

Projeto Final de Graduação

Introdução à Teoria de Ramsey em Grafos

Aluno: Victor Seixas Souza
Supervisora: Christiane Neme Campos

10 de novembro de 2016

Sumário

Prefácio	ii
1 Introdução	1
1.1 Noções de Grafos	2
1.2 Números de Ramsey	7
2 Resultados Preliminares	11
2.1 Limitantes Inferiores	16
2.2 Número de Ramsey de Grafos	18
3 Provas	19
3.1 Números Pequenos	19

Introdução e Objetivos

A Teoria de Ramsey é uma área da matemática que unifica o tema: desordem completa é impossível. Mais especificamente, observamos que se uma estrutura é grande o suficiente, então ela possui uma subestrutura bem especial e ordenada. Este fenômeno ocorre em diversos campos da matemática, como Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Este projeto aborda conceitos básicos e alguns dos resultados clássicos em Teoria de Ramsey aplicada a grafos.

O exemplo mais simples de tal corpo teórico é frequentemente apresentado na seguinte história: em uma festa com pelo menos seis pessoas, três delas se conhecem mutuamente ou três delas não se conhecem mutuamente. Se enxergarmos a relação de conhecer como simétrica, o mesmo pode ser traduzido para linguagem de Teoria de Grafos como: todo grafo com pelo menos seis vértices possui um triângulo, ou, então, o seu grafo complementar possui um triângulo. A Teoria de Ramsey inicia-se pela generalização sucessiva deste enunciado para grafos e hipergrafos.

A Teoria de Ramsey tem seu nome em homenagem ao matemático e filósofo britânico Frank P. Ramsey, por seu trabalho, em lógica, publicado em 1930 [12], mas apenas adquiriu um corpo teórico coeso na década de 1970. A área vem recebendo grande atenção nos últimos vinte anos por suas conexões com diversos campos da matemática e, ainda assim, muito dos seus problemas fundamentais permanecem sem solução. Além disso, não muito da teoria propagou-se para os livros didáticos em nível de graduação. Entretanto, é possível abordar parte da teoria sem recorrer ao ferramental mais avançado.

Considerando a lacuna da literatura citada anteriormente, este projeto tem por objetivo a elaboração de um texto introdutório à Teoria de Ramsey em grafos, em língua portuguesa. Além disso, planeja-se completar este texto com a apresentação de um ou dois tópicos mais avançados da área, que serão selecionados dentre: o método probabilístico; o lema da regularidade de

Szemerédi; ou aplicações em Teoria dos Números.

Metodologia e Plano de Trabalho

Os métodos que serão aplicados são os tradicionais utilizados na pesquisa em Combinatória. Inicialmente, o estudo se dará por meio da leitura de livros-texto [1, 2, 3, 6, 7, 8, 11], que apresentam a teoria de forma mais paulatina. Além disso, esta fase permitirá um melhor entendimento do que existe, na literatura, sobre a teoria. Em um segundo momento, o estudo terá como focos os conceitos básicos e resultados clássicos. Posteriormente, serão escolhidos dois tópicos avançados e, estes, serão estudados e incluídos no texto final. A Tabela 1 exibe o plano de trabalho proposto.

Tabela 1: Plano de Trabalho

Mês	Atividade
Agosto	Leitura preliminar da bibliografia
Setembro	Conceitos básicos e resultados Clássicos
Outubro	Tópico Avançado 1
Novembro	Tópico Avançado 2
Dezembro	Ajustes Finais

Parte das atividades desta disciplina inclui a preparação de uma monografia sobre o trabalho desenvolvido. Por esta razão, foram planejadas entregas parciais deste documento conforme explicitado na Tabela 2.

Tabela 2: Prazos para entregas

Data	Entrega
26 de Agosto	Esqueleto do Relatório
30 de Setembro	Primeiro Relatório Parcial
28 de Outubro	Segundo Relatório Parcial
25 de Novembro	Terceiro Relatório Parcial
07 de Dezembro	Relatório Final
21 de Dezembro	Relatório Final Corrigido

Ao longo de todo este período, ocorrerão reuniões de trabalho semanais com a supervisora, que visam ao acompanhamento e ao direcionamento do desenvolvimento do projeto.

Resultados Esperados

O trabalho a ser desenvolvido tem por objetivo preencher os requisitos exigidos pela disciplina MC030 – Projeto Final de Graduação por meio da elaboração de uma monografia sobre o tema escolhido. Além disso, espera-se que

ao longo deste semestre, o aluno se desenvolva do ponto de vista científico e que isto se reflita na forma como ele consegue exprimir e manipular os resultados a que vier a ser exposto.

CAPÍTULO 1

Introdução

No primeiro dia de aula em uma escolinha de matemática, a professora preparou uma gincana para entrosar os alunos. Ela os sorteou em grupos de seis, e cada grupo deveria sentar-se em mesas separadas. O objetivo era que os alunos conversassem entre si sobre o que fizeram durante as férias e potencialmente criassem novas amizades. Alguns alunos haviam sido colegas nos anos anteriores e, portanto, já se conheciam; outros alunos vieram de turmas diferentes, então não conheciam a todos. Além disso, novos alunos entram na escola todo ano para aprender matemática!

Após o sorteio, a professora supervisionou atentamente os grupos, e observou que em algumas mesas, três alunos já se conheciam. Já em outras mesas, até quatro alunos já se conheciam. Preocupada se a gincana teria o efeito desejado, ela adotou outra estratégia e focou apenas nos alunos que ainda não se conheciam. Em algumas mesas, havia três alunos que ainda não se conheciam, mas outras pareciam menos promissoras, não havendo nem três alunos que não se conheciam. Curioso que nestas mesas haviam três alunos que se conheciam. Sendo uma professora de matemática, ela se perguntou se existia algum motivo para isto acontecer. Será que se ela fizesse outro sorteio, poderia haver uma mesa em que nenhum grupo de três alunos se conhecessem e nenhum grupo de três alunos não se conhecessem? Por sorte, a professora havia estudado Teoria de Grafos, e conseguiu verificar o seguinte fato:

Fato 1.1. *Em uma mesa com seis alunos, três alunos se conhecem ou três alunos não se conhecem.*

Vamos ver agora como que a professora percebeu este fato. Considere que você seja um dos seis alunos da mesa. Dos cinco restantes, você conhece uma

quantidade, digamos c , e também não conhece uma quantidade n . Sabemos que $c + n = 5$. Isto nos dá que, ou $c \geq 3$, ou $n \geq 3$. De fato, se $c \leq 2$ e $n \leq 2$ ocorrerem simultaneamente, $5 = c + n \leq 4$, o que é absurdo. Suponha $c \geq 3$, isto significa que você conhece pelo menos três dos outros alunos, digamos Alberto, Bruna e Carlos. Se existe alguma amizade entre eles, digamos, Alberto e Carlos são amigos, então a mesa possui um grupo de três alunos que se conhece, você, Alberto e Carlos. Caso isto não ocorra, então Alberto, Bruna e Carlos formam um grupo de três alunos que não se conhecem. O caso $n \geq 3$ segue do mesmo raciocínio.

