é ímpar e G tem mais do que $\Delta(G)(n-1)/2$ arestas, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.*

Resposta. Não sei :($\square$

Ex 28. *(a) Mostre que se G é um grafo bipartido, então G tem um supergrafo bipartido k-regular, onde $k = \Delta(G)$.*

(b) Usando o resultado do item (a) faça uma prova alternativa do Teorema de König (Teorema 6.2 das Notas de Aula).

Prova da parte a. Primeiro, seja G um grafo (X, Y)-bipartido, podemos assumir s.p.g. que $|X| \geq |Y|$. Podemos escolher um supergrafo G' de G que é (X, Y')-bipartido onde Y' contém Y e $|X| - |Y|$ vértices de grau 0.

Temos agora que se G' tem um grafo $\Delta(G')$-regular, temos que G tem um supergrafo $\Delta(G')$-regular e já que $\Delta(G) = \Delta(G')$, G tem um supergrafo $\Delta(G)$-regular.

Escolhemos agora o grafo G' e vamos provar, por indução na quantidade de arestas de G', que G' tem um supergrafo $\Delta(G')$-regular.

Se $|A(G')| = |X|\Delta(G')$, então G' é $\Delta(G')$-regular, trivialmente.

Caso contrário, podemos assumir, por hipótese de indução, que todo grafo que cumpre as hipóteses e tem mais do que $|A(G')|$ arestas segue a tese. Sabemos que existe um vértice de X que não tem grau $\Delta(G')$, mas sabemos também que

$$\sum_{u \in X} g_{G'}(u) = \sum_{v \in Y} g_{G'}(v) < |X|\Delta(G') = |Y|\Delta(G')$$

Então tem que haver um vértice em Y que não tem grau $\Delta(G')$ também, logo, podemos escolher estes dois vértices e adicionar uma aresta entre eles. Geramos assim um supergrafo de G' com $|A(G')| + 1$ que, é (X, Y')-bipartido e tem grau máximo $\Delta(G')$. Por hipótese de indução, este tem um supergrafo bipartido $\Delta(G')$-regular, logo, G' tem um supergrafo bipartido $\Delta(G')$-regular.

Assim, G tem um supergrafo bipartido $\Delta(G)$-regular. □

Prova da parte b. O Teorema de König diz que se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. Então seja G um grafo bipartido qualquer, podemos usar o teorema do item (a) para concluir que que existe um supergrafo H de G que é $\Delta(G)$-regular. Vamos provar que se H é um grafo k-regular então ele é k colorível, por indução em k.

Se $k = 0$ então é não há nenhuma aresta e é possível colorir ele com nenhuma cor, trivialmente.

Se $k > 0$, assumimos que a tese é válida para todo $k' = k$. Sabemos que todo grafo bipartido regular tem um emparelhamento perfeito, assim, removemos este emparelhamento de H obtendo H' $k-1$-regular, pela hipótese de indução, H' é $k-1$ colorível, podemos escolher o emparelhamento de H para gerar a nova cor em H e conseguir uma k coloração em H.

Assim, provamos que H é $\Delta(G)$-colorível, basta tirar de cada cor as arestas que não estão em G e obter uma $\Delta(G)$ coloração em G, ou seja $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. □

Ex 29. *Seja G um grafo que tem uma coloração própria na qual toda cor é usada pelo menos 2 vezes. Mostre que G tem uma coloração com $\chi(G)$ cores que tem essa mesma propriedade.*

Resposta. Não sei :(

□

Ex 30. *Seja G um grafo simples com n vértices e seja α a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G. Prove que*

(a) $n/\alpha \leq \chi(G) \leq n - \alpha + 1$

(b) Caracterize os grafos G de ordem n tais que $\chi(G) = n - \alpha + 1$.

Prova da parte a. Seja G um grafo simples com n vértices onde α é a cardinalidade máxima de um conjunto independente. Seja também C uma coloração qualquer desse grafo, temos que

$$n = \sum_{c \in C} |c| \leq \sum_{c \in C} \alpha = |C|\alpha$$

, então

$$n \leq |C|\alpha$$

, logo

$$n/\alpha \leq |C|$$

, ou seja

$$n/\alpha \leq \chi(G)$$

Por outro lado temos que, já que existe um tamanho independente de tamanho α, podemos colorir ele todo de uma cor, restam-nos $n-\alpha$ vértices. Se escolhermos uma cor distinta para cada um, teremos uma coloração de $n-\alpha+1$ cores, logo $\chi(G) \leq n-\alpha+1$. $\square$

Resposta da parte b. Se G é tal que $\chi(G) = n-\alpha+1$ temos que a coloração feita da forma descrita no exercício anterior é mínima. Assim, podemos concluir que todos os vértices que não estão no conjunto independente de tamanho α são adjacentes a todos os outros que não pertencem ao conjunto. Além disso, cada um desses vértices é adjacente a pelo menos um vértice do conjunto independente, caso contrário, haveria um conjunto independente de tamanho $\alpha+1$. Ou seja, este grafo tem um grafo completo de tamanho $n-\alpha$ e α vértices não-adjacentes entre si que são adjacentes ao grafo completo. $\square$