Uma Introdução à Topologia Algébrica

Provando um teorema a respeito do número de pontas de um grupo finitamente gerado

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado

Victor Fernando Lopes de Souza
Orientador: Sérgio Tadao Martins

8 de julho de 2021

1 Introdução

Este breve documento visa apresentar alguns conceitos de topologia algébrica, especialmente no que tange à teoria geométrica dos grupos. Os requisitos para a boa leitura são o conhecimento das principais definições em teoria dos grupos e espaços métricos.

O objetivo, ao fim deste relato, é provar que todo grupo finitamente gerado tem 0, 1, 2 ou infinitas pontas. No caminho para essa prova, apresentaremos grafos de Cayley e exploraremos conexões entre as propriedades algébricas dos grupos e propriedades topológicas dos espaços de interesse.

2 Procedimentos

Abordaremos primeiro, de maneira geral, alguns conceitos simples importantes (principalmente os grafos de Cayley e as pontas de um espaço topológico) e, a partir das definições, proporemos alguns teoremas que relacionam grupos algébricos e as características de seus espaços gerados.

2.1 Definições Preliminares

Antes de abordarmos (nas próxima seções) alguns aspectos de topologia algébrica, é interessante introduzir as definições de geodésica e quasi-isometria, que serão úteis adiante.

2.1.1 Geodésicas

É comum, em muitas aplicações em topologia, uma tentativa de definir e estudar, para espaços gerais, conceitos geométricos intuitivos simples. Nesse contexto, podemos entender as geodésicas como uma tentativa de generalizar, para espaços métricos abstratos, as linhas retas entres dois pontos do plano cartesiano.

Primeiro algumas definições. Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. É interessante definir em X o conceito de comprimento para percursos entre pontos.

Definição 1. Para um caminho α de X (no sentido topológico, uma função contínua $\alpha : [0, 1] \to X$), definimos o **comprimento** $l(\alpha)$ conforme

$$l(\alpha) = \sup_{0=t_0 \leq \ldots \leq t_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$

Para compreender a definição, apelamos à intuição geométrica do plano real. Nesse contexto, dada uma curva C qualquer, podemos aproximar C por um conjunto segmentos de reta (a curva para a qual o comprimento é igual à distância entre as suas extremidades) ligando pontos pertencentes a C e o comprimento da reta é conforme implicado pela definição.

Em suma, entendemos aqui o comprimento de uma curva como o limite superior da soma de distâncias implicadas por qualquer "discretização" desta (no sentido em que, escolhendo mais e mais pontos pertencentes à curva, a soma das distâncias sucessivas entre esses tende ao comprimento em questão).

Da definição, segue imediatamente que, para todo α, temos $l(\alpha) \geq d(\alpha(0), \alpha(1))$. Ou seja, todo caminho entre dois pontos tem comprimento maior ou igual que a distância entre suas extremidades (chamamos extremidades de α os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$).

Agora, da intuição de reta, queremos que uma geodésica seja o caminho para o qual o comprimento é igual à distância entre as suas extremidades. Podemos então definir geodésica e espaço geodésico.

Definição 2. O caminho α de X é uma **geodésica** $\iff l(\alpha) = d(\alpha(0), \alpha(1))$.

Definição 3. Caracterizaremos o espaço métrico X como **espaço geodésico** se e somente se, entre quaisquer dois pontos $x, y \in X$, houver uma geodésica α tal que $x = \alpha(0)$ e $y = \alpha(1)$.

Convém abordarmos alguns exemplos de espaços geodésicos e não geodésicos.

Comecemos pelo já citado, observando que $\mathbb{R}^n$ é geodésico. Para verificar basta notar que o segmento de reta entre dois pontos tem comprimento igual à distância entre eles. Ou seja, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^n$, definimos $r_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $r_{a,b}(t) = a + t(b-a)$. Note que, da definição, o segmento $r_{a,b}$ é geodésica, pois $l(r_{a,b}) = d(a,b)$ e, como é possível definir geodésica para qualquer par de pontos, o $\mathbb{R}^n$ é de fato geodésico.

Um exemplo de espaço não geodésico pode ser construído a partir do anterior. Tomemos $X = \mathbb{R}^n \setminus 0$. Note que, para todo $x \in X$, não existe geodésica entre x e $-x$ e portanto X não é geodésico.

