

Física da Terra

Notas de Aulas

Victor Cezar Tocantins

08 - 07 - 2019

Sumário

Prefácio	5
1 Introdução	7
1.1 O que é geofísica	7
2 Gravidade, a figura da Terra e geodinâmica	11
2.1 O tamanho da Terra	11
2.2 A forma da Terra	12
2.3 Gravitação	14
2.4 Superfícies equipotenciais	21
2.5 A figura da Terra e a gravidade	22
2.6 Anomalias gravitacionais	30
2.7 Densidade das rochas	39
2.8 Anomalias gravimétricas ar livre (free-air) e Bouger	44
2.9 Interpretação de anomalias gravimétricas	47
2.10 Isostasia	60
2.11 Exercícios	60
3 Sismologia e a estrutura interna da Terra	63
3.1 Introdução	63
3.2 Teoria da Elasticidade	64
3.3 Ondas sísmicas	73
3.4 Sismologia do terremoto	79
3.5 Estrutura interna da Terra	82
3.6 Exercícios	101

Prefácio

Estas são as notas de aula para o curso de física da Terra, ministrados nos cursos de geologia e geofísica.



Figura 1: Capa

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns fatos relevantes da história da geofísica, num contexto global do nosso planeta, seguimos o livro de Ribeiro and Molina [2018], onde aspectos da sismologia, gravimetria, geomagnetismo e geotermia são apresentados

1.1 O que é geofísica

A geofísica é uma das disciplinas das Ciências da Terra, ou seja, uma das ciências que se ocupam em estudar o planeta Terra - e por extensão outros corpos do Sistema Solar -, em seus diferentes aspectos.

De uma forma muito esquemática, a Terra pode ser dividida em dois ambientes muito distintos: de um lado a superfície. onde a civilização humana se desenvolveu, e a atmosfera acima dela, e de outro lado o interior do planeta. O ambiente externo é diretamente acessível à observação e, por isto, é mais bem conhecido. O conhecimento acumulado sobre a superfície da Terra e a sua atmosfera permitiu a definição de disciplinas, ou áreas de estudo, distintas entre si, mas muito integradas, como a geologia, a meteorologia, a geografia, a oceanografia e a aeronomia, também chamada de geofísica externa, porque estuda as camadas superiores da atmosfera, particularmente suas características fisiognômicas. O ambiente interno, com a exceção de uma camada muito superficial à qual se pode ter acesso muito localizado e limitado através de grutas naturais, minas e poços profundos, só pode ser investigado por meios de métodos indiretos. Ainda assim, o conhecimento acumulado permitiu a definição de disciplinas distintas e integradas como, além da geologia, a geoquímica e a geofísica.

A geofísica, tanto externa quanto a que se ocupa do interior da Terra, é a disciplina que investiga o planeta através de métodos físicos - conforme o próprio nome indica, ainda que de forma genérica. O objetivo da geofísica é o estudo da estrutura, da dinâmica e da evolução ao longo do tempo da Terra e, desde o início da era espacial na década de 60, dos demais corpos planetários do Sistema Solar.

A grande vantagem da geofísica para a geologia, é que ela pode ser usada para fazer observações sobre a subsuperfície usando medições tomadas (geralmente) na superfície, como no manto magnético. Na verdade, geofísica é o único ramo das ciências da terra que podem verdadeiramente “olhar” para o interior da Terra, ou seja, detectar remotamente a presença de corpos e estruturas enterrados. Em contraste, geologia só pode inferi-los. Por exemplo, para as expostas dobradas sinclinal da Figura 1.1, podemos inferir vários cenários da subsuperfície, como uma falha, Figura 1.2, uma intrusão como ilustra a Figura 1.3 ou mesmo a presença de um domo salino, Figura 1.4

Essas estruturas que a priori não poderiam ser inferidas apenas por amostras e estudo na superfície podem ser detectadas por medições geofísicas apropriadas na superfície. Portanto, a geofísica é capaz de adicionar a terceira dimensão, profundidade, de uma forma que geologia tradicional muitas vezes não pode. Os poços podem, em princípio, fornecer informações detalhadas sobre o subsolo, mas eles são caros e, estritamente, fornecem informações apenas sobre as rochas imediatamente ao redor do furo, a estrutura da rocha distante



Figura 1.1: Sinclinal simétrica.

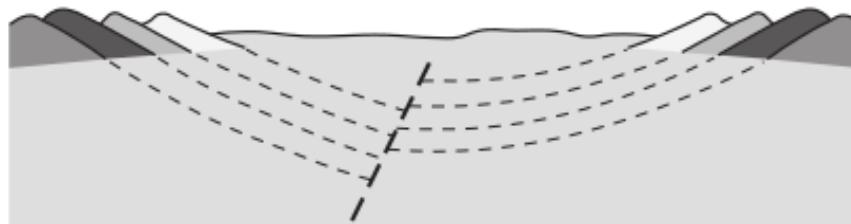


Figura 1.2: Sinclinal com falha.

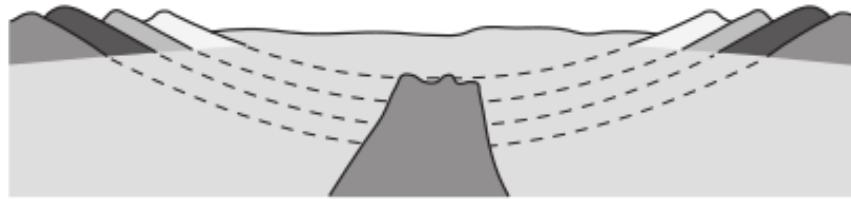


Figura 1.3: Sinclinal com intrusão.

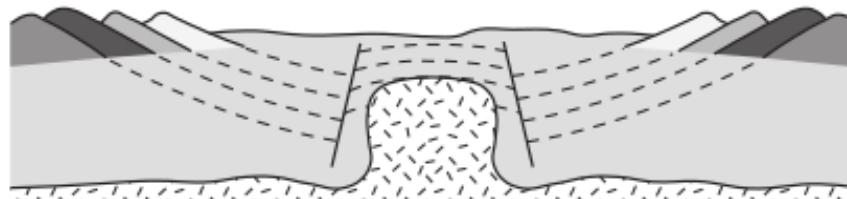


Figura 1.4: Sinclinal com domo de sal.



Figura 1.5: Super poço na península de Kola, na Rússia.

do poço poderia ser diferente e quase sempre é devido a grande heterogeneidade da geologia. Em contraste, levantamentos geofísicos muitas vezes fornecem informações menos precisas, mas ao longo de um volume muito maior de rocha. A perfuração também é limitada em quanto profundo ele pode alcançar; o furo mais profundo (Península de Kola, no noroeste da Rússia) é inferior a 13 quilometros, Figura 1.5, ou cerca de 1/500 da profundidade para o centro da Terra, enquanto geofísica pode sondar o todo o volume da Terra (e também explorar rochas ao redor de um poço).

Uma limitação do levantamento geofísico é que a maioria métodos dão informação apenas sobre o presente; por exemplo, não podemos registrar um terremoto que ocorreu no passado (duas notáveis exceções, são datações radiométricas para rochas e o paleomagnetismo, útil para medir movimentos de rochas ou massas de terra, mas ambos dependem em ter amostras, e não são métodos de sensoriamento remoto). Por outro lado, algumas medidas geofísicas revelam processos dinâmicos operando no Terra: Por exemplo, o estudo de terremotos informa sobre as forças que atuam dentro de zonas orogênicas.

Então, “geofísica”, como usada neste curso, é a investigação das rochas e estruturas do subsuperfície, através de medições físicas na superfície, ou no caso de datação radiométrica e paleomagnetismo - em amostras. Pelas razões acima, a geofísica não substitui a investigação geológica, mas a complementa.

Capítulo 2

Gravidade, a figura da Terra e geodinâmica

Neste capítulo seguimos o livro de Lowrie [2007] apresentaremos o conceito de gravidade, anomalias gravimétricas, isostasia e reologia que são importantes tanto na geofísica global quanto na geofísica aplicada.

2.1 O tamanho da Terra

A primeira estimativa cientificamente sólida do tamanho do esfera terrestre foi feita por Eratóstenes (275-195 AC), que era o bibliotecário-chefe em Alexandria, uma colônia grega no Egito durante o terceiro século AC. Eratóstenes tinha dito que na cidade de Syene (moderna Assuão - Egito) raios do meio-dia do sol no dia de verão brilhou verticalmente e foram capazes de iluminar os fundos dos poços, enquanto no mesmo dia em Alexandria, sombras foram lançadas. Eratosthenes observou que no solstício de verão os raios do sol faziam um ângulo de um quinquagésimo de um círculo ($360^\circ/50 = 7.2^\circ$) com a vertical em Alexandria, como ilustra a Figura 2.1

Eratóstenes acreditava que Syene e Alexandria estavam num mesmo meridiano. Na verdade, eles estão ligeiramente deslocados; suas coordenadas geográficas são $24^\circ 5' N$ $32^\circ 56' E$ e $31^\circ 13' N$ $29^\circ 55' E$. Syene está na verdade sobre meio grau ao norte do trópico de Câncer. Eratóstenes sabia que a distância aproximada de Alexandria para Syene foi de 5000 estádios, possivelmente estimado por viajantes do número de dias (“10 dias de camelo”) levados para viajar entre as duas cidades. A partir dessas observações Eratóstenes estimou que a circunferência do esfera global é de 250.000 estádios. O estádio grego era o comprimento (cerca de 185 m) da pista de corrida em forma de U que as corridas e outros eventos esportivos foram realizados. A Estimativa de Eratóstenes da circunferência da Terra equivale a 46.250 km, cerca de 15% superior ao valor moderno de 40.030 km.

As estimativas do comprimento de um grau de meridiano foram feita no oitavo século DC, durante a dinastia Tang na China, e no nono século DC por astrônomos árabes na Mesopotâmia. Pouco progresso foi feito na Europa até o início do século XVII. Em 1662, a Royal Society foi fundada em Londres e em 1666 a Académie Royale des Sciences foi fundada em Paris. Ambas as organizações forneceu apoio e impulso à revolução científica. A invenção do telescópio permitiu levantamento geodésicas mais precisas. Em 1671, um astrônomo francês, Jean Picard (1620–1682), completou um levantamento preciso por triangulação do comprimento de um grau de arco meridiano. Doa seus resultados, o raio da Terra foi calculado em 6372 km, notavelmente perto do valor moderno de 6371 km.

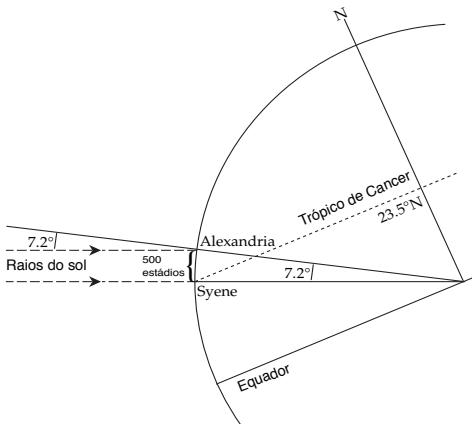


Figura 2.1: O método usado por Eratóstenes (275-195 AC) para estimar a circunferência da Terra usando a diferença de 7.2° em altitude do Raios de Sol em Alexandria e Syene.

