Projeto Final de Graduação

Introdução à Teoria de Ramsey em Grafos

Aluno: Victor Seixas Souza
Supervisora: Christiane Neme Campos

2 de setembro de 2016

Sumário

Todo list

Prefácio

Introdução e Objetivos

A Teoria de Ramsey é uma área da matemática que unifica o tema: desordem completa é impossível. Mais especificamente, observamos que se uma estrutura é grande o suficiente, então ela possui uma subestrutura bem especial e ordenada. Este fenômeno ocorre em diversos campos da matemática, como Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Este projeto aborda conceitos básicos e alguns dos resultados clássicos em Teoria de Ramsey aplicada a grafos.

O exemplo mais simples de tal corpo teórico é frequentemente apresentado na seguinte história: em uma festa com pelo menos seis pessoas, três delas se conhecem mutuamente ou três delas não se conhecem mutuamente. Se enxergarmos a relação de conhecer como simétrica, o mesmo pode ser traduzido para linguagem de Teoria de Grafos como: todo grafo com pelo menos seis vértices possui um triângulo, ou, então, o seu grafo complementar possui um triângulo. A Teoria de Ramsey inicia-se pela generalização sucessiva deste enunciado para grafos e hipergrafos.

A Teoria de Ramsey tem seu nome em homenagem ao matemático e filósofo britânico Frank P. Ramsey, por seu trabalho, em lógica, publicado em 1930 [8], mas apenas adquiriu um corpo teórico coeso na década de 1970. A área vem recebendo grande atenção nos últimos vinte anos por suas conexões com diversos campos da matemática e, ainda assim, muito dos seus problemas fundamentais permanecem sem solução. Além disso, não muito da teoria propagou-se para os livros didáticos em nível de graduação. Entretanto, é possível abordar parte da teoria sem recorrer ao ferramental mais avançado.

Considerando a lacuna da literatura citada anteriormente, este projeto tem por objetivo a elaboração de um texto introdutório à Teoria de Ramsey em grafos, em língua portuguesa. Além disso, planeja-se completar este texto com a apresentação de um ou dois tópicos mais avançados da área, que serão selecionados dentre: o método probabilístico; o lema da regularidade de

Szemerédi; ou aplicações em Teoria dos Números.

Metodologia e Plano de Trabalho

Os métodos que serão aplicados são os tradicionais utilizados na pesquisa em Combinatória. Inicialmente, o estudo se dará por meio da leitura de livros-texto [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], que apresentam a teoria de forma mais paulatina. Além disso, esta fase permitirá um melhor entendimento do que existe, na literatura, sobre a teoria. Em um segundo momento, o estudo terá como focos os conceitos basícos e resultados clássicos. Posteriormente, serão escolhidos dois tópicos avançados e, estes, serão estudados e incluídos no texto final. A Tabela 1 exibe o plano de trabalho proposto.

Tabela 1: Plano de Trabalho

Mês	Atividade
Agosto	Leitura preliminar da bibliografia
Setembro	Conceitos básicos e resultados Clássicos
Outubro	Tópico Avançado 1
Novembro	Tópico Avançado 2
Dezembro	Ajustes Finais

Parte das atividades desta disciplina inclui a preparação de uma monografia sobre o trabalho desenvolvido. Por esta razão, foram planejadas entregas parciais deste documento conforme explicitado na Tabela 2.

Tabela 2: Prazos para entregas

Data	Entrega
26 de Agosto	Esqueleto do Relatório
30 de Setembro	Primeiro Relatório Parcial
28 de Outubro	Segundo Relatório Parcial
25 de Novembro	Terceiro Relatório Parcial
07 de Dezembro	Relatório Final
21 de Dezembro	Relatório Final Corrigido

Ao longo de todo este período, ocorrerão reuniões de trabalho semanais com a supervisora, que visam ao acompanhamento e ao direcionamento do desenvolvimento do projeto.

Resultados Esperados

O trabalho a ser desenvolvido tem por objetivo preencher os requisitos exigidos pela disciplina MC030 – Projeto Final de Graduação por meio da elaboração de uma monografia sobre o tema escolhido. Além disso, espera-se que ao longo deste semestre, o aluno se desenvolva do ponto de vista científico e que isto se reflita na forma como ele consegue exprimir e manipular os resultados a que vier a ser exposto.