Também é interessante notar que, mesmo em um espaço geodésico, as geodésicas entre pontos não são necessariamente únicas. Veja, por exemplo, o próprio $\mathbb{R}^n$ munido da métrica do taxista (induzida pela 1-norma), onde existem infinitas geodésicas entre dois pontos.

2.1.2 Quasi-isometrias

Quasi-isometrias são funções que, como qualquer um poderia adivinhar, são "parecidas" com isometrias. Relembremos que isometrias são funções entre espaços métricos que preservam distância entre pontos. Quasi-isometrias, por sua vez, são funções que "nunca distorcem demais" as métricas em questão.

Definamos precisamente. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos arbitrários e tomemos quaisquer $K, C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Definição 4. Chamaremos de **mergulho $(\mathbf{K}, \mathbf{C})$-quasi-isométrico** uma função $f : X \to Y$ tal que, $\forall x, y \in X$,

$$\frac{d_X(x,y)}{K} - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x,y) + C.$$

Definição 5. Chamaremos de **C-grossamente sobrejetiva** uma função $f : X \to Y$ para a qual, $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ tal que $d_Y(f(x), y) \leq C$.

Definição 6. Chamaremos de **$(\mathbf{K}, \mathbf{C})$-quasi-isometria** um mergulho (K, C)-quasi-isométrico que é C-grossamente sobrejetivo.

Visualizemos um exemplo de quasi-isometria (omitiremos a partir daqui os parâmetros K e C respectivos quando for trivial sua descoberta).

Observe a figura 1. Assuma que cada um dos elementos conexos sejam espaços métricos em que as arestas tem todas comprimento unitário e que encontram-se apenas nos nós. Além disso, assuma que ambos os espaços sigam indefinidamente com o padrão geométrico para a direita e esquerda.

Tomemos a função f de projeção (ou seja, a função que, para todo ponto do espaço acima assinale o ponto o ponto do espaço abaixo que "encontra-se na mesma vertical") do primeiro, chamemos X, no segundo, chamemos Y.

Note que a função de projeção é $(3,0)$-quasi-isometria, pois, dados $x, y \in X$, a distância entre dois pontos $f(x)$ e $f(y)$ nunca é mais de três vezes maior ou menor que entre x e y.

Também é interessante perceber a implicação de que toda função $g : Y \to X$ tal que $\forall y \in Y$ temos $y = f(g(y))$ também é quasi-isometria.

Enfim, a visualização dos espaços da figura 1 permite solidificar a intuição de que "são quasi-isométricos os espaços que, de longe, parecem iguais".

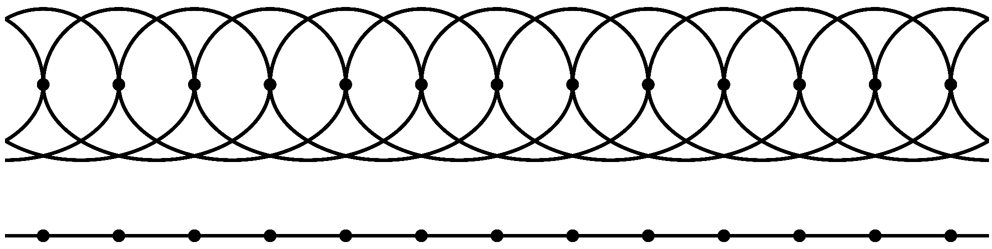

Figura 1: Dois espaços dentre os quais é possível traçar uma quasi-isometria.

2.2 Grafos de Cayley

Os grafos de Cayley são espaços métricos que podem ser naturalmente associados, a menos de quasi-isometria a um grupo finitamente gerado. Nesta seção apresentaremos a definição dos grafos de Cayley e algumas principais propriedades relacionadas.

Primeiro sejamos mais gerais, definamos grafos métricos.

Definição 7. Dado um grafo Γ (um conjunto de vértices, identificados a pontos, e arestas, identificadas a caminhos) qualquer e uma função de comprimento (que atribuí um valor positivo para cada aresta), chamaremos **grafo métrico** correspondente a Γ o espaço dado pela união dos vértices e de todos pontos das arestas com a métrica induzida pelo comprimento (ou o ínfimo dentre os caminhos possíveis).