2.2 A forma da Terra

Em 1672, outro astrônomo francês, Jean Richer, foi enviado por Louis XIV para fazer observações astronômicas sobre o ilha equatorial de Caiena. Ele descobriu que um pêndulo de relógio de precisão, que havia sido ajustado em Paris precisamente para bater em segundos, estava perdendo cerca de dois e meio minutos por dia, ou seja, o seu período foi agora demasiado longo. O erro foi muito grande para ser explicado pela imprecisão do instrumento. A observação despertou muito interesse e especulação, mas só foi explicado cerca de 15 anos mais tarde por Sir Isaac Newton em termos de suas leis de gravitação universal e movimento.

Newton argumentou que a forma da Terra em rotação deve ser a de um elipsoide oblato; comparado a uma esfera, deve ser um pouco achatado nos polo e protuberante para fora em torno do equador. Essa inferência foi feita em bases lógicas. Suponha que a Terra não gira e que os furos podem ser feitos para o seu centro ao longo do eixo de rotação e ao longo de um raio equatorial (Figura 2.2). E se esses orifícios são preenchidos com água, a pressão hidrostática no centro da Terra sustenta colunas de água iguais ao longo cada raio. No entanto, a rotação da Terra causa um força centrífuga no equador, mas não tem efeito sobre o eixo de rotação. No equador, a força centrífuga externa da rotação se opõe à atração gravitacional interna e puxa a coluna de água para fora. Ao mesmo tempo, reduz a pressão hidrostática produzida pela coluna de água no centro da Terra. A pressão central reduzida é incapaz de suportar a altura da coluna de água ao longo do raio polar, que diminui. Assim, se a Terra fosse uma esfera hidrostática, a forma da Terra em rotação deve ser um elipsoide oblato de revolução. Newton assumiu a densidade da Terra seja constante e calculado que o aplanaamento deve ser de cerca de 1:230 (cerca de 0,5%). Isso é um pouco maior do que o achatamento real da Terra, que é cerca de 1: 298 (aproximadamente 0,3%).

O aumento no período do pêndulo de Richer poderia agora ser explicado. Caiena estava perto do equador onde o raio maior colocou o observador mais longe do centro de atração gravitacional, e o aumento distância do eixo de rotação resultou em uma força centrífuga oposta. Esses dois efeitos resultaram em menor valor de gravidade em Caiena do que em Paris, onde o relógio havia sido calibrado.

Não houve a prova direta da interpretação de Newton. Uma corolário de sua interpretação foi que o arco do grau do meridiano deve subtender uma distância maior em regiões polares do que perto do equador (Figura 2.3). No início do século XVIII profissionais em geodésia franceses estenderam a padronização do meridiano de fronteira a fronteira do país e encontrou um intrigante resultado. Em contraste com a previsão de Newton, o grau do arco meridiano diminuiu para o norte. A interpretação francesa era que a forma da Terra era um elipsoide prolate, alongada nos polos e estreitada no equador, como o forma de uma bola rugby. Uma grande controvérsia científica surgiu entre os “níveladores” e os “alongadores”.

Para determinar se a forma da Terra era oblata ou prolate, a Académie Royale des Sciences patrocinou dois expedições científicas. Em 1736-1737 uma equipe de cientistas medido o comprimento de um grau de arco

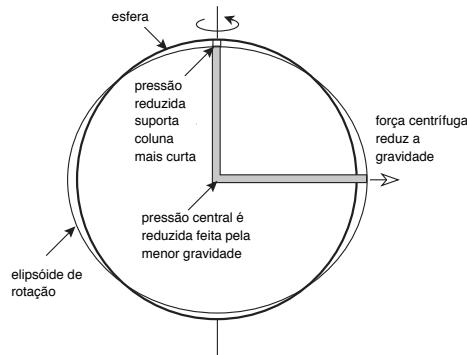


Figura 2.2: O argumento de Newton de que a forma da Terra em rotação deveria ser achatada nos polos e protuberante no equador foi baseado em equilíbrio hidrostático entre colunas de pressão polar e equatorial.

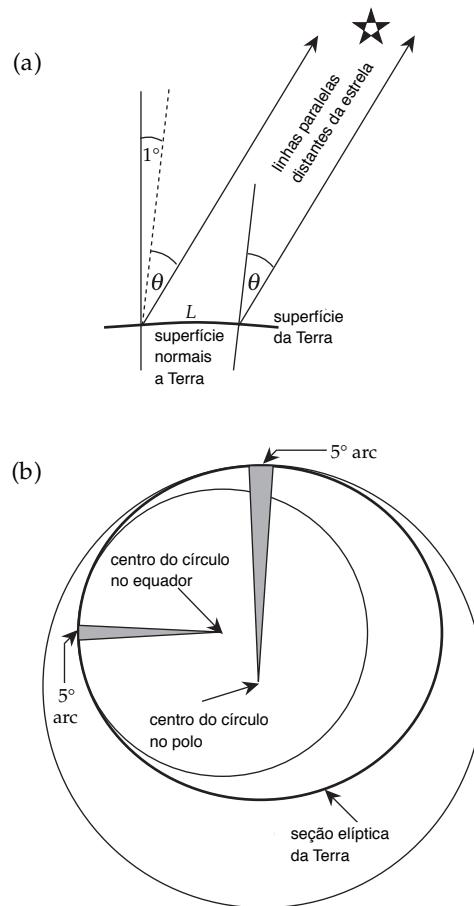


Figura 2.3: (a) O comprimento de um grau de arco meridiano é encontrado pela medida da distância entre dois pontos que estão a um grau de distância no mesmo meridiano. (b) O raio de curvatura maior no plano aplanado polar dá uma maior distância do arco do que é encontrado no equador onde o raio de curvatura é menor.

meridiano na Lapónia, perto do Círculo Ártico. Eles encontraram um comprimento sensivelmente mais longo que o grau de meridiano medido Picard perto de Paris. De 1735 a 1743 uma segunda parte de cientistas mediram o comprimento de mais de 3 graus de arco meridiano no Peru, perto do equador. Seus resultados mostraram que o grau de latitude equatorial era mais curto do que o grau de meridiano em Paris. Ambas as partes confirmaram convincentemente a previsão de Newton que a forma da Terra é a de um elipsóide oblato.

A forma elipsoidal da Terra resultante de sua rotação tem consequências importantes, não só para o variação com a latitude da gravidade na superfície da Terra, mas também para a taxa de rotação da Terra e a orientação do seu eixo de rotação. Estes são modificados por torques que surgem das atrações gravitacionais do Sol, Lua e planetas na forma elipsoidal.

2.3 Gravitação

2.3.1 A lei universal da gravitação

Um corpo de massa m em movimento possui um momento de inércia ($m\mathbf{v}$). Para mudarmos este movimento é necessário aplicarmos uma força \mathbf{F} a este corpo. A segunda lei de movimento de Newton estabelece que a taxa de variação do momento de uma massa é proporcional a força que atua sobre ela, e acontece na direção da força. Para o caso de massas constantes esta lei serve como definição de força \mathbf{F} em termos da aceleração (\mathbf{a}) dada pela massa (m):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2.1)$$

A unidade de força no sistema SI é o Newton (N). Ela é definida como sendo a força que dá a uma massa de um quilograma, uma aceleração de 1 m/s^2 .

Nós conhecemos a célebre observação de Newton da maçã em queda, a qual ele relacionou com a atração gravitacional que a Terra exercia sobre a maçã. Entretanto, a genialidade de Newton foi reconhecer que o campo gravitacional que faz com que a maçã caia é a mesma que mantém a Lua em órbita em torno da Terra e que mantém os planetas girando ao redor do Sol. Newton deduziu que a atração gravitacional \mathbf{F} entre duas partículas de massas m e M , separadas pela distância r , é proporcional ao produto destas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas:

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

Onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário na direção da coordenada r , direcionada para fora do centro de referência da massa M . O sinal negativo indica que a força \mathbf{F} age na direção oposta, em direção da massa M (Figura 2.4). A constante G é denominada de Constante da Gravitação Universal.

Na época de Newton não havia como determinar a constante G . O método a ser seguido, seria determinar a força exercida entre duas massas no laboratório. A determinação experimental de G , é extremamente difícil e foi conseguida somente depois de mais de um século após a formulação de Newton, por Lord Charles Cavendish, em 1798. Depois de uma série de medidas apuradas da força de atração entre duas esferas, Cavendish determinou o valor de $G = 6,754 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Um valor atual da constante G é $6,6725985 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

2.3.1.1 Energia potencial e trabalho

A lei da conservação de energia significa que a energia total a em um sistema fechado é constante. Duas formas de energia devem ser consideradas aqui. A primeira é a energia potencial, em que um objeto tem em virtude de sua posição relativa a origem de uma força. A segunda é o trabalho feito contra a ação da força durante a uma variação de posição

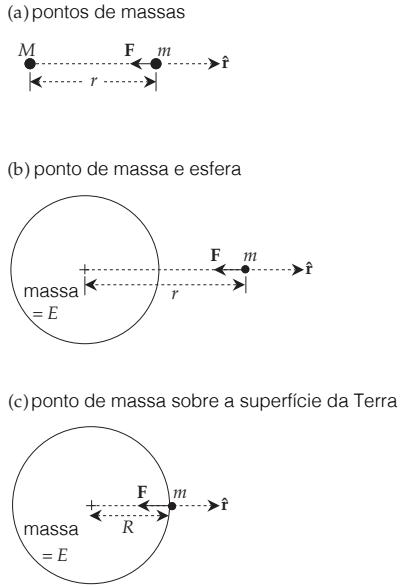


Figura 2.4: Geometria da atração gravitacional sobre (a) dois pontos de massa, (b) um ponto de massa fora de uma esfera, (c) um ponto de massa sobre a superfície de uma esfera.

Por exemplo, quando a maçã de Newton está na árvore, ela tem uma energia potencial mais alta do que quando está no chão. Ela cai devido à força descendente da gravidade e perde energia potencial ao fazê-lo. Para calcular a variação da energia potencial precisamos elevar a maçã à sua posição original. Isso requer que apliquemos uma força igual e oposta à atração gravitacional na maçã e, devido esta força ser movida ao longo da distância em que a maçã caiu, nós temos que gastar energia em forma de trabalho. E se a altura original da maçã acima do nível do solo era h e o valor da força exercida pela gravidade na maçã é F , a força que devemos aplicar para colocá-la de volta é $(-F)$. Assumindo que F é constante através da curta distância de sua queda, o trabalho despendido é $(-F)h$. Este é o aumento da energia potencial da maçã, quando está na árvore.

Mais geralmente, se a força constante F se move através uma pequena distância dr na mesma direção que a força, o trabalho feito é $dW = Fdr$ e a variação na energia potencial dE_p é dada por

$$dE_p = -dW = -Fdr \quad (2.3)$$

No caso mais geral, temos que considerar os movimentos e forças que têm componentes ao longo de três ortogonal eixos. O deslocamento dr e a força F não precisam ser paralelos um ao outro. Temos que tratar F e dr como vetores. Em coordenadas cartesianas, o vetor de deslocamento dr tem componentes (dx, dy, dz) e a força tem componentes (F_x, F_y, F_z) ao longo de cada um dos respectivos eixos. O trabalho realizado pela componente x da força quando é deslocado ao longo do eixo x é $F_x dx$, e existem expressões similares para os deslocamentos ao longo dos outros eixos. A variação na energia potencial dE_p é agora dada por

$$dE_p = -dW = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (2.4)$$

A expressão entre parênteses é chamada de produto escalar dos vetores \mathbf{F} e $d\mathbf{r}$ definida pela expressão $Fdr \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores.

