Lista 1

Victor Sena Molero - 8941317

March 6, 2016

Ex E1. Nos dois items deste problema vamos assumir que o grafo G é bipartido em G_1 e G_2. Também vamos assumir s.p.g. que $|V(G_1)| \leq |V(G_2)|$ e definir $n = |V(G)|$ e $a = |V(G_1)|$. É fácil ver que $|V(G_2)| = n - a$. Sabemos também que o máximo de arestas que este grafo pode ter é $a(n - a)$.

Ex E1 (a). Prove que um grafo simples de ordem n com mais do que $n^2/4$ arestas não é bipartido.

Proof. Sabemos que $a \leq n/2$, já que $|V(G_1)| \leq |V(G_2)|$.

Se $a < n/2$, existe um k tal que $n/2 \geq k > 0$ e $a = n/2 - k$. Temos que $|A(G)| \leq a(n-a) = (n/2 - k)(n - n/2 + k) = n^2/4 - k^2 < n^2/4$. E, também, se $a = n/2$, temos que $|A(G)| \leq a(n - a) = (n/2)^2 = n^2/4$.

Logo, é impossível que $|A(G)| > n^2/4$. $\square$

Ex E1 (b). Encontre todos (diga como são) os grafos bipartidos de ordem n com $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas. Justifique.

Proof. Estes grafos tem lados de grau $\lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$ e são completos.

Sabemos que $a \leq \lfloor n/2 \rfloor$, já que $|V(G_1)| \leq |V(G_2)|$.

Se n é ímpar e $a < \lfloor n/2 \rfloor$, temos que existe um k tal que $\lfloor n/2 \rfloor \geq k > 0$ e $a = \lfloor n/2 \rfloor - k$. Temos, também que $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$. Assim:

$$a(n-a) = ((n-1)/2 - k)(n - (n-1)/2 + k) = ((n-1)/2 - k)((n+1)/2 + k) =$$

$$= (n/2 - (1+2k)/2)(n/2 + (1+2k)/2) = n^2/4 - ((1+2k)/2)^2 = n^2/4 - (k+1)^2 \leq$$

$$\leq n^2/4 - 1 < \lfloor n^2/4 \rfloor$$

Se n é par, temos que $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ e $\lfloor n^2/4 \rfloor$ e já provamos no item a que $a < n/2 \implies a(n-a) < n^2/4 = \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Agora, se $n = \lfloor n/2 \rfloor$ com um n par, temos que $a(n-a) = n^2/4 = \lfloor n^2/4 \rfloor$. Mas com um n ímpar temos $a(n-a) = (n-1)/2(n+1)/2 = (n^2-1)/4$, por outro lado, n^2 é impar e

$$\lfloor n^2/4 \rfloor = (n^2-1)/4 \quad \text{ou} \quad \lfloor n^2/4 \rfloor = (n^2-3)/4$$

já que $n^2/4 - \lfloor n^2/4 \rfloor < 1$. E sabemos que $(n^2-1)/4 = (n-1)/2(n+1)/2$, logo, é inteiro, por ser produto de dois inteiros, ou seja, $(n^2-3)/4$ não é inteiro. Portanto, $\lfloor n^2/4 \rfloor = (n^2-1)/4$. Ou seja, os únicos grafos bipartidos de ordem n que conseguem ter $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas tem $a = \lfloor n/2 \rfloor$. E, já que, como vimos acima, $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil = \lfloor n^2/4 \rfloor$ estes grafos devem ser completos. $\square$

Ex E2. Existe um grafo bipartido simples G tal que $\delta(G) + \Delta(G) = |V(G)|$? Justifique.

Proof. Não.

Assuma que o grafo G é bipartido em G_1 e G_2. Assumimos também, s.p.g., que $|V(G_1)| \leq |V(G_2)|$.

Assim, o grau máximo possível para um nó no grafo é $|V(G_2)|$ e o grau máximo possível para um nó em G_2 é $|V(G_1)|$, ou seja, $\Delta(G) \leq |V(G_2)|$ e $\delta(G) \leq |V(G_1)|$, logo:

$$\delta(G) + \Delta(G) \leq |V(G_1)| + |V(G_2)| = |V(G)|$$

□

Ex E3. Um grafo simples é auto-complementar se é isomorfo ao seu complemento. É possível que um grafo auto-complementar de ordem 100 tenha exatamente um vértice de grau 50? Justifique.