Discutamos agora os grafos de Cayley. Tomaremos S um conjunto finito simétrico (tal que $S = \{s^{-1} |\ s \in S\}$) e G grupo gerado por S. Ou seja, $g \in G$ se e somente se g pode ser escrito como combinação finita (dada a operação fixada para o grupo) de elementos de S.

Definição 8. Um **grafo de Cayley** $Cay(G, S)$ é um grafo métrico com conjunto de vértices G e conjunto de arestas (todas com comprimento 1) em que liga-se $g, h \in G \iff \exists s \in S$ tal que $h = gs$.

É interessante verificar que grafos de Cayley são espaços métricos próprios (no sentido em que toda bola fechada é compacta) e geodésicos (no sentido da definição 3).

Note que, por construção, toda aresta é compacta. Daí, toda bola fechada, por conter finitas arestas (decorre-se de S finito, pois há no máximo $|S|$ arestas saindo do cada vértice), é compacta.

Pela construção de grafo métrico, há uma geodésica entre quaisquer dois pontos conexos. Como S gera G, segue que $Cay(G, S)$ é fortemente conexo e, por isso, geodésico.

Para visualizar exemplos de grafos de Cayley, observemos novamente os espaços da figura 1 e notemos que se tratam de, respectivamente, $Cay(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$ e $Cay(\mathbb{Z}, \{\pm 2, \pm 3\})$.

Outro exemplo, bem parecido com os anteriores, é $Cay(\mathbb{Z}^2, \{\pm(0,1), \pm(0,1)\})$. Que está desenhado na figura 2.

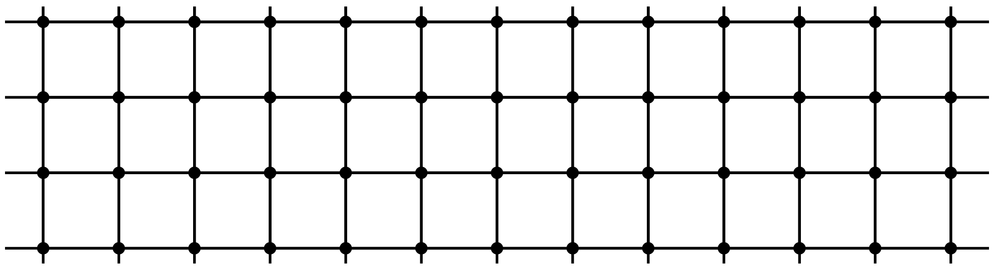

Figura 2: O espaço $Cay(\mathbb{Z}^2, \{\pm(0,1), \pm(0,1)\})$.

Um último exemplo, para um grupo finito, está na figura 3, onde nota-se que podemos identificar $Cay(\mathbb{Z}/n, \{\pm 1\})$ a um polígono de n lados.

Agora, como queremos estudar um grupo independentemente de seu conjunto gerador, é interessante notar que a escolha de S "nunca interfere demais" na natureza de $Cay(G, S)$. Essa característica procede do seguinte lema.

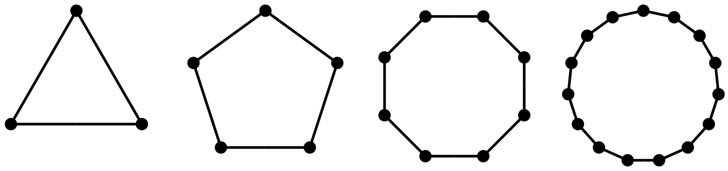

Figura 3: Os espaços $Cay(\mathbb{Z}/n, \{\pm 1\})$ para n respectivamente igual a 3, 5, 8 e 15.

Lema 1. *$Cay(G, S)$ é único a menos de quasi-isometria. Ou seja, para dois geradores finitos S e S' de G, há uma quasi-isometria natural $Cay(G, S) \to Cay(G, S')$.*

Prova: Assumamos G gerado pelos conjuntos finitos simétricos S e S'. Seja $\Psi : Cay(G, S) \to Cay(G, S)$ tal que identifique todo elemento do espaço ao vértice mais próximo. Note que Ψ é (1, 1)-quasi-isometria.

Seja $\Psi' : Cay(G, S') \to Cay(G, S')$ da mesma forma que Ψ. Trivialmente, a inclusão da imagem de Ψ em $Cay(G, S')$ também é (1, 1)-quasi-isometria.

