Projeto Final de Graduação

# Introdução à Teoria de Ramsey em Grafos

Aluno: Victor Seixas Souza
Supervisora: Christiane Neme Campos

7 de outubro de 2016

# Sumário

# Todo list

# Prefácio

## Introdução e Objetivos

A Teoria de Ramsey é uma área da matemática que unifica o tema: desordem completa é impossível. Mais especificamente, observamos que se uma estrutura é grande o suficiente, então ela possui uma subestrutura bem especial e ordenada. Este fenômeno ocorre em diversos campos da matemática, como Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Este projeto aborda conceitos básicos e alguns dos resultados clássicos em Teoria de Ramsey aplicada a grafos.

O exemplo mais simples de tal corpo teórico é frequentemente apresentado na seguinte história: em uma festa com pelo menos seis pessoas, três delas se conhecem mutuamente ou três delas não se conhecem mutuamente. Se enxergarmos a relação de conhecer como simétrica, o mesmo pode ser traduzido para linguagem de Teoria de Grafos como: todo grafo com pelo menos seis vértices possui um triângulo, ou, então, o seu grafo complementar possui um triângulo. A Teoria de Ramsey inicia-se pela generalização sucessiva deste enunciado para grafos e hipergrafos.

A Teoria de Ramsey tem seu nome em homenagem ao matemático e filósofo britânico Frank P. Ramsey, por seu trabalho, em lógica, publicado em 1930 [8], mas apenas adquiriu um corpo teórico coeso na década de 1970. A área vem recebendo grande atenção nos últimos vinte anos por suas conexões com diversos campos da matemática e, ainda assim, muito dos seus problemas fundamentais permanecem sem solução. Além disso, não muito da teoria propagou-se para os livros didáticos em nível de graduação. Entretanto, é possível abordar parte da teoria sem recorrer ao ferramental mais avançado.

Considerando a lacuna da literatura citada anteriormente, este projeto tem por objetivo a elaboração de um texto introdutório à Teoria de Ramsey em grafos, em língua portuguesa. Além disso, planeja-se completar este texto com a apresentação de um ou dois tópicos mais avançados da área, que serão selecionados dentre: o método probabilístico; o lema da regularidade de

Szemerédi; ou aplicações em Teoria dos Números.

## Metodologia e Plano de Trabalho

Os métodos que serão aplicados são os tradicionais utilizados na pesquisa em Combinatória. Inicialmente, o estudo se dará por meio da leitura de livros-texto [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], que apresentam a teoria de forma mais paulatina. Além disso, esta fase permitirá um melhor entendimento do que existe, na literatura, sobre a teoria. Em um segundo momento, o estudo terá como focos os conceitos basícos e resultados clássicos. Posteriormente, serão escolhidos dois tópicos avançados e, estes, serão estudados e incluídos no texto final. A Tabela 1 exibe o plano de trabalho proposto.

Tabela 1: Plano de Trabalho

| Mês | Atividade |
|---|---|
| Agosto | Leitura preliminar da bibliografia |
| Setembro | Conceitos básicos e resultados Clássicos |
| Outubro | Tópico Avançado 1 |
| Novembro | Tópico Avançado 2 |
| Dezembro | Ajustes Finais |

Parte das atividades desta disciplina inclui a preparação de uma monografia sobre o trabalho desenvolvido. Por esta razão, foram planejadas entregas parciais deste documento conforme explicitado na Tabela 2.

Tabela 2: Prazos para entregas

| Data | Entrega |
|---|---|
| 26 de Agosto | Esqueleto do Relatório |
| 30 de Setembro | Primeiro Relatório Parcial |
| 28 de Outubro | Segundo Relatório Parcial |
| 25 de Novembro | Terceiro Relatório Parcial |
| 07 de Dezembro | Relatório Final |
| 21 de Dezembro | Relatório Final Corrigido |

Ao longo de todo este período, ocorrerão reuniões de trabalho semanais com a supervisora, que visam ao acompanhamento e ao direcionamento do desenvolvimento do projeto.

