

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**Introdução à Teoria de Ramsey em Grafos**

*V. S. Souza*

*C. N. Campos*

Relatório Técnico - IC-PFG-16-22 - Projeto Final de Graduação

December - 2016 - Dezembro

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.  
O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade dos autores.

# Introdução à Teoria de Ramsey em Grafos

Autor: Victor Seixas Souza <sup>1</sup>

Supervisora: Christiane Neme Campos <sup>1</sup>

16 de fevereiro de 2017

<sup>1</sup>Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas

<b>Prefácio</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Noções de Grafos . . . . .	2
1.2 Números de Ramsey . . . . .	6
<b>2 Números de Ramsey Clássicos</b>	<b>11</b>
2.1 Pequenos Números de Ramsey . . . . .	11
2.2 Limitantes Superiores . . . . .	15
2.3 Números de Ramsey multicoloridos . . . . .	17
<b>3 Números de Ramsey para outros Grafos</b>	<b>22</b>
3.1 Grafos Bipartidos . . . . .	22
3.2 Caminhos e Ciclos . . . . .	24
3.3 Árvores . . . . .	27
<b>4 Método Probabilístico</b>	<b>31</b>
4.1 Probabilidade Discreta . . . . .	31
4.2 Limitantes Inferiores . . . . .	34
4.3 Pequenas Alterações . . . . .	36
4.4 O Lema Local de Lovász . . . . .	38
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>

A Teoria de Ramsey é uma área da Matemática que unifica o tema “desordem completa é impossível”. Mais especificamente, observamos que se uma estrutura é grande o suficiente, então ela possui uma subestrutura bem especial e ordenada. Este fenômeno ocorre em diversos campos da Matemática, como Combinatória, Geometria e Teoria dos Números. Este texto aborda conceitos básicos e alguns dos resultados clássicos em Teoria de Ramsey aplicada a grafos.

O exemplo mais simples de tal corpo teórico é frequentemente apresentado na seguinte história: em uma festa com pelo menos seis pessoas, três delas se conhecem mutuamente ou três delas não se conhecem mutuamente. Se enxergarmos a relação de conhecer como simétrica, o mesmo pode ser traduzido para linguagem de Teoria de Grafos como: todo grafo com pelo menos seis vértices possui um triângulo, ou, então, o seu grafo complementar possui um triângulo. A Teoria de Ramsey inicia-se pela generalização sucessiva deste enunciado para grafos e hipergrafos.

A Teoria de Ramsey tem seu nome em homenagem ao matemático e filósofo britânico Frank P. Ramsey, por seu trabalho, em lógica, publicado em 1930 [32], mas apenas adquiriu um corpo teórico coeso na década de 1970. A área vem recebendo grande atenção nos últimos vinte anos por suas conexões com diversos campos da Matemática e, ainda assim, muitos dos seus problemas fundamentais permanecem sem solução. Além disso, pouco da teoria propagou-se para os livros didáticos em nível de graduação. Entretanto, é possível abordar parte da teoria sem recorrer ao ferramental mais avançado.

Considerando a lacuna da literatura citada anteriormente, este texto tem por objetivo apresentar conceitos básicos da Teoria de Ramsey em grafos em um nível introdutório e em língua portuguesa. Além disso, abordamos alguns tópicos mais avançados como números de Ramsey para grafos gerais, o método probabilístico e o Lema Local de Lovász.

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

No primeiro dia de aula em uma escolinha de matemática, a professora preparou uma gincana para entrosar os alunos. Ela os sorteou em grupos de seis, e cada grupo deveria sentar-se em mesas separadas. O objetivo era que os alunos conversassem entre si sobre o que fizeram durante as férias e, potencialmente, criassem novas amizades. Alguns alunos haviam sido colegas nos anos anteriores e, portanto, já se conheciam; outros alunos vieram de turmas diferentes, então não conheciam a todos. Além disso, novos alunos entram na escola todo ano para aprender matemática!

Após o sorteio, a professora supervisionou atentamente os grupos e observou que em algumas mesas, três alunos já se conheciam. Já em outras mesas, até quatro alunos já se conheciam. Preocupada se a gincana teria o efeito desejado, ela adotou outra estratégia e focou apenas nos alunos que ainda não se conheciam. Em algumas mesas, havia três alunos que ainda não se conheciam, mas outras pareciam menos promissoras, não havendo nem três alunos que não se conheciam. O fato curioso era que nestas mesas havia três alunos que se conheciam. Sendo uma professora de matemática, ela se perguntou se existia algum motivo para isto acontecer. Será que se ela fizesse outro sorteio, poderia haver uma mesa em que nenhum grupo de três alunos se conhecessem e nenhum grupo de três alunos não se conhecessem? Por sorte, a professora havia estudado Teoria de Grafos e conseguiu verificar o seguinte fato:

**Fato 1.** *Em uma mesa com seis alunos, três alunos se conhecem ou três alunos não se conhecem.*

Vamos ver agora como que a professora percebeu este fato. Considere que você seja um dos seis alunos da mesa. Dos cinco restantes, você conhece uma quantidade, digamos  $c$ , e também não conhece uma quantidade  $n$ . Sabemos que  $c + n = 5$ . Isto nos dá que, ou  $c \geq 3$ , ou  $n \geq 3$ . De fato, se  $c \leq 2$  e  $n \leq 2$  ocorrerem simultaneamente,  $5 = c + n \leq 4$ , o que é absurdo. Suponha que  $c \geq 3$ . Isto significa que você conhece pelo menos três dos outros alunos, digamos Alberto, Bruna e Carlos. Se existe alguma amizade entre eles, digamos,

Alberto e Carlos são amigos, então a mesa possui um grupo de três alunos que se conhece, você, Alberto e Carlos. Caso isto não ocorra, então Alberto, Bruna e Carlos formam um grupo de três alunos que não se conhecem. O caso  $n \geq 3$  segue do mesmo raciocínio.

O Fato 1 pode ser considerado o primeiro resultado na Teoria de Ramsey e possui generalizações interessantes. Além disso, ele possui uma formulação mais clara em termos de coloração de grafos. Na próxima seção, introduzimos os conceitos da Teoria de Grafos que são necessários para adentrar o universo da Teoria de Ramsey em grafos. Mesmo um leitor familiarizado com grafos é convidado a fazer uma leitura rápida da seção para se familiarizar com a notação utilizada neste texto.

## 1.1 Noções de Grafos

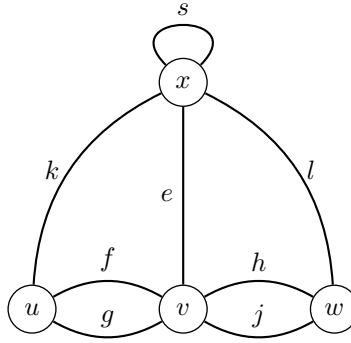
Um *grafo*  $G$  é um par ordenado  $(V(G), E(G))$ , que consiste em um conjunto  $V(G)$  de *vértices* e um conjunto  $E(G)$  de *arestas*, disjunto de  $V(G)$ , acompanhado de uma função de incidência  $\Psi_G$  que associa cada aresta de  $E(G)$  a um par de vértices de  $V(G)$ , não necessariamente distintos. Uma aresta  $e \in E(G)$  e vértices  $u, v \in V(G)$  são ditos *incidentes* se  $\Psi_G(e) = \{u, v\}$ . Neste caso, diz-se ainda que  $u$  e  $v$  são as *extremidades* de  $e$ . A incidência relaciona elementos de conjuntos distintos, neste caso, vértices e arestas. Uma outra relação é a de adjacência, que se aplica para elementos de mesma natureza. Dois vértices  $u$  e  $v$  são ditos *adjacentes* em  $G$  se existe uma aresta  $e$  em  $G$  tal que  $\Psi_G(e) = \{u, v\}$ . Duas arestas  $e$  e  $f$  são ditas *adjacentes* em  $G$  se existe um vértice  $v$  em  $G$  tal que  $v \in \Psi_G(e) \cap \Psi_G(f)$ , isto é, se existe um vértice  $v$  que incide simultaneamente em  $e$  e  $f$ .

Vamos construir um grafo  $G = (V(G), E(G))$  para ilustrar estas definições. O conjunto de vértices será  $V(G) = \{u, v, w, x\}$  e o conjunto de arestas será  $E(G) = \{e, f, g, h, j, k, l, s\}$ . Falta definir a função de incidência  $\Psi_G$ , que associa as arestas aos vértices:

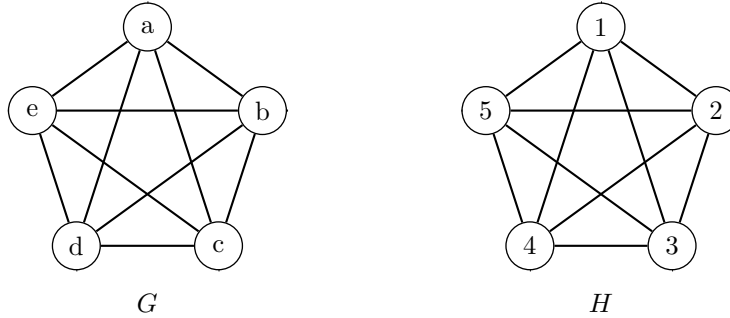
$$\begin{array}{llll} \Psi_G(e) = \{v, x\} & \Psi_G(f) = \{u, v\} & \Psi_G(g) = \{u, v\} & \Psi_G(h) = \{v, w\} \\ \Psi_G(j) = \{v, w\} & \Psi_G(k) = \{u, x\} & \Psi_G(l) = \{w, x\} & \Psi_G(s) = \{x\} \end{array}$$

Isto completa a definição do grafo  $G$ . Uma maneira interessante de representar grafos é por meio de um desenho. A Figura 1 representa o grafo  $G$  da seguinte maneira: os vértices são indicados por círculos e as arestas são indicadas por linhas que unem os círculos que correspondem aos vértices nos quais a aresta incide. A representação gráfica é muito importante pois nos permite criar uma intuição sobre a estrutura dos grafos. Vale a pena notar que um mesmo grafo pode possuir mais de um desenho: basta desenhar os vértices em posições diferentes do plano. De fato, a posição dos vértices e das arestas não é importante, é a relação entre os vértices e as arestas que caracteriza a estrutura do grafo.

O desenho de um grafo pode ser um bom representante da estrutura, mas dois grafos com o mesmo desenho não são necessariamente iguais. Do ponto de vista formal, dois grafos  $G$  e  $H$  são idênticos quando  $G = H$  no sentido da Teoria de Conjuntos, isto é,  $V(G)$  e  $V(H)$  são o mesmo conjunto,  $E(G)$  e  $E(H)$  são o mesmo conjunto e  $\Psi_G$  e  $\Psi_H$  são a mesma função. Por exemplo, os grafos  $G$  e  $H$  da Figura 2 não são idênticos pois  $V(G) \neq V(H)$ , no entanto, eles possuem, efetivamente, a mesma estrutura.

Figura 1: Representação gráfica do grafo  $G$ .

Esta noção de igualdade de grafos é, como vimos, muito restritiva. Para capturar a noção de que dois grafos diferentes possuem a mesma estrutura, definimos um *isomorfismo* entre dois grafos  $G$  e  $H$  como um par de bijeções  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$  tais que elas preservam a relação de incidência, isto é,  $\Psi_G(e) = \{u, v\}$  se e somente se  $\Psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$ . Quando existe um isomorfismo entre dois grafos  $G$  e  $H$ , dizemos que eles são *isomorfos*, e escrevemos  $G \simeq H$ .

Figura 2: Dois grafos não idênticos  $G$  e  $H$  que são isomorfos.

Grafos isomorfos possuem essencialmente a mesma estrutura e são considerados como iguais para todos os efeitos práticos. De fato, muitas vezes, os nomes que os vértices possuem não tem nenhuma importância. Quando abrimos mão de definir os nomes dos vértices, temos um *grafo não rotulado*, em contrapartida aos *grafos rotulados*. Muitas vezes, apenas nos interessa a interconectividade dos vértices e, então consideramos grafos não rotulados, nomeando os vértices e arestas conforme necessário.

Formalmente, a relação de isomorfismo  $\simeq$  é uma relação de equivalência na classe de todos os grafos. As classes de equivalência são compostas por grafos rotulados que são equivalentes sob a relação de isomorfismo. Grafo não rotulado é um nome que damos a uma destas classes de equivalência, não sendo um grafo propriamente dito e, sim, uma entidade abstrata que carrega em si a estrutura de um grafo sem incluir os rótulos dos vértices e das arestas.

O que nos permite escolher um representante dentro desta classe sem perda de generalidade é o fato de que a maioria das propriedades estudadas pela Teoria de Grafos é invariante por isomorfismo, isto é, se um grafo tem determinada propriedade, qualquer grafo isomorfo a ele possui a mesma propriedade. Portanto, ao rotular vértices e arestas de um grafo não rotulado, podemos fazê-lo de forma arbitrária e sem perda de generalidade.

Uma outra noção fundamental é a de *subgrafo*. Seja  $G$  um grafo, dizemos que  $H$  é um subgrafo de  $G$ , se  $H$  for um grafo tal que  $V(H) \subset V(G)$ ,  $E(H) \subset E(G)$  e  $\Psi_H$  é restrição de  $\Psi_G$ . Quando  $H$  é subgrafo de  $G$ , também dizemos que  $G$  possui  $H$ , ou que existe uma cópia de  $H$  em  $G$ . Em geral, diremos que  $H$  é um subgrafo de  $G$  quando existir subgrafo de  $G$  isomorfo a  $H$ .

Uma noção ligeiramente distinta de subgrafo é a de *subgrafo induzido*. Seja  $G = (V(G), E(G))$  um grafo e  $S \subset V(G)$  um subconjunto de vértices. O grafo  $G[S]$  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $S$  e cujo conjunto de arestas consiste nas arestas de  $G$  que possuem ambas extremidades em  $S$ . Dizemos que  $G[S]$  é um subgrafo de  $G$  *induzido* pelo conjunto de vértices  $S$ .

Até agora, a definição de grafos que temos é bastante abrangente e permite algumas situações que não gostaríamos de considerar em nosso estudo. A primeira situação especial ocorre quando duas arestas  $e$  e  $f$  incidem nos mesmos vértices, isto é,  $\Psi_G(e) = \Psi_G(f)$ , neste caso dizemos que  $e$  e  $f$  são *arestas paralelas*. No grafo exemplificado na Figura 1,  $f$  e  $g$  são arestas paralelas. A segunda situação é quando  $e$  incide em apenas um vértice  $v$ , isto é,  $\Psi_G(e) = \{v\}$ , como é o caso da aresta  $s$  da Figura 1, e dizemos que esta aresta é um *laço*. Um grafo no qual não existem arestas paralelas ou laços é dito um *grafo simples*. Neste estudo, consideraremos apenas grafos simples.

Seja  $G$  um grafo simples e  $u$  e  $v$  dois vértices de  $G$ . Se  $u$  e  $v$  forem adjacentes, então existe uma única aresta  $e$  em  $G$  com  $\Psi_G(e) = \{u, v\}$ . Portanto podemos identificar  $e$  por  $\{u, v\}$  ou  $uv$ . De fato, quando  $G$  é simples, a função de incidência  $\Psi_G$  fica definida implicitamente e nomeamos as arestas por suas extremidades. Dessa forma, ao definir grafos simples, pode-se omitir a função de incidência  $\Psi$ , definindo o conjunto das arestas  $E(G)$  como um subconjunto de pares de vértices. Para tal propósito, dado um conjunto  $S$ , definimos o conjunto de pares de elementos de  $S$  por  $\binom{S}{2}$ ; assim, podemos ver um grafo como um par  $G = (V(G), E(G))$  no qual  $E(G) \subset \binom{V(G)}{2}$ . Em geral, denotamos o conjunto de todos os subconjuntos de  $S$  com  $k$  elementos por  $\binom{S}{k}$ , e temos a propriedade  $|\binom{S}{k}| = \binom{|S|}{k}$ .

Para simplificar a notação, quando não houver ambiguidade, podemos nos referir ao conjunto de vértices apenas por  $V$  e o conjunto de arestas por  $E$  em um grafo  $G = (V, E)$ . A quantidade de vértices de um grafo é chamada de *ordem* do grafo e costuma ser denotada por  $n$  ou  $v(G)$ . Já a quantidade de arestas em um grafo é chamada de *tamanho* do grafo, e é denotada por  $m$  ou  $e(G)$ . Se  $G$  é um grafo simples, observamos que  $E \subset \binom{V}{2}$ , o que implica que  $m \leq \binom{n}{2} = O(n^2)$ , isto é, um grafo simples tem uma quantidade de arestas limitada ao quadrado do seu número de vértices.

Se  $v$  é um vértice de um grafo simples  $G$ , então a *vizinhança*  $N_G(v)$  de  $v$  é o conjunto dos vértices adjacentes a  $v$ . O *grau* de um vértice  $d_G(v)$  é a cardinalidade de sua vizinhança<sup>1</sup>, isto

<sup>1</sup>Esta definição de grau de um vértice está restrita a grafos simples. No caso geral, o grau de um vértice  $v$  é a quantidade de vezes que arestas incidem nele, isto é, o o número de arestas que incidem em  $v$  com os



é,  $d_G(v) = |N_G(v)|$ . Quando o grafo for conhecido pelo contexto, utilizamos apenas  $N(v)$  e  $d(v)$ . Quando todos os vértices de um grafo possuem o mesmo grau, ele é dito *regular*. Um grafo regular no qual todo vértice possui grau  $k$  é dito  $k$ -regular. O valor mínimo dentre os graus de um grafo  $G$  é denotado por  $\delta(G)$ , e o máximo, por  $\Delta(G)$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. Consideremos a soma  $\sum_{v \in V} d(v)$ , isto é, a soma dos graus de todos os vértices de  $G$ . Cada vértice  $v$  incide em  $d(v)$  arestas. Além disso, cada aresta incide em exatamente dois vértices, já que o grafo não possui laços. Estes dois fatos nos dão que a soma conta todas as arestas exatamente duas vezes<sup>2</sup>, logo  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ . Este resultado é conhecido por *Handshaking Lemma* e é demasiadamente útil. Uma primeira aplicação é a observação de que um grafo simples só pode ter uma quantidade par de vértices de grau ímpar. De fato, o resultado anterior nos dá que a soma dos graus dos vértices de  $G$  é sempre par, isto é,  $\sum_{v \in V} d(v) \equiv 0 \pmod{2}$ . Se  $A$  é o conjunto de vértices de grau ímpar, temos  $\sum_{v \in V} d(v) \equiv \sum_{v \in A} d(v) \equiv \sum_{v \in A} 1 \equiv |A| \pmod{2}$ .

