Пусть в связном графе *G* ровно 2*k* вершин имеют нечётную степень. Доказать, что в этом графе можно построить *k* таких путей, что каждое ребро графа *G* будет принадлежать только одному из этих путей.

Пример доказательства:   
Соединим 2*k* вершин с нечётными степенями попарно *k* рёбрами. В результате получим граф, в котором существует эйлеров цикл. Если удалить из этого цикла *k* рёбер, то цикл распадётся на *k* непересекающихся по рёбрам путей, которые нам и нужно было построить.

Разобьём 2k вершин нечётной степени на пары произвольным образом (это всегда можно сделать так как количество таких вершин чётно). Соединим вершины каждой пары друг с другом фиктивным ребром (даже если они уже были соединены), в результате получим некоторый новый граф G′ состоящий из тех же вершин и рёбер, что и граф G, но так же содержащий k фиктивных рёбер.

Заметим, что граф G′ является Эйлеровым, так как к каждой вершине исходного графа G с нечётной степенью мы добавили по одному инцидентному ребру, не затронув при этом других вершин, значит все вершины в графе G′ имеют чётную степень и кроме того он, очевидно, является связным.

Так как граф G′ - Эйлеров, в нем есть Эйлеров цикл. Найдём этот цикл, назовём его C. Цикл C содержит k фиктивных рёбер, причём эти ребра не могут быть в цикле смежными, так как мы к каждой вершине нечётной степени добавили только одно инцидентное ребро. Удалим эти k фиктивных рёбер, тогда цикл C распадётся на k путей, причём все ребра этих путей есть в исходном графе G (потому что все остальные мы удалили из цикла). Более того, по построению, это все ребра, которые есть в исходном графе G, а значит мы нашли k путей, таких что каждое ребро графа G принадлежит ровно одному из них.

Разобьём множество вершин с нечётной степенью на два не пересекающихся подмножества А и В, и присвоим их элементам индексы 1 <= i <= k. Далее если вершины ai и bi соединены ребром удалим это ребро, иначе добавим его.

Так как изначально все вершины принадлежащие А или В изначально имеют нечётную степень и у каждой из них мы изменили степень на единицу, получим граф у которого все вершины имеют чётную степень. В процессе удаления добавленных рёбер из графа мы получим k раздельных путей содержащих все рёбра графа.