## Resultados Esperados

O trabalho a ser desenvolvido tem por objetivo preencher os requisitos exigidos pela disciplina MC030 – Projeto Final de Graduação por meio da elaboração de uma monografia sobre o tema escolhido. Além disso, espera-se que ao longo deste semestre, o aluno se desenvolva do ponto de vista científico e que isto se reflita na forma como ele consegue exprimir e manipular os resultados a que vier a ser exposto.

# CAPÍTULO 1

## Introdução

No primeiro dia de aula em uma escolinha de matemática, a professora preparou uma gincana para entrosar os alunos. Ela os sorteou em grupos de seis, e cada grupo deveria sentar-se em mesas separadas. O objetivo era que os alunos conversasem entre si sobre o que fizeram durante as férias e potencialmente criassem novas amizades. Alguns alunos haviam sido colegas nos anos anteriores e, portanto, já se conheciam; outros alunos vieram de turmas diferentes, então não conheciam a todos. Além disso, novos alunos entram na escola todo ano para aprender matemática!

Após o sorteio, a professora supervisionou atentamente os grupos, e observou que em algumas mesas, três alunos já se conheciam. Já em outras mesas, até quatro alunos já se conheciam. Preocupada se a gincana teria o efeito desejado, ela adotou outra estratégia e focou apenas nos alunos que ainda não se conheciam. Em algumas mesas, havia três alunos que ainda não se conheciam, mas outras pareciam menos promissoras, não havendo nem três alunos que não se conheciam. Curioso que nestas mesas haviam três alunos que se conheciam. Sendo uma professora de matemática, ela se perguntou se existia algum motivo para isto acontecer. Será que se ela fizesse outro sorteio, poderia haver uma mesa em que nenhum grupo de três alunos se conhecessem e nenhum grupo de três alunos não se conhecessem? Por sorte, a professora havia estudado Teoria de Grafos, e conseguiu verificar o seguinte fato:

**Fato 1.** *Em uma mesa com seis alunos, três alunos se conhecem ou três alunos não se conhecem.*

Vamos ver agora como que a professora percebeu este fato. Considere que você seja um dos seis alunos da mesa. Dos cinco restantes, você conhece uma quantidade, digamos $c$, e também não conhece uma quantidade $n$. Sabemos que $c + n = 5$. Isto nos dá que, ou $c \geq 3$, ou $n \geq 3$. De fato, se $c \leq 2$ e $n \leq 2$ occorrerem simultaneamente, $5 = c + n \leq 4$, o que é absurdo. Suponha $c \geq 3$, isto significa que você conhece pelo menos três dos outros alunos, digamos Alberto, Bruna e Carlos. Se existe alguma amizade entre eles, digamos, Alberto e Carlos são amigos, então a mesa possui um grupo de três alunos que se conhece, você, Alberto e Carlos. Caso isto não ocorra, então Alberto, Bruna e Carlos formam um grupo de três alunos que não se conhecem. O caso $n \geq 3$ segue do mesmo raciocínio.

O Fato 1 pode ser considerado o primeiro resultado na Teoria de Ramsey e possui generalizações interessantes. Além disso, ele possui uma formulação mais clara em termos de coloração de grafos. Na próxima seção, introduziremos os conceitos da Teoria de Grafos que serão necessários para adentrar o universo da Teoria de Ramsey em grafos. Um leitor familiarizado com Grafos é convidado a fazer uma leitura rápida da seção para se familiarizar à notação utilizada neste texto.