Algumas vezes, grafos que possuem algum tipo de estrutura em comum são agrupados em *famílias* e recebem um nome que é inspirado por suas propriedades ou em homenagem ao matemático que primeiro as estudou. Um aspecto importante da Teoria de Grafos é que ela se trata, essencialmente, do estudo de estruturas e, portanto, é importante que se tenha à disposição um grande arsenal de famílias de grafos bem conhecidas e estudadas.

A primeira família de grafos a ser estudada é a dos grafos completos. Um grafo  $G$  é dito *completo* quando ele é um grafo simples no qual todos os vértices são adjacentes. Denota-se o grafo completo com  $n$  vértices por  $K_n$ . A Figura 3 contém desenhos de alguns grafos completos pequenos. Ao definir uma família de grafos, é comum estudar um pouco de suas propriedades. Por exemplo, podemos ver que  $e(K_n) = \binom{n}{2}$ , pois  $K_n$  é um grafo simples e qualquer par de vértices é adjacente.

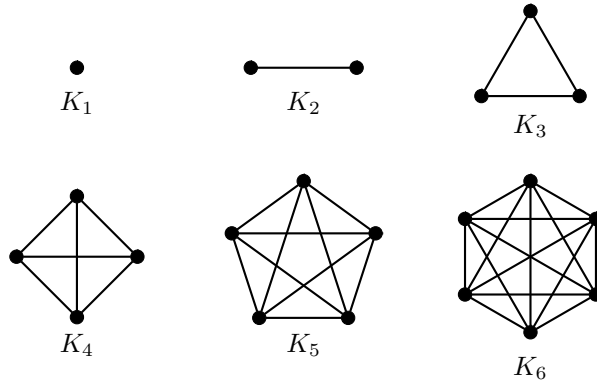


Figura 3: Grafos completos de ordem 1 até 6.

Uma outra família de grafos importante na Teoria de Ramsey é, surpreendentemente, a família dos *grafos vazios*. Um grafo  $G$  é vazio quando ele não possui nenhuma aresta. É importante notar que um grafo vazio ainda pode ter vértices.

laços contados duas vezes.

<sup>2</sup>Note que um laço incide duas vezes na mesma aresta. Desta forma, mesmo que o grafo possua laços esta contagem permanece válida.

Uma maneira de relacionar os grafos completos e vazios é por meio da operação de complementação. Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. O *complemento* de  $G$  é um grafo  $\overline{G}$  com o mesmo conjunto de vértices  $V$ , no qual dois vértices são adjacentes em  $\overline{G}$  se e somente se eles não são adjacentes em  $G$ . Em outras palavras, o conjunto de arestas de  $\overline{G}$  é o complemento de  $E$  em relação à  $\binom{V}{2}$ . Portanto, podemos escrever apenas  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  e notamos que para todo grafo simples  $G$ ,  $\overline{\overline{G}} = G$ . Temos então que o grafo vazio com  $n$  vértices é o complemento de  $K_n$ , logo o denotamos por  $\overline{K_n}$ .

Finalmente, o último conceito necessário nesta introdução é o de coloração de arestas. A noção de coloração é muito importante em Teoria de Grafos, sendo intimamente relacionada aos seus primórdios. A idéia principal de colorações é mapear o conjunto de vértices ou de arestas em um conjunto de cores  $\mathcal{C}$ . Utiliza-se cores no lugar de índices ou números para enfatizar a ausência de estrutura no conjunto. Assim, se  $G = (V, E)$  é um grafo, então uma *coloração de arestas* de  $G$  com  $k$  cores é um mapa entre  $E$  e um conjunto de  $k$  cores, isto é, uma função  $c : E(G) \rightarrow \mathcal{C}$ , no qual  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  é um conjunto de  $k$  cores. Uma coloração de arestas com  $k$  cores também é chamada de  *$k$ -coloração de arestas*. Por exemplo, a Figura 4 exemplifica uma 3-coloração de arestas do grafo construído no início desta seção.

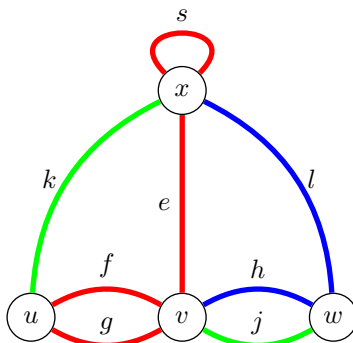


Figura 4: Exemplo de coloração de arestas com três cores.

Podemos explicitar quais cores são utilizadas na coloração chamando de *RB-coloração* uma 2-coloração de arestas nas cores  $R$  e  $B$ , por exemplo. Note que se considerarmos apenas arestas de cor  $C$  em  $c$ , temos um subgrafo de  $G$ , que é denotado por  $G_C$ . Neste texto, quando alguma notação incluir  $G_C$  como índice, podemos simplificar para apenas  $C$ . Por exemplo, a vizinhança do vértice  $v$  no grafo  $G_C$  pode ser denotada por  $N_C(v)$  em vez de  $N_{G_C}(v)$ . Note também que uma coloração de arestas pode ser vista como uma partição do conjunto de arestas nas partes  $c^{-1}(C_i)$ . Desta forma, estamos particionando as arestas do grafo em classes determinada pela cor. Por exemplo, a coloração da Figura 4 particiona o conjunto de arestas em  $\{k, j\}$ ,  $\{e, f, g, s\}$  e  $\{h, l\}$ .

## 1.2 Números de Ramsey

No início do capítulo, vimos o problema das mesas, para o qual mostramos que em mesas de seis alunos, existem três alunos que se conhecem ou três alunos que não se conhecem.

Consideremos, agora, um grafo  $G$  no qual os vértices são os seis alunos na mesa e uma aresta conecta dois alunos quando eles se conhecem. Note que  $\overline{G}$  é o grafo em que dois alunos são adjacentes quando não se conhecem. O problema das mesas, então, nos diz que se  $G$  possui 6 vértices, então  $G$  ou  $\overline{G}$  possui um triângulo como subgrafo.

Observar o mesmo fato em termos de colorações é ainda mais vantajoso. Novamente, considere  $G$  como o grafo em que os vértices são as seis pessoas na festa, mas, desta vez, considere o grafo completo. Realizamos uma coloração das arestas de  $G$  em duas cores,  $c : E(G) \rightarrow \{R, B\}$  ( $R$  e  $B$  denotam vermelho e azul, respectivamente<sup>3</sup>), de forma que  $c(xy) = R$ , se  $x$  e  $y$  são pessoas que se conhecem e  $c(xy) = B$ , se  $x$  e  $y$  são pessoas que não se conhecem. Assim, o objetivo é mostrar que  $G$  possui um triângulo monocromático, isto é, um triângulo no qual todas as três arestas tem a mesma cor. Equivalentemente, podemos dizer que  $G_R$  ou  $G_B$  possuem um triângulo. Considerando esta formalização por colorações de arestas, podemos reformular o Fato 1.

**Proposição 2.** *Se  $G$  é um grafo completo com 6 vértices e  $c : E(G) \rightarrow \{R, B\}$  é uma coloração de arestas, então  $G$  possui um triângulo monocromático.*

*Demonstração.* Seja  $v \in V(G)$  um vértice arbitrário e seja  $N(v)$  a sua vizinhança. O vértice  $v$  se liga aos vértices de  $N(v)$  utilizando arestas vermelhas ou azuis. Logo  $N(v) = N_R(v) \cup N_B(v)$ . Como o grau de  $v$  é 5, então  $d_R(v) + d_B(v) = 5$ . Pelo princípio das casas dos pombos, alguma cor dentre  $R$  e  $B$ , digamos  $R$ , é tal que  $d_R(v) \geq 3$ . Agora, observe que se existem dois vértices em  $N_R(v)$  ligados por uma aresta vermelha, então eles formam um triângulo vermelho se unidos com  $v$ . Caso contrário, isto é, caso não existam dois vértices de  $N_R(v)$  ligados por arestas vermelhas, toda aresta com ambas as extremidades em  $N_R(v)$  é azul, o que garante a existência de um triângulo azul em  $G$ . Desta forma, em ambos os casos,  $G$  possui um triângulo monocromático.  $\square$

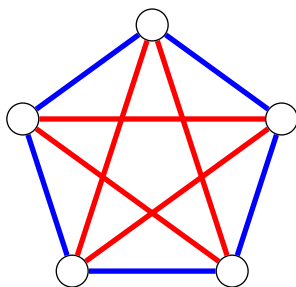


Figura 5: Coloração do  $K_5$  sem  $K_3$  monocromáticos.

Algo interessante de notar é que, com cinco vértices, este fato pode ser evitado: existe uma coloração das arestas do  $K_5$  que não possui triângulos monocromáticos, como podemos observar na Figura 5. Com esta observação, concluímos que seis é o menor número de vértices que um grafo completo precisa ter de forma que qualquer coloração de suas arestas com duas cores possua um triângulo monocromático.

<sup>3</sup>Estes símbolos estão sendo usados porque  $R$  e  $B$  são tradicionais na Teoria de Ramsey e referem-se aos nomes das cores vermelho (*red*) e azul (*blue*).

Agora que entendemos em que condições uma coloração de arestas em duas cores necessariamente possui um triângulo monocromático, podemos estudar quando é possível evitar a existência de outros grafos completos como subgrafo monocromático. Isto nos leva a definição dos números de Ramsey a seguir.

**Definição 3.** *O  $k$ -ésimo número de Ramsey,  $R(k)$ , é o menor inteiro positivo  $n$  tal que qualquer coloração de arestas em duas cores do grafo  $K_n$  possui um  $K_k$  monocromático.*

Com esta definição, podemos reescrever o enunciado da Proposição 2 como  $R(3) \leq 6$ , uma vez que ele nos mostra que 6 vértices são suficientes para encontrar um triângulo monocromático. A Figura 5 mostra que  $R(3) > 5$ , logo obtemos  $R(3) = 6$ . Este resultado apareceu pela primeira vez como um problema da competição de matemática universitária Putnam<sup>4</sup>, em 1953.

Observamos também que  $R(1) = 1$ , uma vez que um  $K_1$  monocromático é simplesmente um vértice qualquer e que  $R(2) = 2$  pois um  $K_2$  monocromático é uma aresta qualquer da coloração.

Antes de estudar outros valores conhecidos de  $R(k)$  e seguintes generalizações deste conceito, é importante mostrar que eles estão bem-definidos. Ou seja, precisamos verificar que, para todo  $k$ , realmente existe um número  $n$  tal que qualquer coloração de arestas do  $K_n$  possui um  $K_k$  monocromático. Esta questão não é trivial; poderia ser o caso de que se  $k$  fosse suficientemente grande, fosse possível evitar a existência de  $K_k$  monocromáticos em alguma coloração com  $n$  arbitrariamente grande. Como vamos ver a seguir, este não é o caso. De fato, vamos encontrar um limitante superior para o número de Ramsey, que é suficiente para determinar que  $R(k)$  está bem definido.

**Teorema 4** (Ramsey, 1930). *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $R(k) \leq 2^{2k-2} < 4^k$ . Em particular,  $R(k)$  está bem definido.*

*Demonstração.* Esta prova consiste em sucessivas aplicações do princípio da casa dos pombos. Seja  $G = G^1$  um grafo completo com  $n \geq 2^l$  vértices e com uma RB-coloração  $c$ . Vamos encontrar uma cópia monocromática de  $K_k$  em  $G$  se fizermos  $n$  grande o suficiente e escolhendo  $l$  de forma apropriada.

Seja  $v_1 \in V(G^1)$ . Por definição,  $|N(v_1)| = n - 1$ . Considere as vizinhanças disjuntas  $N_R(v_1)$  e  $N_B(v_1)$  e note que  $N_R(v_1) \cup N_B(v_1) = N(v_1)$ . Pelo Princípio da Casa dos Pombos, ou  $|N_R(v_1)| \geq 2^{l-1}$ , ou  $|N_B(v_1)| \geq 2^{l-1}$ . Note que não é possível que  $|N_R(v_1)| < 2^{l-1}$  e  $|N_B(v_1)| < 2^{l-1}$  simultaneamente pois  $(2^{l-1} - 1) + (2^{l-1} - 1) = 2^l - 2 < n - 1$ . Denote por  $C_1$  a cor que possui a maior vizinhança a partir de  $v_1$ . Seja  $G^2 = G^1[N_{C_1}(v_1)]$ , isto é, o subgrafo de  $G^1$  induzido pela maior vizinhança de  $v_1$ . Por construção,  $|V(G^2)| \geq 2^{l-1}$ .

Seja  $v_2 \in V(G^2)$ . Repetindo o raciocínio usado para construir  $G^2$ , obtemos uma cor  $C_2$  e um subgrafo  $G^3 = G^2[N_{C_2}(v_2)]$  tal que  $|V(G^3)| \geq 2^{l-2}$ . Por indução, repetimos este processo e obtemos o subgrafo  $G^t$  com  $|V(G^j)| \geq 2^{l+1-t}$ . Enquanto  $2^{l+1-t} \geq 1$ , existe

<sup>4</sup>A *William Lowell Putnam Mathematical Competition*, comumente referida apenas por Putnam Competition, é uma competição anual de matemática para alunos de graduação do Canadá e dos Estados Unidos. No ano de 1953, a segunda questão do primeiro dia enunciava: *Six points are in general position in space (no three in a line, no four in a plane). The fifteen line segments joining them in pairs are drawn and then painted, some segments red, some blue. Prove that some triangle has all its sides the same color.* [6]

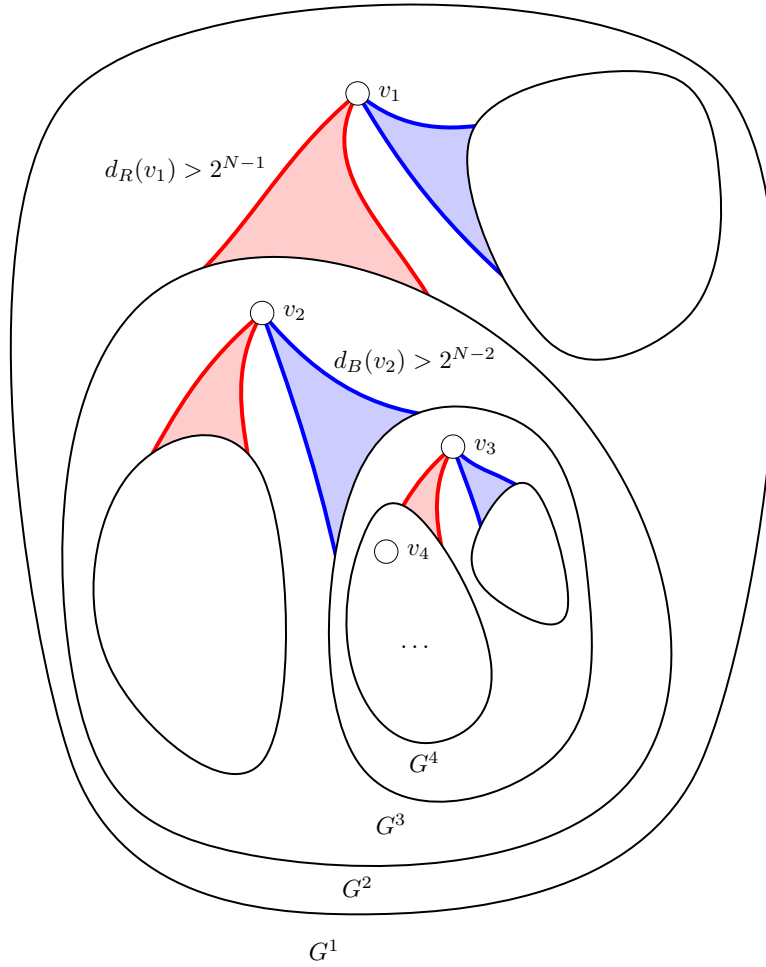


Figura 6: Construção recursiva da sequência de vértices  $v_i$  e cores.

alguma vizinhança colorida não vazia, e podemos continuar o processo. Portanto, quando  $t = l + 1$ , garantimos que  $G^{l+1}$  possui um vértice, o qual denotamos  $v_{l+1}$  e não podemos mais continuar o processo.

Desta forma, obtemos: uma sequência de grafos  $G^1, G^2, \dots, G^{l+1}$  tal que  $|V(G^i)| \geq 2^{l+1-i}$ ; uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{l+1}$  com  $v_i \in V(G^i)$ ; e cores  $C_1, \dots, C_l$ , com a propriedade de que o vértice  $v_i$  se conecta a todos os outros vértices seguintes nesta sequência com a cor  $C_i$ , isto é,  $C(v_i v_j) = C_i$  se  $j > i$ . A Figura 6 ilustra este processo.

Finalmente, escolhendo  $l = 2k - 2$ , obtemos uma sequência de  $2k - 1$  vértices e  $2k - 2$  cores. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, alguma cor aparece pelo menos  $k - 1$  vezes, digamos que a cor  $C$  ocorra nos índices  $C_{a_1} = C_{a_2} = \dots = C_{a_{k-1}}$ . Isto implica que os vértices  $v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_{k-1}}$  formam um  $K_{k-1}$  monocromático. No entanto, recorde que o último vértice  $v_{l+1}$  recebe arestas de cor  $C$  dos vértices  $v_{a_i}$ , portanto, podemos adicioná-lo ao  $K_{k-1}$  para obter um  $K_k$  monocromático. Com isto, concluímos que  $R(k) \leq 2^{2k-2} < 4^k$ .  $\square$

Embora este teorema seja associado a Frank P. Ramsey, um matemático e filósofo britânico que estudou Lógica, ele não foi provado nesta forma e nem utilizando este método. O teorema, na forma como ele provou [32], era sobre conjuntos infinitos, mas a prova original se assemelha em estrutura à prova aqui apresentada.