O Fato 1.1 pode ser considerado o primeiro resultado na Teoria de Ramsey e possui generalizações interessantes. Além disso, ele possui uma formulação mais clara em termos de coloração de grafos. Na próxima seção, introduziremos os conceitos da Teoria de Grafos que serão necessários para adentrar o universo da Teoria de Ramsey em grafos. Um leitor familiarizado com Grafos é convidado a fazer uma leitura rápida da seção para se familiarizar à notação utilizada neste texto.

1.1 Noções de Grafos

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, que consiste em um conjunto $V(G)$ de *vértices* e um conjunto $E(G)$ de *arestas*, disjunto de $V(G)$, em conjunto com uma função de incidência Ψ_G que associa cada aresta de G a um par de vértices de G , não necessariamente distintos. Uma aresta $e \in E(G)$ e vértices $u, v \in V(G)$ são ditos *incidentes* se $\Psi_G(e) = \{u, v\}$. Neste caso, diz-se ainda que u e v são as *extremidades* de e . A incidência relaciona elementos de conjuntos distintos, neste caso, vértices e arestas. Uma outra relação é a de adjacência, que se aplica para elementos de mesma natureza. Dois vértices u e v são ditos *adjacentes* em G se existe uma aresta e em G tal que $\Psi_G(e) = \{u, v\}$. Duas arestas e e f são ditas *adjacentes* em G se existe um vértice v em G tal que $v \in \Psi_G(e) \cap \Psi_G(f)$, isto é, se existe um vértice v que incide simultaneamente em e e f .

Vamos construir um grafo $G = (V(G), E(G))$ para ilustrar estas definições. O conjunto de vértices será $V(G) = \{u, v, w, x\}$ e o conjunto de arestas será $E(G) = \{e, f, g, h, j, k, l, s\}$. Falta definir a função de incidência Ψ_G , que associa as arestas aos vértices:

$$\begin{aligned} \Psi_G(e) &= \{v, x\} & \Psi_G(f) &= \{u, v\} & \Psi_G(g) &= \{u, v\} & \Psi_G(h) &= \{v, w\} \\ \Psi_G(j) &= \{v, w\} & \Psi_G(k) &= \{u, x\} & \Psi_G(l) &= \{w, x\} & \Psi_G(s) &= \{x\} \end{aligned}$$

Isto completa a definição do grafo G . Uma maneira interessante de representar grafos é por meio de um desenho. A Figura 1.1 representa o grafo G da seguinte maneira: os vértices são indicados por círculos e as arestas são indicadas por linhas que unem os círculos que correspondem aos vértices nos quais a aresta incide. A representação gráfica é muito importante pois nos

permite criar uma intuição sobre a estrutura de grafos. Vale a pena notar que um mesmo grafo pode possuir mais de um desenho: basta desenhar os vértices em posições diferentes do plano. De fato, a posição dos vértices e das arestas não é importante, é a relação entre os vértices e as arestas que caracteriza a estrutura do grafo.

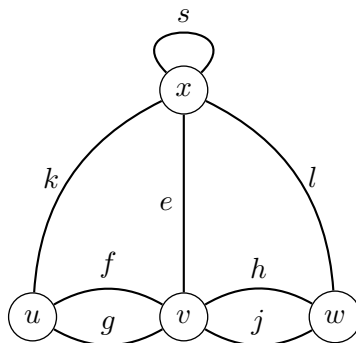


Figura 1.1: Representação gráfica do grafo G .

O desenho de um grafo pode ser um bom representante da estrutura, mas dois grafos com o mesmo desenho não são necessariamente iguais. Do ponto de vista formal, dois grafos G e H são idênticos quando $G = H$ no sentido da Teoria de Conjuntos, isto é, $V(G)$ e $V(H)$ são o mesmo conjunto, $E(G)$ e $E(H)$ são o mesmo conjunto e Ψ_G e Ψ_H são a mesma função. Por exemplo, os grafos G e H da Figura 1.2 não são idênticos pois $V(G) \neq V(H)$, no entanto, eles possuem efetivamente a mesma estrutura.

Esta noção de igualdade de grafos é, como vimos, muito restritiva. Para capturar a noção de que dois grafos diferentes podem ter a mesma estrutura, definimos um *isomorfismo* entre dois grafos G e H como um par de bijeções $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tais que elas preservam a relação de incidência, isto é, $\Psi_G(e) = \{u, v\}$ se e somente se $\Psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$. Quando existe um isomorfismo entre dois grafos G e H , dizemos que eles são *isomorfos*, e escrevemos $G \simeq H$.

Grafos isomorfos possuem essencialmente a mesma estrutura e são considerados como iguais para todos os efeitos práticos. Com efeito, muitas vezes, os nomes que os vértices possuem não tem nenhuma importância. Quando abrimos mão de definir os nomes dos vértices, temos um *grafo não rotulado*, em contrapartida com os *grafos rotulados*. Muitas vezes, apenas nos interessa a interconectividade dos vértices, então consideramos grafos não rotulados e nomeamos os vértices e arestas conforme necessário.

Formalmente, a relação de isomorfismo \simeq é uma relação de equivalência na classe de todos os grafos. As classes de equivalência são compostas por grafos rotulados que são equivalentes sob a relação de isomorfismo. Grafo não rotulado é um nome que damos à uma destas classes de equivalência,

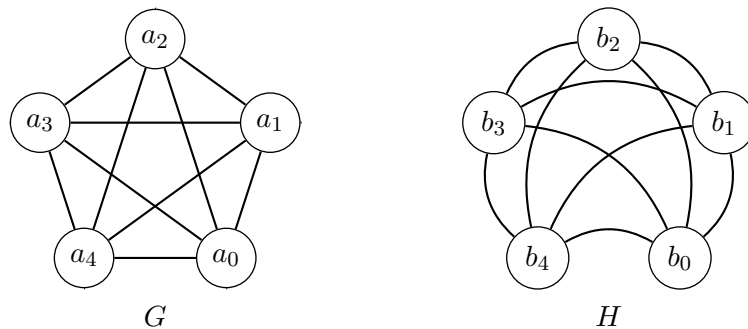


Figura 1.2: Dois grafos não idênticos G e H que são isomorfos.

não sendo um grafo propriamente dito, e sim uma entidade abstrata que carrega em si a estrutura de um grafo sem incluir os rótulos dos vértices e das arestas.

O que nos permite escolher um representante dentro desta classe sem perda de generalidade é o fato de que a maioria das propriedades estudadas pela Teoria de Grafos é invariante por isomorfismo, isto é, se um grafo tem determinada propriedade, qualquer grafo isomorfo a ele possui a mesma propriedade. Portanto, ao rotular vértices e arestas de um grafo não rotulado, podemos fazer o mesmo de forma arbitrária e sem perda de generalidade.