## 1.1 Noções de Grafos

Um *grafo* $G$ é um par ordenado $(V(G), E(G))$, que consiste em um conjunto $V(G)$ de *vértices* e um conjunto $E(G)$ de *arestas*, disjunto de $V(G)$, em conjunto com uma função de incidência $\Psi_G$ que associa cada aresta de $G$ a um par de vértices de $G$, não necessariamente distintos. Uma aresta $e \in E(G)$ e vértices $u, v \in V(G)$ são ditos *incidentes* se $\Psi_G(e) = \{u, v\}$. Neste caso, diz-se ainda que $u$ e $v$ são as *extremidades* de $e$. A incidência relaciona elementos de conjuntos distintos, neste caso, vértices e arestas. Uma outra relação é a de adjacência, que se aplica para elementos de mesma natureza. Dois vértices $u$ e $v$ são ditos *adjacentes* em $G$ se existe uma aresta $e$ em $G$ tal que $\Psi_G(e) = \{u, v\}$. Duas arestas $e$ e $f$ são ditas *adjacentes* em $G$ se existe um vértice $v$ em $G$ tal que $\{v\} = \Psi_G(e) \cap \Psi_G(f)$, isto é, se existe um vértice $v$ que incide simultaneamente em $e$ e $f$.

Vamos construir um grafo $G = (V(G), E(G))$ para ilustrar estas definições. O conjunto de vértices será $V(G) = \{u, v, w, x\}$ e o conjunto de arestas será $E(G) = \{e, f, g, h, j, k, l, s\}$. Falta definir a função de incidência $\Psi_G$, que associa as arestas aos vértices:

$$\begin{array}{cccc} \Psi_G(e) = \{v, x\} & \Psi_G(f) = \{u, v\} & \Psi_G(g) = \{u, v\} & \Psi_G(h) = \{v, w\} \\ \Psi_G(j) = \{v, w\} & \Psi_G(k) = \{u, x\} & \Psi_G(l) = \{w, x\} & \Psi_G(s) = \{x\} \end{array}$$

Isto completa a definição do grafo $G$. Uma maneira interessante de representar grafos é por meio de um desenho. A Figura 1.1 representa o grafo $G$ da seguinte maneira: os vértices são indicados por círculos e as arestas são indicadas por linhas que unem os círculos que correspondem aos vértices nos quais a aresta incide. A representação gráfica é muito importante pois nos permite criar uma intuição sobre a estrutura de grafos. Vale a pena notar que um mesmo grafo pode possuir mais de um desenho: basta desenhar os vértices em posições diferentes do plano. De fato, a posição dos vértices e das arestas não é importante, é a relação entre os vértices e as arestas que caracteriza a estrutura do grafo.

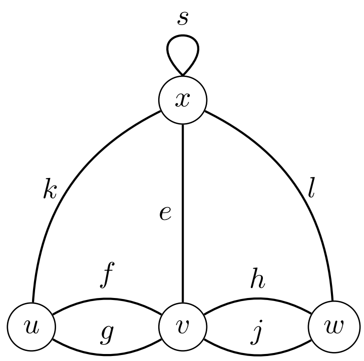



Figura 1.1: Representação gráfica do grafo $G$.

O desenho de um grafo pode ser um bom representante da estrutura, mas dois grafos com o mesmo desenho não são necessariamente iguais. Do ponto de vista formal, dois grafos $G$ e $H$ são idênticos quando $G = H$ no sentido da Teoria de Conjuntos, isto é, $V(G)$ e $V(H)$ são o mesmo conjunto, $E(G)$ e $E(H)$ são o mesmo conjunto e $\Psi_G$ e $\Psi_H$ são a mesma função. Por exemplo, os grafos $G$ e $H$ da Figura 1.2 não são idênticos pois $V(G) \neq V(H)$, no entanto, eles possuem efetivamente a mesma estrutura.

Esta noção de igualdade de grafos é, como vimos, muito restritiva. Para capturar a noção de que dois grafos diferentes podem ter a mesma estrutura, definimos um *isomorfismo* entre dois grafos $G$ e $H$ como um par de bijeções $\theta : V(G) \to V(H)$ e $\phi : E(G) \to E(G)$ tais que elas preservam a relação de incidência, isto é, $\Psi_G(e) = \{u, v\}$ se e somente se $\Psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$. Quando existe um isomorfismo entre dois grafos $G$ e $H$, dizemos que eles são *isomorfos*, e escrevemos $G \simeq H$.