Assim, como a composição de quasi-isometrias é quasi-isometria (não provamos esse fato aqui, mas segue diretamente da definição), para que tenhamos a proposição do lema verdadeira é apenas necessário que tracemos uma quasi-isometria entre as imagens de Ψ e Ψ'.

Note que os elementos de ambas as imagens são os mesmos de G e o que difere os espaços em questão é a métrica herdada da escolha do conjunto gerador. Chamaremos as distâncias de interesse d_S e $d_{S'}$ e provaremos que a identidade $G \to G$ é quasi-isometria.

Agora, sendo $1 \in G$ o elemento neutro do grupo, da definição de grafo de Cayley, há aresta entre $g, h \in G$ se e somente se $\exists s \in S$ tal que $h = gs \Rightarrow g^{-1}h = s$. Daí, segue $d_S(g, h) = d_S(g^{-1}h, 1)$. Também notemos que $d_S(g, 1) = N \iff \exists$ um menor conjunto $\{s_1, ..., s_N\} \subset S$ tal que $g = s_1...s_N$.

Mostraremos que a distorção entre as métricas é limitada à proporcional a uma constante. Primeiro definiremos essa constante, "o numero máximo de elementos de um grupo que é necessário para reescrever um elemento do outro", como $M = max\{d_{S'}(s, 1), d_S(s', 1) : s \in S, s' \in S'\}$.

Enfim, assumamos, para quaisquer elementos de G, $d_S(g, h) = k$. Daí, existe $\{s_1, ..., s_k\} \subset S$ tal que $g^{-1}h = s_1...s_k$. De ser S' gerador e, como $S \subset G$, temos $s_i = s'_{i,1}...s'_{i,M_i}$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$.

Portanto, $g^{-1}h = (s'_{1,1}...s'_{1,M_1})...(s'_{k,1}...s'_{k,M_k})$ e, como $\forall M_i$, $M_i \leq M$, temos

$$d_{S'}(g, h) = d_{S'}(g^{-1}h, 1) \leq Mk = Md_S(g, h).$$

A identidade é obviamente sobrejetiva e, com o mesmo argumento descrito, é possível provar (ao aplicá-lo "ao contrário", para o outro lado da desigualdade, $d_S(g, h) \leq Md_{S'}(g, h)$) que é mergulho quasi-isométrico. Assim, a identidade é quasi-isométrica e satisfaz-se a proposição. □

2.3 Pontas de um Espaço e o Teorema Alvo

Nesta seção abordaremos o conceito de pontas de um espaço topológico geral e apresentaremos o teorema desejado, que diz respeito ao número de pontas de um grafo de Cayley.

Primeiro, para X espaço topológico, definiremos as pontas de X.

Definição 9. Dados r_1 e r_2 raios próprios de X (r é raio de X se, e só se, é função contínua $r : [0, \infty] \to X$, uma função é própria se toda pré-imagem de compacto é compacta), diremos que esses **convergem para a mesma ponta** se, e só se, para todo compacto C existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_1[N, \infty) \cup r_2[N, \infty) \subset X \setminus C$.

Definição 10. Denotamos a classe de equivalência das pontas do raio próprio r por $ponta(r)$ e o conjunto de todas as classes de equivalência do espaço por $pontas(X)$ e diremos que **X tem N pontas** se, e só se, $N = |pontas(X)|$.

Por extensão, definimos o número de pontas de um grupo.

Definição 11. Definiremos o **número de pontas de um grupo** como o número de pontas de seus grafos de Cayley (note que a ponta de um raio é invariante à composição com quasi-isometria e, portanto, independe da escolha do conjunto gerador).

E, boas notícias, agora temos ferramentas suficientes para provar o teorema alvo deste escrito.

Mas antes, observemos alguns exemplos. Note que $\mathbb{Z}$ (ver figura 1) tem duas pontas, $\mathbb{Z}^2$ (ver figura 2) tem uma ponta (note que o mesmo vale para todo $\mathbb{Z}^n$ com $n \geq 2$) e $\mathbb{Z}/n$ (ver figura 3) não tem nenhuma ponta (assim como todo grupo finito, já que implica grafo de Cayley compacto).