Uma outra noção fundamental é a de *subgrafo*. Seja G um grafo, dizemos que H é um subgrafo de G se H for um grafo tal que $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ e Ψ_H é restrição de Ψ_G . Quando H é subgrafo de G , também dizemos que G possui H , ou que existe uma cópia de H em G . Em geral, diremos que H é um subgrafo de G quando existir subgrafo de G isomorfo a H .

Uma noção ligeiramente distinta de subgrafo é a de *subgrafo induzido*. Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$ um subconjunto de vértices. O grafo $G[S]$ é o grafo cujo conjunto de vértices é S e o conjunto de arestas consiste nas arestas de G com todas extremidades em S . Dizemos que $G[S]$ é um subgrafo de G *induzido* pelo conjunto S .

Até agora, a definição de grafos que temos é bastante abrangente e permite algumas situações que não gostaríamos de considerar em nosso estudo. A primeira situação especial ocorre quando duas arestas e e f incidem nos mesmos vértices, isto é, $\Psi_G(e) = \Psi_G(f)$, neste caso dizemos que e e f são *arestas paralelas*. No grafo exemplificado na Figura 1.1, f e g são arestas paralelas. A segunda situação é quando e incide em apenas um vértice v , isto é, $\Psi_G(e) = \{v\}$, como é o caso do vértice x da Figura 1.1, e dizemos que a aresta s é um *laço*. Um grafo no qual não existem arestas paralelas ou laços é dito um *grafo simples*. Neste estudo, consideraremos apenas grafos simples.

Seja G um grafo simples e u e v dois vértices de G . Se u e v forem

adjacentes, então existe uma única aresta e em G com $\Psi_G(e) = \{u, v\}$, portanto podemos identificar e por $\{u, v\}$. De fato, quando G é simples, a função de incidência Ψ_G fica definida implicitamente e nomeamos as arestas por suas extremidades. Portanto, ao definir grafos simples, pode-se omitir a função de incidência Ψ definindo o conjunto das arestas $E(G)$ como um subconjunto de pares de vértices. Para tal propósito, para um conjunto S , definimos o conjunto de pares de elementos de S por $S^{(2)}$, assim, podemos ver um grafo como um par $G = (V(G), E(G))$ no qual $E(G) \subset V(G)^{(2)}$.

Para simplificar a notação, quando não houver ambiguidade, podemos nos referir ao conjunto de vértices apenas por V e o conjunto de arestas por E em um grafo $G = (V, E)$. A quantidade de vértices de um grafo é chamada de *ordem* do grafo e costuma ser denotada por n ou $v(G)$. Já a quantidade de arestas em um grafo é chamada de *tamanho* do grafo, e é denotada por m ou $e(G)$. Se G é um grafo simples, observamos que $E \subset V^{(2)}$ implica que $m \leq \binom{n}{2} = O(n^2)$, isto é, um grafo simples tem uma quantidade de arestas limitada ao quadrado do seu número de vértices.

Se v é um vértice de um grafo G simples, então a *vizinhança* $N_G(v)$ de v é o conjunto dos vértices adjacentes a v . O *grau* de um vértice $d_G(v)$ é o tamanho de sua vizinhança¹, isto é, $d_G(v) = |N_G(v)|$. Quando o grafo for conhecido pelo contexto, utilizaremos apenas $N(v)$ e $d(G)$.

Algumas vezes, grafos que possuem algum tipo de estrutura em comum são agrupados em *famílias* e recebem um nome que é inspirado por suas propriedades ou em homenagem ao matemático que primeiro as estudou. Um aspecto importante da Teoria de Grafos é que ela se trata essencialmente do estudo de estruturas, e portanto, é importante que se tenha a disposição um grande arsenal de famílias de grafos bem conhecidas e estudadas.

A primeira família de grafos a ser estudada é a dos *grafos completos*. Um grafo G é dito um grafo completo quando ele é um grafo simples no qual todos os vértices são adjacentes. Denota-se por K_n o grafo completo com n vértices. A Figura 1.3 contém desenhos de alguns grafos completos pequenos. Ao definir uma família de grafos, é comum estudar um pouco de suas propriedades. Por exemplo, podemos ver que $e(K_n) = \binom{n}{2}$, pois K_n é um grafo simples e qualquer par de vértices possui uma aresta que é incidente neles. Além disso, é comum designar um grafo completo por *clique* quando ele é um subgrafo induzido. Diz-se um n -clique quando deseja-se especificar o número de vértices.

Uma outra família de grafos importante na Teoria de Ramsey é, surpreendentemente, a família dos *grafos vazios*. Um grafo G é vazio quando ele não possui nenhuma aresta. É importante notar que um grafo vazio ainda pode ter vértices, e denotamos grafos vazios com n vértices por E_n . Novamente,

¹Esta definição de grau de um vértice está restrita a grafos simples. No caso geral, um grau de um vértice v é a quantidade de vezes que arestas incidem nele, isto é, o o número de arestas que incidem em v com os laços contados duas vezes

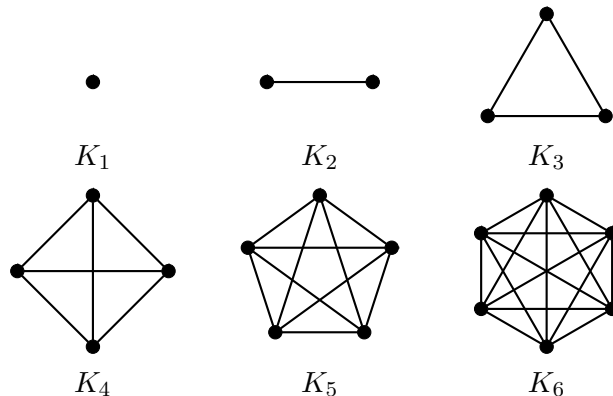


Figura 1.3: Grafos completos de ordem 1 até 6.

denota-se por *anti-clique* um grafo vazio que é subgrafo induzido.

Uma maneira de relacionar os grafos completos e vazios é por meio da operação de complementação. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O *complemento* de G é um grafo \overline{G} com o mesmo conjunto de vértices V , no qual dois vértices são adjacentes em \overline{G} se e somente se eles não são adjacentes em G . Em outras palavras, o conjunto de arestas de \overline{G} é o complemento de E em relação à $V^{(2)}$. Portanto, podemos escrever apenas $\overline{G} = (V, \overline{E})$ e notamos que para todo grafo simples G , $\overline{\overline{G}} = G$. Temos então que $\overline{K_n} = E_n$.

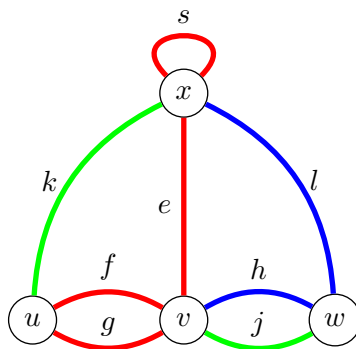


Figura 1.4: Exemplo de coloração de arestas em três cores.