Grafos isomorfos possuem essencialmente a mesma estrutura e são considerados como iguais para todos os efeitos práticos. Com efeito, muitas vezes, os nomes que os vértices possuem não tem nenhuma importância. Quando abrimos mão de definir os nomes dos vértices, temos um *grafo não rotulado*, em contrapartida com os *grafos rotulados*. Muitas vezes, apenas nos interessa a interconectividade dos vértices, então consideramos grafos não rotulados e nomeamos os vértices e arestas conforme necessário.

(READ-ME) Formalmente, a relação de isomorfismo $\simeq$ é uma relação de equivalência na classe de todos os grafos. As classes de equivalência são compostas por grafos rotulados que são equivalentes sob a relação de isomorfismo. Grafo não rotulado é um nome que damos à uma destas classes

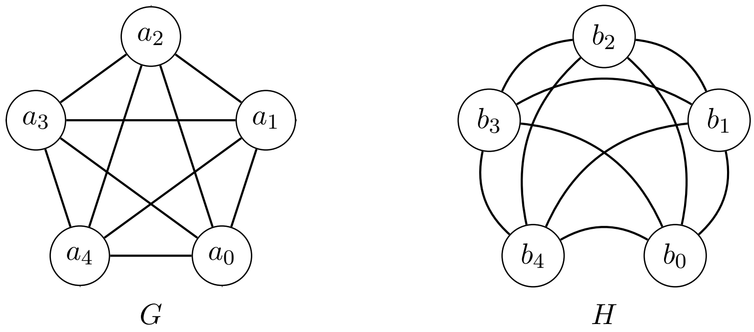



Figura 1.2: Dois grafos não idênticos $G$ e $H$ que são isomorfos.

de equivalência, não sendo um grafo propriamente dito, e sim uma entidade abstrata que carrega em si a estrutura de um grafo sem incluir os rótulos dos vértices e das arestas.

O que nos permite escolher um representante dentro desta classe sem perda de generalidade é o fato de que a maioria das propriedades estudada pela Teoria de Grafos é invariante por isomorfismo, isto é, se um grafo tem determinada propriedade, qualquer grafo isomorfo a ele possui a mesma propriedade. Portanto, ao rotular vértices e arestas de um grafo não rotulado, podemos fazer o mesmo de forma arbitrária e sem perda de generalidade. (FIM DO READ-ME)

Uma outra noção fundamental na Teoria de Grafos é a de *subgrafo*. Seja $G$ um grafo, dizemos que $H$ é um subgrafo de $G$ se $H$ for um grafo tal que $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ e $\Psi_H$ é restrição de $\Psi_G$. Quando $H$ é subgrafo de $G$, também dizemos que $G$ possui $H$, ou que existe uma cópia de $H$ em $G$. Em geral, diremos que $H$ é um subgrafo de $G$ quando existir subgrafo de $G$ isomorfo a $H$.

(NOVO) Uma noção ligeiramente distinta de subgrafo é a de *subgrafo induzido*. Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subset V$ um subconjunto de vértices. O grafo $G[S]$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $S$ e o conjunto de arestas consiste nas arestas de $G$ com todas extremidades em $S$. Dizemos que $G[S]$ é um subgrafo de $G$ *induzido* pelo conjunto $S$. (NOVO)

Até agora, a definição de grafos que temos é bastante abrangente e permite algumas situações que não gostaríamos de considerar em nosso estudo. A primeira situação especial ocorre quando duas arestas $e$ e $f$ incidem nos mesmos vértices, isto é, $\Psi_G(e) = \Psi_G(f)$, neste caso dizemos que $e$ e $f$ são *arestas paralelas*. No grafo exemplificado na Figura 1.1, $f$ e $g$ são arestas paralelas. A segunda situação é quando $e$ incide em apenas um vértice $v$, isto é, $\Psi_G(e) = \{v\}$, como é o caso do vértice $x$ da Figura 1.1, e dizemos que a aresta $s$ é um laço. Um grafo no qual não existem arestas paralelas ou laços é dito um *grafo simples*. Neste estudo, consideraremos apenas grafos simples.