2.3.1.2 Aceleração gravitacional

Na física, o campo de uma força é frequentemente mais importante que a magnitude absoluta da força. O campo é definido como a força exercida em uma unidade de material. Por exemplo, o campo elétrico de um corpo carregado em uma determinada posição é a força que ele exerce em uma unidade de carga elétrica naquele local. O *campo gravitacional* na vizinhança de uma massa de atração é a força que exerce sobre uma massa unitária. A equação (2.1) mostra que isso é equivalente ao vetor de aceleração.

Em aplicações geofísicas, estamos preocupados com acelerações, e não com forças. Comparando Equação (2.1) e Equação (2.2) obtemos a aceleração gravitacional a_G da massa m devido à atração da massa M

$$a_G = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.5)$$

A unidade de aceleração do SI é o (ms^{-2}); esta unidade é impraticável para uso em geofísica. No agora superado sistema c.g.s. a unidade de aceleração é de (cm s^{-2}), que é chamado de gal em reconhecimento das contribuições de Galileo. As pequenas mudanças na aceleração da gravidade causadas pelas estruturas geológicas são medidas em milésimos desta unidade, ou seja, em miligramas (mgal). Até recentemente, anomalias de gravidade devido a estruturas geológicas foram pesquisadas com instrumentos de campo com precisão de cerca de um décimo de miligal, o que foi chamado de *unidade de gravidade*. Instrumentos modernos são capazes de medir diferenças de gravidade para um milionésimo de gal, ou microgal (μgal), que está se tornando a unidade prática de investigações de gravidade. O valor da gravidade na superfície da Terra é de cerca de 9.8 ms^{-2} , e assim a sensibilidade das medições modernas da gravidade é de cerca de 1 parte em 10^9 .

2.3.1.3 Potencial gravitacional

O potencial gravitacional é a energia potencial de uma massa unitária em um campo de atração gravitacional. Seja o potencial ser denotado pelo símbolo U_G . A energia potencial E_p de uma massa m em um campo gravitacional é, portanto, igual a (mU_G) . Assim, uma variação na energia potencial (dE_p) é igual a (mdU_G) . A Equação (2.3) se torna, usando a Equação (2.1)

$$mdU_G = -Fdr = -ma_Gdr \quad (2.6)$$

Rearranjando esta equação conseguimos a aceleração gravitacional

$$a_G = -\frac{dU_G}{dr} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

Em geral, a aceleração é um vetor tridimensional. Se estivermos usando coordenadas cartesianas (x, y, z) , a aceleração terá componentes (a_x, a_y, a_z) . Estes podem ser determinados separadamente, calculando as derivadas do potencial em relação as coordenadas x, y e z :

$$a_x = -\frac{\partial U_G}{\partial x}, \quad a_y = -\frac{\partial U_G}{\partial y}, \quad a_z = -\frac{\partial U_G}{\partial z} \quad (2.8)$$

Usando as Equações (2.3) e (2.7) temos que o potencial gravitacional de um ponto de massa M :

$$\frac{dU_G}{dr} = G \frac{M}{r^2} \quad (2.9)$$

que tem como solução

$$U_G = -G \frac{M}{r}. \quad (2.10)$$

Para as três componentes cartesianas a equação (2.8) pode ser escrita como

$$\mathbf{a}_G = -\nabla U_G$$

que é uma generalização da equação (2.7) onde ∇ é operador diferencial *del* ou *nabla* definido como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}},$$

ou seja, a aceleração gravitacional é o negativo do gradiente do potencial.

2.3.1.4 Aceleração e potencial de uma distribuição de massa

Até agora, consideramos apenas a aceleração gravitacional e o potencial de massas pontuais. Um corpo sólido pode ser considerado composto de numerosas partículas pequenas, cada uma das quais exerce uma atração gravitacional em um ponto externo P (Figura 2.5.a). Para calcular a aceleração gravitacional do objeto no ponto P, devemos formar uma soma vetorial das contribuições das partículas individuais discretas. Cada contribuição tem uma direção diferente. Supondo que m_i seja a massa da partícula na distância r_i de P, isso dá uma expressão como

$$\mathbf{a}_G = -G \frac{m_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 - G \frac{m_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 - \dots \quad (2.11)$$

Dependendo da forma do sólido, esta soma vetorial pode ser bastante complicada.

Uma solução alternativa para o problema é encontrar primeiro o potencial gravitacional, e então diferenciá-lo como na Equação (2.5) para conseguir a aceleração. A expressão para o potencial em P é

$$U_G = -G \frac{m_1}{r_1} - G \frac{m_2}{r_2} - \dots \quad (2.12)$$

Esta é uma soma escalar, que é usualmente mais simples do que calcular uma soma vetorial. Mais comumente, o objeto não é representado como um conjunto de partículas discretas, mas por uma distribuição de massa contínua. No entanto, podemos subdividir o volume em elementos discretos; se a densidade da matéria em cada volume é conhecida, a massa do elemento pequeno pode ser calculada e sua contribuição para o potencial no ponto externo P pode ser determinada. Ao integrar o volume do corpo, seu potencial gravitacional em P pode ser calculado. Então se considerarmos um ponto no corpo com coordenadas (x, y, z) de densidade igual a $\rho(x, y, z)$ a uma distância P igual a $r(x, y, z)$ como na Figura 2.5.b. O potencial gravitacional do corpo em P é:

$$U_G = -G \iiint \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz \quad (2.13)$$

A integração fornece o potencial gravitacional e a aceleração em pontos dentro e fora de uma esfera sólida oca ou homogênea. Os valores fora de uma esfera na distância r de seu centro são os mesmos como se toda a massa E da esfera estivesse concentrada em seu centro (Figura 2.4.b):

$$U_G = -G \frac{E}{r} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{a}_G = -G \frac{E}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.15)$$

O cálculo do potencial é muito mais simples do que o cálculo da aceleração gravitacional, como se mostra no exemplo a seguir adaptado do livro de Halliday and Resnick [1987].

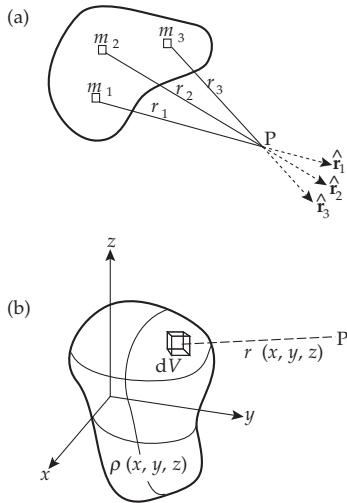


Figura 2.5: (a) Cada pequena partícula de um corpo sólido exerce uma atração gravitacional em uma diferente direção num ponto externo P , (b) Computação do potencial gravitacional de uma distribuição de massa contínua.

Exemplo 2.1 (Aceleração e potencial para uma esfera homogênea). Considere uma casca esférica de densidade constante, cuja espessura t seja pequena em relação ao raio r (Figura 2.6). Desejamos calcular a aceleração gravitacional exercida numa partícula de massa m num ponto P .

Solução:

Tomemos como elemento de massa da camada uma faixa circular de área dS , com comprimento $2\pi(r \sin \theta)$, largura $rd\theta$ e espessura t . Seu volume será dV dado por:

$$dV = 2\pi tr^2 \sin \theta d\theta.$$

Sendo ρ a densidade da casca, sua massa será

$$dM = \rho dV = 2\pi t \rho r^2 \sin \theta d\theta.$$

Devido à simetria do problema, vemos que a aceleração exercida por dM , num ponto A sobre a partícula de massa m localizada em P é horizontal tendo o valor igual

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_G &= -G \frac{dM}{x^2} \cos \alpha \hat{\mathbf{R}} \\ &= -2\pi G t \rho r^2 \frac{\sin \theta d\theta}{x^2} \cos \alpha \hat{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

em que $\hat{\mathbf{R}}$ é um vetor unitário na direção da linha que une o centro da esfera M com o ponto P .

As variáveis x , α e θ estão relacionadas. A figura mostra que

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x}$$

e, como, pela lei dos cossenos

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

tem-se

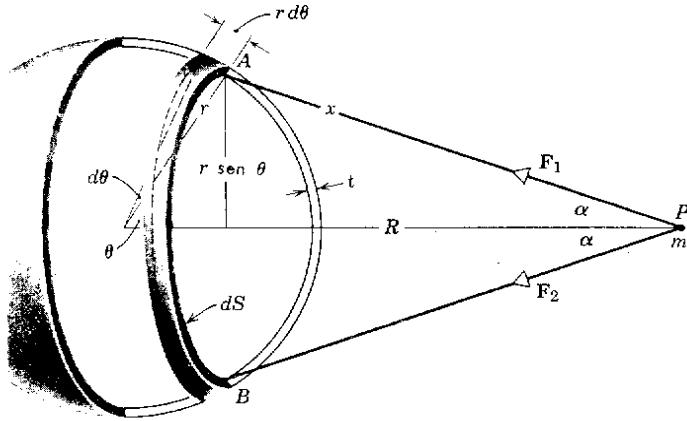


Figura 2.6: Atração gravitacional da seção dS de uma casca esférica sobre uma partícula m .

$$r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}$$

Assim, diferenciando a equação $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$, temos $2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta$, ou seja

$$\sin \theta d\theta = \frac{x}{Rr} dx$$

Eliminando θ e α das equações obtemos

$$d\mathbf{a}_G = -\frac{\pi G t \rho r}{R^2} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) \hat{\mathbf{R}}$$

que é aceleração exercida pela faixa circular dS sobre a partícula m . Deve-se agora considerar cada elemento de massa da casca e somar todas as faixas circulares da casca: então temos uma integração sobre a casca em relação a x , cujos os valores vão do mínimo $R - r$ ao máximo $R + r$.

Tendo em conta que

$$\int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 4r$$

obtém-se a aceleração resultante

$$\mathbf{a}_G = - \int_{R-r}^{R+r} d\mathbf{a}_G = G \frac{(4\pi r^2 \rho t)}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

Como a massa da esfera é dada por $M = \rho V$, onde V é o volume da esfera que é igual ao produto da área de sua superfície $4\pi r^2$ pela sua espessura t , temos que $V = 4\pi r^2 t$. Assim, a aceleração gravitacional é dada como:

$$\mathbf{a}_G = -G \frac{M}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

Por outro lado, podemos obter o mesmo valor a partir do cálculo do potencial gravitacional, uma vez que $\mathbf{a}_G = -\nabla U_G$. Para fazer isso, conforme (Fowler [1990]), vimos que o volume circular da casca da Figura 2.6 é dada por

$$\rho t (2\pi r^2 \sin \theta) (d\theta).$$

Devido cada ponto de uma faixa da casca circular ter a mesma distância x do ponto P , a Equação (2.10) determina o potencial em P feito por essa faixa como

$$-\frac{\rho t 2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{x}$$

Novamente, aplicando a lei dos cosenos temos que $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$. O potencial em toda esfera pode ser avaliado a partir da Equação (2.13) integrando o potencial da casca em todo o volume

$$U_G = -G\rho t 2\pi r^2 \int_V \frac{\sin \theta d\theta}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^{1/2}} dV$$

Diferenciando implicitamente a expressão $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$ em relação a x e θ , obtemos $xdx = Rr \sin \theta d\theta$, assim teremos

$$U_G = -G\rho t 2\pi r^2 \int_V \frac{dx}{Rr} dV$$

Para calcular a integral é necessário considerar duas situações: (i) quando P estiver fora da esfera ($R > r$) e (ii), quando P está dentro da esfera ($R < r$). Quando o ponto P é externo os limites de integração são $R - r$ e $R + r$ e o potencial em P é

$$U_G = -G\rho t 2\pi r^2 \left[\frac{x}{Rr} \right]_{R-r}^{R+r} = -G \frac{\rho 4\pi r^2}{R} = -G \frac{M}{R}.$$

A aceleração gravitacional é dada por:

$$\mathbf{a}_G = -\frac{\partial U_G}{\partial R} = -G \frac{M}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

Quando o ponto P está dentro da esfera, os limites de integração são $r - R$ e $r + R$, neste caso o potencial é

$$U_G = -G\rho t 2\pi r^2 \left[\frac{x}{Rr} \right]_{r-R}^{r+R} = -G\rho 4\pi r$$

que é constante e independe da posição P dentro da esfera. A aceleração gravitacional, sendo o negativo do gradiente do potencial, é desta forma nula dentro da esfera.