Finalmente, o ultimo conceito necessário nesta introdução é o de *coloração de arestas*. A noção de coloração é muito importante em Teoria de Grafos, sendo intimamente relacionada ao surgimento da mesma. A idéia principal de colorações é mapear o conjunto de vértices ou de arestas a um conjunto de cores C . Utiliza-se cores no lugar de índices ou números para enfatizar a ausência de estrutura no conjunto. Assim, se $G = (V, E)$ é um grafo, então uma coloração de arestas de G em k cores é um mapa entre E e um conjunto de k cores, isto é, uma função $c : E(G) \rightarrow C$, no qual

$C = \{C_1, \dots, C_k\}$ é um conjunto de k cores. Uma coloração de arestas em k cores também é chamada de k -coloração de arestas. Note que se considerarmos apenas arestas de cor C em uma coloração de arestas, temos um subgrafo de G , que será denotado por G_C . Neste caso, sempre que alguma notação incluir G_C como índice, podemos simplificar para apenas C . Por exemplo, a vizinhança do vértice v no grafo G_C pode ser denotada por $N_C(v)$ ao invés de $N_{G_C}(v)$.

Note também que uma coloração de arestas pode ser vista como uma partição do conjunto de arestas nas partes $c^{-1}(C_i)$. Desta forma, estamos dividindo as arestas do grafo em classes determinada pela cor. Por exemplo, a Figura 1.4 exemplifica uma coloração de arestas em três cores do grafo construído no início desta seção. Esta coloração particiona o conjunto de arestas em três: $\{k, j\}$, $\{e, f, g, s\}$ e $\{h, l\}$.

1.2 Números de Ramsey

No início do capítulo, vimos o problema das mesas, que nos diz que em mesas de seis alunos, três alunos se conhecem ou três alunos não se conhecem. Consideremos agora um grafo G no qual os vértices são os seis alunos na mesa e uma aresta está presente entre dois alunos quando eles se conhecem. Note que \overline{G} é o grafo em que dois alunos são adjacentes quando não se conhecem. O problema das mesas então nos diz que se G possui 6 vértices então G ou \overline{G} possui um triângulo como subgrafo.

Observar o mesmo fato em termos de colorações é ainda mais vantajoso. Novamente considere G como o grafo onde os vértices são as seis pessoas na festa, mas desta vez, considere o grafo completo. Realizamos uma coloração das arestas de G em duas cores, $c : E(G) \rightarrow \{R, B\}$ (R e B denotam vermelho e azul respectivamente), de forma que $c(xy) = R$ se x e y são pessoas que se conhecem e $c(xy) = B$ se x e y são pessoas que não se conhecem. Assim queremos ver que G possui um triângulo monocromático, isto é, um triângulo no qual todas as três arestas tem a mesma cor. Equivalentemente, podemos dizer que G_R ou G_B possuem um triângulo.

Proposição 1.2. *Se G é um grafo completo com 6 vértices e $c : E(G) \rightarrow \{R, B\}$ é uma coloração de arestas, então G possui um triângulo monocromático.*

Demonstração. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer e considere a sua vizinhança $N(v)$. O vértice v se liga aos vértices de $N(v)$ utilizando arestas vermelhas ou azuis, logo $N(v) = N_R(v) \cup N_B(v)$. Como o grau de v é 5, então $d_R(v) + d_B(v) = 5$. Pelo princípio das casas dos pombos, alguma cor dentre R e B , digamos R , é tal que $d_R(v) \geq 3$. Agora observe que se dois vértices de $N_R(v)$ se conectam por uma aresta vermelha, unidas ao vértice v eles formam um triângulo vermelho. Se isto não ocorrer, toda aresta in-

terna à $N_R(v)$ é azul, o que garante que existe um triângulo azul em v . De qualquer caso, G possui um triângulo monocromático. \square

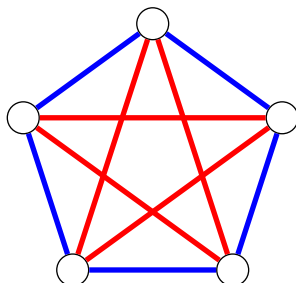


Figura 1.5: Coloração do K_5 sem triângulos monocromáticos.

Algo interessante de notar é que com 5 vértices, este fato pode ser evitado: existe uma coloração das arestas do K_5 que não possui triângulos monocromáticos, como podemos observar na Figura 1.2. Isto nos diz que 6 é o menor número de vértices que um grafo completo precisa ter de forma que qualquer coloração de arestas com duas cores possui um triângulo monocromático. Isto nos motiva a definir os números de Ramsey da seguinte maneira:

Definição 1.1. *O k -ésimo número de Ramsey, $R(k)$, é o menor inteiro positivo n tal que qualquer coloração de arestas em duas cores do grafo K_n possui um K_k monocromático.*

Com esta definição, podemos reescrever o enunciado da Proposição 1.2 como $R(3) \leq 6$, uma vez que ele nos mostra que 6 vértices são suficientes para encontrar um triângulo monocromático. A observação logo acima em conjunto com a Figura 1.2 nos indica que $R(3) > 5$. Unindo os dois resultados, obtemos $R(3) = 6$. Este resultado apareceu explicitamente pela primeira vez em um problema na competição de matemática universitária Putnam² em 1953.

Observamos também que $R(1) = 1$, uma vez que um K_1 monocromático é simplesmente um vértice qualquer e que $R(2) = 2$ pois um K_2 monocromático é uma aresta qualquer da coloração.

Antes de estudar os valores conhecidos de $R(k)$ para outros valores de k e seguintes generalizações deste conceito, fica a dúvida se este valor está realmente bem definido. Ou seja, será que para todo k realmente existe

²A William Lowell Putnam Mathematical Competition, comumente referida apenas por Putnam Competition, é uma competição anual de matemática para alunos de graduação no Canadá e nos Estados Unidos. No ano de 1953, a segunda questão do primeiro dia enunciava: *Six points are in general position in space (no three in a line, no four in a plane). The fifteen line segments joining them in pairs are drawn and then painted, some segments red, some blue. Prove that some triangle has all its sides the same color.* [4]

um número n tal que qualquer coloração de arestas de K_n possui um K_k monocromático? Isto não é trivial, poderia ser o caso que se k fosse suficientemente grande, fosse possível evitar a existência de K_k monocromáticos em alguma coloração. Como vamos ver a seguir, este não é o caso. De fato, vamos encontrar um limitante superior para o número de Ramsey, que é suficiente para determinar que $R(k)$ está bem definido por boa ordem.

Teorema 1.3 (Ramsey 1930). *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $R(k) \leq 2^{2k-1} < 4^k$. Em particular, $R(k)$ está bem definido.*

Demonstração. Esta prova consiste de sucessivas aplicações do princípio da casa dos pombos. Seja G um grafo completo com $n = 2^N$ vértices com uma coloração de arestas c em duas cores R e B . Vamos encontrar uma cópia monocromática de K_k em G se fizermos n grande o suficiente ao escolher N de forma apropriada.