Seja $G$ um grafo simples e $u$ e $v$ dois vértices de $G$. Se $u$ e $v$ forem adjacentes, então existe uma única aresta $e$ em $G$ com $\Psi_G(e) = \{u, v\}$, portanto podemos identificar $e$ por $\{u, v\}$. De fato, quando $G$ é simples, a função de incidência $\Psi_G$ fica definida implicitamente e nomeamos as arestas por suas extremidades. Portanto, ao definir grafos simples, pode-se omitir a função de incidência $\Psi$ definindo o conjunto das arestas $E(G)$ como um subconjunto de pares de vertices. Para tal propósito, para um conjunto $S$, definimos o conjunto de pares de elementos de $S$ por $S^{(2)}$, assim, podemos ver um grafo como um par $G = (V(G), E(G))$ no qual $E(G) \subset V(G)^{(2)}$.

Para simplificar a notação, quando não houver ambiguidade, podemos nos referir ao conjunto de vértices apenas por $V$ e o conjunto de arestas por $E$ em um grafo $G = (V, E)$. A quantidade de vértices de um grafo é chamada de *ordem* do grafo e costuma ser denotada por $n$ ou $v(G)$. Já a quantidade de arestas em um grafo é chamada de *tamanho* do grafo, e é denotada por $m$ ou $e(G)$. Se $G$ é um grafo simples, observamos que $E \subset V^{(2)}$ implica que $m \leq \binom{n}{2} = O(n^2)$, isto é, um grafo simples tem uma quantidade de arestas limitada ao quadrado do seu número de vértices.

Se $v$ é um vértice de um grafo $G$ simples, então a *vizinhança* $N_G(v)$ de $v$ é o conjunto dos vértices adjacentes a $v$. O *grau* de um vértice $d_G(v)$ é o tamanho de sua vizinhança[1], isto é, $d_G(v) = |N_G(v)|$. Quando o grafo for conhecido pelo contexto, utilizaremos apenas $N(v)$ e $d(G)$.

Algumas vezes, grafos que possuem algum tipo de estrutura em comum são agrupados em *famílias* e recebem um nome que é inspirado por suas propriedades ou em homenagem ao matemático que primeiro as estudou. Um aspecto importante da Teoria de Grafos é que ela se trata essencialmente do estudo de estruturas, e portanto, é importante que se tenha a disposição um grande arsenal de famílias de grafos bem conhecidas e estudadas.

A primeira família de grafos a ser estudada é a dos *grafos completos*. Um grafo $G$ é dito um grafo ompleto quando ele é um grafo simples no qual todos os vértices são adjacentes. Denota-se por $K_n$ o grafo completo com $n$ vértices. A Figura 1.3 contém desenhos de alguns grafos completos pequenos. Ao definir uma família de grafos, é comum estudar um pouco de suas propriedades. Por exemplo, podemos ver que $e(K_n) = \binom{n}{2}$, pois $K_n$ é um grafo simples e qualquer par de vértices possui uma aresta que é incidente neles. Além disso, é comum designar um grafo completos por *clique* quando ele é um subgrafo induzido. Diz-se um $n$-clique quando deseja-se especificar o número de vértices.