2.3.1.5 Massa e densidade média da Terra

As equações (2.14) e (2.15) são válidas em todos os lugares fora de uma esfera, incluindo em sua superfície onde a distância do centro de massa é igual à média do raio R (Figura 2.4.c). Se considerarmos a Terra como uma primeira aproximação de uma esfera com massa E e raio R , podemos estimar sua massa reescrevendo a Equação (2.15) como uma equação escalar na forma

$$E = \frac{R^2 a_G}{G} \tag{2.16}$$

A aceleração gravitacional na superfície da Terra é apenas ligeiramente diferente da gravidade média, cerca de $9,81 \text{ ms}^{-2}$, o raio da Terra é 6371 km, e a constante gravitacional é $6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. A massa da Terra será $5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$. Este grande número não é tão significativo quanto sua densidade média, que pode ser calculada dividindo a massa da Terra pelo seu volume ($\frac{4}{3}\pi R^3$). A densidade média de 5515 kg m^{-3} , que é aproximadamente o dobro da densidade das rochas crustais. Isso indica que o interior da Terra não é homogêneo e implica que a densidade deve aumentar com a profundidade na Terra.

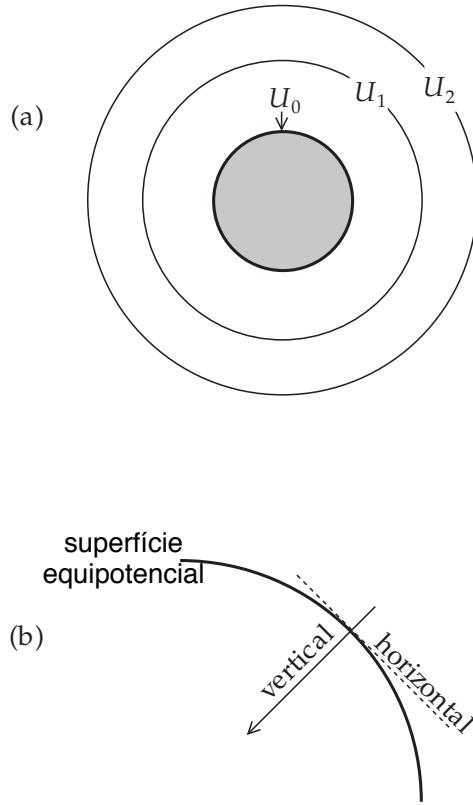


Figura 2.7: (a) Superfícies equipotenciais de uma massa de forma esférica forma um conjunto de esferas concêntricas, (b) A normal da superfície equipotencial define a direção vertical; o plano tangente define a horizontal.

2.4 Superfícies equipotenciais

Uma superfície equipotencial é aquela em que o potencial é constante. Para uma esfera com determinada massa, o potencial gravitacional (Equação (2.15)) varia apenas com a distância r de seu centro. Um certo valor do potencial, digamos U_1 , é realizado a uma distância radial constante r_1 . Assim, a superfície equipotencial na qual o potencial tem o valor U_1 é uma esfera com raio r_1 ; uma superfície equipotencial diferente U_2 é a esfera com raio r_2 . As superfícies equipotenciais da massa esférica original formam um conjunto de esferas concêntricas (Figura 2.7.a), uma das quais (por exemplo, U_0) coincide com a superfície da massa esférica. Esta superfície equipotencial particular descreve a figura da massa esférica.

Por definição, nenhuma mudança no potencial ocorre (e nenhum trabalho é feito) em mover de um ponto para outro em uma superfície equipotencial. O trabalho feito por uma força F em um deslocamento dr é $Fdr \cos \theta$ que é zero quando $\cos \theta$ é zero, isto é, quando o ângulo θ entre o deslocamento e a força é 90° . Se nenhum trabalho é feito em um movimento ao longo de uma superfície equipotencial gravitacional, a força e aceleração do campo gravitacional devem agir perpendicular à superfície. Esta normal à superfície equipotencial define a direção *vertical* ou da linha de prumo (Figura 2.7.b). O plano tangencial à superfície equipotencial em um ponto define a *horizontal* nesse ponto.

2.5 A figura da Terra e a gravidade

2.5.1 A figura da Terra

A verdadeira superfície da Terra é desigual e irregular, parcialmente terra e parcialmente água. Para fins geofísicos, a forma da Terra é representada por uma superfície lisa e fechada, chamada de figura da Terra. Os primeiros conceitos da figura eram governados por religião, superstição e crenças não científicas. A primeira circunavegação da Terra, concluída em 1522 pela equipe de Magalhães, estabeleceu que a Terra era provavelmente redonda. Antes da era do despertar científico, acreditava-se que a forma da Terra fosse uma esfera. Como confirmado por numerosas fotografias de naves espaciais, esta é de fato uma excelente primeira aproximação à forma da Terra que é adequada para resolver muitos problemas. A sugestão original de que a Terra é um esferoide achatado nos polos é creditada a Newton, que usou um argumento hidrostático para explicar o achatamento polar. A forma ligeiramente achatada permitiu uma explicação de porque um relógio de pêndulo que era preciso em Paris atrasou perto do equador.

A forma e a gravidade da Terra estão intimamente associadas. A figura da Terra é a forma de uma superfície de gravidade equipotencial, em particular aquela que coincide com o nível médio do mar. A melhor aproximação matemática da figura é um elipsoide oblato, ou esferoide (Figura 2.8). A determinação precisa das dimensões da Terra (por exemplo, seus raios polar e equatorial) é o principal objetivo da ciência da geodésia. Ela requer um conhecimento exato do campo gravitacional da Terra, cuja descrição é o objetivo da gravimetria.

Tabela 2.1: Alguns parâmetros fundamentais relevantes para a forma, rotação e órbita da Terra.

Parâmetros	Símbolo	Valores	Unidades
<i>Parâmetros Terrestre (2004)</i>			
Constante gravitacional	G	6.673×10^{-11}	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Constante gavitacional geocêntrica	GE	3.9860044×10^{14}	m^3s^{-2}
Massa da Terra: $E = (GE)/G$	E	5.9737×10^{24}	kg
Raio equatorial da Terra	a	6378.137	km
Raio polar da Terra: $c = a(1 - f)$	c	6356.752	km
Raio de esfera equivalente: $R_0 = (a^2 c)^{1/3}$	R_0	6371.000	km
Gravidade equatorial média	g_e	9.7803278	ms^{-2}
Velocidade angular média de rotação	Ω	7.292115×10^{-5}	rad s^{-1}
Fator de forma dinâmico	J_2	1.0826359×10^{-3}	
Achatamento	f	1 : 298.252	
Razão de aceleração equatorial	m	1 : 288.901	
Elipticidade dinâmica	H	1 : 305.457	
<i>Parâmetros Orbitais (2003)</i>			
Unidade astronômica	AU	149 597 870.691	km
Razão de massa solar	μ_S	332 946.0	
Razão de massa lunar	μ_L	0.012300038	
Obliquidade da eclíptica	ε_0	$23^\circ 26' 21.4''$	
Obliquidade da órbita lunar para eclíptica		$5^\circ 0.9'$	
Excentricidade da órbita solar do baricentro		0.01671	
Excentricidade da órbita lunar		0.05490	

Análises modernas da forma da Terra são baseadas em observações precisas das órbitas dos satélites artificiais. Esses dados são usados para definir um elipsoide oblato de melhor ajuste, chamado de Elipsóide de referência internacional. Em 1930, geodesistas e geofísicos definiram um elipsoide ótimo de referência com base nos melhores dados disponíveis naquele momento. As dimensões dessa figura foram subsequentemente refinadas à medida que dados mais precisos se tornaram disponíveis. Em 1980 a Associação Internacional de Geodésia adotou um Sistema de Referência Geodésico (GRS80) no qual o elipsoide de referência tem um raio equatorial

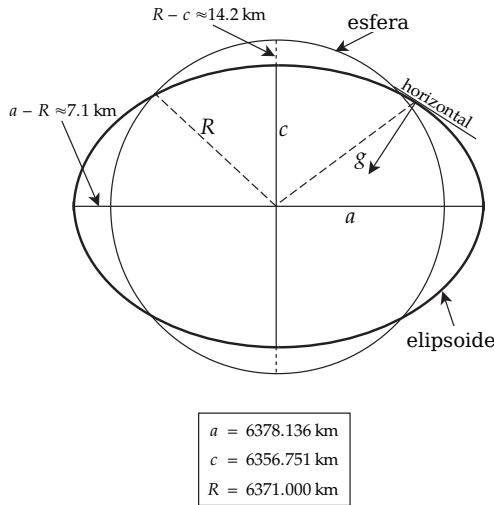


Figura 2.8: Comparação das dimensões do Elipsoide de referência internacional com uma esfera de igual volume.

(a) igual a 6378.137 km e um raio polar (c) igual a 6356.752 km. As determinações subsequentes resultaram apenas em pequenas diferenças nos parâmetros geodésicos mais importantes. Alguns valores atuais estão listados na Tabela 2.1 apresentada no livro de Lowrie [2007]. O raio da esfera equivalente (R) é encontrado da fórmula $R = (a^2 c)^{1/3}$ sendo igual a 6371.000 km. Em comparação com a esfera mais adequada, o esferóide é achataido em cerca de 14,2 km em cada polo e o equador incha em cerca de 7,1 km. O achatamento polar f é definido como a razão

$$f = \frac{a - c}{a} \quad (2.17)$$

O achatamento f do elipsoide de referência ótimo definido em 1930 foi exatamente $1/297$. Este elipsoide e a variação da gravidade em sua superfície, serviu como base para levantamentos gravimétricos por muitos anos, até a era da geodésia por satélite e gravímetros altamente sensíveis mostrou que eram muito inexato. Uma melhor estimativa recente do achatamento é $f = 3.35287 \times 10^{-3}$ (isto é, $f = 1/298.252$).

Se assumirmos que a Terra seja um fluido rotativo em perfeito equilíbrio hidrostático (conforme assumido pela teoria de Newton), o achatamento deveria ser de $1/299.5$, um pouco menor que o valor observado. A condição hidrostática assume que a Terra não tem força interna. Uma possível explicação para a pequena discrepância em f é que a Terra tem força suficiente para manter uma figura não hidrostática, e a figura atual é herdada de um tempo de rotação mais rápida. Alternativamente, a forma ligeiramente mais achatada da Terra pode ser devido a contrastes de densidade interna, o que poderia ser a consequência da lenta convecção no manto da Terra. Isso ocorreria em intervalos de tempo longos e poderia resultar em uma distribuição de massa não hidrostática.