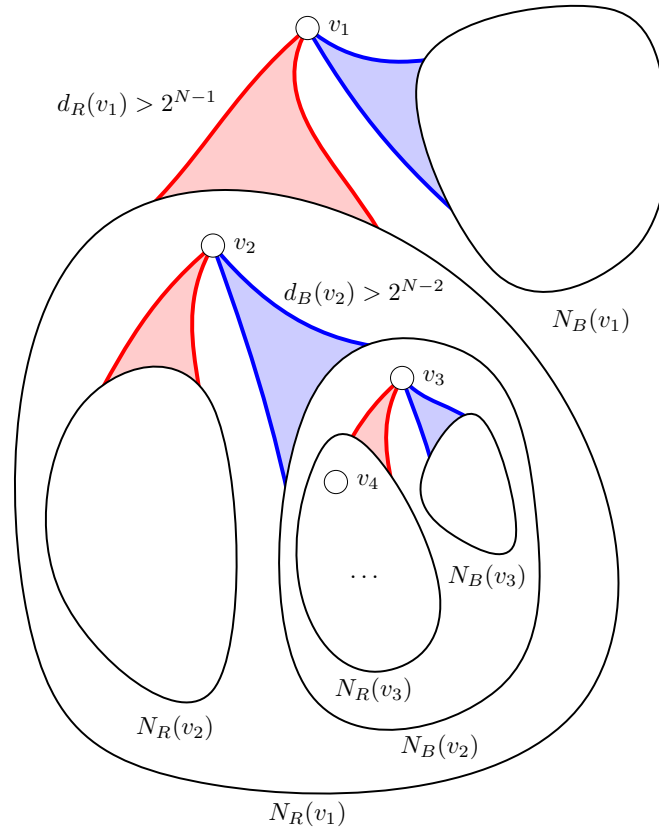


Figura 1.6: Construção recursiva da sequência de vértices v_i e cores.

Escolhemos um vértice $v_1 \in V(G)$ e observamos a suas vizinhanças $N_R(v_1)$ e $N_B(v_1)$. Em conjunto elas possuem $n - 1$ vértices. Pelo princípio da casa dos pombos, alguma destas duas vizinhança possui pelo menos

2^{N-1} vértices. De fato, se ambas possuírem menos que esta quantidade, então elas possuem no máximo $(2^{N-1} - 1) + (2^{N-1} - 1) = 2^N - 2 < n - 1$. Escolhemos então a cor que possui a maior vizinhança, digamos a cor C_1 . Removemos do grafo a vizinhança da outra cor e trabalhamos apenas dentro da vizinhança escolhida $N_{C_1}(v_1)$, de forma que o vértice v_1 se liga com os demais vértices com uma única cor. Notamos também que este novo grafo possui pelo menos 2^{N-1} vértices.

Em seguida podemos escolher um vértice v_2 qualquer em $N_{C_1}(v_1)$ e olhar para as vizinhanças de cor R e B . Novamente, pelo princípio da casa dos pombos, alguma delas possui pelo menos 2^{N-2} vértices, digamos que a de cor C_2 . Removemos a outra vizinhança do grafo e repetimos o processo, como evidenciado pela Figura 1.2.

Se continuarmos este processo até esgotar o grafo. Podemos repetir este processo enquanto alguma vizinhança não for vazia, isto é, enquanto $2^{N-j} \geq 1$, onde j é a quantidade de passos. Ou seja, podemos realizar tal processo N vezes, obtemos uma sequência de vértices v_1, v_2, \dots, v_N e cores C_1, C_2, \dots, C_{N-1} com a propriedade de que o vértice v_i se conecta com todos os outros vértices seguintes nesta sequência com a cor C_i , isto é, $c(v_i v_j) = C_i$ se $j > i$. Por exemplo, na Figura 1.2, obtemos inicialmente os vértices v_1, \dots, v_4 e as cores $C_1 = R, C_2 = B, C_3 = R$.

Finalmente, se escolhermos $N = 2k - 1$, obtemos uma sequência de $2k - 1$ vértices e $2k - 2$ cores. Pelo princípio da casa dos pombos, alguma cor aparece pelo menos $k - 1$ vezes, digamos que a cor C ocorre nos índices $C_{a_1} = C_{a_2} = \dots = C_{a_{k-1}}$. Isto nos indica que os vértices $v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_{k-1}}$ formam um K_{k-1} monocromático. Mas, todos esses vértices se ligam ao último vértice v_{2k-1} com a mesma cor C , então, de fato, obtemos um K_k monocromático. Com isto, concluímos que $R(k) \leq 2^{2k-1} < 4^k$. \square

Embora este teorema seja associado a Ramsey, ele não foi provado nesta forma e nem utilizando este método. Frank P. Ramsey foi um matemático e filósofo britânico que estudou Lógica. O teorema na forma como ele provou [12] era um teorema sobre conjuntos infinitos, mas a prova original se assemelha em estrutura à prova aqui apresentada.

Agora com o Teorema 1.3, sabemos não só que os números de Ramsey estão bem definidos, mas estabelecemos uma cota concreta para o seu valor. Vamos ver nos próximos capítulos generalizações deste resultado em conjunto com algumas técnicas mais recentes.

CAPÍTULO 2

Resultados Preliminares

Antes de estudar os valores de $R(k)$ para valores maiores de k , é conveniente generalizar nossas definições. Até agora, definimos os números de Ramsey da seguinte maneira: $R(k)$ é o menor inteiro positivo n tal que qualquer coloração de arestas em duas cores de K_n possui um K_k monocromático. Existem diversas maneiras de generalizar esta definição, a primeira será permitindo tamanhos diferentes para os subgrafos monocromático nas duas cores. Temos assim a seguinte definição:

Definição 2.1. $R(k, s)$ é o menor inteiro positivo n tal que qualquer coloração de arestas em duas cores do grafo K_n possui um K_k da primeira cor ou um K_s da segunda cor.

Desta forma, englobamos a definição antiga pois $R(k) = R(k, k)$, que são chamados de *números de Ramsey diagonais*. Notemos que não precisamos demonstrar novamente que estes números estão bem definidos, uma vez que segue da definição que $R(k, s) \leq R(\max\{k, s\}) < \infty$.

Notemos que estes números possui alguns valores triviais. Por exemplo $R(1, k) = 1$ para qualquer valor de k , uma vez que é impossível evitar um K_1 monocromático em qualquer cor quando o grafo possui vértices. Além disso, temos $R(2, k) = k$, que pode-se ver que não possuir K_2 em alguma cor significa que ela não está presente na coloração. Como temos a simetria $R(k, s) = R(s, k)$, os valores realmente interessantes são obtidos colocando $k, s \geq 3$, o primeiro deles, $R(3, 3) = 6$, já obtemos.

Vamos agora estudar o número $R(3, 4)$, no qual utilizamos um argumento semelhante ao do $R(3, 3)$, embora ele seja ligeiramente mais sofisticado. Este resultado surgiu em 1955 por Greenwood e Gleason [9], em conjunto com outras proposições que vamos estudar em seguida.

Proposição 2.1 (Greenwood e Gleason). $R(3, 4) \leq 9$.

