Теорема Рамсея, числа Рамсея | Шаг 7

29 апреля 2015 г.

Давайте вспомним вариант формулировки теоремы Рамсея в терминах раскрасок и рассмотрим такое обобщение теоремы Рамсея на три цвета. Для любых натуральных чисел r, s, t существует n, такое, что, как бы мы ни раскрасили рёбра полного графа $.K_n.$ в красный, зелёный и синий цвета, найдётся хотя бы один из трёх подграфов:

- полный подграф на r вершинах, всё рёбра которого красные,
- полный подграф на s вершинах, всё рёбра которого зелёные,
- полный подграф на t вершинах, всё рёбра которого синие.

Обозначим через $R(r, s, t)$ минимальное n , которое гарантирует нам наличие таких подграфов, и будем называть такое число трёхцветным числом Рамсея.
Примем без доказательство справедливость упомянутой теоремы. Докажите, что трёхцветное число Рамсея удовлетворяет неравенству

$$R(r,s,t) \leqslant R(r-1,s,t) + R(r,s-1,t) + R(r,s,t-1) - 1.$$

Комментарий от преподавателя:

Доказательство почти слово в слово повторяет доказательство для обычных чисел Рамсея, с той лишь разницей, что теперь мы должны выделить вершину v и рассмотреть три множества: те вершины, которые соединены с v красными рёбрами, синими и зелёными.

Докажем, что трехцветное число Рамсея удовлетворяет неравенству

$$R(r,s,t) \leqslant R(r-1,s,t) + R(r,s-1,t) + R(r,s,t-1) - 1. \tag{1}$$

Для этого рассмотрим полный граф K_n с числом вершин $n = R(r-1,s,t)+R(r,s-1,t)+R(r,s,t-1)-1$ и докажем, что как бы мы ни раскрасили его ребра в красный, зеленый и синий цвета, в нем обязательно найдется хотя бы один из трех подграфов: полный подграф на r вершинах, все ребра которого красные, либо полный подграф на s вершинах, все ребра которого зеленые, либо полный подграф на t вершинах, все ребра которого синие.

Выделим в графе K_n произвольную вершину v, а остальные вершины разобьем на три не пересекающихся множества: вершины, которые соединены с v красным ребром, поместим в множество N_r, вершины, которые соединены с v зеленым ребром, поместим в множество N_g и наконец вершины, которые соединены с v синим ребром, поместим в множество N_b. Так как граф полный, то никаких «не учтенных» вершин в нем не осталось, каждая его вершина (кроме v) принадлежит одному из указанных множеств, то есть $|N_r|+|N_g|+|N_b|+1 = n$. Также важно заметить, что вершины каждого из множеств образуют полные подграфы (клики), просто потому, что в полном графе все вершины по определению соединены между собой.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств: $|N_r| \geqslant R(r-1,s,t)$ или $|N_g| \geqslant R(r,s-1,t)$ или $|N_b| \geqslant R(r,s,t-1)$. Предположим, что это не так. Тогда должны *одновременно* выполняться три неравенства: $|N_r| \geqslant R(r-1,s,t)$ и $|N_g| \geqslant R(r,s-1,t)$ и $|N_b| \geqslant R(r,s,t-1)$. В этом случае число вершин графа будет равно.

$$\begin{aligned} n &= |N_r|+|N_g|+|N_b|+1 \leqslant R(r-1,s,t)-1+R(r,s-1,t)-1+R(r,s,t-1)-1+1 = \\ &= R(r-1,s,t)+R(r,s-1,t)+R(r,s,t-1)-2 \geqslant n \end{aligned} \tag{2}$$

Однако, мы рассматриваем граф с числом вершин $n = R(r-1,s,t)+R(r,s-1,t)+R(r,s,t-1)-1$, поэтому приходим к противоречию, которое говорит о том, что предположение неверно.

Рассмотрим случай, когда выполнено $|N_r| \geqslant R\,(r-1,s,t)$. Т. к. число вершин полного графа, образованного вершинами из множества N_r, больше или равно числу Рамсея $R\,(r-1,s,t)$ то мы гарантированно сможем найти в этом графе хотя бы один из подграфов: красный полный подграф на $r-1$ вершинах, или зеленый полный подграф на s вершинах, или синий полный подграф на t вершинах. Предположим, что мы нашли красный полный подграф на $r-1$ вершинах, тогда, добавив к этому подграфу вершину v соединенную с каждой его вершиной красным ребром (по условию отбора вершин в множество N_r), мы найдем красный полный подграф графа K_n на r вершинах. Если же мы можем найти в графе на вершинах из N_r зеленый полный подграф на s вершинах, либо синий полный подграф на t вершинах, то это означает, что и исходный граф K_nсодержит соответствующий найденный подграф. В любом случае выполняется доказываемое утверждение.

Аналогичным образом можно рассмотреть и остальные два случая: когда выполнено $|N_g| \geqslant R\,(r,s-1,t)$и когда выполнено $|N_b| \geqslant R\,(r,s,t-1)$. В каждом из них также гарантированно найдется хотя бы один из трех подграфов графа K_n: красный полный подграф на r вершинах, либо зеленый полный подграф на s вершинах, либо синий полный подграф на t вершинах.

Утверждение доказано.

Доказательство, фактически, будет повторять доказательство из предыдущего видео. Пусть известны числа $R\,(r-1,s,t)$, $R\,(r,s-1,t)$, $R\,(r,s,t-1)$ и мы хотим вывести оценку для $R\,(r,s,t)$.

Возьмём полный граф с мощностью $|G| = R\,(r-1,s,t) + R\,(r,s-1,t) + R\,(r,s,t-1) - 1$, выберем в нём произвольную вершину v и разобьём рёбра, исходящие из этой вершины на три множества: красные, зелёные, синие. Предположим, что:

- либо красных рёбер $\geqslant R\,(r-1,s,t)$;

- либо зелёных рёбер$\geqslant R\,(r,s-1,t)$;

- либо синих ребёр$\geqslant R\,(r,s,t-1)$.

Хотя бы одно из этих утверждений обязательно верное, иначе в противном случае мощность всего графа была бы:

$$|G| \leqslant (R\,(r-1,s,t)-1)+(R\,(r,s-1,t)-1)+(R\,(r,s,t-1)-1)+1 = R\,(r-1,s,t)+R\,(r,s-1,t)+R\,(r,s,t-1)-2 \tag{3}$$

и мы имеем противоречие.

Пусть верно утверждение, касаемо красных рёбер и мощность рёбер (и подграфа, образованного вершиной v и вершинами, смежными по красным рёбрам) $\geqslant R\,(r-1,s,t)$. Это означает, что либо есть полный подграф размера $r-1$ из красных рёбер + вершина v, смежная по красным рёбрам с этими $(r-1)$, вершинами - в графе есть полный подграф размера r из красных рёбер, либо полный подграф размера s из зелёных рёбер, либо полный подграф размера t из синих рёбер.

Для трёхцветного числа Рамсея оценка получена. В полном графе мощностью $|G| = \ldots$ найдётся

- либо полный подграф на r вершинах, всё рёбра которого красные,
- либо полный подграф на s вершинах, всё рёбра которого зелёные,
- либо полный подграф на t вершинах, всё рёбра которого синие.