Uma outra família de grafos importante na Teoria de Ramsey é, surpreendentemente, a família dos *grafos vazios*. Um grafo $G$ é vazio quando ele não possui nenhuma aresta. É importante notar que um grafo vazio ainda pode

[1]Esta definição de grau de um vértice está restrita a grafos simples. No caso geral, um grau de um vértice $v$ é a quantidade de vezes que arestas incidem nele, isto é, o o número de arestas que incidem em $v$ com os laços contados duas vezes

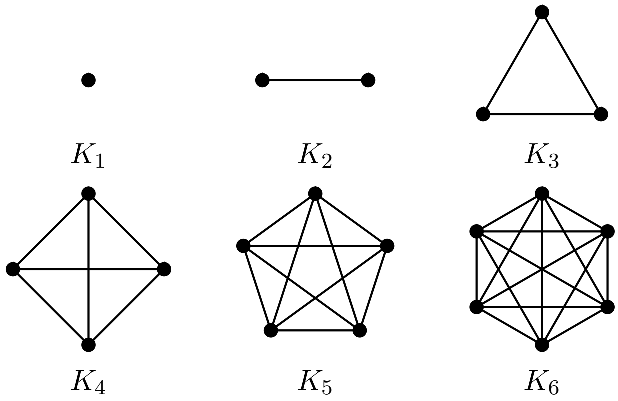



Figura 1.3: Grafos completos de ordem 1 até 6.

ter vértices, e denotamos grafos vazios com $n$ vértices por $E_n$. Novamente, denota-se por *anti-clique* um grafo vazio que é subgrafo induzido.

Uma maneira de relacionar os grafos completos e vazios é por meio da operação de complementação. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O *complemento* de $G$ é um grafo $\overline{G}$ com o mesmo conjunto de vértices $V$, no qual dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se eles não são adjacentes em $G$. Em outras palavras, o conjunto de arestas de $\overline{G}$ é o complemento de $E$ em relação à $V^{(2)}$. Portanto, podemos escrever apenas $\overline{G} = (V, \overline{E})$ e notamos que para todo grafo simples $G$, $\overline{\overline{G}} = G$. Temos então que $\overline{K_n} = E_n$.

Finalmente, o ultimo conceito necessário nesta introdução é o de *coloração de arestas*. A noção de coloração é muito importante em Teoria de Grafos, sendo intimamente relacionada ao surgimento da mesma. A idéia principal de colorações é mapear o conjunto de vértices ou de arestas a um conjunto de cores $C$. Utiliza-se cores no lugar de índices ou números para enfatizar a ausência de estrutura no conjunto. Então, se $G = (V, E)$ é um grafo, então uma coloração de arestas de $G$ em $k$ cores é um mapa entre $E$ e um conjunto de $k$ cores, isto é, uma função $c : E(G) \to C$, no qual $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ é um conjunto de $k$ cores. Uma coloração de arestas em $k$ cores também é chamada de $k$-coloração de arestas. Note que se considerarmos apenas arestas de cor $C$ em uma coloração de arestas, temos um subgrafo de $G$, que será denotado por $G_C$. Note que uma coloração de arestas pode ser vista como uma partição do conjunto de arestas nas partes $c^{-1}(C_i)$.

## 1.2 Números de Ramsey

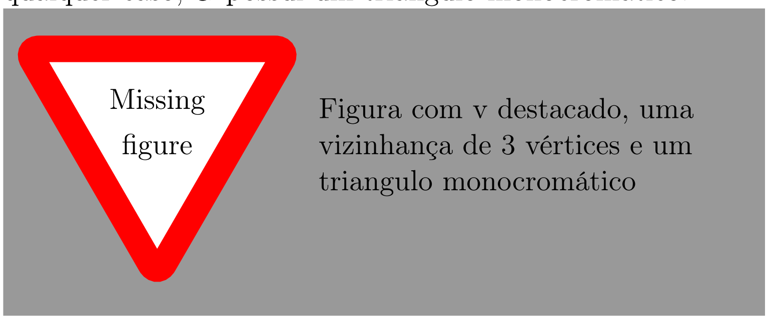
No início do capítulo, vimos o problema das mesas, que nos diz que em mesas de seis alunos, três alunos se conhecem ou três alunos não se conhecem. Consideremos agora um grafo $G$ no qual os vértices são os seis alunos na mesa e uma aresta está presente entre dois alunos quando eles se conhecem.