A causa do achatamento polar é o efeito de deformação da aceleração centrífuga. Isso é máximo no equador, onde a aceleração gravitacional é menor. O parâmetro m é definido como a razão entre a aceleração centrífuga equatorial e a aceleração gravitacional equatorial.

$$m = \frac{\omega^2 a}{GE/a^2} = \frac{\omega^2 a^3}{GE}. \quad (2.18)$$

O valor de m baseado nos valores atuais da geodésia (Tabela 2.1) é 3.461×10^{-3} (i.e., $m = 1/288.901$). Como resultado do achatamento, a distribuição de massa dentro da Terra não depende simplesmente do raio. Os momentos de inércia da Terra em torno do eixo de rotação (C) e de qualquer eixo no plano equatorial (A)

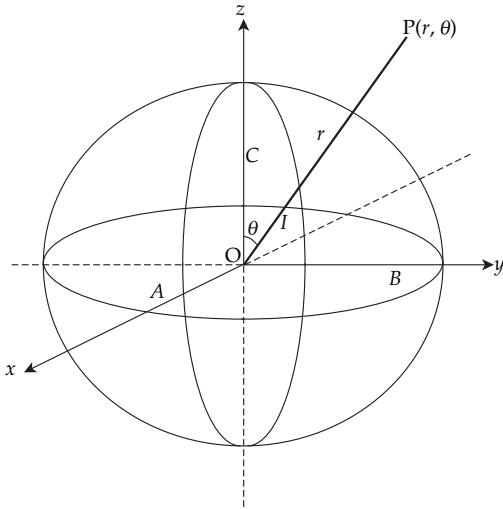


Figura 2.9: Parâmetros do elipsóide usado pela fórmula de MacCullagh. A , B e C são momentos de inércias em torno dos eixos x -, y - e z - respectivamente, e I é o momento de inércia em torno da linha OP .

são desiguais. Conforme observado em Lowrie [2007], a desigualdade afeta o modo como a Terra responde aos torques gravitacionais externos e é um fator determinante nas perturbações da rotação da Terra. Os principais momentos de inércia definem a *elipticidade dinâmica*:

$$H = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C} \approx \frac{C - A}{C} \quad (2.19)$$

A elipticidade dinâmica é obtida a partir de observações precisas das órbitas dos satélites artificiais da Terra. O valor ótimo corrente para H é de 3.2737875×10^{-3} (isto é, $H = 1/305.457$).

2.5.2 Potencial gravitacional de uma Terra esferoidal

A forma elipsoidal muda o potencial gravitacional da Terra de uma esfera não deformada. Em 1849, J. MacCullagh desenvolveu a seguinte fórmula para o potencial gravitacional de qualquer corpo a grande distância de seu centro de massa:

$$U_G = -G \frac{E}{r} - G \frac{(A + B + C - 3I)}{2r^3} - \dots \quad (2.20)$$

O primeiro termo, de ordem r^{-1} , é o potencial gravitacional de um ponto de massa ou esfera com massa E (Equações (2.10) e (2.14)); para a Terra ela descreve o potencial do globo não deformado. Se os eixos de referência estão centrados no centro de massa do corpo, não há termo em r^{-2} . O segundo termo, da ordem r^{-3} , é devido aos desvios da forma esférica. Para a Terra aplaudida ela é resultante dos deslocamentos de massa devido à deformação rotacional. Os parâmetros A , B e C são os principais momentos de inércia do corpo e I é o momento de inércia em torno da linha OP que une o centro de massa ao ponto de observação (Figura 2.9). Para expressar o potencial com precisão, é necessário um número infinito de termos de ordem superior em r . No caso da Terra, estes podem ser negligenciados, porque o próximo termo é cerca de 1000 vezes menor que o segundo termo.

Para um corpo com planos de simetria, I é uma simples combinação dos principais momentos de inércia. Configurando A igual a B para simetria rotacional, e definindo o ângulo entre OP e o eixo de rotação sendo θ , a expressão para I é

$$I = A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \quad (2.21)$$

A fórmula de MacCullagh para a Terra elipsoidal então torna-se

$$U_G = -G \frac{E}{r} + G \frac{(C-A)(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} \quad (2.22)$$

A função $(3\cos^2\theta - 1)/2$ é um polinômio de segunda ordem em $\cos\theta$, e escrevemos como $P_2(\cos\theta)$. Ele pertence a uma família de funções chamadas de polinômios de Legendre. Usando esta notação a fórmula de MacCullagh para o potencial gravitacional do elipsoide oblato torna-se

$$U_G = -G \frac{E}{r} + G \frac{(C-A)}{r^3} P_2(\cos\theta) \quad (2.23)$$

Esta pode ser escrita na forma alternativa

$$U_G = -G \frac{E}{r} \left(1 - \left(\frac{C-A}{ER^2} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\cos\theta) \right) \quad (2.24)$$

A Equação (2.24) é uma aproximação para o potencial de um elipsoide. Para uma maior precisão precisamos de uma matemática um pouco mais avançada, é o que veremos a seguir.

A teoria do potencial requer que o potencial gravitacional da Terra esferoidal deva satisfazer uma importante equação, a equação de Laplace: $\nabla^2 U_G$. A solução dessa equação é a soma de um número infinito de termos de ordem crescente em $1/r$, cada um envolvendo um polinômio de Legendre apropriado e ela é dada por:

$$U_G = -G \frac{E}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n J_n P_n(\cos\theta) \right) \quad (2.25)$$

Nesta equação, os coeficientes J_n multiplicando $P_n(\cos\theta)$ determinam a importância relativa do termo de enésima ordem. Os valores de J_n são obtidos a partir da geodésia do satélite: $J_2 = 1082.6 \times 10^{-6}$; $J_3 = -2.54 \times 10^{-6}$; $J_4 = -1.59 \times 10^{-6}$; ordens mais altas são insignificantes. O coeficiente mais importante é o de segunda ordem, o fator forma dinâmica J_2 , que descreve o efeito do achatamento polar no potencial gravitacional da Terra. Uma comparação dos termos das Equações. (2.24) e (2.25) dá o resultado

$$J_2 = \frac{C-A}{ER^2} \quad (2.26)$$

O termo de próxima ordem superior ($n = 3$) na Equação (2.25) descreve os desvios do elipsoide de referência que correspondem a uma Terra em forma de pera (Figura 2.10). Estes desvios são da ordem de 7 – 17 m, mil vezes menores que os desvios do elipsoide de um esfera, que são da ordem de 7 – 14 km.

2.5.3 O potencial centrífugo

A aceleração centrífuga é o gradiente do potencial centrífugo U_c ,

$$\mathbf{a}_c = -\nabla U_c$$

Seja x a distância perpendicular do eixo de rotação a um ponto na superfície na latitude θ e seja ω a taxa angular de rotação da Terra (Figura 2.11). A aceleração centrífuga é igual a $\omega^2 x$, portanto, para uma taxa constante de rotação, U_c varia apenas com x . Assim sendo

$$\omega^2 x = -\frac{\partial U_c}{\partial x}$$

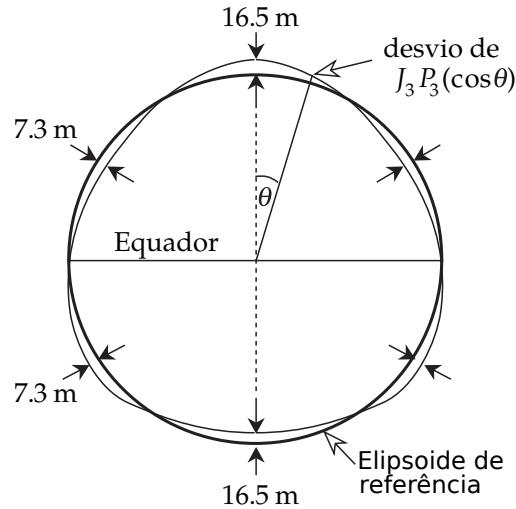


Figura 2.10: O termo de terceira ordem no potencial gravitacional descreve uma Terra em forma de pera. Os desvios do elipsóide de referência são da ordem de 10 a 20 m, muito menores que os desvios do elipsóide de uma esfera, que são da ordem de 4104 a 20 km.

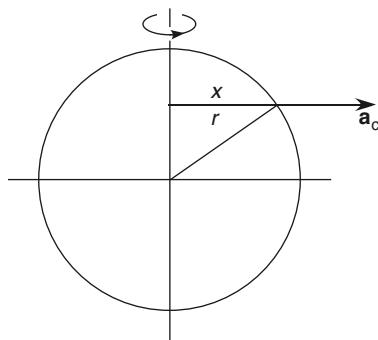


Figura 2.11: Aceleração centrífuga \mathbf{a}_c em co-latitude θ direcionada perpendicularmente para fora do eixo de rotação.

integrando ambos os lados em relação a x teremos

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + U_0$$

O potencial é zero no eixo de rotação, onde $x = 0$ e a constante de integração $U_c = 0$. A equação para o potencial centrífugo em termos de ângulo polar θ é

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

2.5.4 Gravidade e seu potencial

O potencial de gravidade (U_g) é a soma dos potenciais gravitacional e centrífugo. É frequentemente chamado de geopotencial. Em um ponto na superfície do esferóide rotativo, ele pode ser escrito

$$U_g = U_G - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (2.27)$$

Se a superfície livre é uma superfície de gravidade equipotencial, então U_g é constante em toda superfície. A forma da superfície equipotencial é restrita a ser a do esferóide com aplanamento f . Nestas condições, uma relação simples é encontrada entre as constantes f , m e J_2 :

$$J_2 = \frac{1}{3}(2f - m) \quad (2.28)$$

Pelas Equações (2.26) e (2.28) e reordenando os termos obtemos a seguinte relação

$$\frac{C - A}{ER^2} = \frac{1}{3}(2f - m) \quad (2.29)$$

Isso produz informações úteis sobre a variação de densidade dentro da Terra. As quantidades f , m e $(C - A)/C$ são iguais a aproximadamente 1/300. Inserir seus valores na equação fornece $C \approx 0.33ER^2$. Compare este valor com os principais momentos de inércia de um casco esférico oco ($0.66ER^2$) e uma esfera sólida com densidade uniforme ($0.4ER^2$). A concentração de massa perto do centro causa uma redução no fator de multiplicação de 0.66 para 0.4. O valor de 0.33 para a Terra implica que, em comparação com uma esfera sólida uniforme, a densidade deve aumentar em direção ao centro da Terra.

2.5.5 A gravidade normal

A direção da gravidade em um ponto é definida como perpendicular à superfície equipotencial através do ponto. Isso define a *vertical* no ponto, enquanto o plano tangencial à superfície equipotencial define a *horizontal* (Figura 2.8). Uma consequência da forma esferoidal da Terra é que a direção vertical geralmente não é radial, exceto no equador e nos polos.

Em uma Terra esférica, não há ambiguidade na forma como definimos a latitude. É o ângulo no centro da Terra entre o raio e o equador, o complemento ao ângulo polar θ . Isso define a latitude geocêntrica λ' . No entanto, a latitude geográfica em uso comum não é definida dessa maneira. É encontrado pela medição geodésica do ângulo de elevação de uma estrela fixa acima do horizonte. Mas o plano horizontal é tangencial ao elipsoide, não a uma esfera (Figura 2.8), e a direção vertical (isto é, a direção local da gravidade) intercepta o equador em um ângulo λ' que é ligeiramente maior que a latitude geocêntrica λ' (Figura 2.12). A diferença ($\lambda - \lambda'$) é zero no equador e nos polos e atinge um máximo numa latitude de 45° onde é apenas 0.19° (em torno de $12'$)

O *elipsoide de Referência Internacional* é a referência padronizada da figura da Terra. O valor teórico da gravidade no elipsoide rotativo pode ser calculada diferenciando o potencial de gravidade (Equação (2.27)).