Agora, com o Teorema 4, sabemos não só que os números de Ramsey estão bem-definidos mas também estabelecemos uma cota superior concreta para o seu valor. Nos próximos capítulos, vamos ver generalizações deste resultado, em conjunto com algumas técnicas mais recentes.

Antes de estudar os números  $R(k)$  para valores maiores de  $k$ , é conveniente generalizar nossas definições. Até agora, definimos os números de Ramsey da seguinte maneira:  $R(k)$  é o menor inteiro positivo  $n$ , tal que qualquer coloração de arestas em duas cores do  $K_n$  possui um  $K_k$  monocromático. Existem diversas maneiras de generalizar esta definição, a primeira delas está explicitada a seguir.

**Definição 5.**  $R(k, s)$  é o menor inteiro positivo  $n$ , tal que qualquer coloração de arestas em duas cores do grafo  $K_n$  possui um  $K_k$  da primeira cor ou um  $K_s$  da segunda cor.

Note que esta definição contém a antiga pois  $R(k) = R(k, k)$ , que são chamados de *números de Ramsey diagonais*. Ressaltamos que não é preciso demonstrar novamente que estes números estão bem-definidos, uma vez que segue da definição que  $R(k, s) \leq R(\max\{k, s\}) < \infty$ .

## 2.1 Pequenos Números de Ramsey

Vamos analisar inicialmente alguns valores de números de Ramsey que são imediatos de determinar. Por exemplo  $R(1, k) = 1$  para qualquer valor de  $k$ , uma vez que é impossível evitar um  $K_1$  monocromático em qualquer cor quando o grafo possui vértices. Além disso, temos  $R(2, k) = k$ , dado que não possuir  $K_2$  em alguma cor significa que ela não está presente na coloração. Como temos a simetria  $R(k, s) = R(s, k)$ , os valores realmente interessantes são obtidos para  $k, s \geq 3$ ; o primeiro deles,  $R(3, 3) = 6$ , já foi apresentado.

Vamos agora estudar o número  $R(3, 4)$ , utilizando um argumento semelhante ao do  $R(3, 3)$ , porém ligeiramente mais sofisticado. O número  $R(3, 4)$  foi determinado em 1955, por Greenwood e Gleason [21], e está apresentado a seguir. Neste trabalho, os autores obtiveram outros resultados e alguns destes também estão apresentados a seguir.

**Proposição 6** (Greenwood, Gleason [21]).  $R(3, 4) \leq 9$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo completo com nove vértices e  $c$  uma  $RB$ -coloração. Suponha que não exista  $K_3$  vermelho ou  $K_4$  azul. Seja  $v \in V(G)$  um vértice qualquer. Considere as vizinhanças  $N_R(v)$  e  $N_B(v)$  de tamanhos  $d_R(v)$  e  $d_B(v)$ , respectivamente. Assim, temos que  $d_R(v) + d_B(v) = 8$ . Suponha que  $d_R(v) \geq 4$ . Se existirem  $x, y \in N_R(v)$  tais que  $c(xy) = R$ , então formamos um triângulo vermelho unindo as extremidades desta aresta com  $v$ , o que é absurdo. Por outro lado, se todas estas arestas forem azuis, temos um  $K_4$  azul em  $N_R(v)$ . Concluimos que  $d_R(v) \leq 3$ , o que implica  $d_B(v) \geq 5$ .

Suponha que  $d_B(v) \geq 6$ . Como sabemos que  $R(3, 3) = 6$ ,  $N_B(v)$  possui um triângulo monocromático. Como  $G$  não possui  $K_3$  vermelho, então  $N_B(v)$  possui um  $K_3$  azul. Contudo, isto nos dá uma contradição, pois unindo este  $K_3$  com o vértice  $v$ , temos um  $K_4$  azul. Portanto, podemos concluir que  $d_B(v) = 5$  e  $d_R(v) = 3$ . Isto, no entanto, vale para qualquer vértice de  $G$ , em particular, implica que  $G_R$  possui 9 vértices de grau ímpar. Entretanto, pelo *Handshaking Lemma*, sabemos que a quantidade de vértices de grau ímpar em um grafo precisa ser par, e então chegamos em um absurdo.

Portanto, em qualquer caso, contrariamos a hipótese de que não existe  $K_3$  vermelho ou  $K_4$  azul e, assim, concluimos que  $R(3, 4) \leq 9$ .  $\square$

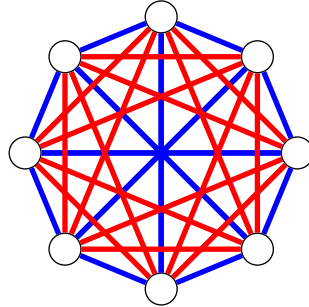


Figura 7: Coloração de arestas do  $K_8$  sem  $K_4$  vermelho e sem  $K_3$  azul.

A Proposição 6 estabelece uma cota superior para  $R(3, 4)$ . Uma forma de obter uma cota inferior é por meio da construção de uma coloração de arestas em duas cores de um grafo completo sem  $K_3$  vermelho e sem  $K_4$  azul. A Figura 7 exibe uma tal coloração com 8 vértices. Isto implica que  $R(3, 4) > 8$ , que em conjunto com a Proposição 6, implica que  $R(3, 4) = 9$ . Embora apenas evidenciar uma coloração seja suficiente, existem  $2^{\binom{8}{2}} = 2^{28} = 268435456$  colorações de arestas do  $K_8$  em duas cores, o que nos deixa intrigados em saber como obter uma coloração com esta propriedade.

**Proposição 7** (Greenwood, Gleason [21]).  $R(3, 4) > 8$ .

*Demonstração.* Vamos construir a coloração de arestas do grafo  $G$  da Figura 7. Seja  $V(G) = \{v_0, \dots, v_7\}$ . Considere a seguinte relação em  $\mathbb{Z}_8$ : dizemos que  $i \sim j$ , se  $i - j \equiv \pm 2$  ou  $\pm 3 \pmod{8}$ . Note que  $i \sim j$  implica em  $j \sim i$  e em  $i + k \sim j + k$ , para todo  $k$ . A coloração  $c$  é, então, definida da seguinte maneira:



$$c(v_i v_j) = \begin{cases} \text{vermelho,} & \text{se } i \sim j; \\ \text{azul,} & \text{se } i \not\sim j. \end{cases}$$

Inicialmente, vamos mostrar que não existe  $K_4$  vermelho em  $G$ . Suponha que  $v_i, v_j, v_k, v_w$  formem um  $K_4$  vermelho em  $G$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $w = 0$ , uma vez que esta relação é invariante por translações. Portanto, temos que  $i \sim 0$ ,  $j \sim 0$  e  $k \sim 0$ . Isto nos dá que  $i, j, k \in \{-3, -2, 2, 3\}$  e uma vez que eles são distintos, algum par dentre  $\{-3, -2\}$  e  $\{2, 3\}$  está coberto pelos  $i, j$  ou  $k$ . No entanto,  $-3 \not\sim -2$  e  $3 \not\sim 2$ , o que implica que estas arestas não são vermelhas, impedindo a existência de um  $K_4$  vermelho.

Para concluir a demonstração, vamos mostrar que não existe  $K_3$  azul. Suponha que  $v_i, v_j, v_k$  formem um  $K_3$  azul em  $G$ . Como  $i \not\sim j$  implica  $i + k \not\sim j + k$ , podemos novamente supor que  $k = 0$ , o que nos dá que  $i, j \in \{-1, 1, 4\}$ . No entanto, temos que  $-1 \sim 1$ ,  $-1 \sim 4$  e  $1 \sim 4$ . Ou seja, quaisquer que sejam os valores de  $i$  e  $j$ , a aresta  $v_i v_j$  não será azul. Portanto, não existe  $K_3$  azul em  $G$ .  $\square$

Ainda explorando este tipo de abordagem, Greenwood e Gleason [21] avançaram um pouco mais e determinaram o valor de  $R(4, 4)$ , como consequência dos dois resultados apresentados a seguir.

**Proposição 8** (Greenwood, Gleason [21]).  $R(4, 4) \leq 18$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo completo com 18 vértices e  $c$  uma RB-coloração. Suponha que não exista  $K_4$  monocromático. Seja  $v \in V(G)$ . Considere as vizinhanças  $N_R(v)$  e  $N_B(v)$  de tamanhos  $d_R(v)$  e  $d_B(v)$ , respectivamente. Assim, temos que  $d_R(v) + d_B(v) = 17$ . Alguma destas duas vizinhanças possui pelo menos nove vértices, digamos,  $d_R(v) \geq 9$ . Com isto, como  $R(3, 4) = 9$  temos que  $N_R(v)$  possui um  $K_3$  vermelho ou um  $K_4$  azul. Como supusemos que não existe  $K_4$  monocromático em  $G$ , então  $N_R(v)$  possui um  $K_3$  vermelho. No entanto, unindo este  $K_3$  com o vértice  $v$ , obtemos um  $K_4$  vermelho, contrariando nossa hipótese de que não existe  $K_4$  monocromático. Assim, concluímos que  $R(4, 4) \leq 18$ .  $\square$

A Proposição 9 para o  $R(4, 4)$  é o análogo da Proposição 7 para o  $R(3, 4)$ , considerando a coloração exibida na Figura 8.

**Proposição 9** (Greenwood, Gleason [21]).  $R(4, 4) > 17$ .

*Demonstração.* Vamos construir a coloração de arestas do grafo  $G$  da Figura 8. Desta vez, trabalhamos no corpo  $\mathbb{Z}_{17}$ , com  $V(G) = \{v_0, \dots, v_{16}\}$ . Definimos a seguinte relação em  $\mathbb{Z}_{17}$ : dizemos que  $i \sim j$  se  $i - j$  for um resíduo quadrático, isto é, se existe  $x \in \mathbb{Z}_{17}$  tal que  $i - j \equiv x^2 \pmod{17}$ . Note que  $i \sim j$  implica em  $j \sim i$  pois  $-1 \equiv 4^2 \pmod{17}$ . Temos também que  $i \sim j$  implica em  $i + k \sim j + k$  para todo  $k$  e em  $a^2 i \sim a^2 j$ . Construímos a coloração  $c$ , então, da seguinte maneira:

$$c(v_i v_j) = \begin{cases} \text{vermelho,} & \text{se } i \sim j; \\ \text{azul,} & \text{se } i \not\sim j. \end{cases}$$

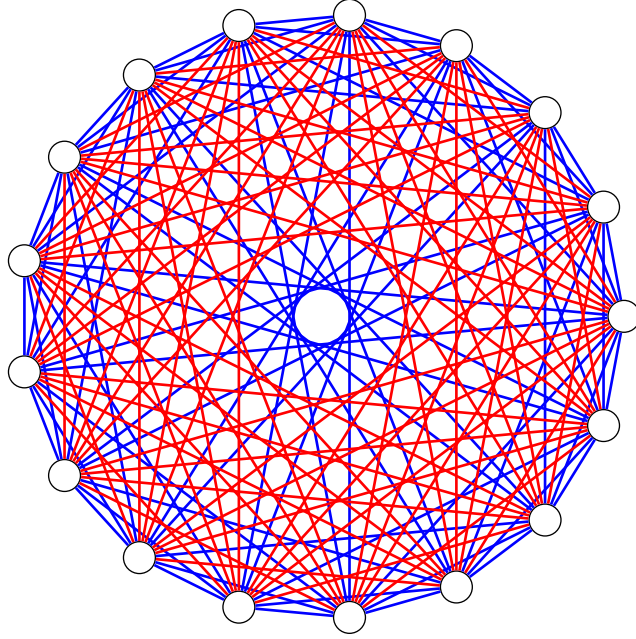


Figura 8: Coloração do  $K_{17}$  sem  $K_4$  monocromáticos.

Agora, vamos mostrar que não existe  $K_4$  monocromático em  $G$ . Suponha que  $v_i, v_j, v_k, v_w$  formem um  $K_4$  monocromático em  $G$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $w = 0$  uma vez que esta relação é invariante por translações. Portanto, temos que os números  $i, j, k, i - j, i - k, j - k$  são todos resíduos quadráticos ou são todos resíduos não-quadráticos. Suponha que todos eles sejam resíduos quadráticos. Como 17 é primo,  $\mathbb{Z}_{17}$  é um corpo, logo o elemento  $i \neq 0$  possui inverso  $i^{-1}$  e ele também é resíduo quadrático. Definindo  $a = i^{-1}j$ ,  $b = i^{-1}k$ , temos que os números  $1, a, b, 1 - a, 1 - b, a - b$  são todos resíduos quadráticos, uma vez que os resíduos quadráticos são fechados por multiplicação.

Se os números forem todos resíduos não-quadráticos, então  $i^{-1}$  também é resíduo não-quadrático. Definindo  $a$  e  $b$  da mesma maneira, obtemos que os números  $1, a, b, 1 - a, 1 - b, a - b$  são todos resíduos quadráticos em  $\mathbb{Z}_{17}$ . Isto se deve ao fato de que em  $\mathbb{Z}_p$ , com  $p$  primo, o produto de dois resíduos não-quadráticos é um resíduo quadrático<sup>1</sup>.

Em ambos os casos, temos que  $1, a, b, 1 - a, 1 - b, a - b$  são resíduos quadráticos em  $\mathbb{Z}_{17}$ . Os resíduos quadráticos de  $\mathbb{Z}_{17}$  são  $1, 2, 4, 8, 9, 13, 15$  e  $16$ , e não é possível escolher  $a$  e  $b$  de maneira que todos os números sejam simultaneamente resíduos. Isto pode ser verificado pelo raciocínio a seguir. Suponha que  $a = 4$ , então  $1 - a \equiv 14 \pmod{17}$ , que não é resíduo quadrático. O mesmo verificamos se  $a = 8, a = 13$  e  $a = 15$ , obtendo  $1 - a \equiv 10 \pmod{17}$ ,  $1 - a \equiv 5 \pmod{17}$  e  $1 - a \equiv 3 \pmod{17}$  respectivamente, todos os casos não sendo resíduos

<sup>1</sup>Lembre o símbolo de Legendre, se  $p$  é um primo ímpar e  $a$  não é múltiplo de  $p$ , definimos  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$  se  $a$  é resíduo quadrático em  $\mathbb{Z}_p$  e  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ , caso contrário. Como o símbolo de Legendre é uma função completamente multiplicativa, se  $a$  e  $b$  são resíduos não quadráticos, temos que  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = (-1)(-1) = 1$ , logo  $ab$  é um resíduo quadrático. Para mais detalhes, veja o Capítulo 5 do livro *Introdução à Teoria dos Números* por José Plínio de Oliveira Santos [12].

quadráticos. Se  $a = 9$  então  $1 - a \equiv a \pmod{17}$  e os índices não são distintos. Portanto, a única escolha restante é  $a = 2$  e  $b = 16$ . Entretanto,  $1 - a \equiv 16 \equiv b \pmod{17}$  e novamente não temos índices distintos.  $\square$

É natural, agora, tentar determinar  $R(k, s)$  para outros valores de  $k$  e  $s$ . No entanto, a dificuldade em determinar os valores de  $R(k, s)$  cresce muito rapidamente com  $s$  e  $k$ . Por exemplo, o valor de  $R(5, 5)$  não é conhecido e o valor de  $R(4, 5) = 25$  foi encontrado por uma busca computacional extensiva em 1995 [29]. Existe um compêndio dinâmico dos resultados conhecidos sobre números de Ramsey pequenos, mantido por Radziszowski [31], os melhores valores conhecidos para  $R(k, s)$  estão na Tabela 1.

k \ s	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	39	40 42
4		18	25	36 41	49 61	58 84	73 115	92 149
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826
8						282 1870	317 3583	
9							565 6588	581 12677
10								798 23556

Tabela 1: Valores e limitantes para  $R(k, s)$  com  $3 \leq k \leq s \leq 10$ . Valores exatos em verde, limitantes inferiores em vermelho e superiores em azul.

## 2.2 Limitantes Superiores

Um fato interessante que podemos observar em todos os números que encontramos na seção anterior é que o argumento utilizado na prova do limitante superior é bem semelhante. De fato, podemos condensar esta idéia em um resultado à parte.

**Teorema 10** (Greenwood, Gleason [21]).  $R(k, s) \leq R(k, s - 1) + R(k - 1, s)$ .

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo completo com  $n$  vértices e  $c$  uma RB-coloração. Suponha que não exista  $K_k$  vermelho e nem  $K_s$  azul. Seja  $v \in V(G)$  um vértice qualquer. Consideremos as vizinhanças  $N_R(v)$  e  $N_B(v)$  de tamanhos  $d_R(v)$  e  $d_B(v)$ , respectivamente. Assim, temos que  $d_R(v) + d_B(v) = n - 1$ . Se  $d_R(v) \geq R(k - 1, s)$ , então em  $N_R(v)$  possui um  $K_s$  azul ou um  $K_{k-1}$  vermelho, que em conjunto com  $v$  forma um  $K_k$  vermelho, contrariando

nossa hipótese. Concluimos que  $d_R(v) \leq R(k-1, s) - 1$ . Similarmente, mostramos que  $d_B(v) \leq R(k, s-1) - 1$ . Portanto:

$$\begin{aligned} d_R(v) + d_B(v) &\leq R(k-1, s) + R(k, s-1) - 2 \\ n &\leq R(k-1, s) + R(k, s-1) - 1. \end{aligned}$$

Dessa maneira, escolhendo  $n = R(k-1, s) + R(k, s-1)$  obtemos uma contradição e, portanto, concluimos que  $G$  possui um  $K_k$  vermelho ou um  $K_s$  azul. Ou seja,  $R(k, s) \leq R(k, s-1) + R(k-1, s)$ , como queríamos.  $\square$

Observe que desta desigualdade resulta que  $R(3, 3) \leq R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6$  e  $R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 18$ . No entanto, ela não é justa para muitos valores de  $k$  e  $s$ . Por exemplo,  $R(3, 4) \leq R(3, 3) + R(2, 4) = 10$ . O argumento que foi utilizado para demonstrar que  $R(3, 4) \leq 9$  também pode ser generalizado na proposição seguir.