Analisemos um último exemplo. Chamamos de grupo livre F_2 o conjunto de "palavras" com as "letras" a, b e seus inversos. Pertencem a esse grupo, por exemplo a, ab, $baba$, $aaaabba^{-1}b^{-1}aa$, bem como a palavra vazia, que é o elemento neutro.

A figura 4 é o grafo de cayley correspondente a F_2 gerado por a, b e seus inversos. O elemento neutro é o nó central e cada direção representa uma letra adicionada à palavra.

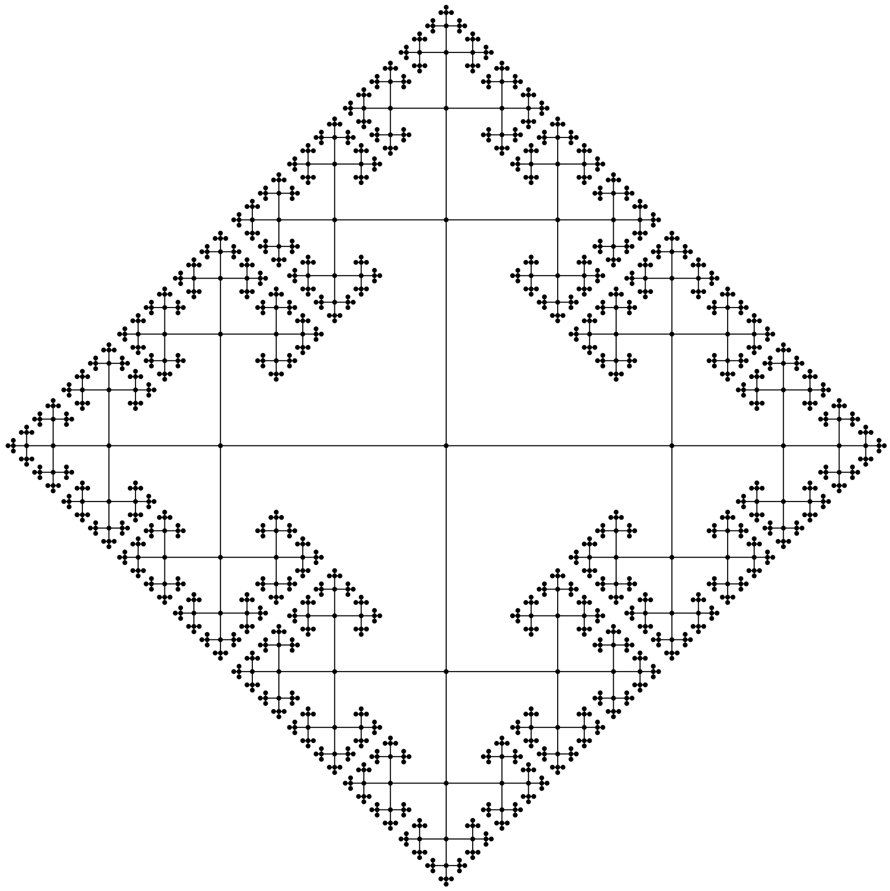

Figura 4: Representação de $Cay(F_2, \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})$, um fractal, de infinitas pontas.

E, enfim, note que esse último grafo tem infinitas pontas. E o teorema seguinte deixará claro, não há como inventar um grupo, em termo de número de pontas, diferente dos que mostramos nos últimos parágrafos.

Teorema 1. Dado um grupo G finitamente gerado, este tem 0, 1, 2 ou infinitas pontas.

Prova: Já sabemos, vide os exemplos, que existem grupos com cada um desses números de pontas. Resta provar que são essas as únicas possibilidades.

Para redução ao absurdo, suponhamos verdadeira a contra-positiva. Ou seja, assuma que haja um grupo G com finitas pontas e para o qual existam raios próprios $r_0, r_1, r_2 : [0, \infty) \to Cay(G)$ tais que nenhuma combinação destes convirja para a mesma ponta. Sem perda de generalidade, assuma ainda que $r_1(0) = r_2(0) = \mathbb{1}_G$ (note que aqui, e em toda essa prova, denotaremos, quando possível, o ponto do grafo de Cayley pelo seu correspondente no grupo gerador).