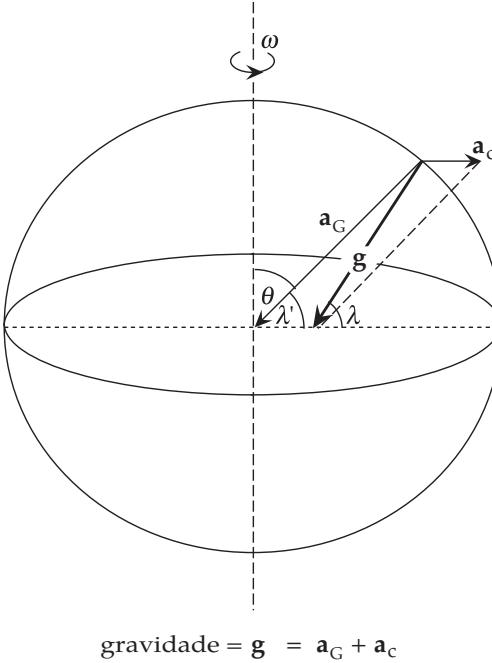


Figura 2.12: A gravidade na terra elipsoidal é a soma vetorial das acelerações gravitacional e centrífuga e não é radial; consequentemente, a latitude geográfica (λ) ligeiramente maior que geocêntrica latitude (λ').

Este produz os componentes radiais e transversais da gravidade, que são então combinados para dar a seguinte fórmula para a gravidade normal ao elipsoide:

$$g_n = g_e (1 + \beta_1 \sin^2 \lambda + \beta_2 \sin^2 2\lambda) \quad (2.30)$$

onde, para a segunda ordem em f e m ,

$$\begin{aligned} g_n &= g_e \left(1 + f - \frac{3}{2}m + f^2 - \frac{27}{14}fm \right) \\ \beta_1 &= \frac{5}{2}m - f + \frac{15}{4}m^2 - \frac{17}{14}fm \\ \beta_2 &= \frac{1}{8}f^2 - \frac{5}{8}fm \end{aligned} \quad (2.31)$$

A Equação (2.30) é conhecida como a fórmula de gravidade normal. As constantes na fórmula, definidas em 1980 para o *Sistema de Referência Geodésico (GRS80)* ainda em uso comum, são: $g_e = 9.780327 \text{ ms}^{-2}$; $\beta_1 = 5.30244 \times 10^{-3}$; $\beta_2 = -5.8 \times 10^{-6}$. Eles permitem o cálculo da gravidade normal em qualquer latitude com uma precisão de 0.1 mgal. Instrumentos modernos podem medir diferenças de gravidade com precisão ainda maior, neste caso uma fórmula mais exata, com precisão de 0.0001 mgal, pode ser usada. A fórmula da gravidade normal é muito importante na análise das medidas de gravidade na Terra, porque fornece a variação teórica da gravidade normal (g_n) com a latitude na superfície do elipsoide de referência.

A gravidade normal é expressa em termos de g_e , o valor da gravidade no equador. Os termos de segunda ordem f^2 , m^2 e fm são cerca de 300 vezes menores que os termos de primeira ordem f e m . A constante β_2 é cerca de 1000 vezes menor que β_1 . Se descartarmos termos de segunda ordem e usarmos $\lambda = 90^\circ$, o valor da gravidade normal no polo é $g_p = g_e(1 + \beta_1)$, então, reorganizando e retendo apenas termos de primeira ordem, obtemos

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{5}{2}m - f \quad (2.32)$$

Essa expressão é chamada de teorema de Clairaut. Ela foi desenvolvida em 1743 por um matemático francês, Alexis-Claude Clairaut, que foi o primeiro a relacionar a variação da gravidade na Terra em rotação com o achatamento do esferoide. A fórmula de gravidade normal dá $g_p = 9.832186 \text{ ms}^{-2}$. Numericamente, isso dá um aumento na gravidade do equador ao polo de aproximadamente $5.186 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ ou 518 mgal. 10.2 m s^2 ou 5186 mgal.

Há duas razões óbvias para o aumento da gravidade no polo. A distância ao centro de massa da Terra é menor nos polos do que no equador. Isto dá uma aceleração gravitacional mais forte (a_G) nos polos. A diferença é

$$\Delta a_G = \left(\frac{GE}{c^2} - \frac{GE}{a^2} \right) \quad (2.33)$$

Isto dá um excesso de gravidade de aproximadamente 6600 mgal nos polos. O efeito da força centrífuga na gravidade decrescente é maior no equador, onde é igual a (maG) e é zero nos polos. Isso também resulta em um aumento da gravidade em direção ao polo, chegando a 3375 mgal. Estas figuras indicam que a gravidade deve aumentar em um total de 9975 mgal do equador ao polo, em vez da diferença observada de 5186 mgal. A discrepância pode ser resolvida levando-se em conta um terceiro fator. O cálculo da diferença na atração gravitacional não é tão simples como indicado pela Equação (2.33). O bojo equatorial coloca um excesso de massa sob o equador, aumentando a atração gravitacional equatorial e reduzindo a diminuição da gravidade do equador para o polo.

2.5.6 O geoide

O elipsoide de referência internacional é uma aproximação da superfície equipotencial da gravidade, mas é realmente uma conveniência matemática. A superfície física equipotencial da gravidade é chamada de geoide. Ele reflete a verdadeira distribuição de massa dentro da Terra e difere do elipsoide teórico por pequenas quantidades. Longe da Terra o geoide concorda com a superfície livre do oceano, excluindo os efeitos perturbadores temporários das marés e ventos. Nos continentes, o geoide é afetado pela massa de terra acima do nível médio do mar (Figura 2.13a). A massa dentro do elipsoide causa uma atração gravitacional descendente em direção ao centro da Terra, mas uma colina ou montanha cujo centro de gravidade está fora do elipsoide causa uma atração ascendente. Isso causa uma elevação local do geoide acima do elipsoide. O deslocamento entre o geoide e o elipsoide é chamado de ondulação geoidal; a elevação causada pela massa acima do elipsoide é uma ondulação positiva.

2.5.6.1 Ondulações do geoide

Ao computar a figura teórica da Terra, a distribuição de massa abaixo do elipsoide é assumido como homogêneo. Um excesso local de massa sob o elipsoide irá desviar e fortalecer a gravidade localmente. O potencial do elipsoide é alcançado mais longe do centro da Terra. A superfície equipotencial é forçada a se inclinar para cima enquanto permanece normal à gravidade. Isto dá uma ondulação geoidal positiva sobre um excesso de massa sob o elipsoide (Figura 2.13b). Por outro lado, um déficit de massa abaixo do elipsoide irá desviar o geoide abaixo do elipsoide, causando uma ondulação geoidal negativa. Como resultado da topografia irregular e da distribuição de massa interna heterogênea da Terra, o geoide é uma superfície equipotencial accidentada.

O potencial do geoide é representado matematicamente por **funções harmônicas esféricas** que envolvem os **polinômios associados de Legendre**. Estes são mais complicados que os polinômios comuns de Legendre usados para descrever o potencial gravitacional do elipsoide (Equações. (2.23) - (2.25)). Até agora só consideramos variação do potencial com distância r e com o ângulo de colatitude θ . Isso é uma simplificação excessiva, porque as variações de densidade dentro da Terra não são simétricas em relação ao eixo de rotação. O geoide é uma superfície equipotencial para a distribuição da densidade real na Terra,

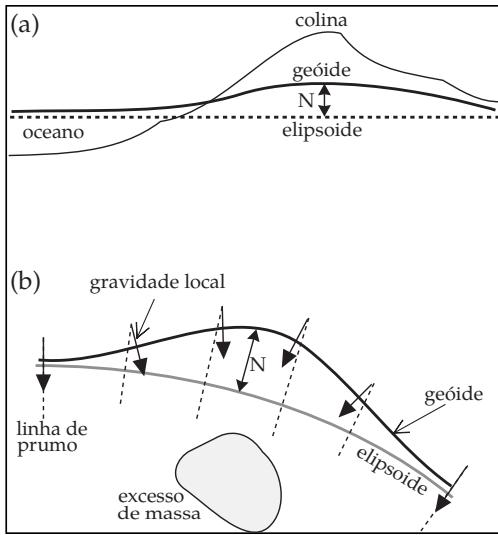


Figura 2.13: (a) Uma massa fora do elipsoide ou (b) um excesso de massa abaixo do elipsoide eleva o geoide acima do elipsoide. N é a ondulação do geoide.

e assim o potencial do geoide varia com a longitude e com a co-latitude. Essas variações são consideradas expressando o potencial como soma das funções harmônicas esféricas, conforme descrito. Esta representação do geopotencial é análoga à expressão mais simples do potencial gravitacional da Terra rotacionalmente simétrica usando uma série de polinômios de Legendre (Equação (2.25)).

Em análises modernas, o coeficiente de cada termo no geopotencial - semelhante aos coeficientes J_n na Equação (2.25) - pode ser calculado até um alto grau harmônico. Os termos até um grau selecionado são então usados para calcular um modelo do geoide e do campo de gravidade da Terra. Uma combinação de dados de satélite e medidas de gravidade da superfície foi usada para construir o Modelo da Terra Goddard - Goddard Earth Model (GEM)10. Uma comparação global entre um elipsoide de referência com o aplanamento 1/298.257 e a superfície geoide calculada a partir do modelo GEM 10 mostra ondulações geoidais de longo comprimento de onda (Figura 2.14). A maior ondulação negativa (-105 m) está no Oceano Índico, ao sul da Índia, e a maior ondulação positiva ($+73\text{ m}$) está no Oceano Pacífico equatorial, ao norte da Austrália. Essas características de grande escala são muito amplas para serem atribuídas a anomalias de massa crostais ou litosféricas. Eles são pensados serem devido a heterogeneidades que se estendem profundamente no manto inferior, mas sua origem ainda não é compreendida.