Demonstração. Seja G um grafo completo com 9 vértices e c uma coloração de arestas em duas cores, R (vermelho) e B (azul) e suponha que não exista K_3 vermelho e K_4 azul. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer. Novamente consideramos as vizinhanças $N_R(v)$ e $N_B(v)$ de tamanho $d_R(v)$ e $d_B(v)$ respectivamente. Assim, temos que $d_R(v) + d_B(v) = 8$. Suponha que $d_R(v) \geq 4$. Então na vizinhança $N_R(v)$, se existir alguma aresta de vermelha, formamos um triângulo vermelho unindo as extremidades desta aresta com v , absurdo. Portanto, $d_R(v) \leq 3$, o que nos dá que $d_B(v) \geq 5$, então suponha que $d_B(v) \geq 6$. Como sabemos que $R(3, 3) = 6$, $N_B(v)$ possui um triângulo monocromático. Como G não possui K_3 vermelho, então $N_B(v)$ possui um K_3 azul. Contudo, isto nos dá uma contradição, pois unindo este K_3 com o vértice v , temos um K_4 azul. Portanto, podemos concluir que $d_B(v) = 5$ e $d_R(v) = 3$. Isto, no entanto, vale para qualquer vértice de G . Pelo lema do aperto de mãos, sabemos que

$$\sum_{v \in G_R} d(v) = 2|E(G_R)| \Rightarrow 9 \times 3 = 2|E(G_R)|.$$

Isto nos dá um absurdo, pois o lado esquerdo e direito da segunda igualdade possuem paridades distintas. Neste caso, tanto o grafo G_R quando o grafo G_B possuem uma quantidade ímpar de vértices de grau ímpar, o que é impossível. Portanto, contradizemos a hipótese de que não existe K_3 vermelho ou K_4 azul, e concluímos que $R(3, 4) \leq 9$. \square

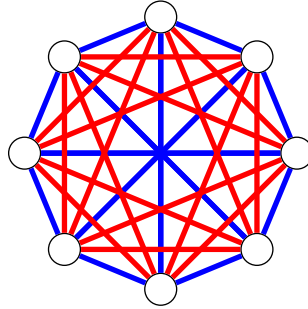


Figura 2.1: Coloração de arestas do K_8 sem K_4 vermelho e sem K_3 azul.

Novamente, para mostrar alguma cota inferior, precisamos construir uma coloração em duas cores sem K_3 vermelho e sem K_4 azul. Temos um tal grafo na Figura 2.1 com 8 vértices. Isto nos dá que $R(3, 4) > 8$, que em conjunto com a Proposição 2.1, temos $R(3, 4) = 9$. Embora apenas evidenciar uma coloração é suficiente, existem $2^{\binom{8}{2}} = 2^{28} = 268435456$ colorações de arestas do K_8 em duas cores, o que nos deixa intrigados em saber como obter tal coloração.

Proposição 2.2 (Greenwood e Gleason). $R(3, 4) > 8$.

Demonstração. Vamos construir a coloração de arestas do grafo G da Figura 2.1. Escolhemos como conjunto de vértices v_0, v_2, \dots, v_7 e definimos a seguinte relação em \mathbb{Z}_8 : dizemos que $i \sim j$ se $i - j \equiv \pm 2$ ou $\pm 3 \pmod{8}$. Notemos que $i \sim j$ implica em $j \sim i$ e em $i + k \sim j + k$ para todo k . Construímos nossa coloração c então da seguinte maneira:

$$c(v_i v_j) = \begin{cases} \text{vermelho,} & \text{se } i \sim j \\ \text{azul,} & \text{se } i \not\sim j. \end{cases}$$

Agora observaremos que não existe K_4 vermelho em G . Suponha que v_i, v_j, v_k, v_w formem um K_4 vermelho em G . Sem perda de generalidade, podemos colocar $w = 0$ uma vez que esta relação é invariante à translações. Portanto, temos que $i \sim 0$, $j \sim 0$ e $k \sim 0$. Isto nos dá que $i, j, k \in \{-3, -2, 2, 3\}$ e uma vez que eles são distintos, algum par dentre $\{-3, -2\}$ e $\{2, 3\}$ está coberto pelos i, j ou k . No entanto, $-3 \not\sim -2$ e $3 \not\sim 2$, o que nos mostra que alguma aresta não está presente, impedindo a existência de um K_4 vermelho.

Similarmente, podemos observar que não existe K_3 azul. Suponha que v_i, v_j, v_k formem um K_3 azul em G . Como $i \not\sim j$ implica $i + k \not\sim j + k$, podemos novamente supor que $k = 0$, o que nos dá que $i, j \in \{-1, 1, 4\}$. No entanto, temos que $-1 \sim 1$, $-1 \sim 4$ e $1 \sim 4$. Ou seja, qualquer que sejam os i e j , a aresta entre i e j não será azul. Portanto, não existe K_3 azul em G . \square

Finalmente, vamos explorar este tipo de idéia mais uma vez ao tentar computar $R(4, 4)$. Temos a seguinte proposição:

Teorema 2.3. $R(4, 4) \leq 18$.

Demonstração. Seja G um grafo completo com 18 vértices e c uma coloração de arestas em duas cores, R e B e suponha que não exista K_4 monocromático. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer. Novamente consideramos as vizinhanças $N_R(v)$ e $N_B(v)$ de tamanho $d_R(v)$ e $d_B(v)$ respectivamente. Assim, temos que $d_R(v) + d_B(v) = 17$. Alguma destas duas vizinhanças possui pelo menos 9 vértices, digamos, $d_R(v) \geq 9$. Com isto, como $R(3, 4) = 9$ temos que $N_R(v)$ possui um K_3 vermelho ou um K_4 azul. Como supomos que não existe K_4 monocromático em G , então $N_R(v)$ possui um K_3 vermelho. No entanto, unindo este K_3 com o vértice v , obtemos um K_4 vermelho. Temos um absurdo, e portanto, contradizemos nossa hipótese de que não existe K_4 monocromático. Assim, concluímos que $R(4, 4) \leq 18$. \square

A construção de uma coloração que nos sirva como prova de que $R(4, 4) > 17$ é mais complicada, embora utilize uma idéia bem parecida. A coloração de fato está explicitada na Figura 2. Vamos ver como chegar nesta coloração.

Proposição 2.4 (Greenwood e Gleason). $R(4, 4) > 17$.

