

Lista 1

Victor Sena Molero - 8941317

March 1, 2016

Ex E3. Um grafo simples é auto-complementar se é isomorfo ao seu complemento. É possível que um grafo auto-complementar de ordem 100 tenha exatamente um vértice de grau 50? Justifique.

Proof. O grafo G tem ordem 100 e um vértice u de grau 50. Não existe nenhum outro vértice em G com grau 50. Existe um grafo \bar{G} que é complementar a G .

Já que \bar{G} é complementar a G , existe um vértice $v \in \bar{G}$ tal que $g_{\bar{G}}(v) = 49$. Além disso, não existe nenhum outro vértice $v' \in \bar{G}$ tal que $g_{\bar{G}}(v) = 49$ pois, se houvesse, haveria um outro vértice $u' \in G$ tal que $g_G(u) = 50$.

Agora, vamos assumir, por absurdo, que $G \cong \bar{G}$. Temos que existe um, e somente um, vértice u de grau 50 em G (e em \bar{G}) e, também, que existe um, e somente um, vértice v de grau 49 em G (e em \bar{G}).

Temos dois casos: u é adjacente a v em G ou não.

No primeiro caso, G tem seu único vértice de grau 50 adjacente ao seu único vértice de grau 49 e \bar{G} não tem nenhum vértice de grau 50 conectado a um vértice de grau 49, logo, eles não são isomorfos, um absurdo.

No segundo caso, G tem não tem nenhum vértice de grau 50 adjacente a um vértice de grau 49, enquanto \bar{G} tem uma aresta entre um vértice de grau 50 e um vértice de grau 49. Assim, eles não são isomorfos, um absurdo.

Já que não existe nenhum caso onde não atingimos um absurdo, a hipótese inicial é falsa e podemos afirmar que não é possível que um grafo auto-complementar de ordem 100 tenha exatamente um vértice de grau 50. □