CAPÍTULO 1

Introdução

Suponha que em uma festa, seis pessoas se sentam em uma mesa para conversar. Dentre estas pessoas, algumas já se conhecem, enquanto outras estão se conhecendo pela primeira vez, nesse caso dizemos que elas são estranhas. À priori, não há muito o que se possa concluir sobre estas pessoas: todas podem se conhecer, todas podem ser estranhas entre sí, ou algumas se conhecem e outras não. De qualquer forma, podemos encontrar algo de interessante na mesa se procurarmos pela estrutura correta, como a seguinte observação que faz parte do folclore matemático:

Fato 1. *Em uma festa com seis pessoas, três pessoas se conhecem ou três pessoas são mutualmente estranhas.*

O leitor está convidado à tentar demonstrar este fato por sí só. Vamos ver em breve que este fato pode ser modelado naturalmente com colorações de arestas de um grafos. Assim, não vamos somente provar este fato, mas também diversas generalizações dele. Para o tal, precisamos introduzir alguns conceitos e notações em Teoria de Grafos que o leitor experiente pode pular.

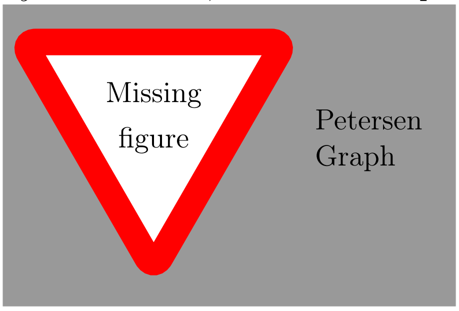
reescrever paragrafo

1.1 Noções de Grafos

Seja V um conjunto finito, denotamos por $V^{(k)}$ o conjunto dos subconjuntos de V com k elementos. Por exemplo, $V^{(2)}$ é o conjunto de pares de elementos de V, isto é, elementos de $V^{(2)}$ tem a forma $\{x, y\}$ onde $x, y \in V$ são elementos distintos. Note que se V possui n elementos, então $V^{(k)}$ possui $\binom{n}{k}$ elementos.

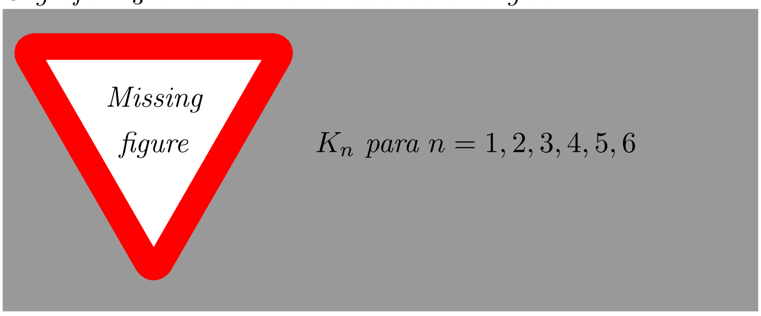
Um grafo é um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito e não vazio de vértices e E é um subconjunto de $V^{(2)}$, cujos elementos são chamados de arestas. Na literatura de Teoria de Grafos, esta definição corresponde à definição de grafos simples e finitos.

Uma aresta $\{x, y\}$ poderá ser denotada por xy ou yx. Dizemos que a aresta xy incide nos vértices x e y e que x e y são as extremidades de xy. Se xy é uma aresta, então dizemos que x e y são adjacentes.



A quantidade de vértices em um grafo G será denotada por $v(G) = |V(G)|$ e comumnente será indicada por $n = v(G)$. A quantidade de arestas de G é denotada por $e(G) = |E(G)|$ e comumente será referida por $m = e(G)$. Note que por definição temos $0 \leq e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(2-n)}{2}$.

Exemplo 1 (Grafos Completos)**.** *Um grafo é dito completo quando possui todas as arestas possíveis. Denotamos o grafo completo com n vértices por $K_n = (V, V^{(2)})$, onde V é algum conjunto de vértices com $n = |V|$ elementos. O grafo K_3 é também chamado de triângulo.*



Se v é um vértice de um grafo G, então a vizinhança $N_G(v)$ de v, o conjunto dos vértices adjacentes à v. Quando o grafo for conhecido pelo contexto, utilizaremos apenas $N(v)$. O grau de um vértice $d_G(v)$ é o tamanho de sua vizinhança, isto é, $d(v) = |N(v)|$.

O complemento de um grafo G é o grafo $\overline{G} = (V(G), V(G)^{(2)} \setminus E(G))$, isto é, o grafo com os mesmos vértices de G e arestas complementares à G, assim, $\overline{\overline{G}} = G$.

Seja G um grafo, dizemos que H é um subgrafo de G se H for um grafo tal que $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$. Quando H é subgrafo de G, às vezes dizemos que G possui H, ou que existe uma cópia de H em G.

Finalmente, se G é um grafo, então uma coloração de arestas de G em k cores é um mapa entre $E(G)$ e um conjunto de k cores, isto é, uma função $c : E(G) \to \{C_1, \ldots, C_k\}$. Uma coloração de arestas em k cores também é chamada de k-coloração de arestas. Note que se considerarmos apenas arestas de cor C em uma coloração de arestas, temos um subgrafo de G, que será denotado por G_C.