Demonstração. Vamos construir a coloração de arestas do grafo G da Figura 2. Desta vez trabalharemos no corpo \mathbb{Z}_{17} , uma vez que 17 é primo. Escolhemos como conjunto de vértices v_0, v_2, \dots, v_{16} como elementos do corpo e definimos a seguinte relação em \mathbb{Z}_{17} : dizemos que $i \sim j$ se $i - j$ for um resíduo quadrático, isto é, se existe $x \in \mathbb{Z}_{17}$ tal que $i - j \equiv x^2 \pmod{17}$. Notemos que $i \sim j$ implica em $j \sim i$, em $i + k \sim j + k$ para todo k e em $a^2 i \sim a^2 j$. Novamente, construímos nossa coloração c então da seguinte maneira:

$$c(v_i v_j) = \begin{cases} \text{vermelho,} & \text{se } i \sim j \\ \text{azul,} & \text{se } i \not\sim j. \end{cases}$$

Agora observaremos que não existe K_4 monocromático em G . Suponha que v_i, v_j, v_k, v_w formem um K_4 vermelho em G . Sem perda de generalidade, podemos colocar $w = 0$ uma vez que esta relação é invariante à translações. Portanto, temos que os números $i, j, k, i - j, i - k, j - k$ são todos resíduos quadráticos ou não são resíduos quadráticos. Se eles forem todos resíduos, e como $i \neq 0$, i^{-1} também é resíduo quadrático e definindo $a = i^{-1}j$, $b = i^{-1}k$, temos que os números $1, a, b, 1 - a, 1 - b, a - b$ são todos resíduos quadráticos. Isto se deve ao fato de que os resíduos quadráticos são fechados por multiplicação.

Se os números não forem resíduos quadráticos, então i^{-1} também não é resíduo. Definindo a e b da mesma maneira, obtemos que os números $1, a, b, 1 - a, 1 - b, a - b$ são todos resíduos quadráticos em \mathbb{Z}_{17} . Isto se deve ao fato de que em \mathbb{Z}_p com p primo, o produto de dois elementos que não são resíduos quadráticos é um resíduo quadrático, que é uma consequência do critério de Euler (adicionar no apêndice??).

Em ambos os casos, temos que $1, a, b, 1 - a, 1 - b, a - b$ são resíduos quadráticos em \mathbb{Z}_{17} . Mas os resíduos quadráticos são $1, 2, 4, 8, 9, 13, 15$ e 16 , e não é possível escolher a e b de maneira que todos os números sejam simultaneamente resíduos. Isto pode ser verificado da seguinte maneira. Suponha que $a = 4$, então $1 - a \equiv 14 \pmod{17}$, que não é resíduo quadrático. O mesmo verificamos se $a = 8$, $a = 13$ e $a = 15$, obtendo $1 - a \equiv 10 \pmod{17}$, $1 - a \equiv 5 \pmod{17}$ e $1 - a \equiv 3 \pmod{17}$ respectivamente, todos os casos não sendo resíduos quadráticos. Se $a = 9$ então $1 - a \equiv a \pmod{17}$ e os índices não são distintos. Portanto a única escolha restante é $a = 2$ e $b = 16$. Mas então $1 - a \equiv 16 \equiv b \pmod{17}$ e novamente não temos índices distintos. \square

É natural agora tentar encontrar outros valores, no entanto, os argumentos ficam cada vez mais difíceis. Por exemplo, o valor de $R(5, 5)$ não é conhecido e o valor de $R(4, 5) = 25$ foi encontrado por uma busca computacional extensiva em 1995 [10].

Algo de interessante que podemos observar em todos os números que encontramos até o momento é que o argumento utilizado na prova do limitante

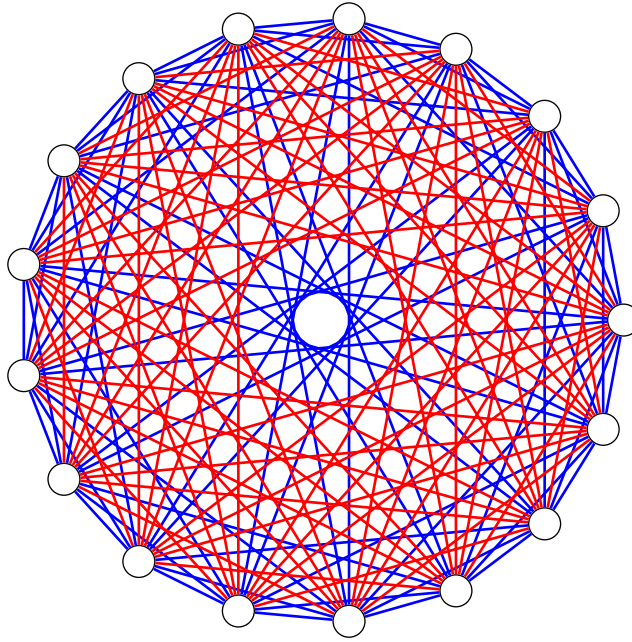


Figura 2.2: Coloração do K_{17} sem K_4 monocromáticos.

superior é bem semelhante. De fato, podemos condensar esta idéia em um resultado à parte.

Teorema 2.5 (Greenwood, Gleason). $R(k, s) \leq R(k, s - 1) + R(k - 1, s)$.

Demonstração. Seja G um grafo completo com n vértices e c uma coloração de arestas em duas cores, R e B e suponha que não exista K_k vermelho e nem K_s azul. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer. Consideramos as vizinhanças $N_R(v)$ e $N_B(v)$ de tamanho $d_R(v)$ e $d_B(v)$ respectivamente. Assim, temos que $d_R(v) + d_B(v) = n - 1$. Se $d_R(v) \geq R(k - 1, s)$, então em $N_R(v)$ possui um K_s azul ou um K_{k-1} vermelho, que em conjunto com v forma um K_k vermelho. Isto contradiz nossa hipótese, então $d_R(v) \leq R(k - 1, s) - 1$. Similarmente, mostramos que $d_B(v) \leq R(k, s - 1) - 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} d_R(v) + d_B(v) &\leq R(k - 1, s) + R(k, s - 1) - 2 \\ n &\leq R(k - 1, s) + R(k, s - 1) - 1 \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $n = R(k - 1, s) + R(k, s - 1)$ obtemos uma contradição, e portanto, concluímos que G possui um K_k vermelho ou um K_s azul. Ou seja, $R(k, s) \leq R(k, s - 1) + R(k - 1, s)$ como queríamos. \square

Observe que esta desigualdade nos dá facilmente que $R(3, 3) \leq R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6$ e $R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 18$. No entanto, para o valor R Outra consequência interessante desta desigualdade é que podemos

utiliza-la para demonstrar um limitante superior genérico, e chegar em uma versão ligeiramente melhor do Teorema 1.3.

Teorema 2.6 (Erdős, Szekeres). $R(k, s) \leq \binom{k+s-2}{k-1}$.

Demonstração. Se $k = 1$ temos $R(1, s) = 1 = \binom{s-1}{0}$. Se $k = 2$, temos $R(2, s) = s = \binom{s}{1}$. Procedemos agora por indução em $s + k$. Temos

$$R(k, s) \leq R(k, s-1) + R(k-1, s) \leq \binom{k+s-3}{k-2} + \binom{k+s-3}{k-1} = \binom{k+s-2}{k-1}.$$

□

Corolário 2.7 (Erdős, Szekeres). $R(k+1, k+1) \leq (1+o(1)) \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}$.