**Teorema 11** (Greenwood, Gleason [21]). *Se  $R(k, s-1)$  e  $R(k-1, s)$  forem pares, então  $R(k, s) < R(k, s-1) + R(k-1, s)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $R(k, s-1) = 2a$  e  $R(k-1, s) = 2b$ . Sejam  $G$  um grafo completo com  $n = 2a + 2b - 1$  vértices e  $c$  uma RB-coloração. Suponha que não exista  $K_k$  vermelho e nem  $K_s$  azul. Fixe um vértice  $v$  arbitrário. Seguindo o raciocínio da prova anterior, temos que  $d_B(v) \leq 2a - 1$  e  $d_R(v) \leq 2b - 1$ . Como  $d(v) = n - 1 = 2a + 2b - 2$ , temos que  $d_B(v) = 2a - 1$  e  $d_R(v) = 2b - 1$ . Isto vale para qualquer vértice  $v$ . Consequentemente, os grafos  $G_R$  e  $G_B$  possuem uma quantidade ímpar de vértices de grau ímpar, o que é impossível pelo *Handshaking Lemma*. Isto, então, contraria a hipótese de que não existe  $K_k$  vermelho e  $K_s$  azul, concluindo que  $R(k, s) \leq n = 2a + 2b - 1$ , o que finaliza a demonstração.  $\square$

Esta proposição nos dá cotas ligeiramente mais precisas para alguns casos, por exemplo, chegamos em  $R(3, 4) \leq 9$ . Outra consequência interessante da desigualdade do Teorema 10 é um limitante superior genérico, que por sua vez nos permite obter uma versão ligeiramente melhor do Teorema 4.

**Teorema 12** (Erdős, Szekeres [15]). *Para  $k$  e  $s$  inteiros positivos, temos:*

$$R(k, s) \leq \binom{k+s-2}{k-1}$$

*Demonstração.* Se  $k = 1$  temos  $R(1, s) = 1 = \binom{s-1}{0}$ . Se  $k = 2$ , temos  $R(2, s) = s = \binom{s}{1}$ . Procedemos agora por indução em  $s+k$  e obtemos:

$$\begin{aligned} R(k, s) &\leq R(k, s-1) + R(k-1, s) \\ &\leq \binom{k+s-3}{k-2} + \binom{k+s-3}{k-1} = \binom{k+s-2}{k-1}. \end{aligned} \quad \square$$

**Corolário 13** (Erdős, Szekeres [15]). *Para  $k \rightarrow \infty$ ,*

$$R(k+1, k+1) \leq (1 + o(1)) \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}.$$

*Demonstração.* Para transformar o limitante dado pelo Teorema 12 em um limitante assintótico para os números de Ramsey diagonais, vamos utilizar a aproximação de Stirling  $n! = (1 + o(1))\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , com  $n \rightarrow \infty$ , obtendo:

$$\begin{aligned} R(k+1, k+1) &\leq \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!^2} = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{4k\pi} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{2k\pi \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} \\ &= (1 + o(1)) \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}. \end{aligned} \quad \square$$

Note que este limitante é ligeiramente melhor que o obtido no Teorema 4 por causa da presença do termo  $\sqrt{k}$  no denominador. Isto nos indica que os números de Ramsey diagonais crescem no máximo exponencialmente e com expoente menor ou igual a 4. Poucas melhoras substanciais neste limitante são conhecidas. Atualmente, o melhor limitante é devido a D. Conlon [11] e está explicitado a seguir.

$$R(k+1, k+1) \leq k^{-\alpha \frac{\log k}{\log \log k}} \binom{2k}{k}$$

para alguma constante  $\alpha$  adequada. Note que o termo  $k^{\alpha \frac{\log k}{\log \log k}}$  é subexponencial. Logo, este limitante não melhora a constante  $4^k$  implicada pelo coeficiente binomial central  $\binom{2k}{k}$ .

## 2.3 Números de Ramsey multicoloridos

Uma maneira muito natural de generalizar os números de Ramsey é considerar colorações de arestas com um número maior de cores. Estes números são conhecidos por *números de Ramsey multicoloridos*.

**Definição 14.**  $R(t_1, \dots, t_k)$  é o menor inteiro positivo  $n$  tal que qualquer coloração de arestas em  $k$  cores do grafo  $K_n$  possui, para algum  $1 \leq i \leq k$ , um  $K_{t_i}$  da  $i$ -ésima cor.

Algumas observações são imediatas, por exemplo, se algum  $t_i = 1$ , então  $R(t_1, \dots, t_k) = 1$ , pois um  $K_1$  é um  $K_1$  de qualquer cor, em particular, da cor  $C_i$ . Se algum  $t_i = 2$ , digamos  $t_k = 2$ , então  $R(t_1, \dots, t_{k-1}, 2) = R(t_1, \dots, t_{k-1})$ , uma vez que qualquer aresta da cor  $C_i$  induz um  $K_2$  desta cor. Além disso, os números de Ramsey possuem a seguinte simetria: se  $\sigma$  é uma permutação de  $\{1, \dots, k\}$ , então  $R(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}) = R(t_1, \dots, t_k)$ .

Vamos ver que algumas propriedades dos números de Ramsey com duas cores podem ser estendidas para mais cores sem muito esforço. Por exemplo, em analogia ao Teorema 10, temos o resultado a seguir.

**Teorema 15** (Greenwood, Gleason [21]). *Para todos os inteiros positivos  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,*

$$R(t_1, \dots, t_k) \leq \sum_{i=1}^k R(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_k) - k + 2.$$

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo completo com  $n$  vértices e  $c$  uma  $k$ -coloração de arestas nas cores  $C_1, \dots, C_k$ . Suponha que não exista  $K_{t_i}$  da cor  $C_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Seja  $v \in V(G)$  um vértice qualquer. Consideramos as vizinhanças  $N_{C_i}(v)$ , que possuem  $d_{C_i}(v)$  vértices. Assim, temos que  $\sum_{i=1}^k d_{C_i}(v) = n - 1$ .

Se  $d_{C_i}(v) \geq R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k)$  para algum  $i$ , então em  $N_{C_i}(v)$  possui um  $K_{t_i-1}$  de cor  $C_i$ , pois  $G$  não possui  $K_{t_j}$  de cor  $C_j$  para nenhum  $j \neq i$ . No entanto, unindo  $v$  ao  $K_{t_i-1}$  de cor  $C_i$ , formamos um  $K_{t_i}$  de cor  $C_i$ . Contrariamos, então, nossa hipótese e temos que  $d_{C_i}(v) \leq R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k) - 1$  para todo  $i$ . Portanto,

$$n = \sum_{i=1}^k d_{C_i}(v) + 1 \leq \sum_{i=1}^k R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k) - k + 1.$$

Dessa maneira, se um  $K_n$  com uma  $k$ -coloração de arestas não possui  $K_{t_i}$  da cor  $C_i$ , então  $n \leq \sum_{i=1}^k R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k) - k + 1$ . Portanto, uma  $k$ -coloração de um grafo completo com  $\sum_{i=1}^k R(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k) - k + 2$  vértices necessariamente possui algum  $K_{t_i}$  de cor  $C_i$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Analogamente ao Teorema 12, transformamos a desigualdade deste teorema em um limitante com um coeficiente multinomial.

**Corolário 16** (Greenwood, Gleason [21]). *Para todos os inteiros positivos  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,*

$$R(t_1 + 1, \dots, t_k + 1) \leq \binom{t_1 + \dots + t_k}{t_1, \dots, t_k} = \frac{(t_1 + \dots + t_k)!}{t_1! \dots t_k!}. \quad \square$$

Podemos agora estimar o primeiro número multicolorido não-trivial (com todos os parâmetros maiores que 2), que é o  $R(3, 3, 3)$ . Utilizando o Teorema 15, temos:

$$\begin{aligned} R(3, 3, 3) &\leq R(2, 3, 3) + R(3, 2, 3) + R(3, 3, 2) - 1 \\ &= 3R(3, 3, 2) - 1 = 3R(3, 3) - 1 = 17. \end{aligned}$$

De fato, temos que  $R(3, 3, 3) = 17$ . Para demonstrar este fato, precisamos construir uma 3-coloração de arestas de um  $K_{16}$  sem que haja triângulos monocromáticos. Isto foi feito pela primeira vez por Greenwood e Gleason [21], mas, neste texto, vamos apresentar uma construção mais simples proposta por Sun e Cohen [38].

**Proposição 17.**  $R(3, 3, 3) > 16$ .

*Demonstração.* Vamos construir a coloração de arestas do grafo  $G$  exibida na Figura 9. Desta vez, trabalhamos no corpo  $\mathbb{Z}_2^4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , particionando o conjunto dos

elementos não nulos de  $\mathbb{Z}_2^4$  em três partes:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}, \\ S_2 &= \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}, \\ S_3 &= \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Cada uma destas partes  $S_i$  possui a seguinte propriedade: se  $a, b \in S_i$ , então  $a + b \notin S_i$ . Seja  $V(G) = \{v_a : a \in \mathbb{Z}_2^4\}$ . Definimos a coloração de arestas  $c$  em três cores da seguinte maneira:

$$c(v_a v_b) = \begin{cases} \text{vermelho,} & \text{se } a + b \in S_1; \\ \text{azul,} & \text{se } a + b \in S_2; \\ \text{verde,} & \text{se } a + b \in S_3. \end{cases}$$

Esta coloração está bem definida pois os  $S_i$  são disjuntos, cobrem todos os elementos não nulos de  $\mathbb{Z}_2^4$  e se  $a, b \in \mathbb{Z}_2^4$  com  $a$  e  $b$  distintos, então  $a + b \neq 0$ . De fato, dados  $a$  e  $b$  distintos, existe pelo menos uma coordenada em que eles diferem. Logo, esta coordenada será 1 na soma  $a + b$ , portanto  $a + b \neq 0$ .

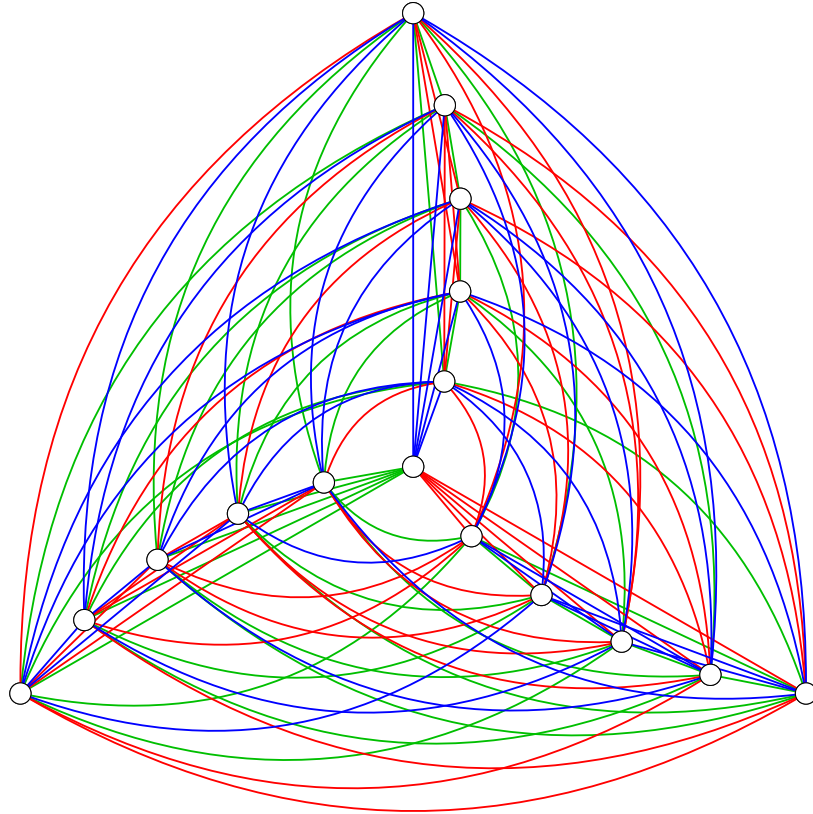


Figura 9: Coloração do  $K_{16}$  em três cores sem  $K_3$  monocromáticos.

Agora vamos ver que a coloração  $c$  não possui triângulos monocromáticos. Sejam  $v_x, v_y, v_z$  os vértices de um triângulo qualquer. Suponha que duas das arestas sejam da mesma cor, digamos  $c(v_x v_y) = c(v_x v_z)$ . Vamos ver que a terceira aresta tem uma cor distinta. Temos para algum  $i$ , que  $x + y, x + z \in S_i$ . Utilizando a propriedade da soma de elementos de  $S_i$ , temos que  $(x + y) + (x + z) \notin S_i$ . Entretanto,  $(x + y) + (x + z) = 2x + y + z = y + z$ . Isto implica que  $c(v_x, v_y) \neq c(v_y, v_z)$ . Portanto,  $c$  não possui triângulos monocromáticos.  $\square$

Uma coleção de números de Ramsey de bastante interesse é a dos números multicoloridos para triângulos. Denotamos por  $R_r(3)$  o número de Ramsey  $r$ -colorido  $R(3, 3, \dots, 3)$  com  $r$  termos. De fato, já mostramos que  $R_2(3) = 6$  e  $R_3(3) = 17$ . O número  $R_4(3) = R(3, 3, 3, 3)$  sabe-se que está entre 51 e 62. Em geral, temos as seguintes estimativas.

**Teorema 18.** *Para todo inteiro  $r \geq 2$ ,  $5^{r/2} \leq R_r(3) \leq 3r!$ .*

*Demonstração.* Para o limitante superior, aplicamos Teorema 15, obtendo:

$$\begin{aligned} R_r(3) &\leq rR(3, \dots, 3, 2) = rR_{r-1}(3) \\ &\leq r(r-1) \dots 3R_2(3) = 3r!. \end{aligned}$$

Para o limitante inferior, faremos uma construção recursiva partindo da coloração da Figura 5. Suponha que  $R_k(3) = n$ . Considere o grafo completo  $G$  com  $5n$  vértices e cores  $C_1, C_2, \dots, C_{k+2}$ . Particione  $V(G)$  em cinco partes com  $n$  vértices:  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$ . Podemos colorir as arestas dos subgrafos  $G[S_i]$  com as cores  $C_1, \dots, C_k$  sem que existam triângulos monocromáticos, uma vez que  $R_k(3) \geq n$ . As arestas que faltam colorir incidem em vértices  $v_i \in S_i$  e  $v_j \in S_j$  com  $i \neq j$ . Vamos colorir estas arestas nas cores remanescentes  $C_{k+1}$  e  $C_{k+2}$  utilizando o critério:

$$c(v_i v_j) = \begin{cases} C_{k+1}, & \text{se } i - j \equiv 1 \pmod{5}; \\ C_{k+2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

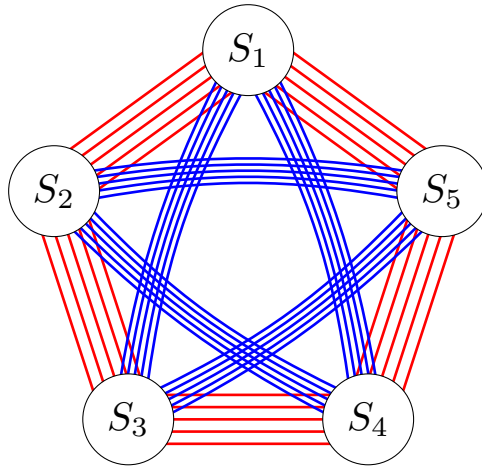


Figura 10: Construção da coloração da Proposição 18.



A Figura 10 exemplifica esta construção. Note que  $c$  não possui triângulo monocromático nas cores  $C_1, \dots, C_k$ , uma vez que construímos a coloração em  $G[S_i]$  desta maneira. Além disso,  $c$  também não possui triângulo monocromático nas cores  $C_{k+1}$  e  $C_{k+2}$ , por construção.

Desta forma, concluímos que existe uma  $(k+2)$ -coloração de arestas de  $G$  sem triângulos monocromáticos. Logo,  $R_{k+2}(3) \geq 5n = 5R_k(3)$ . Aplicando esta relação repetidamente, obtemos:

$$\begin{aligned} R_{2k}(3) &\geq 5^{k-1} R_2(3) = 5^{k-1} \cdot 6 \geq 5^k \\ R_{2k+1}(3) &\geq 5^{k-1} R_3(3) = 5^{k-1} \cdot 17 = 5^k \left( \frac{17}{5} \right) \geq 5^{k+1/2} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, obtemos  $R_r(3) \geq 5^{r/2}$ . □

Embora os limitantes encontrados no Teorema 18 não sejam os melhores conhecidos, eles estão próximos. Note que existe uma diferença bem grande em ordem entre  $5^{r/2}$  e  $3r!$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Mesmo assim, sabe-se que o limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (R_r(3))^{1/r}$$

existe, embora possa ser infinito [7]. O Teorema 18 mostra que este limite é pelo menos  $\sqrt{5} \approx 2.236$ . Não se sabe muito mais sobre os números  $R_r(3)$ . Para o caso  $r = 4$ , por exemplo, os melhores limitantes conhecidos são  $R_4(3) \geq 51$  [8] e  $R_4(3) \leq 62$  [19].

---

Números de Ramsey para outros Grafos

---

Uma característica interessante da Teoria de Ramsey é sua possibilidade de diversas generalizações. Até agora, consideramos colorações que não tinham o grafo  $K_r$  como subgrafo monocromático. Vamos relaxar esta condição e proibir outros grafos monocromáticos.