Proof. O grafo G tem ordem 100 e um vértice u de grau 50. Não existe nenhum outro vértice em G com grau 50. Existe um grafo $\bar{G}$ que é complementar a G.

Já que $\bar{G}$ é complementar a G, existe um vértice $v \in \bar{G}$ tal que $g_{\bar{G}}(v) = 49$. Além disso, não existe nenhum outro vértice $v' \in \bar{G}$ tal que $g_{\bar{G}}(v) = 49$ pois, se houvesse, haveria um outro vértice $u' \in G$ tal que $g_G(u) = 50$.

Agora, vamos assumir, por absurdo, que $G \cong \bar{G}$. Temos que existe um, e somente um, vértice u de grau 50 em G (e em $\bar{G}$) e, também, que existe um, e somente um, vértice v de grau 49 em G (e em $\bar{G}$).

Temos dois casos: u é adjacente a v em G ou não.

No primeiro caso, G tem seu único vértice de grau 50 adjacente ao seu único vértice de grau

49 e $\bar{G}$ não tem nenhum vértice de grau 50 adjacente a um vértice de grau 49, logo, eles não são isomorfos, um absurdo.

No segundo caso, G tem não tem nenhum vértice de grau 50 adjacente a um vértice de grau 49, enquanto $\bar{G}$ tem uma aresta entre um vértice de grau 50 e um vértice de grau 49. Assim, eles não são isomorfos, um absurdo.

Já que não existe nenhum caso onde não atingimos um absurdo, a hipótese inicial é falsa e podemos afirmar que não é possível que um grafo auto-complementar de ordem 100 tenha exatamente um vértice de grau 50. □

Ex E4. Prove se um grafo G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então G tem um caminho cuja origem e cujo término são precisamente esses vértices.

Proof. Por definição, em uma componente conexa, existe um caminho entre cada par de vértices.

Vamos provar que, se um grafo G contém exatemente 2 vértices de grau ímpar, ambos pertencem à mesma componente.

Primeiro, assumimos, por absurdo que existe uma componente de G com um só vértice v de grau ímpar. Esta componente forma um subgrafo induzido G' onde $g_{G'}(v) = g_G(v) \quad \forall v \in G'$. E sabemos que, para todo grafo H, vale $\sum_{v \in H} g_H(v) = 2|V(H)|$, logo

$$\sum_{v \in G'} g_{G'}(v) = 2|V(G')|$$

,

porém, o primeiro lado da equação soma apenas um valor ímpar com outros pares, logo é ímpar, e o lado direito é o produto de 2 com um natural, portanto é par. Ou seja, a equação não vale em G', um absurdo.

Assim, é impossível que uma componente conexa contenha exatamente um vértice de grau ímpar, logo, os dois devem estar na mesma componente, ou seja, há um caminho entre os dois. □

Ex E5. Seja G um grafo simples. É possível que G e $\bar{G}$ sejam desconexos? Justifique.

Proof. Vamos provar que, para todo grafo G de grau $n \geq 1$, G é conexo ou $\bar{G}$ é conexo.

Se $n = 1$, G é conexo.

Vamos assumir que para um $n \geq 1$, G é conexo ou $\bar{G}$ é conexo e provar que para $n + 1$, o mesmo vale.

Temos um grafo H de grau $n + 1$, removemos um vértice arbritário v de H formando um grafo G de grau n. Pela hipótese de indução, G é conexo ou $\bar{G}$ é conexo. Vamos assumir s.p.g. que G é conexo.

Assim, se $g_H(v) \neq 0$, H é conexo, pois vai existir um caminho entre v e pelo menos um vértice de G e, já que existe um caminho entre todo par de vértices de G, existe um caminho entre v e qualquer vértice de G. Logo, existe um caminho entre todo par de vértices de H e, então, H é conexo.

Por outro lado, se $g_H(v) = 0$, $\bar{H}$ é conexo, pois, v será adjacente a todo vértice de $\bar{G}$ em $\bar{H}$, ou seja, vai haver um caminho entre todo par de vértices de $\bar{H}$.

Logo, H é conexo ou $\bar{H}$ é conexo e, portanto, vale a indução. □