Lista 4

Victor Sena Molero - 8941317

April 3, 2016

Ex 17. Seja (T, C) um par, onde T é uma árvore e $C = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ é uma coleção de subárvores de T tal que quaisquer duas delas têm pelo menos um vértice em comum. Prove que existe um vértice que pertence a todas as árvores da coleção C. Provar por indução em $|V(T)|$.

Prova. Seja T uma árvore e C uma coleção não vazia de subárvores de T tal que cada par de elementos de C tem pelo menos um vértice em comum.

Vamos provar, por indução em $|V(T)|$ que existe um vértice que pertence a todas as árvores da coleção.

Se $|V(T)| = 1$, a única subárvore possível é T, logo, o único vértice de T pertence a toda subárvore da única coleção possível. Seja $k > 1$ e suponha que vale com $|V(T)| < k$.

Se $|V(T)| = k$ escolhemos um vértice u qualquer de T. Seja C^* o conjunto de todas as subárvores em C que não contém o vértice u e $G = T - u$ a floresta que é obtida ao se remover u de T. Se $C^* = \emptyset$ todas as árvores de C compartilham o vértice u, ou seja, vale a hipótese proposta. Agora basta provarmos que vale com $C^* \neq \emptyset$.

Já que $|V(T)| > 1$, $|V(G)| \geq 1$, logo, G possui uma ou mais componentes conexas. Cada uma dessas componentes é uma árvore, pois são conexas e não possuem ciclos (foi apenas removido um vértice, é impossível formar um ciclo novo assim). Queremos encontrar uma componente T' de G que contenha uma coleção C' de subárvores de T' onde cada elemento de C' é uma subárvore de um elemento distinto de C e onde cada par de elementos possui um vértice em comum. Ou seja, procuramos por uma subárvore de T onde podemos aplicar a hipótese de indução.

Já que $C^* \neq \emptyset$ existe pelo menos um elemento de C que não contém o vértice u, escolhemos este elemento R. Já que R não contém u, R só possui vértices em uma componente de G. Se R tivesse vértices em mais de uma componente, por ser uma árvore, formaria um caminho entre dois vértices de componentes distintas de G usando apenas vértices de G, um absurdo. Podemos escolher então T' como a componente onde R está inteiramente contida.

Todo elemento de C possui pelo menos um vértice em T', já que possui uma intersecção com R. Agora, podemos escolher a coleção C' de subárvores de T' onde cada elemento de C' é a intersecção de um elemento de C com a componente T', ou seja, $C' = \{c \cap T' : c \in C\}$. Para cada elemento c de C' podemos associar um elemento $p(c) \in C$ tal que $c = p(c) \cap T'$. Vamos provar que os elementos de C' são, de fato, árvores.

Para isso basta observar que cada elemento c de C' é formado da intersecção de uma subárvore T' de T e outra subárvore $p(c)$ de T'. Se houver um ciclo em c, há um ciclo tanto em T' quanto em $p(c)$, o que é impossível. Se c for desconexo, então existe um par de vértices $u, v \in T' \cap p(c)$ com um caminho, em T' distinto do caminho em $p(c)$. Já que $T', p(c) \subseteq T$, $T' \cup p(c) \subseteq T$ e se existe um caminho distinto entre um par de vértices para cada uma das árvores, existem dois caminhos distintos na união, ou seja, a união não é uma árvore, ou seja T não é uma árvore, o que é impossível. Logo, todo elemento de c é acícilo e conexo, ou seja, é uma árvore.

Agora, vamos provar que todo par de elementos de C' possui interssecção em T'.

Seja (a, b) um par qualquer de elementos de T'. Se $a = p(a)$ e $b = p(b)$ então, por definição de C, existe intersecção entre a e b. Se $a \neq p(a)$ e $b \neq p(b)$ sabemos que $p(a)$ e $p(b)$ contém o vértice u, já que contém vértices fora da componente T', além disso, eles contém vértices dentro da componente T'. Ou seja, existe uma aresta entre u e T' em $p(a)$ e em $p(b)$, porém, só existe uma aresta em T que vai de u a um vértice de T'. Logo, a e b possuem um vértice em comum, que é o vértice de T' adjacente, em T, a u.

Caso contrário, podemos assumir s.p.g. que $a = p(a)$ e $b \neq p(b)$, logo $p(a)$ está inteiramente contida em T' e existe uma intersecção entre $p(a)$ e $p(b)$ (pela definição de C) que está contida em T' (pois $p(a)$ está em T'). Assim, a e b têm uma intersecção. Portanto, todo par de elementos em C' possui uma intersecção.

Assim, obtemos uma árvore T' tal que $|V(T')| < k$ e uma coleção C' de subárvores de T' onde cada par de elementos se intersecta. Podemos aplicar a hipótese de indução e concluir que existe um vértice v em T' que pertence a todas as árvores de C', logo, este elemento pertence a todas as árvores de C, já que as árvores de C' estão contidas nas árvores de C. E já que $v \in T'$, $v \in T$, ou seja, existe um elemento em T que pertence a todas as árvores de C.

$\square$