**Definição 19.** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos simples. Definimos  $r(G, H)$  como o menor inteiro positivo  $n$ , tal que qualquer coloração de arestas em duas cores do grafo  $K_n$  possui um  $G$  da primeira cor ou um  $H$  da segunda cor.*

Note que por esta definição,  $R(k, s) = r(K_k, K_s)$ . Também definimos  $r(G) = r(G, G)$ . Segue da definição que se  $G$  é subgrafo de  $G'$  então  $r(G, H) \leq r(G', H)$ . Assim, estes números estão bem definidos pois  $r(G, H) \leq r(K_{v(G)}, K_{v(H)}) = R(v(G), v(H)) < \infty$ . De maneira análoga, podemos definir os números de Ramsey para várias cores,  $r(G_1, \dots, G_k)$ , e adaptar a notação  $r_k(G) = r(G, \dots, G)$ .

Neste capítulo, vamos estudar algumas classes de grafos interessantes e seus números de Ramsey. Vale observar que mesmo para famílias simples de grafos, os números de Ramsey associados podem ser bem difíceis de se determinar. Por este motivo, muitos dos resultados apresentados nesta seção não incluirão as demonstrações. O texto, no entanto, fornece uma base sólida o suficiente para que o leitor interessado, busque as referências e estudem tais demonstrações por si só.

### 3.1 Grafos Bipartidos

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. Dizemos que  $G$  é um *grafo bipartido* se o conjunto  $V$  pode ser particionado em duas partes não vazias  $X$  e  $Y$  de tal forma que toda aresta em  $E$  tem uma extremidade em  $X$  e a outra em  $Y$ . Tal partição  $\{X, Y\}$  é dita uma *bipartição* do grafo  $G$ . Um grafo  $G$  com bipartição  $\{X, Y\}$  é denotado  $G[X, Y]$ .

Quando um grafo bipartido  $G[X, Y]$  é tal que todo par de vértices  $x \in X$  e  $y \in Y$  é adjacente, dizemos que  $G[X, Y]$  é um *grafo bipartido completo*. Naturalmente, temos uma família associada aos grafos com esta propriedade. Denotamos por  $K_{m,n}$  o grafo bipartido completo  $G[X, Y]$  com  $|X| = m$  e  $|Y| = n$ . Por construção, note que  $v(K_{m,n}) = m + n$  e  $e(K_{m,n}) = mn$ . A Figura 11 ilustra alguns exemplos de grafos bipartidos completos.

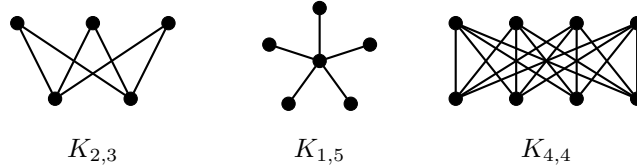


Figura 11: Alguns grafos bipartidos completos.

Podemos generalizar o conceito de bipartição de um grafo. Se for possível particionar o conjunto de vértices em  $k$  partes não vazias de maneira que toda aresta do grafo possui extremidades em partes distintas, dizemos que o grafo é *k-partido*. Um grafo bipartido é, portanto, 2-partido. Denotamos por  $K_{a_1, \dots, a_k}$  o grafo completo  $k$ -partido com  $n$  partes, cuja  $i$ -ésima parte possui  $a_i$  vértices. Quando  $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ , obtemos grafos que fazem parte de uma família de grafos conhecida como *grafos de Turán*<sup>1</sup>. Denotamos os grafos de Turán que possuem todas as partes iguais por  $T_r(k) = K_{k, \dots, k}$ , ou seja,  $T_r(k)$  é o grafo completo  $r$ -partido com partes de tamanho  $k$  cada. Nas próximas seções, mostramos que estes grafos são bem interessantes para construir limitantes inferiores para números de Ramsey.

Um subcaso notável dos grafos bipartidos completos são os *grafos estrela*  $K_{1,n}$ . O desenho do  $K_{1,5}$ , na Figura 11, evidencia a motivação por trás deste nome. Podemos caracterizar os números de Ramsey  $r(K_{1,n}, K_{1,m})$  da seguinte forma.

**Teorema 20** (Harary [23]). *Sejam  $m$  e  $n$  inteiros positivos, temos que*

$$r(K_{1,m}, K_{1,n}) = \begin{cases} m + n, & \text{se } m \text{ ou } n \text{ forem ímpares;} \\ m + n - 1, & \text{se } m \text{ e } n \text{ forem pares.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que em uma coloração de arestas, um  $K_{1,m}$  monocromático na cor  $C$  corresponde a um vértice  $v$  tal que  $d_C(v) \geq m$ .

Considere uma  $RB$ -coloração qualquer de um grafo completo  $G$  sem  $K_{1,m}$  vermelho ou  $K_{1,n}$  azul. Então  $d_R(v) \leq m-1$  e  $d_B(v) \leq n-1$  para todo vértice  $v \in V(G)$ . Isto é impossível se  $G = K_{m+n}$ , logo  $r(K_{1,m}, K_{1,n}) \leq m + n$ . Se  $m$  e  $n$  são pares, considere  $G = K_{m+n-1}$ . Temos, portanto, que  $d_R(v) = m-1$  e  $d_B(v) = n-1$  para todo vértice  $v \in V(G)$ . Logo, o grafo  $G_R$  possui todos os vértices de grau ímpar. Ademais,  $v(G_R) = m + n - 1$  também é ímpar. Pelo *Handshaking Lemma*, não existe grafo com um número ímpar de vértices de grau ímpar. Portanto,  $r(K_{1,m}, K_{1,n}) \leq m + n - 1$ .

No caso de algum entre  $m$  e  $n$  ser ímpar, suponha, sem perda de generalidade, que  $m$  seja ímpar, com  $m = 2k+1$ . Considere  $G = K_{m+n-1}$  com  $V(G) = \{v_0, \dots, v_{m+n-2}\}$ . Defina

<sup>1</sup>Os grafos de Turán são grafos completos  $r$ -partidos com as partes de tamanho mais próximas possíveis. Isto é, são grafos da forma  $K_{a_1, \dots, a_r}$  com  $|a_i - a_j| \leq 1$  para todo  $1 \leq i, j \leq r$ .

uma  $RB$ -coloração  $c$  da seguinte maneira.

$$c(v_i v_j) = \begin{cases} \text{vermelho,} & \text{se } |i - j| \equiv 1, 2, \dots, \text{ ou } k \pmod{m + n - 1}; \\ \text{azul,} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que nesta coloração,  $d_R(v) = 2k = m - 1$  e  $d_B(v) = n - 1$ , para todo vértice  $v \in V(G)$ . Portanto,  $c$  não possui  $K_{1,m}$  vermelho nem  $K_{1,n}$  azul, o que implica em  $r(K_{1,m}, K_{1,n}) = m + n$ .

Suponha, agora, que ambos  $m$  e  $n$  sejam pares. Considere um grafo bipartido  $G = G[X, Y]$ , com  $X = \{x_i : i \in \mathbb{Z}_l\}$  e  $Y = \{y_i : i \in \mathbb{Z}_l\}$ , tal que os vértices  $x_i$  e  $y_j$  são adjacentes se e somente se  $i - j \equiv 1, 2, \dots, \text{ ou } k \pmod{l}$ . Note que  $G$  é  $k$ -regular, e seu complemento é  $(2l - k - 1)$ -regular. Escolhendo  $l = \frac{m+n-2}{2}$  e  $k = m - 1$ , temos que  $G$  é um grafo com  $m + n - 2$  vértices que é  $(m - 1)$ -regular com complementar  $\overline{G}$   $(n - 2)$ -regular. Isto corresponde a uma coloração de  $K_{m+n-2}$  sem  $K_{1,m}$  vermelho nem  $K_{1,n}$  azul. Portanto, temos  $r(K_{1,m}, K_{1,n}) = m + n - 1$ .  $\square$

Este resultado pode ser generalizado com idéias parecidas para o número de Ramsey com diversas cores.

**Teorema 21** (Burr, Roberts [5]). *Sejam  $m_1, \dots, m_k$  inteiros positivos,  $t$  dos quais são pares. Temos que*

$$r(K_{1,m_1}, \dots, K_{1,m_k}) = \sum_{i=1}^k m_i - k + \varepsilon,$$

onde  $\varepsilon = 1$ , se  $t$  é par, e  $\varepsilon = 2$ , caso contrário.  $\square$

Outras classes de grafos bipartidos completos também já foram estudadas. Por exemplo, sabe-se que, para todo  $n \geq 2$ ,  $r(K_{2,n}, K_{2,n}) \leq 4n - 2$  [16]. Além disso, conjectura-se que  $4n - 3 \leq r(K_{2,n}, K_{2,n}) \leq 4n - 2$  [28]. O compêndio dinâmico de Radziszowski [31] é uma excelente referência para encontrar outros resultados deste tipo.

## 3.2 Caminhos e Ciclos

Um *caminho* é um grafo simples que pode ter seus vértices arranjados em uma sequência linear, de modo que dois vértices são adjacentes, se e somente se, correspondem a elementos consecutivos na sequência. Similarmente, um *ciclo* é um grafo simples com  $n \geq 3$  que pode ter seus vértices arranjados em uma sequência linear cíclica, de modo que dois vértices são adjacentes, se e somente se, correspondem a elementos consecutivos na sequência.

Caminhos e ciclos também são agrupadas em famílias de grafos. Os *grafos caminhos* são grafos simples com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas, isomorfos ao grafo  $(\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\})$ . Já os *grafos ciclos* são grafos com  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , e  $n$  arestas isomorfos ao grafo  $(\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup v_1 v_n)$ . Ambas as famílias estão exemplificadas na Figura 12. Note que  $P_2 \simeq K_2$ ,  $P_3 \simeq K_{1,2}$ ,  $C_3 \simeq K_3$  e  $C_4 \simeq K_{2,2}$ .

Note que se  $n > 1$ , o grafo  $P_n$  possui dois vértices de grau um, chamados de *extremidades*; os demais  $n - 2$  vértices são ditos *internos* e possuem grau dois. Já o grafo  $C_n$  é 2-regular,

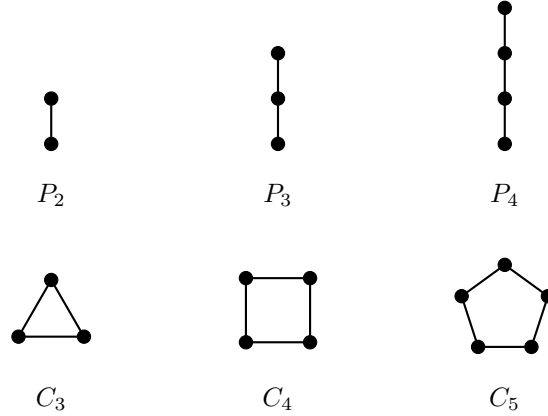


Figura 12: Alguns caminhos e ciclos pequenos.

isto é, todos os seus vértices possuem grau dois e pode ser visto como um grafo obtido pela adição de uma aresta ligando as extremidades de um  $P_n$ .

Caminhos e ciclos são de importância fundamental para a Teoria de Grafos, sendo peças centrais em muitas de suas subáreas. Naturalmente, números de Ramsey que envolvem estes grafos foram intensamente estudados. Uma primeira família de números de Ramsey envolvendo caminhos e ciclos está explicitada a seguir.

**Proposição 22.** *Para todo  $k \geq 1$ , temos*

$$r(P_k, K_3) = r(P_k, C_3) = 2k - 1.$$

*Demonstração.* Note que o grafo  $K_{k-1, k-1}$  não possui triângulo e que o seu complementar é formado por duas cópias disjuntas de  $K_{k-1}$ , e assim, não possui  $P_k$ . Dessa forma, o grafo  $K_{k-1, k-1}$  induz uma  $RB$ -coloração do  $K_{2k-2}$  sem  $K_3$  azul e sem  $P_k$  vermelho. Isto nos mostra que  $r(P_k, K_3) > 2k - 2$ .

Agora, considere uma  $RB$ -coloração  $c$  de  $G = K_n$ , com  $n = 2k - 1$ . Seja  $P$  um caminho vermelho maximal em  $G$ , isto é, um subgrafo isomorfo a um grafo caminho, cujas arestas são todas vermelhas e que não pode ser estendido. Se  $P$  possui  $k$  vértices, então a coloração  $c$  possui um  $P_k$  vermelho. Suponha que  $P$  possua no máximo  $k - 1$  vértices. Seja  $v$  uma das extremidades de  $P$ . Como  $P$  é maximal, todos os seus vizinhos que não pertencem a  $P$  são ligados a ele por arestas azuis. Como  $P$  possui no máximo  $k$  vértices, concluímos que  $d_R(v) \leq k - 1$  e  $d_B(v) \geq k$ . Isto implica que existem pelo menos  $k$  vértices em  $V(G) \setminus V(P)$  ligados a  $v$  por arestas azuis.

Assim, a vizinhança  $N_B(v)$  possui pelo menos  $k$  vértices. Seja  $e$  uma aresta com ambas as extremidades em  $N_B(v)$ . Se  $c(e) = B$ , então obtemos um  $K_3$  azul unindo  $v$  às extremidades de  $e$ . Por outro lado, se nenhuma aresta interna à  $N_B(v)$  for azul, então  $N_B(v)$  é um subgrafo completo vermelho com  $k$  vértices, que, em particular, possui um  $P_k$  vermelho. O que nos permite concluir que em uma  $RB$ -coloração do  $K_{2k-1}$ , a presença de um  $P_k$  vermelho ou um  $K_3$  azul é inevitável, mostrando que  $r(P_k, K_3) \leq 2k - 1$ .  $\square$

Algumas generalizações deste resultado podem ser encontradas na próxima seção. Outros resultados envolvendo caminhos também são conhecidos. Abaixo, apresentamos dois destes, sem demonstrações. Embora o primeiro deles apresente uma demonstração simples, o segundo envolve a famosa e intrincada técnica da Regularidade de Szemerédi<sup>2</sup>.

**Teorema 23** (Gerencsér, Gyárfás [20]). *Sejam  $n \geq m \geq 2$  inteiros, então*

$$r(P_n, P_m) = n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1. \quad \square$$

**Teorema 24** (Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy e Szemerédi [22]). *Para todo  $n$  grande o suficiente*

$$r_3(P_n) = r(P_n, P_n, P_n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 2n - 2, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad \square$$

Os números de Ramsey envolvendo ciclos foram extensivamente estudados e números da forma  $r(C_n, H)$  são conhecidos para várias famílias de grafos  $H$ . Por exemplo, considerando  $H$  como outro ciclo, já temos que  $r(C_3, C_3) = R(3, 3) = 6$ . Inesperadamente, seis vértices também são suficientes para encontrar um  $C_4$  monocromático.

**Teorema 25** (Chvátal, Harary [10]).  $r(C_4, C_4) = 6$ .

*Demonstração.* A coloração do  $K_5$  dada na Figura 5 também não possui  $C_4$  monocromático, logo  $r(C_4, C_4) > 5$ .

Seja  $c$  uma  $RB$ -coloração de  $G = K_6$ . Suponha que  $c$  não possua  $C_4$  monocromático. Como  $R(3, 3) = 6$ , existe um  $K_3$  monocromático, digamos vermelho, que utiliza os vértices  $a_1, a_2, a_3 \in V(G)$ . Sejam  $b_1, b_2, b_3 \in V(G)$  os demais vértices.

Suponha que algum vértice  $b_i$  possua mais de uma aresta vermelha para os vértices  $a_i$ . Sem perda de generalidade, considere que  $c(b_i a_1) = c(b_i a_2) = R$ . Então os vértices  $b_i a_1 a_3 a_2 b_i$  formam um ciclo  $C_4$  monocromático. Portanto, os vértices  $b_i$  tem no máximo uma aresta vermelha que incide nos vértices  $a_i$ . Vamos mostrar agora que vértice  $b_i$  possui exatamente uma aresta vermelha que incide nos vértices  $a_i$ . De fato, suponha que as arestas  $b_i a_1, b_i a_2$  e  $b_i a_3$  sejam azuis. Como  $b_j$  tem no máximo uma aresta vermelha que incide nos  $a_i$ , pelo menos duas das arestas  $b_j a_1, b_j a_2$  e  $b_j a_3$  são azuis, digamos  $b_j a_1$  e  $b_j a_2$ . Portanto, os vértices  $b_i a_1 b_j a_2 b_i$  formam um ciclo  $C_4$  azul.

Dessa forma, temos que todo vértice  $b_i$  tem exatamente uma aresta vermelha que incide aos vértices  $a_i$ . Suponha que mais de uma dessas arestas incidam em um mesmo vértice  $a_i$ . Digamos, por exemplo, que  $c(b_1 a_2) = c(b_3 a_2) = R$ . Isso nos dá que  $c(b_1 a_1) = c(b_3 a_1) = c(b_3 a_3) = c(b_1 a_3) = B$ . Portanto, os vértices  $b_1 a_1 b_3 a_3 b_1$  formam um ciclo  $C_4$  azul.

Finalmente, a única configuração que nos resta é que cada  $b_i$  pode ser identificado por uma aresta vermelha a um único  $a_i$  e vice-versa. Sem perda de generalidade, podemos considerar que  $c(b_1 a_1) = c(b_2 a_2) = c(b_3 a_3) = R$ . Se alguma aresta  $b_i b_j$  for vermelha, então  $b_i b_j a_j a_i b_i$  forma um ciclo  $C_4$  vermelho. Portanto, todas as arestas  $b_i b_j$  são azuis, e temos a coloração dada na Figura 13, que possui um ciclo  $C_4$  azul  $b_2 b_1 a_2 b_3 b_2$ . Portanto  $r(C_4, C_4) \leq 6$ .  $\square$

<sup>2</sup>O lema da Regularidade de Szemerédi é uma ferramenta importante em matemática discreta. Ela mostra, em certo sentido, que todos os grafos podem ser aproximados por grafos se parecem aleatórios [27]

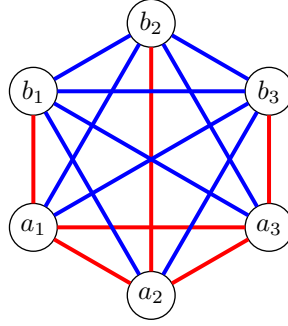


Figura 13: Coloração de arestas do  $K_6$  obtida durante demonstração.