Exemplo de grafo, uma 2-coloração de arestas

1.2 Números de Ramsey

No início do capítulo, vimos o problema da festa, que nos diz que em uma festa com seis pessoas, três pessoas se conhecem ou três pessoas são mutualmente estranhas. Consideramos agora o grafo G onde os vértices são as seis pessoas na festa e uma aresta está presente entre duas pessoas quando elas se conhecem. Note que $\overline{G}$ é o grafo em que duas pessoas são adjacentes quando não se conhecem. O problema da festa então nos diz que se G possui 6 vértices então G ou $\overline{G}$ possui um triangulo.

Observar o mesmo fato em termos de colorações é ainda mais vantajoso. Novamente considere G como o grafo onde os vértices são as seis pessoas na festa, mas desta vez, considere o grafo completo. Realizamos uma coloração das arestas de G em duas cores, $c : E(G) \to \{R, B\}$ (R e B denotam vermelho e azul respectivamente), de forma que $c(xy) = R$ se x e y são pessoas que se conheçem e $c(xy) = B$ se x e y são pessoas que não se conhecem. Assim queremos ver que G possui um triângulo monocromático, isto é, G_R ou G_B possuem um triangulo.

Teorema 2. *Se G é um grafo com 6 vértices e $c : E(G) \to \{R, B\}$ é uma coloração de arestas, então G possui um triângulo monocromático.*

Demonstração. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer e considere a sua vizinhança $N(v)$. O vértice v se liga aos vértices de $N(v)$ utilizando arestas vermelhas ou azuis, logo $N(v) = N_R(v) \cup N_B(v)$. Como o grau de v é 5, então $d_R(v) + d_B(v) = 5$. Pelo princípio das casas dos pombos, alguma cor dentre R e B, digamos R, é tal que $d_R(v) >= 3$. Agora observe que se dois vértices de $N_R(v)$ se conectam por uma aresta vermelha, unidas ao vértice v eles formam um triângulo vermelho. Se isto não ocorrer, toda aresta interna à $N_R(v)$ é azul, o que garante que existe um triângulo azul em v. De qualquer caso, G possui um triângulo monocromático.

Figura com v destacado, uma vizinhança de 3 vértices e um triangulo monocromático

□

1.3 Mais de Grafos

Isomorfismos

Subgrafo

Subgrafo Induzido

Exemplo 2 (Caminhos). *Um grafo G é um caminho de comprimento n se podemos ordenar os vértices $V(G) = \{v_0, \ldots, v_n\}$ de forma que as arestas de G são exatamente $v_i v_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n$. Os vértices v_0 e v_n são os extremos do caminho e tem grau 1, os demais possuem grau 2. Denotamos um caminho de comprimento n por P_n. Note que $v(P_n) = n+1$ e $e(P_n) = n$.*

Alguns P_n

Ciclos

Conexidade

Árvores

Cópia Disjunta

CAPÍTULO 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo, estão os resultados preliminares e definições de teoria de grafos.

2.1 Teoria de Ramsey

2.2 Teoria de Grafos

CAPÍTULO 3

Provas

Neste capítulo, estão temporariamente os resultados que foram julgados interessantes e suas provas preliminares.[1]

3.1 Números Pequenos

Denotaremos por K_n o grafo completo com n vértices. Uma coloração das arestas de $K_n = (V, E)$ em duas cores é um mapa $c : E \to \{R, B\}$ onde R e B indicam as cores vermelho e azul respectivamente. Uma coloração de arestas induz uma decomposição dada por $K_n = E_R \cup E_B$

Definição 1. *Seja G um grafo*

Referências Bibliográficas

[1] Alon, Noga and Spencer, Joel H. *The Probabilistic Method*. Wiley, New York, fourth edition, 2016.

[2] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[3] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2011.

[4] R. Diestel. *Graph Theory: Springer Graduate Text GTM 173*. Springer Graduate Texts in Mathematics (GTM). Springer-Verlag, 2012.

[5] R.L. Graham, B.L. Rothschild, and J.H. Spencer. *Ramsey Theory*. A Wiley-Interscience Publication. Wiley, second edition, 1990.

[6] R.L. Graham and C.B.M. Sciences. *Rudiments of Ramsey Theory*. Number no. 45 in Conference Board of the Mathematical Sciences regional conference series in mathematics. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1981.

[7] J. Nesetril and V. Rödl. *Mathematics of Ramsey Theory*. Algorithms and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[8] F. P. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of The London Mathematical Society*, s2-30:264–286, 1930.