Agora, para todo raio próprio $r : [0, \infty) \to Cay(G)$ e elemento $g \in G$, podemos definir um raio próprio $g(r) : [0, \infty) \to Cay(G)$ "deslocado por g". Ou seja, tal que $g(r(x)) = g \cdot r(x)$ sempre que $r(x) \in Cay(G)$ e seja estendida adequadamente para as arestas. Note que essa ação de um elemento do grupo sobre o grafo de Cayley (e aqui particularmente sobre um raio próprio do grafo de Cayley) é isometria.

Tomemos $H \subset G$ o conjunto de elementos que agem sobre raios (no sentido do parágrafo anterior) sem modificar sua ponta. Ou seja, $h \in H \Rightarrow h(r)$ está na mesma ponta que r $\forall r \in R$. Ainda, como são finitas pontas em G, o índice de H é finito.

Como o índice de H é finito, há uma constante μ tal que, para todo elemento x do grafo, a interseção de H com a bola de raio μ em torno de x não é vazia. Daí, sem perda de generalidade, podemos definir r_0 tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(r_0(n), \mathbb{1}_G) \geq n$ e $r_0(n) \in H$ (o primeiro requisito pode ser obtido "ajeitando" qualquer raio para que "convirja mais rápido". O segundo pode ser obtido da propriedade citada neste parágrafo, já que H está "próximo de toda aresta"). Denotaremos, para simplificar a notação, $\gamma_n = r_0(n)$.

Fixamos $\rho > 0$ tal que $r_1([\rho,\infty))$, $r_2([\rho,\infty))$ e $r_0([\rho,\infty))$ estejam em diferentes componentes conexos de $Cay(G) \setminus B(\mathbb{1}_G,\rho)$ (note que é possível fixar ρ adequado pois os raios convergem para pontas diferentes). Portanto, para todo $t,t' > 2\rho$, $d(\gamma_n(r_1)(t), \gamma_n(r_2)(t')) > 2\rho$ (pois todo caminho unindo esses pontos deve passar por $B(\mathbb{1}_G,\rho)$).

Da natureza de H, para $i \in \{1,2\}$ e para todo n natural, $\gamma_n(r_i)$ converge para a mesma ponta de r_i. Entretanto, se fixamos $n > 3\rho$, $\gamma_n(r_i)(0) = \gamma_n$ não está no mesmo componente conexo de $r_i([\rho,\infty))$. Assim, é necessário que $\gamma_n(r_i)$ "passe" por $B(\mathbb{1}_G,\rho)$ e, portanto, existem $t,t' > 2\rho$ tais que $\gamma_n(r_1)(t) \in B(1,\rho)$, $\gamma_n(r_2)(t') \in B(\mathbb{1}_G,\rho)$ e $d(\gamma_n(r_1)(t), \gamma_n(r_2)(t')) < 2\rho$.

Temos então uma contradição! $\square$

3 Considerações Finais

Introduziu-se nas seções anteriores alguns aspectos básicos da **teoria geométrica dos grupos**, uma área da matemática que se dedica ao estudo de grupos finitamente gerados por meio da exploração das conexões entre suas propriedades algébricas e as propriedades topológicas e geométricas de espaços relacionados.

A teoria geométrica dos grupos está diretamente relacionada à **topologia algébrica**, área da matemáticas que usa teorias geométricas e topológicas para estudar estruturas algébricas. No caso desses escritos, relacionamos os grupos a classes de espaços métricos e introduzimos uma propriedade interessante, o número de pontas de um espaço.

O desenvolvimento aqui realizado, embora simples e preliminar, permite a compreensão de fatos não tão triviais e tem algumas aplicações práticas imediatas. Por exemplo, tendo em vista os conhecimentos apresentados, fica clara a inexistência de isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^n$ para $n \geq 2$, já que os espaços tem diferentes números de pontas (e se fossem isomorfos, seus grafos de Cayley também o seriam, implicando no mesmo número de pontas).

O desenvolvimento aqui apresentado baseou-se principalmente em [1] e [2]. Além disso, recomenda-se fortemente a leitura de [3], que introduz os principais aspectos gerais de topologia algébrica.

Referências

[1] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[2] Alessandro SISTO. Lecture notes in geometric group theory, July 2014.

[3] Allen HATCHER. *Algebraic Topology.* Allen Hatcher, 2001.