O caso geral para ciclos foi completamente determinado, de forma independente, por Rosta [34] e Faudree e Schelp [18], e está caracterizado no Teorema 26 abaixo. Tendo em vista que estas demonstrações originais são bastantes envolvidas, uma simplificação recente foi desenvolvida por Károlyi e Rosta [25].

**Teorema 26.** *Sejam  $3 \leq m \leq n$  inteiros. Então,*

$$r(C_m, C_n) = \begin{cases} 6, & \text{se } m = n = 3 \text{ ou } 4; \\ n + m/2 - 1, & \text{se } n \text{ e } m \text{ pares}; \\ \max\{n + m/2 - 1, 2n - 1\}, & \text{se } n \text{ ímpar e } m \text{ par}; \\ 2n - 1, & \text{se } m \text{ ímpar}. \end{cases} \quad \square$$

Como  $P_n$  é um subgrafo de  $C_n$ , temos que  $r(P_m, P_n) \leq r(C_m, P_n) \leq r(C_m, C_n)$  para todo  $n$  e  $m$  inteiros. Como os números de Ramsey  $r(P_m, P_n)$  estão determinados no Teorema 23 e o número  $r(C_m, C_n)$ , no Teorema 26, obtemos, imediatamente, limitantes para  $r(C_m, P_n)$ . Resultados precisos, no entanto, foram obtidos por Faudree, Lawrence, Parsons e Schelp [17], e estão enunciados abaixo.

**Teorema 27.** *Sejam  $m$  e  $n$  inteiros. Então*

$$r(C_m, P_n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{se } 3 \leq m \leq n, m \text{ ímpar}; \\ n + m/2 - 1, & \text{se } 4 \leq m \leq n, m \text{ par}; \\ \max\{m + \lfloor n/2 \rfloor - 1, 2n - 1\}, & \text{se } 2 \leq n \leq m, m \text{ ímpar}; \\ m + \lfloor n/2 \rfloor - 1, & \text{se } 2 \leq n \leq m, m \text{ par}. \end{cases} \quad \square$$

Em particular, se  $m$  e  $n$  são pares e pelo menos um deles for maior que 4, então  $r(P_m, P_n) = r(C_m, P_n) = r(C_m, C_n)$ .

### 3.3 Árvores

Seja  $G$  um grafo simples. Dizemos que dois vértices  $x$  e  $y$  estão *conectados* se existe um caminho em  $G$  com um extremo em  $x$  e outro em  $y$ . Note que esta relação é uma relação

de equivalência no conjunto  $V(G)$ . Chamamos as classes de equivalência desta relação de *componentes conexas*. Dizemos que  $G$  é *conexo* se quaisquer dois vértices de  $G$  estão conectados, ou seja,  $G$  possui apenas uma componente conexa.

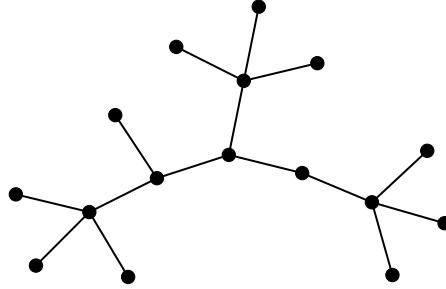


Figura 14: Árvore com dezesseis vértices e dez folhas.

Um grafo que não possui ciclos como subgrafo é dito *acíclico*. Um grafo  $G$  é chamado de *árvore* se ele é conexo e acíclico. A Figura 14 exemplifica uma árvore com dezesseis vértices. Árvores são grafos conexos minimais, isto é, a remoção de qualquer aresta de uma árvore a desconecta. Os grafos  $P_n$  e  $K_{1,n}$  são árvores.

Os vértices de uma árvore que possuem grau um são chamados de *folhas*. A árvore da Figura 14, por exemplo, possui dez folhas. Pode ser mostrado que qualquer árvore com pelo menos dois vértices possui pelo menos duas folhas. A árvore  $P_n$ , por exemplo, possui exatamente duas folhas quando  $n \geq 2$ .

Existem diversas maneiras equivalentes de se definir árvores. A seguir, listamos algumas propriedades de árvores que também podem ser tomadas como definições. De fato, se  $G$  é um grafo simples com  $n$  vértices, as seguintes proposições são equivalentes.

1.  $G$  é uma árvore.
2.  $G$  é conexo e acíclico.
3.  $G$  é conexo minimal.
4.  $G$  é conexo e possui  $n - 1$  arestas.
5. Todo par de vértices de  $G$  está conectado por um único caminho.

Para determinar números de Ramsey envolvendo árvores, precisamos de critérios para encontrar árvores como subgrafos de um grafo fixo. É de particular interesse que encontremos critérios que não dependam da estrutura da árvore, mas apenas da quantidade de vértices. Nota-se pela, Figura 15, que árvores com uma mesma quantidade de vértices podem ter estruturas radicalmente distintas. Mesmo assim, se  $T$  é uma árvore com  $n$  vértices,  $T$  é subgrafo do  $K_n$ . Podemos fazer ainda melhor com a seguinte proposição.

**Proposição 28.** *Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices e  $G$  um grafo com  $\delta(G) \geq n - 1$ . Então  $G$  possui uma cópia de  $T$ .*



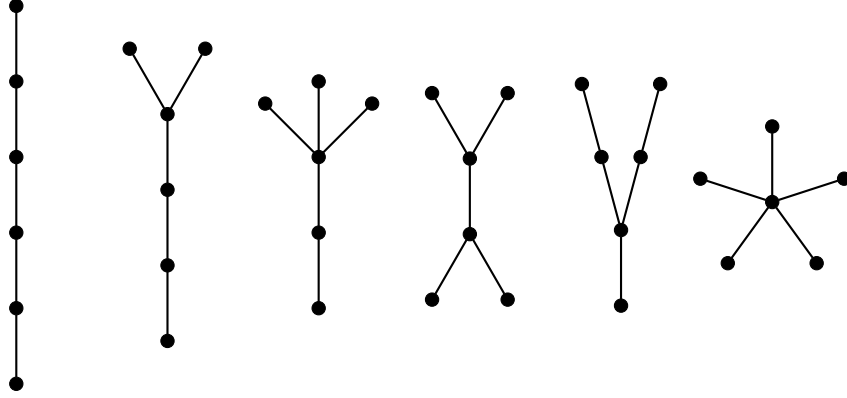


Figura 15: Todas as árvores com seis vértices.

*Demonstração.* Vamos provar por indução em  $n$ . Se  $n = 2$ , então  $T \simeq K_2$ , logo o grafo  $G$  possui uma cópia de  $T$  se e somente se  $G$  possui alguma aresta. Mas  $\delta(G) \geq 1$ , e assim, concluímos que  $G$  possui uma aresta.

Considere agora que  $n > 2$ . Seja  $G$  um grafo com  $\delta(G) \geq n - 1$ . Seja  $v \in V(T)$  uma folha. Como  $d_T(v) = 1$ , existe apenas um vértice adjacente a  $v$  em  $T$ ; denote-o por  $u$ . Note que o grafo  $T' = T - v$  também é uma árvore, uma vez que a remoção de uma folha não cria ciclos e não desconecta  $T$ . A árvore  $T'$ , no entanto, possui  $n - 1$  vértices. Por hipótese de indução, existe uma cópia de  $T'$  em  $G$ . Seja  $x \in V(G)$  o vértice que corresponde ao vértice  $u \in V(T')$ . Por hipótese, temos que  $d_G(x) \geq n - 1$ . Como existem apenas outros  $n - 2$  vértices em  $T'$ , isto implica que existe um vértice  $y \in V(G)$  adjacente a  $x$  que não foi utilizado na cópia de  $T'$  em  $G$ . Unindo a cópia de  $T'$  com a aresta  $xy$ , obtemos uma cópia de  $T$  em  $G$ .  $\square$

Com este resultado, podemos generalizar a Proposição 22 da seguinte maneira.

**Proposição 29.** *Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices. Então,*

$$r(T, K_3) = 2n - 1.$$

*Demonstração.* Note que o grafo  $K_{n-1, n-1}$  não possui triângulos e o seu complementar são duas cópias disjuntas de  $K_{n-1}$ , logo não possuem  $T$  como subgrafo. Com isto, temos que  $r(T, K_3) > 2n - 2$ .

Seja  $c$  uma  $RB$ -coloração de  $G = K_{2n-1}$  que não possui  $T$  vermelho ou  $K_3$  azul. Pela Proposição 28, se  $\delta(G_R) \geq n - 1$ , então  $c$  possui  $T$  vermelho, logo, existe um vértice  $v$  com  $d_R(v) \leq n - 2$ . Portanto  $d_B(v) \geq n$ . Se existir alguma aresta azul com ambas as extremidades em  $N_B(v)$ , unindo-as com  $v$  forma-se um  $K_3$  azul. Portanto  $N_B(v)$  só possui arestas vermelhas. Como  $|N_B(v)| \geq n$ ,  $c$  possui um  $K_n$  vermelho. Em particular,  $c$  possui uma cópia de  $T$  vermelha, contradizendo nossa hipótese. Concluímos então que  $r(T, K_3) \leq 2n - 1$ .  $\square$

Finalmente, podemos obter os números de Ramsey de árvores contra grafos completos de qualquer ordem.

**Teorema 30** (Chvátal [9]). *Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices. Então,*

$$r(T, K_s) = (s-1)(n-1) + 1.$$

*Demonstração.* Observe que o grafo de Turán  $T_{s-1}(n-1)$  não possui  $K_s$  como subgrafo. Além disso, o seu complementar consiste em  $s-1$  cópias disjuntas de  $K_{n-1}$ , que não possuem  $T$  como subgrafo. Isto nos dá que  $r(T, K_s) > v(T_{s-1}(n-1)) = (s-1)(n-1)$ .

Para o limitante superior, vamos proceder por indução em  $s$ . O caso  $s = 3$  está demonstrado na Proposição 29. Agora, suponha que  $c$  seja uma  $RB$ -coloração de  $G = K_{(s-1)(n-1)+1}$  sem  $T$  vermelho e sem  $K_s$  azul. Pela Proposição 28, se  $\delta(G_R) \geq n-1$ , então  $c$  possui  $T$  vermelho. Logo, existe um vértice  $v$  com  $d_R(v) \leq n-2$ . Portanto  $d_B(v) \geq (s-1)(n-1) - n + 2 = (s-2)(n-1) + 1$ . Como  $N_B(v)$  possui pelo menos  $(s-2)(n-1) + 1$  vértices, pela hipótese de indução,  $N_B(v)$  possui um  $T$  vermelho ou um  $K_{s-1}$  azul. Por outro lado, como  $c$  não possui  $T$  vermelho,  $N_B(v)$  possui um  $K_{s-1}$  azul. No entanto, unindo o vértice  $v$  à cópia azul de  $K_{s-1}$ , obtemos um  $K_s$  azul, o que é absurdo. Portanto,  $r(T, K_s) \geq (s-1)(n-1) + 1$ .  $\square$

Tendo em vista este teorema e outros resultados similares, Burr e Erdős [4] conjecturaram em 1983 que

$$r(H, K_s) = (s-1)(v(H)-1) + 1$$

para todo  $s$  fixo e  $H$  suficientemente esparso. Um grafo pode ser considerado esparso de diversas maneiras diferentes, por exemplo, se ele possui poucas arestas ou se o grau médio for pequeno. Pelo mesmo argumento utilizado acima no Teorema de Chvátal, se  $H$  é um grafo conexo, então  $r(H, K_s) \geq (s-1)(v(H)-1) + 1$ . Um grafo  $H$  para o qual vale a igualdade é dito  $s$ -bom. Burr e Erdős conjecturaram que se  $H$  é uma família de grafos com grau médio limitado, então  $H$  é  $s$ -bom.

Brandt [3] provou que esta conjectura é falsa em geral, mas resultados similares valem para grafos esparsos em outros sentidos. Por exemplo, Burr e Erdős mostraram que se  $H$  possui largura de banda<sup>3</sup> limitada, então  $H$  é  $s$ -bom. Este resultado foi estendido por Allen, Brightwell e Skokan [1] para grafos com largura de banda até  $o(\log n / \log \log n)$  e grafos com grau médio limitado e largura de banda  $o(n)$ .

Outros resultados foram obtidos para famílias específicas. Por exemplo, Pontiveiros, et al. [30] estudaram o caso do hipercubo  $Q_n$ , isto é, o grafo com conjunto de vértices  $\{0, 1\}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}\}$  e arestas entre pares de vértices que diferem em exatamente uma coordenada. O hipercubo possui  $2^n$  vértices, grau médio  $n$  e largura de banda aproximadamente  $2^n / \sqrt{n}$ , e portanto, não está coberto pelos resultados mais genéricos mencionados. Foi mostrado que  $r(Q_n, K_s) = (s-1)(2^n-1) + 1$  para  $n$  suficientemente grande.

Mesmo com todos estes resultados desenvolvidos, encontrar as condições corretas de esparsidade que garantem que um grafo é  $s$ -bom continua sendo uma importante direção de pesquisa na Teoria de Ramsey.

<sup>3</sup>A largura de banda de um grafo  $G$  é o menor inteiro positivo  $l$  tal que existe uma ordenação  $v_1, \dots, v_n$  dos vértices de  $G$  de forma que toda aresta  $v_i v_j$  satisfaz  $|i - j| \leq l$ .

O *método probabilístico* é uma técnica não construtiva para demonstração da existência de objetos matemáticos com alguma propriedade específica. Como o próprio nome indica, o argumento tem natureza probabilística e consiste em mostrar que, ao escolher um objeto de maneira aleatória, a probabilidade deste objeto ter a propriedade desejada é positiva. Isto garante a existência deste objeto.

Cabe, então, antes de entrar nos detalhes desta técnica, fazer uma breve revisão de conceitos de probabilidade, em particular, espaços discretos de probabilidade. Referências adicionais recomendadas incluem as notas de aula do Leonardo Rolla [33] e o livro do Barry James [24].

## 4.1 Probabilidade Discreta

Para formalizar a probabilidade em matemática, introduzimos o conceito de um modelo probabilístico, que será o ambiente natural no qual podemos falar de probabilidade. Um *modelo probabilístico* possui três componentes básicas: um espaço amostral, uma classe de eventos e uma medida de probabilidade.

O *espaço amostral* é um conjunto não vazio  $\Omega$ , cujos elementos representam os resultados possíveis para um experimento. Uma realização deste experimento consiste na escolha aleatória de um elemento  $\omega \in \Omega$ . Estamos interessados exclusivamente no caso em que  $\Omega$  é um conjunto finito. Ao espaço amostral  $\Omega$ , associa-se uma classe  $\mathcal{F}$  apropriada de subconjuntos de *Omega*. Os elementos de  $\mathcal{F}$  são subconjuntos  $A \subseteq \Omega$  aos quais atribuímos uma probabilidade, e são denominados *eventos* ou *conjuntos mensuráveis*. Definiremos probabilidade apenas para elementos desta classe. Para que isto seja feito de maneira adequada, a classe  $\mathcal{F}$  precisa satisfazer algumas propriedades. Mais precisamente,  $\mathcal{F}$  precisa formar uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  [24]. No entanto, esta formalidade é facilmente contornada no caso discreto, uma vez que o conjunto de todos os subconjuntos de  $\Omega$  é uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ .

quando  $\Omega$  é finito. O par  $(\Omega, \mathcal{F})$  é dito um *espaço mensurável*.

Finalmente, uma *medida de probabilidade*, ou simplesmente *probabilidade*, é uma medida sobre o espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$ , ou seja, uma função  $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  com as seguintes propriedades:

(P1)  $\mathbf{P}(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ .

(P2)  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ .

(P3) Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  com  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , então  $\mathbf{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbf{P}(A_i)$ .

Um *espaço de probabilidade* é uma tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  no qual  $\Omega$  é um espaço amostral,  $\mathcal{F}$  é uma classe de eventos e  $\mathbf{P}$  é uma medida de probabilidade sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Para um espaço de probabilidade, também valem as seguintes propriedades:

1.  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$  onde  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ ;
3. Se  $A$  e  $B \in \mathcal{F}$  e  $A \subseteq B$ , então  $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ ;
4. Se  $A$  e  $B \in \mathcal{F}$  e  $A \subseteq B$ , então  $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ ;
5. Para todo  $A \in \mathcal{F}$ , temos  $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$ ;
6. Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , então  $\mathbf{P}(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mathbf{P}(A_i)$ ;
7. Se  $A$  e  $B \in \mathcal{F}$ , então  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ .

Existem diversas maneiras de construir espaços de probabilidade, cada uma se adequando a uma situação. Para nossos propósitos, o espaço dos resultados *equiprováveis* é de grande interesse e construído da seguinte maneira: seja  $\Omega$  um conjunto finito e  $\mathcal{F}$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $\Omega$ ; para  $A \in \mathcal{F}$ , definimos a probabilidade de  $A$  por  $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ . Esta definição satisfaz as propriedades (P1), (P2) e (P3), portanto, é uma medida de probabilidade. Medidas de probabilidade sobre espaços finitos que satisfazem  $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$  também são ditas *uniformes*.

Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  e  $A, B \in \mathcal{F}$ , definimos a *probabilidade condicional de A, dado que B ocorre*,  $\mathbf{P}(A|B)$ , por

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Quando  $\mathbf{P}(B) = 0$ , definimos  $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ . Desta forma, a função  $\mathbf{P}(\cdot | B) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma medida de probabilidade em  $(\Omega, \mathcal{F})$  para qualquer  $B \in \mathcal{F}$ .

Dois eventos  $A$  e  $B$  são ditos *independentes* se  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ . Intuitivamente, dois eventos são independentes quando a ocorrência ou não de um deles não influencia a probabilidade de ocorrência do outro evento.

As proposições a seguir são todas equivalentes.

