# Uma Introdução à Topologia Algébrica

## Provando um teorema a respeito do número de pontas de um grupo finitamente gerado

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado

**Victor Fernando Lopes de Souza**

Orientador: Sérgio Tadao Martins

1 de junho de 2021

## 1 Introdução

Este breve documento visa apresentar alguns conceitos de topologia algébrica, especialmente no que tange à teoria geométrica dos grupos. Os requisitos para a boa leitura são o conhecimento das principais definições em teoria dos grupos e espaços métricos.

O objetivo, ao fim deste relato, é provar que todo grupo finitamente gerado tem 0, 1, 2 ou infinitas pontas. No caminho para essa prova, apresentaremos grafos de Cayley e exploraremos conexões entre as propriedades algébricas dos grupos e propriedades topológicas dos espaços de interesse.

DAR UMA INTUIÇÃO DO SIGNIFICADO DO TEOREMA

## 2 Procedimentos

Abordaremos primeiro, de maneira geral, alguns conceitos simples importantes (principalmente os grafos de Cayley e as pontas de um espaço topológico) e, a partir das definições, proporemos alguns teoremas que relacionam grupos algébricos e as características de seus espaços gerados.

### 2.1 Definições Preliminares

Antes de abordarmos (nas próxima seções) alguns aspectos de topologia algébrica, é interessante introduzir as definições de geodésica e quasi-isometria, que serão úteis adiante.

#### 2.1.1 Geodésicas

É comum, em muitas aplicações em topologia, uma tentativa de definir e estudar, para espaços gerais, conceitos geométricos intuitivos simples. Nesse contexto, podemos entender as geodésicas como uma tentativa de generalizar, para espaços métricos abstratos, as linhas retas entres dois pontos do plano cartesiano.

Primeiro algumas definições. Seja $(X, d)$ um espaço métrico qualquer. É interessante definir em $X$ o conceito de comprimento para percursos entre pontos.

**Definição 1** *Para um caminho $\alpha$ de $X$ (no sentido topológico, uma função contínua $\alpha : [0,1] \to X$), definimos o **comprimento** $l(\alpha)$ conforme*

$$l(\alpha) = \sup_{0=t_0\leq\ldots\leq t_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$

Para compreender a definição, apelamos à intuição geométrica do plano real. Nesse contexto, dada uma curva $C$ qualquer, podemos aproximar $C$ por um conjunto segmentos de reta (a curva para a qual o comprimento é igual à distância entre as suas extremidades) ligando pontos pertencentes a $C$ e o comprimento da reta é conforme implicado pela definição.

Da definição, segue imediatamente que, para todo $\alpha$, temos $l(\alpha) \geq d(\alpha(0), \alpha(1))$. Ou seja, todo caminho entre dois pontos tem comprimento maior ou igual que a distância entre suas extremidades (chamamos extremidades de $\alpha$ os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$).

Agora, da intuição de reta, queremos então que uma geodésica seja o caminho para o qual o comprimento é igual à distância entre as suas extremidades. Podemos então definir geodésica e espaço geodésico.

**Definição 2** *O caminho $\alpha$ de $X$ é uma **geodésica** $\iff l(\alpha) = d(\alpha(0), \alpha(1))$.*

**Definição 3** *Caracterizaremos o espaço métrico $X$ como **espaço geodésico** se e somente se, entre quaisquer dois pontos $x, y \in X$, houver uma geodésica $\alpha$ tal que $x = \alpha(0)$ e $y = \alpha(1)$.*

### 2.1.2 Quasi-isometrias

Quasi-isometrias são funções que, como qualquer um poderia adivinhar, são "parecidas"com isometrias. Relembremos que isometrias são funções entre espaços métricos que preservam distância entre pontos. Quasi-isometrias, por sua vez, são funções que "nunca distorcem demais"as métricas em questão.