2.6 Anomalias gravitacionais

2.6.1 introdução

O valor médio da gravidade na superfície da Terra é de aproximadamente 9.80 ms^{-2} ou 980000 mgal . A rotação e o achatamento da Terra fazem com que a gravidade aumente em aproximadamente 5300 mgal , do equador ao polo, o que é uma variação de apenas cerca de 0.5%. Assim, as medidas de gravidade são de dois tipos. A primeira corresponde à determinação da magnitude absoluta da gravidade em qualquer lugar; e a segunda consiste em medir a mudança na gravidade de um lugar para outro. Em estudos geofísicos, especialmente na prospecção por gravidade, é necessário medir com precisão as variações na gravidade causadas por estruturas subterrâneas. Estes requerem uma sensibilidade instrumental da ordem de 0.01 mgal . É muito difícil projetar um instrumento para medir o valor absoluto da gravidade que tem essa alta precisão e que também é portátil e suficiente para ser usado facilmente em diferentes lugares. O levantamento de gravidade é geralmente realizado com um instrumento portátil chamado gravímetro, que determina a variação da gravidade em relação a um ou mais locais de referência. Em levantamentos de gravidade, as variações relativas determinadas com um gravímetro podem ser convertidas em valores absolutos por calibração com

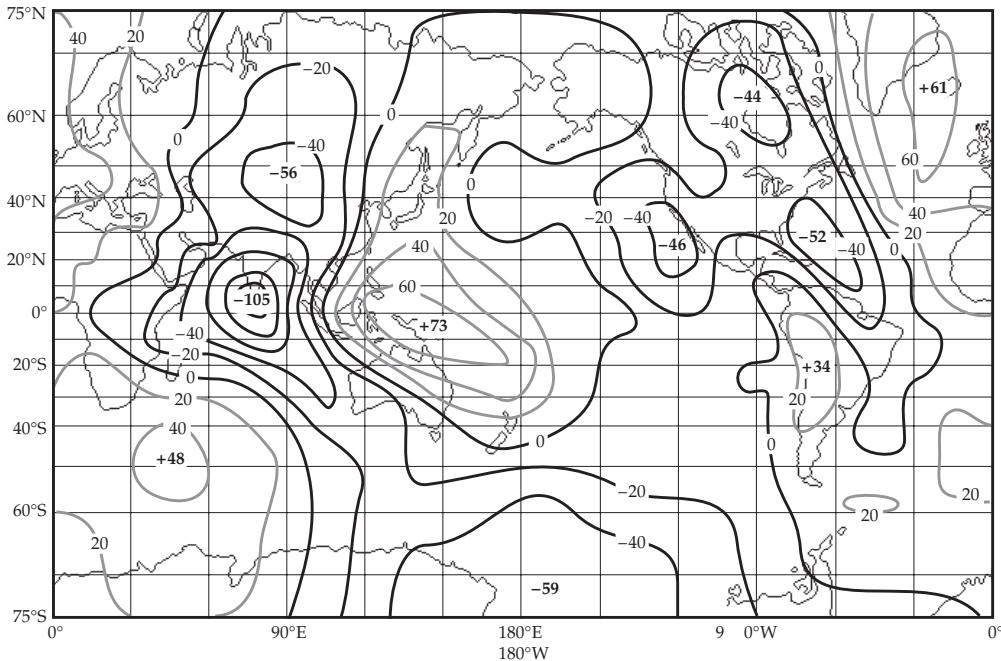


Figura 2.14: Mapa mundi das ondulações geoidais relativas a um elipsoide de referência de aplanaamento $f = 1/298.257$.

medidas absolutas feitas em estações selecionadas.

2.6.2 Medida absoluta da gravidade

O método clássico de medir a gravidade é com um pêndulo. Um pêndulo simples consiste em um peso suspenso no fim de uma fina fibra. O pêndulo composto (ou reversível), descrito pela primeira vez por Henry Kater em 1818, permite medições mais exatas. Consiste numa haste de metal duro ou de quartzo, com cerca de 50 cm de comprimento, à qual está ligada uma massa móvel. Perto de cada extremidade da haste é fixado um pivô, que consiste em uma ponta de faca de quartzo apoiada em um plano de quartzo plano. O período do pêndulo é medido por oscilações sobre um dos pivôs. O pêndulo é então invertido e seu período em torno do outro pivô é determinado. A posição da massa móvel é ajustada até os períodos próximos dos dois pivôs serem iguais. A distância L entre os pivôs é então medida com precisão. O período do instrumento é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.34)$$

onde I é o momento de inércia do pêndulo em torno de um pivô, h é a distância do centro de massa do pivô, e m é a massa do pêndulo. Conhecer o comprimento L do método de Kater evita o conhecimento de I , m e h .

A sensibilidade do pêndulo composto é encontrada diferenciando a (Equação (2.34)). Isto dá

$$\frac{\Delta g}{g} = -2 \frac{\Delta T}{T} \quad (2.35)$$

Para obter uma sensibilidade de cerca de 1 mgal é necessário determinar o período com uma precisão de cerca de 0.5 s. Isto pode ser conseguido facilmente hoje com relógios atômicos precisos. O pêndulo composto foi o principal instrumento para a prospecção da gravidade nos anos de 1930, quando o tempo das oscilações

era precisamente mais difícil. Era necessário marcar com a maior precisão possível um número muito grande de oscilações. Como resultado, uma única medição de gravidade demorava cerca de meia hora.

O desempenho do instrumento foi prejudicado por vários fatores. A reação inercial do invólucro à massa oscilante do pêndulo foi compensada pela montagem de dois pêndulos no mesmo chassi e balançando-os em fase oposta. A resistência do ar foi reduzida

alojando a montagem do pêndulo em uma câmara a vácuo controlada termostaticamente. A fricção no pivô era minimizado pelo fio de faca de quartzo e plano, mas devido ao desnível menor, a borda de contato não foi exatamente repetida se o conjunto foi montado em um local diferente, que afetou a confiabilidade das medições. o aparelho era volumoso, mas foi usado até a década de 1950 como o método principal de fazer medições de gravidade absoluta.

2.6.3 Medidas relativas da gravidade: o gravímetro

Em princípio, um medidor de gravidade ou gravímetro é um balança de equilíbrio muito sensível. Os primeiros gravímetros foram baseados na aplicação direta da lei de Hooke. Uma massa m suspensa por uma mola de comprimento s_0 faz com que ela se estique até um novo comprimento s . A extensão, ou mudança de comprimento, da mola é proporcional à força restauradora da mola e, portanto, ao valor da gravidade, de acordo com:

$$F = mg = -k(s - s_0). \quad (2.36)$$

onde k é a constante elástica da mola. O gravímetro é calibrado em um local conhecido. Se a gravidade é diferente em outro local, a extensão das molas variam e a partir disso, a mudança na gravidade pode ser calculada.

Este tipo de gravímetro, baseado diretamente na lei de Hooke, é chamado de tipo estável. Ele foi substituído por tipos instáveis ou astatizados, que são construídos de maneira que uma força adicional atua na mesma direção que a gravidade e se opõe à força restauradora da mola. o instrumento está então em um estado de equilíbrio instável. este condição é realizada através do projeto da mola. E se o comprimento natural s_0 pode ser tão menor quanto possível, idealmente zero, Equação (2.36) mostra que a força restauradora é então proporcional ao comprimento físico da mola em vez de sua extensão. A *mola de comprimento zero*, primeiro introduzida no gravímetro LaCoste-Romberg, é agora um elemento comum em gravímetros modernos. A mola é geralmente do tipo helicoidal. Quando uma mola helicoidal é esticada, a fibra da mola é torcida; a torção total ao longo do comprimento da fibra é igual à extensão da mola como um todo. Durante a fabricação de uma mola helicoidal de comprimento zero é dado uma torção extra, de modo que a sua tendência é desenrolar. Um aumento na gravidade estica a mola contra sua força restauradora, e a extensão é aumentada pela pré-tensão interna.

A operação de um gravímetro é ilustrada na Figura 2.15. Uma massa é suportada por uma barra horizontal na qual um espelho é anexado. A posição da haste é observada com um feixe de luz refletido em um microscópio. Se a gravidade mudar, a mola de comprimento zero é prolongada ou encurtada e a posição da haste é alterada, o que desvia o raio de luz. O princípio de deflexão nula é utilizado. Um parafuso de ajuste altera a posição da fixação superior da mola, o que altera sua tensão e restaura a haste para sua posição horizontal original, conforme detectado pelo raio de luz e pelo microscópio. As voltas do parafuso de ajuste são calibradas em unidades da mudança de gravidade, geralmente em mgal.

O gravímetro é leve, robusto e portátil. Após o nivelamento inicial do instrumento, uma medição precisa de uma diferença de gravidade pode ser feita em poucos minutos. o o gravímetro tem uma sensibilidade de cerca de 0.01 mgal ($10 \mu\text{gal}$). Essa alta sensibilidade faz com que seja suscetível a pequenas alterações em suas próprias propriedades.

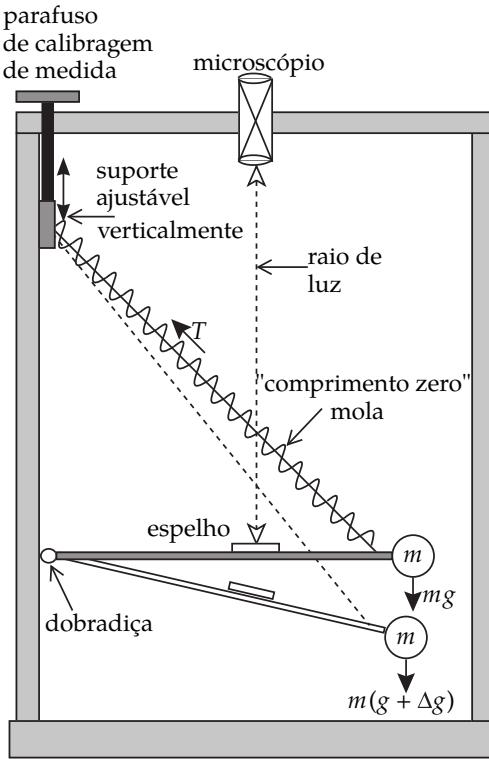


Figura 2.15: Princípio de operação de um gravímetro do tipo instável (astatizado)

2.6.4 Levantamentos gravimétricos

Se um gravímetro for montado em um determinado local e monitorado por cerca de uma hora, as leituras repetidas variam suavemente com o tempo. As alterações somam vários centésimos de mgal. O *desvio instrumental* é parcialmente devida a mudanças induzidas termicamente nas propriedades elásticas da mola gravimétrica, que são minimizadas ao alojar os elementos críticos em uma câmara evacuada. Além disso, as propriedades elásticas da mola não são perfeitas, mas fluem lentamente com o tempo. O efeito é pequeno nos gravímetros modernos e pode ser compensado fazendo uma *correção de desvio (drift correction)*. Isto é obtido pela ocupação repetida de algumas estações de medição em intervalos durante o dia Figura 2.16

Leituras de gravidade em outras estações são ajustadas por comparação com a curva de desvio. Para fazer esta correção, o tempo de cada medição deve ser anotado.

Durante o dia, enquanto as medições estão sendo feitas, o gravímetro está sujeito à atração de maré, incluindo o deslocamento vertical devido às marés orgânicas da Terra. A teoria das marés é bem conhecida e seu efeito dependente do tempo na gravidade pode ser calculado precisamente para qualquer lugar na Terra a qualquer momento. Novamente, a *correção das marés* requer que o tempo de cada medição seja conhecido.

O objetivo do levantamento por gravidade é localizar e descrever estruturas subsuperficiais a partir dos efeitos de gravidade causados por suas densidades anômalas. Mais comumente, as medições gravimétricas são feitas em uma rede de estações, espaçadas de acordo com a finalidade da pesquisa. Em estudos ambientais, uma investigação detalhada de alta resolução da expressão gravitacional de uma pequena área requer pequenas distâncias de alguns metros entre as estações de medição. Em levantamentos de gravidade regional, usados para a definição de estruturas ocultas de interesse comercial prospectivo, a distância entre as estações pode ser de vários quilômetros. Se a área pesquisada não for muito grande, um local adequado é selecionado como estação base (ou local de referência), e as diferenças de gravidade entre os locais pesquisados e este site são medidas. Em um levantamento de gravidade em escala nacional, as diferenças de gravidade podem ser determinadas em relação a um local onde o valor absoluto da gravidade é conhecido.