1.  $A$  e  $B$  são independentes.
2.  $A$  e  $\overline{B}$  são independentes.
3.  $\overline{A}$  e  $B$  são independentes.
4.  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  são independentes.
5.  $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ .
6.  $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$ .

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j).$$

Seja  $\{A_i : i \in I\}$  uma família de eventos, para a qual  $I$  é um conjunto qualquer de índices. A família  $\{A_i : i \in I\}$  é dita *independente dois a dois* se  $A_i$  e  $A_j$  são independentes para todo  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ . A mesma família é dita *mutuamente independente* se, para qualquer subconjunto  $J \subset I$  de índices, vale

Uma *variável aleatória* é uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada elemento do espaço amostral um valor real. Formalmente, também é requerido que o conjunto  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  seja mensurável para todo  $x$  real, ou seja,  $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$  para todo  $x$ . Quando  $\Omega$  é finito e  $\mathcal{F}$  é a classe de todos os subconjuntos de  $\Omega$ , este requisito sempre é satisfeito. Quando uma variável aleatória  $X$  assume uma quantidade finita de valores, ela é dita *simples*.

Utilizamos variáveis aleatórias para realizar contagens. Variáveis aleatórias que só assumem valores inteiros não negativos são chamadas de *naturais*. Uma classe de variáveis aleatórias naturais bastante importante é a das *funções indicadoras*. Fixado  $A \subset \Omega$ , definimos a função indicadora de  $A$ ,  $\mathbb{1}_A$ , por

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A; \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Dada uma variável aleatória natural  $X$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , definimos a *esperança* de  $X$ , denotada  $\mathbf{E}[X]$ , por

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{P}(\{X = n\}).$$

Note que para funções indicadoras, temos  $\mathbf{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbf{P}(A)$ .

A esperança é um operador *linear* no seguinte sentido: sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias sobre um mesmo espaço de probabilidade, e sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Temos que

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{E}[X_i].$$

A esperança é *monótona*, isto é, se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias em um mesmo espaço  $\Omega$  com  $X(\omega) \geq Y(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ , então  $\mathbf{E}[X] \geq \mathbf{E}[Y]$ .

A *desigualdade de Markov* é uma importante ferramenta dentro do método probabilístico. Ela enuncia que se  $X$  é uma variável aleatória não negativa, então

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

Este apanhado de resultados é suficiente para finalmente introduzirmos o método probabilístico aplicado em Teoria de Ramsey. Aplicações mais refinadas do método, no entanto, requerem conceitos mais avançados de probabilidade, como martingais, concentração de medida, grandes desvios e desigualdade de correlações. O livro *The Probabilistic Method* [2] é a grande referência para o método e contém inúmeras aplicações tanto em Combinatória quanto em outras áreas da Matemática.

## 4.2 Limitantes Inferiores

Os limitantes inferiores para os números de Ramsey vistos no Capítulo 2 são construtivos, isto é, a demonstração de que  $R(4, 4) > 17$ , por exemplo, passou pela construção de uma coloração de arestas do grafo  $K_{17}$ . Para encontrar bons limitantes inferiores de maneira mais genérica, precisamos de uma abordagem um pouco diferente. Vamos começar pelos números de Ramsey diagonais.

O nosso objetivo é encontrar colorações de arestas de  $K_n$  sem  $K_k$  monocromáticos com  $k$  fixado e  $n$  maior possível. Assim, podemos concluir que  $R(k, k) > n$ . Note que não precisamos necessariamente construir tal coloração, basta sabermos que alguma coloração que satisfaz estas propriedades existe. Vamos introduzir agora o *método probabilístico* para resolver este tipo de problema. Para isso, queremos provar que uma estrutura com certas propriedades existe. Definimos, então, um espaço de probabilidade sobre o conjunto destas estruturas de maneira adequada e mostramos que, com probabilidade positiva, a propriedade de interesse é satisfeita. Isto nos mostra que o conjunto dos elementos cuja propriedade é satisfeita não pode ser vazio, caso contrário, a probabilidade seria zero, e mostramos a existência de uma estrutura com esta propriedade.

Esta técnica, embora aplicada pela primeira vez por Szele [39], foi vastamente explorada por Erdős, que utilizou esta técnica para encontrar justamente um limitante inferior para os números de Ramsey diagonais  $R(k, k)$  [13]. Estamos interessados em escolher uma  $RB$ -coloração do  $K_n$  de maneira aleatória e uniforme. O nosso espaço amostral  $\Omega$  é, portanto, o conjunto de todas as colorações de arestas em duas cores do  $K_n$ . Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  o espaço de probabilidade com medida uniforme. Como temos que  $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$ , dado  $A \in \mathcal{F}$ , temos:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{2^{\binom{n}{2}}}.$$

Suponha que escolhemos uma coloração  $c \in \Omega$  de maneira aleatória e uniforme, de acordo com o espaço de probabilidade acima. Queremos saber qual é a probabilidade desta coloração possuir uma dada propriedade. Seja  $\mathcal{P} \subset \Omega$  o conjunto das colorações que satisfazem a dada

propriedade. Temos, então, que  $\mathbf{P}(c \text{ possui a propriedade}) = \mathbf{P}(c \in \mathcal{P}) = |\mathcal{P}| / |\Omega|$ , onde  $\mathbf{P}$  é a medida de probabilidade.

Em particular, se  $e$  é uma aresta, então  $|\mathcal{P}| = |\{c \in \Omega : c(e) = R\}| = 2^{\binom{n}{2}-1}$ , o que nos dá que  $\mathbf{P}(c(e) = R) = \frac{1}{2}$  e também que  $\mathbf{P}(c(e) = B) = \frac{1}{2}$ . Além disso, se  $e$  e  $f$  são arestas distintas,  $\mathbf{P}(c(e) = B \text{ e } c(f) = B) = \frac{1}{4}$ , o que nos mostra que os eventos da forma  $\{c(e) = C\}$  para alguma aresta  $e$  e cor  $C$  são independentes.

Desta forma, escolher uma coloração  $c \in \Omega$  utilizando o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  é equivalente a escolher uma coloração das arestas de  $K_n$  colorindo cada aresta de maneira aleatória, uniforme e independente. Podemos agora introduzir a primeira aplicação do método probabilístico:

**Teorema 31** (Erdős, 1947). *Se  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$  então  $R(k, k) > n$ . Isso nos dá que  $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$  para todo  $k \geq 3$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$  e considere uma  $RB$ -coloração  $c$  do grafo completo  $G = (V, E) \simeq K_n$  obtida pintando cada aresta de maneira aleatória, uniforme e independente. Fixado um subconjunto  $A \in \binom{V}{k}$ , ou seja, um subconjunto de  $V$  com  $k$  elementos, defina o evento  $M_A = \{G[A] \text{ é monocromático em } c\}$ . Fixando uma cor para as arestas do subgrafo induzido por  $A$ , podemos colorir as demais  $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$  arestas de qualquer cor. Como existem duas cores disponíveis, obtemos:

$$\mathbf{P}(M_A) = \frac{2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Considere agora a variável aleatória  $X$ , que conta a quantidade de  $K_k$  monocromáticos em  $K_n$ . Temos então  $X = \sum_{A \in \binom{V}{k}} \mathbb{1}_{M_A}$ . Vamos calcular o valor esperado de  $X$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mathbf{E} \left[ \sum_{A \in \binom{V}{k}} \mathbb{1}_{M_A} \right] = \sum_{A \in \binom{V}{k}} \mathbf{E}[\mathbb{1}_{M_A}] \\ &= \sum_{A \in \binom{V}{k}} \mathbf{P}(M_A) = \sum_{A \in \binom{V}{k}} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Markov,  $\mathbf{P}(X \geq 1) \leq \mathbf{E}[X] < 1$ , logo  $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ . Portanto, existe alguma coloração de  $K_n$  sem  $K_k$  monocromático. Com isso, temos  $R(k, k) > n$ .

Lembre que  $\binom{n}{k} \leq n^k / k!$  e suponha que  $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ . Temos, então, que

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{n^k 2^{1+\frac{k}{2}}}{k! 2^{\frac{k^2}{2}}} \leq \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1,$$

quando  $n \geq 3$ . Assim, temos  $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$  quando  $n \geq 3$ . □

Este tipo de ideia pode ser refinado para obter resultados melhores para o limitante inferior. No entanto, não se conhece algum limitante inferior cuja ordem exponencial seja superior à  $(\sqrt{2})^k$ . Vimos anteriormente que o melhor limitante superior conhecido possui ordem exponencial  $4^k$ . Um dos problemas abertos mais importantes da Teoria de Ramsey é determinar a ordem exponencial correta para o crescimento dos números de Ramsey diagonais. Em particular, não se sabe se o seguinte limite existe [7]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (R(k, k))^{1/k}.$$

Já mostramos que, se este limite existir, ele está entre  $\sqrt{2}$  e 4.

A diferença entre as ordens de crescimento do limitante inferior e do limitante superior nos mostra o quanto ainda não se sabe sobre estes números. O melhor que podemos fazer para encontrar um  $K_k$  monocromático consiste em jogar fora metade do grafo a cada passo, como foi feito no Teorema 4, o que provavelmente é destrutivo demais. A melhor construção que encontramos para uma coloração sem  $K_k$  monocromático é uma coloração aleatória. Toda construção explícita conhecida é sub-exponencial. De fato, um importante problema em aberto da Teoria de Ramsey é encontrar uma demonstração construtiva de que  $R(k, k) \geq (1 + c)^k$  para alguma constante  $c > 0$ .

Outro aspecto interessante desta demonstração é que ao alterar a desigualdade da condição de  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$  para  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \ll 1$ , garantimos que  $\mathbf{P}(X = 0) \rightarrow 1$ . Com efeito, isso ocorre quando  $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ , o que possui implicações algorítmicas interessantes. Podemos encontrar, de fato, uma coloração do  $K_n$  sem  $K_{2 \log n}$  monocromático com alta probabilidade apenas colorindo as arestas de maneira aleatória. Realmente, quanto maior  $n$ , menor a probabilidade de uma coloração aleatória do  $K_n$  possuir um  $K_{2 \log n}$  monocromático.

### 4.3 Pequenas Alterações

Na aplicação do método probabilístico da seção anterior, mostramos a existência de configurações em que alguma estrutura indesejada não ocorre. Algumas vezes, não conseguimos garantir que estas estruturas não apareçam, mas podemos encontrar configurações em que não existam muitas dessas estruturas ruins. O que podemos fazer, em seguida, é alterar esta configuração a fim de remover estas estruturas indesejadas. Este procedimento de realizar alterações nos grafos é bastante utilizado e geralmente permite refinar ligeiramente o nosso limitante inferior.

**Teorema 32.** *Para todo inteiro  $n$ , temos  $R(k, k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$ .*

*Demonstração.* Considere uma  $RB$ -coloração  $c$  do grafo completo com  $n$  vértices obtida pintando cada aresta de maneira aleatória, uniforme e independente. Procedendo de maneira idêntica ao Teorema 31, definimos a variável aleatória  $X$  que conta a quantidade de  $K_k$  monocromáticos no  $K_n$ . Calculamos o valor esperado de  $X$  e obtivemos:

$$\mathbf{E}[X] = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$



Isto é suficiente para garantir que existe uma coloração  $c$  do  $K_n$  com no máximo  $\mathbf{E}[X]$  cópias monocromáticas de  $K_k$ . Remova do  $K_n$  um vértice de cada uma das cópias monocromáticas  $K_k$  e, assim, obtemos um grafo livre de  $K_k$  monocromático. Removemos no máximo  $\mathbf{E}[X]$  vértices e, assim, sobram pelo menos  $n - \mathbf{E}[X]$  vértices no grafo. Portanto

$$R(k, k) \geq n - \mathbf{E}[X] = n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}. \quad \square$$

J. Spencer [37] fez uma análise cuidadosa deste desigualdade e obteve o resultado apresentado a seguir.

**Corolário 33.** *Para  $k \rightarrow \infty$ , temos  $R(k, k) > (1 + o(1)) \frac{1}{e} k \sqrt{2}^k$ .*  $\square$

Até agora, vimos como utilizar o método probabilístico para encontrar limitantes para os números de Ramsey diagonais. Se desejarmos encontrar limitantes para outros números de Ramsey, precisamos alterar o nosso espaço de probabilidade.

Sejam  $\Omega$  o conjunto de todas as  $RB$ -colorações do  $K_n$  e  $\mathcal{F}$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $\Omega$ . Vamos construir uma medida de probabilidade que não é uniforme em  $\Omega$ . Fixe  $0 \leq p \leq 1$  e pinte cada aresta de maneira aleatória e independente, com  $\mathbf{P}(c(e) = R) = p$  e  $\mathbf{P}(c(e) = B) = 1 - p$ . Para uma coloração  $c \in \Omega$  qualquer, temos

$$\mathbf{P}(c) = p^{e(G_R)} (1 - p)^{e(G_B)}.$$

Assim,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  forma um espaço de probabilidade. O espaço uniforme que tínhamos antes é o caso particular em que  $p = 1/2$ . Podemos generalizar o Teorema 32 para números  $R(k, s)$  conforme estabelece o Teorema 34.

**Teorema 34.** *Para todo inteiro  $n$  e  $p \in [0, 1]$ , temos  $R(k, s) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{s} (1 - p)^{\binom{s}{2}}$ .*

*Demonstração.* Considere uma  $RB$ -coloração  $c$  do grafo completo  $G = (V, E) \simeq K_n$  obtida pintando cada aresta de maneira aleatória e independente de forma que cada aresta é vermelha com probabilidade  $p$  e azul com probabilidade  $1 - p$ . Definimos a variável aleatória  $X$  como a quantidade de cópias vermelhas de  $K_k$  em  $c$  e  $Y$  como a quantidade de cópias azuis de  $K_s$  em  $c$ . Computando as esperanças de  $X$  e  $Y$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} \\ \mathbf{E}[Y] &= \binom{n}{s} (1 - p)^{\binom{s}{2}} \end{aligned}$$

Consideramos um *grafo proibido* como uma cópia vermelha de  $K_k$  ou uma cópia azul de  $K_s$ . Defina  $Z = X + Y$  como a quantidade de grafos proibidos. Note que  $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$ . Existe, portanto, uma coloração  $c$  de  $K_n$  com no máximo  $\mathbf{E}[Z]$  grafos proibidos. Removendo do  $K_n$  um vértice de cada um dos grafos proibidos, obtemos um grafo livre de  $K_k$  vermelho e de  $K_s$  azul. Removemos no máximo  $\mathbf{E}[Z]$  vértices. Logo, sobram pelo menos  $n - \mathbf{E}[Z]$  vértices no grafo. Portanto,

$$R(k, s) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{s} (1 - p)^{\binom{s}{2}}. \quad \square$$

Esta modificação do resultado nos permite obter limitantes inferiores para outras classes de números. Fazendo escolhas adequadas de  $n$  e  $p$  no Teorema 34, obtém-se os corolários a seguir.

**Corolário 35.** *O número de Ramsey  $R(3, k)$  satisfaz  $R(3, k) \geq \Omega\left(\frac{k^{3/2}}{\log^{3/2} k}\right)$ .*  $\square$

**Corolário 36.** *O número de Ramsey  $R(4, k)$  satisfaz  $R(4, k) \geq \Omega\left(\frac{k^2}{\log^2 k}\right)$ .*  $\square$

#### 4.4 O Lema Local de Lovász

Nas aplicações do método probabilístico apresentadas até agora, mostramos a existência de um objeto com determinada propriedade provando que a probabilidade da sua existência é maior do que zero. Em todos os casos que vimos, nós ainda provamos algo mais forte, vimos que a probabilidade deste evento é bastante alta. Em alguns casos, no entanto, o evento de interesse possui probabilidade baixa, mas positiva. Para lidar com este cenário, precisamos de técnicas mais refinadas.

Suponha que o objeto que estamos gerando aleatoriamente é o que queremos encontrar quando alguns eventos raros não ocorrem. Sejam  $\{E_i; i = 1, \dots, n\}$  estes eventos. Desejamos provar que existe a possibilidade de esses eventos não ocorrerem simultaneamente, isto é,  $\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^n \overline{E_i}) > 0$ . Um caso bem simples em que obtemos probabilidades bem pequenas é quando os  $n$  eventos são mutuamente independentes, cada um com probabilidade  $0 \leq p < 1$ . A probabilidade de todos os eventos não acontecerem simultaneamente é  $(1 - p)^n > 0$ , e fica bem pequena à medida que  $n$  cresce. A técnica do *Lema Local de Lovász* (LLL) nos permite obter um resultado similar para eventos que não são mutuamente independentes, mas possuem dependências fracas entre si.

Para enunciar o LLL, precisamos introduzir o conceito de digrafo simples, que generaliza ligeiramente o conceito de grafo. Um *digrafo* é um par ordenado  $(V(D), A(D))$ , que consiste em um conjunto  $V(D)$  de *vértices* e um conjunto  $A(D)$  de *arcos*, disjunto de  $V(D)$ , acompanhado de uma função de incidência  $\Psi_D$  que associa cada arco de  $A(D)$  a um par ordenado de vértices de  $V(D)$ , não necessariamente distintos. Diferentemente das arestas em grafos, os arcos dos digrafos são ordenados e, portanto, sugerem uma orientação. Se  $a \in A(D)$  e  $\Psi_D(a) = (u, v)$  dizemos que  $u$  se liga a  $v$ . Além disso, dizemos que  $u$  é a *cauda* de  $a$  e  $v$  é a *cabeça* de  $a$ .

Analogamente ao grafo simples, *digrafo simples* é um digrafo no qual não existem arcos paralelos, isto é,  $a$  e  $b$  distintos em  $A(D)$  com  $\Psi_D(a) = \Psi_D(b)$ . Portanto, um arco pode ser unicamente identificado com um par de elementos em  $V(D) \times V(D)$ , e a função de incidência fica implícita. Assim, podemos definir um digrafo simples como um par  $D = (V, A)$  tal que  $A \subset V \times V$ .