Definamos precisamente. Sejam $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ espaços métricos arbitrários e tomemos quaisquer $K, C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

**Definição 4** *Chamaremos de **mergulho** $(\mathbf{K}, \mathbf{C})$**-quasi-isométrico** uma função $f : X \to Y$ tal que, $\forall x, y \in X$,*

$$\frac{d_X(x, y)}{K} - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y) + C.$$

**Definição 5** *Chamaremos de **C-grossamente sobrejetiva** uma função $f : X \to Y$ para a qual, $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ tal que $d_Y(f(x), y) \leq C$.*

**Definição 6** *Chamaremos de $(\mathbf{K}, \mathbf{C})$**-quasi-isometria** um mergulho (K, C)-quasi-isométrico que é C-grossamente sobrejetivo.*

## 2.2 Grafos de Cayley

Os grafos de Cayley são espaços métricos que podem ser naturalmente associados, ao menos de quasi-isometria a um grupo finitamente gerado. Nesta seção apresentaremos a definição dos grafos de Cayley e algumas principais propriedades relacionadas.

Primeiro sejamos mais gerais, definamos grafos métricos.

**Definição 7** *Dado um grafo $\Gamma$, um conjunto de vértices (identificados a pontos) e arestas (identificadas a caminhos), qualquer e uma função de comprimento (que atribuí um valor positivo para cada aresta), chamaremos **grafo métrico** correspondente a $\Gamma$ o espaço dado pela união dos vértices e de todos pontos das arestas com a métrica induzida pelo comprimento (ou o ínfimo dentre os caminhos possíveis).*

Discutamos agora os grafos de Cayley. Tomaremos $S$ um conjunto finito simétrico (tal que $S = \{s^{-1} |\ s \in S\}$) e $G$ grupo gerado por $S$. Ou seja, $g \in G$ se e somente se $g$ pode ser escrito como combinação finita (dada a operação fixada para o grupo) de elementos de $S$.

**Definição 8** *Um **grafo de Cayley** $Cay(G, S)$ é um grafo métrico com conjunto de vértices $G$ e conjunto de arestas (todas com comprimento 1) em que liga-se $g, h \in G \iff \exists s \in S$ tal que $h = gs$.*

É trivial verificar que grafos de Cayley são espaços métricos próprios (no sentido em que toda bola fechada é compacta) e geodésicos (no sentido da definição 3).

**Lema 1** *$Cay(G, S)$ é único a menos de quasi-isometria. Ou seja, para dois geradores finitos $S$ e $S'$ de $G$, há uma quasi-isometria natural $Cay(G, S) \to Cay(G, S')$.*

*PROVAR*

#### 2.2.1 Ações de um Grupo

### 2.3 Pontas de um Espaço e o Teorema Alvo

Nesta seção abordaremos o conceito de pontas de um espaço topológico geral e apresentaremos o teorema desejado, que diz respeito ao número de pontas de um grafo de Cayley.

Primeiro, para $X$ espaço topológico, definiremos as pontas de $X$.

**Definição 9** *Dados $r_1$ e $r_2$ raios próprios de $X$ ($r$ é raio de $X$ se, e só se, é função contínua $r : [0, \infty] \to X$, uma função é própria se toda pré-imagem de compacto é compacta), diremos que esses **convergem para a mesma ponta** se, e só se, para todo compacto $C$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_1[N, \infty) \cup r_2[N, \infty) \subset X \setminus C$.*

**Definição 10** *Denotamos a classe de equivalência das pontas do raio próprio $r$ por $ponta(r)$ e o conjunto de todas as classes de equivalência do espaço por $pontas(X)$ e diremos que **$X$ tem $N$ pontas** se, e só se, $N = |pontas(X)|$.*

Por extensão, definimos o número de pontas de um grupo.

**Definição 11** *Definiremos o **número de pontas de um grupo** como o número de pontas de seus grafos de Cayley (note que a ponta de um raio é invariante à composição com quasi-isometria e, portanto, independe da escolha do conjunto gerador).*

E, enfim, temos ferramentas para provar o teorema alvo deste escrito.

**Teorema 1** *Dado um grupo $G$ finitamente gerado, este tem 0, 1, 2 ou infinitas pontas.*
*PROVAR*

## 3 Considerações Finais