Note que $\overline{G}$ é o grafo em que dois alunos são adjacentes quando não se conhecem. O problema das mesas então nos diz que se $G$ possui 6 vértices então $G$ ou $\overline{G}$ possui um triângulo.

Observar o mesmo fato em termos de colorações é ainda mais vantajoso. Novamente considere $G$ como o grafo onde os vértices são as seis pessoas na festa, mas desta vez, considere o grafo completo. Realizamos uma coloração das arestas de $G$ em duas cores, $c : E(G) \to \{R, B\}$ ($R$ e $B$ denotam vermelho e azul respectivamente), de forma que $c(xy) = R$ se $x$ e $y$ são pessoas que se conheçem e $c(xy) = B$ se $x$ e $y$ são pessoas que não se conhecem. Assim queremos ver que $G$ possui um triângulo monocromático, isto é, $G_R$ ou $G_B$ possuem um triangulo.

**Teorema 2.** *Se $G$ é um grafo com 6 vértices e $c : E(G) \to \{R, B\}$ é uma coloração de arestas, então $G$ possui um triângulo monocromático.*

*Demonstração.* Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer e considere a sua vizinhança $N(v)$. O vértice $v$ se liga aos vértices de $N(v)$ utilizando arestas vermelhas ou azuis, logo $N(v) = N_R(v) \cup N_B(v)$. Como o grau de $v$ é 5, então $d_R(v) + d_B(v) = 5$. Pelo princípio das casas dos pombos, alguma cor dentre $R$ e $B$, digamos $R$, é tal que $d_R(v) >= 3$. Agora observe que se dois vértices de $N_R(v)$ se conectam por uma aresta vermelha, unidas ao vértice $v$ eles formam um triângulo vermelho. Se isto não ocorrer, toda aresta interna à $N_R(v)$ é azul, o que garante que existe um triângulo azul em $v$. De qualquer caso, $G$ possui um triângulo monocromático.




□

Esta formulação é interessante porque não nos permitiu provar o problema da festa, mas nos permite estudar melhor generalizações do mesmo problema.

# CAPÍTULO 2

# Resultados Preliminares

Neste capítulo, estão os resultados preliminares e definições de teoria de grafos.

## 2.1 Teoria de Ramsey

## 2.2 Teoria de Grafos

CAPÍTULO 3

# Provas

Neste capítulo, estão temporariamente os resultados que foram julgados interessantes e suas provas preliminares.[1]

## 3.1 Números Pequenos

Denotaremos por $K_n$ o grafo completo com $n$ vértices. Uma coloração das arestas de $K_n = (V, E)$ em duas cores é um mapa $c : E \to \{R, B\}$ onde $R$ e $B$ indicam as cores vermelho e azul respectivamente. Uma coloração de arestas induz uma decomposição dada por $K_n = E_R \cup E_B$

**Definição 1.** *Seja $G$ um grafo*

# Referências Bibliográficas


[1] Alon, Noga and Spencer, Joel H. *The Probabilistic Method*. Wiley, New York, fourth edition, 2016.

[2] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[3] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2011.

[4] R. Diestel. *Graph Theory: Springer Graduate Text GTM 173*. Springer Graduate Texts in Mathematics (GTM). Springer-Verlag, 2012.

[5] R.L. Graham, B.L. Rothschild, and J.H. Spencer. *Ramsey Theory*. A Wiley-Interscience Publication. Wiley, second edition, 1990.

[6] R.L. Graham and C.B.M. Sciences. *Rudiments of Ramsey Theory*. Number no. 45 in Conference Board of the Mathematical Sciences regional conference series in mathematics. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1981.

[7] J. Nesetril and V. Rödl. *Mathematics of Ramsey Theory*. Algorithms and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[8] F. P. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of The London Mathematical Society*, s2-30:264–286, 1930.