Uma definição central para o LLL é a de digrafo de dependência, que caracteriza a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias. Sejam  $E_1, \dots, E_n$  eventos em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Um digrafo simples  $D = (V, A)$  é dito um *digrafo de dependência*

dos eventos  $E_1, \dots, E_n$  quando  $V = \{1, \dots, n\}$  e o evento  $E_i$  é mutuamente independente dos eventos no conjunto  $\{E_j : (i, j) \notin A, j \neq i\}$ .

Por exemplo, considere duas moedas justas lançadas independentemente com resultados cara ( $H$ ) ou coroa ( $T$ ). Considere os seguintes eventos:

$E_1 = \{(H, H), (H, T)\}$	Cara no primeiro lançamento;
$E_2 = \{(H, H), (T, H)\}$	Cara no segundo lançamento;
$E_3 = \{(H, H), (T, T)\}$	Lançamentos iguais.

Note que todos esses eventos tem probabilidade  $\mathbf{P}(E_i) = 1/2$  e, se  $i \neq j$ , temos  $\mathbf{P}(E_i|E_j) = 1/2$ . Portanto, os eventos  $E_i$  e  $E_j$  são independentes. Note também que para todo  $i, j, k$  distintos,  $\mathbf{P}(E_i|E_j \cap E_k) = 1$ , logo  $E_i$  não é mutuamente independente de  $E_j$  e  $E_k$ . Desta forma, o digrafo da Figura 16 é um digrafo de dependência para estes eventos.

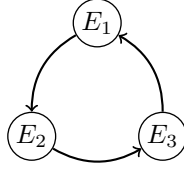


Figura 16: Um digrafo de dependência para os eventos  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ .

Note também que outras escolhas de arcos são possíveis para este mesmo exemplo. De fato, o digrafo apresentado na Figura 17 também é um digrafo de dependência para os eventos  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ . Portanto, o digrafo de dependência não é único.

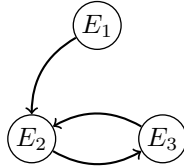


Figura 17: Outro digrafos de dependência para os mesmos eventos.

Podemos agora enunciar e demonstrar a versão geral do Lema Local de Lovász, que foi provado inicialmente por Erdős e Lovász [14].

**Lema 37** (Lema Local de Lovász; Versão Geral). *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  eventos em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Suponha que  $D = (V, A)$  seja um digrafo de dependência dos eventos  $E_i$  e suponha que, para todo  $1 \leq i \leq n$ , existam números reais  $x_1, \dots, x_n$  tal que  $0 \leq x_i < 1$  e  $\mathbf{P}(E_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j)$ . Então*

$$\mathbf{P} \left( \bigcap_{i=1}^n \overline{E_i} \right) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

*Demonstração.* Vamos mostrar por indução em  $s$  que para qualquer  $S \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $|S| = s < n$ , temos a seguinte desigualdade para todo  $i \notin S$ :

$$\mathbf{P} \left( E_i \middle| \bigcap_{j \in S} \overline{E_j} \right) \leq x_i.$$

Para  $s = 0$ , não condicionamos em nenhum evento, logo  $\mathbf{P}(E_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j) \leq x_i$ . Para o passo de indução, considere  $S_1 = \{j \in S : (i, j) \in A\}$  e  $S_2 = \{l \in S : (i, l) \notin A\}$ . Utilizando a definição de probabilidade condicional, obtemos

$$\mathbf{P} \left( E_i \middle| \bigcap_{j \in S} \overline{E_j} \right) = \frac{\mathbf{P} \left( E_i \cap \left( \bigcap_{j \in S_1} \overline{E_j} \right) \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right)}{\mathbf{P} \left( \bigcap_{j \in S_1} \overline{E_j} \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right)}.$$

Vamos agora limitar o numerador e o denominador individualmente. Para o numerador, note que o evento  $E_i$  é mutuamente independente dos eventos  $E_l$  com  $l \in S_2$  pela definição de digrafo de dependência. Assim, temos:

$$\mathbf{P} \left( E_i \cap \left( \bigcap_{j \in S_1} \overline{E_j} \right) \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right) \leq \mathbf{P} \left( E_i \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right) = \mathbf{P}(E_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j)$$

Já para o denominador, vamos utilizar a hipótese de indução. Suponha que  $S_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ . Se  $r = 0$ , então a interseção  $\bigcap_{j \in \emptyset} \overline{E_j} = \Omega$ . Portanto, esta probabilidade é um e provamos a proposição apenas com o limitante do numerador. Com  $r > 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \overline{E_{j_1}} \cap \overline{E_{j_2}} \cap \dots \cap \overline{E_{j_r}} \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right) \\ &= \mathbf{P} \left( \overline{E_{j_1}} \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right) \mathbf{P} \left( \overline{E_{j_2}} \middle| \overline{E_{j_1}} \cap \left( \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right) \right) \dots \mathbf{P} \left( \overline{E_{j_r}} \middle| \overline{E_{j_1}} \cap \dots \cap \overline{E_{j_{r-1}}} \cap \left( \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right) \right) \\ &\geq (1 - x_{j_1})(1 - x_{j_2}) \dots (1 - x_{j_r}) \geq \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\mathbf{P} \left( E_i \middle| \bigcap_{j \in S} \overline{E_j} \right) = \frac{\mathbf{P} \left( E_i \cap \left( \bigcap_{j \in S_1} \overline{E_j} \right) \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right)}{\mathbf{P} \left( \bigcap_{j \in S_1} \overline{E_j} \middle| \bigcap_{l \in S_2} \overline{E_l} \right)} \leq \frac{x_i \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j)}{\prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j)} = x_i.$$

Finalmente, vamos voltar ao enunciado original do lema:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \bigcap_{i=1}^n \overline{E_i} \right) &= \mathbf{P}(\overline{E_1}) \mathbf{P}(\overline{E_2} | \overline{E_1}) \dots \mathbf{P}(\overline{E_n} | \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}}) \\ &\geq (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0. \end{aligned}$$

□

Um caso particular de bastante interesse e mais fácil de aplicar é o chamado caso simétrico, que está enunciado em seguida.

**Lema 38** (Lema Local de Lovász; Versão Simétrica). *Sejam  $E_1, \dots, E_n$  eventos em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Suponha que cada evento  $E_i$  seja mutuamente independente de todos os outros eventos  $E_j$  com no máximo  $r$  exceções, e que  $\mathbf{P}(E_i) \leq p$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Se*

$$ep(r+1) \leq 1$$

*então  $\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^n \overline{E_i}) > 0$ . (A constante “ $e$ ” da desigualdade acima é a constante de Euler.)*

*Demonstração.* Se  $r = 0$ , então  $p < 1$  e os eventos são independentes. Caso contrário, construímos um digrafo de dependência  $D = (V, A)$  para os eventos  $E_1, \dots, E_n$  no qual, para cada  $i$ ,  $|\{j, (i, j) \in A\}| \leq r$ . Escolhemos  $x_i = \frac{1}{r+1}$  e vamos mostrar que  $\mathbf{P}(E_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j)$ . Com isso, estaremos dentro das condições do caso geral no Lema 37 e, assim, concluímos que  $\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^n \overline{E_i}) > 0$ . De fato, lembrando que para todo  $r$ ,  $\frac{1}{e} < (1 - \frac{1}{r+1})^r$ , temos

$$\mathbf{P}(E_i) \leq p \leq \frac{1}{e(r+1)} < \frac{1}{r+1} \left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^r \leq x_i \prod_{(i,j) \in A} (1 - x_j). \quad \square$$

Foi mostrado por Shearer [35] que a constante “ $e$ ” na desigualdade  $ep(r+1) \leq 1$  é a melhor possível. Esta versão do Lema Local de Lovász possui diversas aplicações e produz bons resultados. De fato, o melhor limitante inferior conhecido para os números de Ramsey diagonais  $R(k, k)$  é uma consequência desta versão do lema.

**Teorema 39** (Spencer [36]). *Se  $e \binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$  então  $R(k, k) > n$ .*

*Demonstração.* Considere uma  $RB$ -coloração  $c$  do grafo completo  $G = (V, E) \simeq K_n$  obtida pintando cada aresta de maneira aleatória, uniforme e independente. Fixado um subconjunto  $A \in \binom{V}{k}$ , defina o evento  $M_A = \{G[A] \text{ é monocromático em } c\}$ . Temos  $\mathbf{P}(M_A) = 2^{1-\binom{k}{2}}$ . Se  $S, T \subset V$  e  $|S \cap T| \leq 1$ , então os eventos  $M_S$  e  $M_T$  são independentes. Além disso, se  $|S \cap T| \geq 2$ , então  $M_S$  e  $M_T$  são dependentes. Fixado  $S$ , vamos estimar a quantidade de conjuntos  $T$  de  $k$  vértices que satisfazem  $|S \cap T| \geq 2$ . Primeiramente, escolhemos dois vértices desta interseção, obtendo  $\binom{k}{2}$  possibilidades. Os  $k-2$  vértices restantes podem ser quaisquer vértices que não foram escolhidos anteriormente, assim, temos  $\binom{n-2}{k-2}$ . Desta forma, contamos mais de uma vez alguns conjuntos  $T$ , mas estimamos que no máximo  $\binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2}$  destes conjuntos existem.

Portanto, aplicando o Lema 38 com  $p = 2^{1-\binom{k}{2}}$  e  $r < \binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2}$ , e sabendo por hipótese que  $ep(r+1) \leq 1$ , temos  $\mathbf{P}(\bigcap_{S \in \binom{V}{k}} \overline{M_S}) > 0$  e, assim, existe uma coloração de arestas de  $K_n$  sem  $K_k$  monocromáticos. Concluímos que  $R(k, k) > n$ .  $\square$

Fazendo uma análise detalhada deste resultado e escolhendo  $n$  de forma adequada, é possível obter que

$$R(k, k) > (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} k \sqrt{2}^k.$$

Este limitante inferior possui a constante ligeiramente melhor que o apresentado anteriormente; é o melhor limitante inferior conhecido para os números de Ramsey diagonais.

Uma análise similar pode ser feita para números de Ramsey não-diagonais, mas para isso, a versão geral do LLL é necessária. De fato, temos eventos de dois tipos, se  $T \in \binom{V}{3}$ , então definimos  $A_T$  como o evento em que  $T$  é um triângulo azul e, se  $S \in \binom{V}{k}$ ,  $B_S$  é o evento em que  $S$  é um  $K_k$  vermelho. Temos  $\mathbf{P}(A_T) = p^3$  e  $\mathbf{P}(B_S) = (1-p)^{\binom{k}{2}}$ . Cada evento  $A_T$  é dependente de no máximo  $3(n-3) < 3n$  eventos  $A_{T'}$  e  $\binom{n}{k}$  eventos  $B_{S'}$ . Além disso, cada evento  $B_S$  é dependente de no máximo  $\binom{k}{2}(n-2) < nk^2/2$  eventos  $A_{T'}$  e  $\binom{n}{k}$  eventos  $B_{S'}$ . Segue, então, do Lema 37, que se existem  $0 < p < 1$  e dois reais  $0 \leq x, y < 1$ , tais que

$$p^3 \leq x(1-x)^{3n}(1-y)^{\binom{n}{k}} \quad \text{e} \quad (1-p)^{\binom{k}{2}} \leq y(1-x)^{nk^2/2}(1-y)^{\binom{n}{k}},$$

temos que  $R(3, k) > n$ .

A melhor escolha possível para os parâmetros  $p$ ,  $x$  e  $y$  é difícil de se encontrar, mas ela nos permite concluir que  $R(3, k) > Ck^2/\log^2(k)$ , para uma constante  $C > 0$ . A ordem de crescimento deste número foi determinada por Kim [26], que mostrou que

$$R(3, k) = \Theta\left(\frac{k^2}{\log k}\right).$$

Determinar se existe uma constante  $C$  tal que  $R(3, k) \sim Ck^2/\log k$  e determinar tal constante caso ela exista são dois problemas abertos fundamentais da Teoria de Ramsey.

A mesma ideia ainda pode ser utilizada para os números  $R(4, k)$  e, em tal caso, encontramos que  $R(4, k) > k^{5/2+o(1)}$ . Este limitante é melhor que qualquer outro limitante conhecido que pode ser provado sem utilizar o Lema Local de Lovász.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALLEN, P., BRIGHTWELL, G., AND SKOKAN, J. Ramsey-goodness and otherwise. *Combinatorica* 33, 2 (2013), 125–160.
- [2] ALON, NOGA, AND SPENCER, JOEL H. *The Probabilistic Method*, fourth ed. Wiley, New York, 2016.
- [3] BRANDTY, S. Expanding graphs and Ramsey numbers.
- [4] BURR, S. A., AND ERDÖS, P. Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvátal. *Journal of Graph Theory* 7, 1 (1983), 39–51.
- [5] BURR, S. A., AND ROBERTS, J. A. On Ramsey numbers for stars. *Utilitas Math* 4 (1973), 217–220.
- [6] BUSH, L. E. The William Lowell Putnam Mathematical Competition. *The American Mathematical Monthly* 60, 8 (1953), 539–542.
- [7] CHUNG, F., AND GRINSTEAD, C. M. A survey of bounds for classical Ramsey numbers. *Journal of Graph Theory* 7, 1 (1983), 25–37.
- [8] CHUNG, F. R. K. On the Ramsey numbers  $N(3, 3, \dots, 3; 2)$ . *Discrete Mathematics* 5, 4 (1973), 317–321.
- [9] CHVÁTAL, V. Tree-complete graph Ramsey numbers. *Journal of Graph Theory* 1, 1 (1977), 93–93.
- [10] CHVÁTAL, V., AND HARARY, F. Generalized Ramsey theory for graphs. ii. Small diagonal numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society* 32, 2 (1972), 389–394.
- [11] CONLON, D. A new upper bound for diagonal Ramsey numbers. *Annals of Mathematics* (2009), 941–960.
- [12] DE OLIVEIRA SANTOS, J. P. Introdução à teoria dos números.
- [13] ERDÖS, P. Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* 53, 4 (04 1947), 292–294.

- 
- [14] ERDÖS, P., AND LOVÁSZ, L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Infinite and finite sets* 10, 2 (1975), 609–627.
  - [15] ERDÖS, P., AND SZEKERES, G. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica* 2 (1935), 463–470.
  - [16] EXOO, G., HARBORTH, H., AND MENGERSEN, I. On Ramsey number of  $K_{2,n}$ . In *Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications*. SIAM Philadelphia, 1989, pp. 207–211.
  - [17] FAUDREE, R., LAWRENCE, S., PARSONS, T., AND SCHELP, R. Path-cycle Ramsey numbers. *Discrete Mathematics* 10, 2 (1974), 269–277.
  - [18] FAUDREE, R., AND SCHELP, R. All Ramsey numbers for cycles in graphs. *Discrete Mathematics* 8, 4 (1974), 313–329.
  - [19] FETTES, S., KRAMER, R., AND RADZISZOWSKI, S. An upper bound of 62 on the classical Ramsey number  $R(3, 3, 3, 3)$ . *The Charles Babbage Research Centre: Ars Combinatoria* 72 (2004).
  - [20] GERENCSÉR, L., AND GYÁRFÁS, A. On Ramsey-type problems. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math* 10 (1967), 167–170.
  - [21] GREENWOOD, R. E., AND GLEASON, A. M. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math* 7, 1 (1955), 7.
  - [22] GYÁRFÁS, A., RUSZINKÓ, M., SÁRKÖZY, G. N., AND SZEMERÉDI, E. Three-color Ramsey numbers for paths. *Combinatorica* 27, 1 (2007), 35–69.
  - [23] HARARY, F. Recent results on generalized Ramsey theory for graphs. In *Graph Theory and Applications*. Springer, 1972, pp. 125–138.
  - [24] JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
  - [25] KÁROLYI, G., AND ROSTA, V. Generalized and geometric Ramsey numbers for cycles. *Theoretical Computer Science* 263, 1 (2001), 87–98.
  - [26] KIM, J. H. The Ramsey number  $R(3, t)$  has order of magnitude  $t^2/\log t$ . *Random Structures & Algorithms* 7, 3 (1995), 173–207.
  - [27] KOMLÓS, J., AND SIMONOVITS, M. Szemerédi’s regularity lemma and its applications in graph theory. In *Combinatorics, Paul Erdős is eighty*, vol. 2. János Bolyai Math. Soc. Budapest, 1996, pp. 295–352.
  - [28] LORTZ, R., AND MENGERSEN, I. On the Ramsey numbers  $r(K_{2,n-1}, K_{2,n})$  and  $r(K_{2,n}, K_{2,n})$ . *Utilitas Mathematica* 61 (2002), 87–95.
  - [29] MCKAY, B. D., AND RADZISZOWSKI, S. P.  $R(4, 5) = 25$ . *Journal of Graph Theory* 19, 3 (1995), 309–322.



- 
- [30] PONTIVEROS, G. F., GRIFFITHS, S., MORRIS, R., SAXTON, D., AND SKOKAN, J. The Ramsey number of the clique and the hypercube. *Journal of the London Mathematical Society* (2014), jdu004.
  - [31] RADZISZOWSKI, S. P., ET AL. Small ramsey numbers. *Electron. J. Combin* 1, 7 (1994).
  - [32] RAMSEY, F. P. On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of The London Mathematical Society* s2-30 (1930), 264–286.
  - [33] ROLLA, L. T. Introdução à probabilidade, notas de aula, Abril 2016.
  - [34] ROSTA, V. On a Ramsey-type problem of JA Bondy and P. Erdős. i. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 15, 1 (1973), 94–104.
  - [35] SHEARER, J. B. On a problem of Spencer. *Combinatorica* 5, 3 (1985), 241–245.
  - [36] SPENCER, J. Ramsey’s theorem—a new lower bound. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 18, 1 (1975), 108–115.
  - [37] SPENCER, J. *Asymptopia*, vol. 71 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Soc., 2014.
  - [38] SUN, H. S., AND COHEN, M. An easy proof of the Greenwood-Gleason evaluation of the Ramsey number  $r(3, 3, 3)$ .
  - [39] SZELE, T. Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban. *Mat. Fiz. Lapok* 50, 1943 (1943), 223–256.