Demonstração. Vamos utilizar a aproximação de Stirling $n! = (1+o(1))\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ e o limitante dado pelo Teorema 2.6 para os números de Ramsey diagonais $R(k+1, k+1) \leq \binom{2k}{k}$. Obtemos

$$\begin{aligned} R(k+1, k+1) &\leq \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!^2} = (1+o(1)) \frac{\sqrt{4k\pi} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{2k\pi \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} \\ &= (1+o(1)) \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}. \end{aligned}$$

□

Note que este limitante é ligeiramente melhor que o obtido no Teorema 1.3 por causa da presença do termo \sqrt{k} no denominador. Isto nos indica que os números de Ramsey diagonais crescem no máximo exponencialmente e com expoente estritamente menor que 4. Poucas melhoras substanciais neste limitante são conhecidas, sendo o melhor atual

$$R(k+1, k+1) \leq k^{-C \frac{\log k}{\log \log k}} \binom{2k}{k},$$

para alguma constante C adequada, devido a David Conlon em 2009[5]. Note que o termo $k^{C \frac{\log k}{\log \log k}}$ é subexponencial, logo este limitante não melhora a constante 4^k implicada pelo coeficiente binomial central $\binom{2k}{k}$.

2.1 Limitantes Inferiores

Os limitantes inferiores visto na seção anterior anterior são construtivos, isto é, quando mostramos que $R(4, 4) > 17$, por exemplo, isto passou pela construção de uma coloração de arestas do grafo K_{17} . Para encontrar um bom limitante inferior, vamos precisar de uma abordagem um pouco diferente.

O nosso objetivo é encontrar colorações de arestas de K_n sem K_k monocromáticos com k fixado e n maior possível, para poder concluir que $R(k, k) > n$. Note que não necessariamente precisamos construir tal coloração, basta saber que alguma coloração que satisfaz estas propriedades existe. Vamos introduzir agora uma técnica chamada de *método probabilístico* para resolver este tipo de problema. O nosso objetivo é provar que uma estrutura com certas propriedades existe. Definimos então um espaço de probabilidade sobre o conjunto destas estruturas de maneira adequada e mostramos que com probabilidade positiva, a propriedade de interesse é satisfeita. Isto nos mostra que o conjunto dos elementos cuja propriedade são satisfeitas não pode ser vazio, caso contrário, a probabilidade seria 0, e mostramos a existência de uma estrutura com esta propriedade.

Esta técnica foi aplicada com sucesso pela primeira vez pelo matemático Paul Erdős para encontrar justamente um limitante inferior para os números de Ramsey diagonais $R(k, k)$. Antes do tal, vamos revisar alguns conceitos de probabilidade discreta, em particular, estamos interessados em escolher uma coloração de arestas do K_n de maneira aleatória. Seja \mathcal{C} o conjunto de todas as colorações de arestas em duas cores do K_n . Claramente, temos que $|\mathcal{C}| = 2^{\binom{n}{2}}$. Suponha que escolhemos uma coloração $c \in \mathcal{C}$ aleatoria e uniformemente, queremos saber qual é a probabilidade desta coloração possuir uma dada propriedade. Seja $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ o conjunto das colorações que satisfazem a dada propriedade. Temos então que $\mathbf{P}(c \text{ possui a propriedade}) = \mathbf{P}(c \in \mathcal{P}) = |\mathcal{P}|/|\mathcal{C}|$, onde \mathbf{P} é a medida de probabilidade. Em particular, se e é uma aresta, então $|\mathcal{P}| = |\{c \in \mathcal{C} : c(e) = R\}| = 2^{\binom{n}{2}-1}$, o que nos dá $\mathbf{P}(c(e) = R) = \frac{1}{2}$ e também $\mathbf{P}(c(e) = B) = \frac{1}{2}$. Podemos agora introduzir a primeira aplicação do método probabilístico:

Teorema 2.8 (Erdős, 1947). Se $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ então $R(k, k) > n$. Isso nos dá que $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ para todo $k \geq 3$.

Demonstração. Considere uma coloração de arestas do K_n em duas cores obtida de maneira aleatória colorindo independentemente e uniformemente. Fixe um subconjunto $A \subset V(K_n)$ de k vértices e seja M_A o evento de que o subgrafo completo induzido por A é monocromático. Fixando uma cor para as arestas do subgrafo induzido por A , podemos colorir as diversas $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ arestas de qualquer cor. Como existem duas cores disponíveis, temos:

$$\mathbf{P}(M_A) = \frac{2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Considere agora o evento $M = \bigcup_{R \subset V(G), |R|=k} M_R$ que corresponde a exis-

tência de algum K_k monocromático.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{\substack{R \subset V(K_n) \\ |R|=k}} M_R\right) \leq \sum_{\substack{R \subset V(K_n) \\ |R|=k}} \mathbf{P}(M_R) \\ &= \sum_{\substack{R \subset V(K_n) \\ |R|=k}} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{P}(\overline{M_R}) = 1 - \mathbf{P}(M_R) > 0$, o que nos indica que existe alguma coloração de K_n sem K_k monocromático. Com isso, temos $R(k, k) > n$. (FINALIZAR BOUND) \square

Na seção anterior, vimos alguns limitantes superiores para o número $R(k, k)$ que tem ordem assintótica próxima de 4^k .

Problema em Aberto 2.9. *Constructive Ramsey*

2.2 Número de Ramsey de Grafos

CAPÍTULO 3

Provas

Neste capítulo, estão temporariamente os resultados que foram julgados interessantes e suas provas preliminares.[1]

3.1 Números Pequenos

Denotaremos por K_n o grafo completo com n vértices. Uma coloração das arestas de $K_n = (V, E)$ em duas cores é um mapa $c : E \rightarrow \{R, B\}$ onde R e B indicam as cores vermelho e azul respectivamente. Uma coloração de arestas induz uma decomposição dada por $K_n = E_R \cup E_B$

Definição 3.1. *Seja G um grafo*

Referências Bibliográficas

- [1] Alon, Noga and Spencer, Joel H. *The Probabilistic Method*. Wiley, New York, fourth edition, 2016.
- [2] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [3] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2011.
- [4] L. E. Bush. The william lowell putnam mathematical competition. *The American Mathematical Monthly*, 60(8):539–542, 1953.
- [5] David Conlon. A new upper bound for diagonal ramsey numbers. *Annals of Mathematics*, pages 941–960, 2009.
- [6] R. Diestel. *Graph Theory: Springer Graduate Text GTM 173*. Springer Graduate Texts in Mathematics (GTM). Springer-Verlag, 2012.
- [7] R.L. Graham, B.L. Rothschild, and J.H. Spencer. *Ramsey Theory*. A Wiley-Interscience Publication. Wiley, second edition, 1990.
- [8] R.L. Graham and C.B.M. Sciences. *Rudiments of Ramsey Theory*. Number no. 45 in Conference Board of the Mathematical Sciences regional conference series in mathematics. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1981.
- [9] Robert E Greenwood and Andrew Mattei Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math*, 7(1):7, 1955.
- [10] Brendan D. McKay and Stanislaw P. Radziszowski. $R(4, 5) = 25$. *Journal of Graph Theory*, 19(3):309–322, 1995.

- [11] J. Nešetřil and V. Rödl. *Mathematics of Ramsey Theory*. Algorithms and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [12] F. P. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of The London Mathematical Society*, s2-30:264–286, 1930.