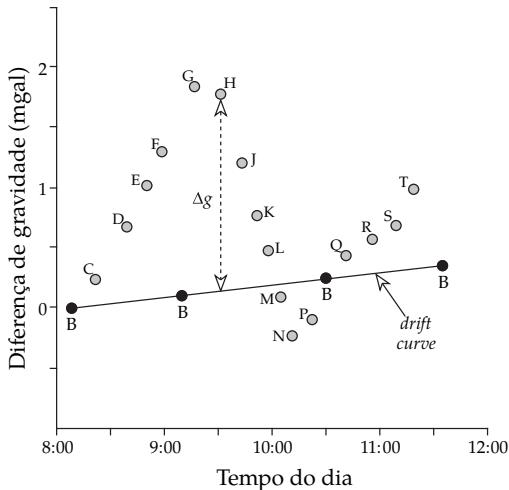


Figura 2.16: Compensação de leituras de gravidade para desvio instrumental. As estações de gravidade B T são ocupadas em sequência em tempos conhecidos. As medições repetidas na estação base B permitem que uma correção de desvio seja feita nas leituras de gravidade nas outras estações.

2.6.5 Correções de medidas gravimétricas

Se o interior da Terra fosse uniforme, o valor da gravidade no elipsoide de referência internacional variaria com a latitude de acordo com a fórmula da gravidade normal (Equação (2.30)). Isso nos fornece um valor de referência para medições de gravidade. Na prática, não é possível medir a gravidade no elipsoide no local onde o valor de referência é conhecido. A elevação de uma estação de medição pode estar a centenas de metros acima ou abaixo do elipsoide. Além disso, a estação de gravidade pode ser cercada por montanhas e vales que perturbam a medição. Por exemplo, se P e Q representam estações de gravidade em diferentes altitudes em terrenos acidentados (Figura 2.17a). O valor teórico da gravidade é calculado nos pontos R no elipsoide de referência abaixo de P e Q. Assim, devemos corrigir a gravidade medida antes que ela possa ser comparada com o valor de referência.

O topo do morro adjacente às estações P e Q tem um centro de massa que fica mais alto do que a elevação da medição (Figura 2.17a). O gravímetro mede a gravidade na direção vertical, ao longo da linha de prumo local. A massa do topo da colina acima de P atrai o gravímetro e causa uma aceleração com um componente vertical para cima em P. A gravidade medida é reduzida pela presença do topo da colina; Para compensar isso, uma correção de terreno (ou topográfica) é calculada e adicionada à gravidade medida. Um efeito semelhante é observado em Q, mas o topo da colina acima de Q é menor e a correção de terreno correspondente é menor. Essas correções efetivamente nivelam a topografia para a mesma elevação da estação gravimétrica. A presença de um vale ao lado de cada estação de medição também requer uma correção do terreno. Neste caso, imaginemos que poderíamos encher o vale até o nível de cada estação com rochas da mesma densidade que está abaixo de P e Q. A atração para baixo no gravímetro seria aumentada, então a correção do terreno para um vale também deve ser adicionado à gravidade medida, tal como para uma colina. Remover os efeitos da topografia em torno de uma estação de gravidade requer a realização de correções de terreno positivas (Δg_T) para as colinas e vales.

Depois de nivelar a topografia, há agora uma camada fictícia uniforme de rocha com densidade ρ entre a estação de gravidade e o elipsoide de referência (Figura 2.17b). A aceleração gravitacional dessa massa rochosa está incluída na medida da gravidade e deve ser removido antes que possamos comparar com a gravidade teórica. A camada é considerada como sendo um disco plano ou placa de espessura h_P ou h_Q em cada estação; é chamado o *placa Bouguer*. Sua aceleração gravitacional pode ser calculada para espessura e densidade conhecidas ρ , e fornece uma *correção de placa Bouguer* (Δg_{BP}) que deve ser subtraída da gravidade medida, se a estação de gravidade estiver acima do nível do mar. Note que, se a estação de gravidade estiver abaixo do nível do mar, nós temos que preencher o espaço acima dela até o nível do mar com a rocha de

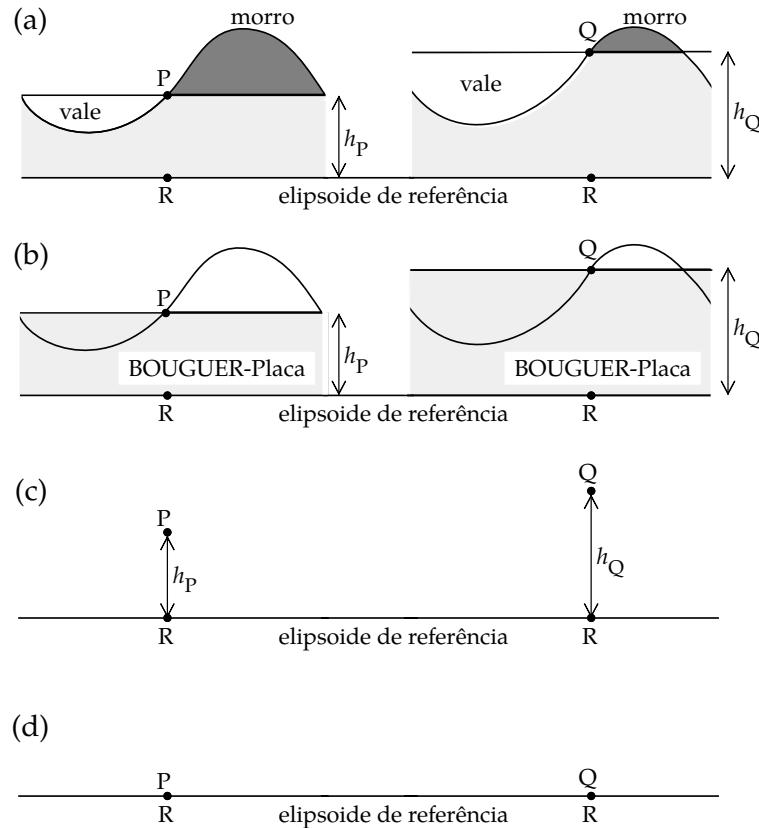


Figura 2.17: Após (a) correções do terreno, (b) correção da placa Bouguer, e (c) correção do ar livre, as medidas de gravidade nas estações P e Q podem ser comparadas com (d) a gravidade teórica em R no elipsoide de referência.

densidade ρ ; isso requer aumentar a gravidade medida correspondente. A correção da placa de Bouguer (Δg_{BP}) é negativa se a estação estiver acima do nível do mar, mas positiva se estiver abaixo do nível do mar. Seu tamanho depende da densidade das rochas locais, mas normalmente equivale a cerca de 0.1 mgal m $^{-1}$.

Finalmente, devemos compensar a gravidade medida para a elevação h_P ou h_Q da estação de gravidade acima do elipsoide (Figura 2.17c). A parte principal da gravidade é devida à atração gravitacional, que diminui proporcionalmente ao quadrado inverso da distância do centro da Terra. A gravidade medida em P ou Q é menor do que seria se medida no elipsoide em R. Uma *correção de ar livre* (free-air) (Δg_{FA}) para a elevação da estação deve ser adicionada à gravidade medida. Esta correção ignora os efeitos do material entre os níveis de medição e referência, pois isso é considerado em Δg_{BP} . Observe que, se a estação de gravidade estivesse abaixo do nível do mar, a parte gravitacional da gravidade medida seria muito grande em comparação com o elipsoide de referência; precisaríamos subtrair (Δg_{FA}) neste caso. A correção de ar livre é positiva se a estação estiver acima do nível do mar, mas negativa se estiver abaixo do nível do mar (como pode ser o caso no Vale da Morte ou ao lado do Mar Morto). Isso equivale a cerca de 0.3 mgal m $^{-1}$.

A correção de ar livre é sempre de sentido oposto à correção da placa de Bouguer. Por conveniência, os dois são frequentemente combinados em uma única correção de elevação, que equivale a cerca de 0.2 mgal m $^{-1}$. Isto deve ser adicionado para as estações de gravidade acima do nível do mar e subtraído se a gravidade for medida abaixo do nível do mar. Além disso, uma correção de maré (Δg_{tile}) deve ser feita e, se a gravidade for medida em um veículo em movimento, a correção de Eötvös também é necessária.

Após a correção, a gravidade medida pode ser comparada com a gravidade teórica no elipsoide (Figura 2.17b). Note que o procedimento acima reduz a gravidade medida para a superfície do elipsoide. Em princípio, é igualmente válido corrigir a gravidade teórica do elipsoide para cima até o nível em que a medição foi feita.

Este método é preferido em tipos mais avançados de análise de anomalias de gravidade, onde a possibilidade de uma massa anômala entre o elipsoide e a superfície do solo deve ser levada em conta.

2.6.5.1 Correções de latitude

A gravidade teórica a uma determinada latitude é dada pela fórmula de gravidade normal (Equação (2.30)). Se a gravidade medida for um valor absoluto, a correção da latitude é feita subtraindo o valor previsto por esta fórmula. Muitas vezes, no entanto, o levantamento da gravidade é feito com um gravímetro, e a quantidade medida, g_m , é a diferença de gravidade relativa a uma estação base. A gravidade de referência normal g_n pode então ser substituída por uma correção de latitude, obtida pela diferenciação da Equação (2.30):

$$\frac{\partial g_n}{\partial \lambda} = g_e (\beta_1 \sin 2\lambda + \beta_2 \sin 4\lambda) \quad (2.37)$$

Depois de converter $\partial\lambda$ de radianos em quilômetros e desprezar o termo β_2 , a correção de latitude (Δg_{lat}) é $0.8140 \sin 2\lambda$ mgal por quilômetro de deslocamento norte-sul. Como a gravidade diminui em direção aos pólos, a correção para estações mais próximas do polo do que a estação base deve ser adicionada à gravidade medida.

2.6.5.2 Correção do terreno

A correção do terreno (Δg_T) para uma colina adjacente a uma estação de gravidade é calculada dividindo a colina em vários prismas verticais (Figura 2.18a). A contribuição de cada elemento vertical para a aceleração vertical no ponto de observação P é calculada assumindo simetria cilíndrica sobre P . A altura do prisma é h , seus raios interno e externo são r_1 e r_2 , respectivamente, o ângulo subentendido em P é ϕ_0 , e a densidade da colina é ρ (Figura 2.18b). Deixe os lados de um pequeno elemento cilíndrico serem dr , dz e $rd\phi$; sua massa é $dm = \rho r d\phi dr dz$ e sua contribuição para a aceleração ascendente causada pelo prisma em P é

$$\Delta g = G \frac{dm}{(r^2 + z^2)} \cos \theta = G \frac{\rho r dr dz d\phi}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{(r^2 + z^2)}} \quad (2.38)$$

Combinando e rearranjando termos e a ordem de integração, obtém-se a aceleração ascendente em P devido ao prisma cilíndrico:

$$\Delta g_T = G \rho \int_{\phi=0}^{\phi_0} d\phi \int_{r=r_1}^{r_2} \left(\int_{z=0}^h \frac{z dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) r dr \quad (2.39)$$

A integração sobre ϕ dá ϕ_0 ; após integração adicional sobre z conseguimos:

$$\Delta g_T = G \rho \phi_0 \int_{r=r_1}^{r_2} \left(\frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}} - 1 \right) dr \quad (2.40)$$

A integração sobre r fornece a aceleração ascendente produzida em P pelo cilindro:

$$\Delta g_T = G \rho \phi_0 \left(\left(\sqrt{r^2 + h^2} - r_1 \right) - \left(\sqrt{r^2 + h^2} - r_2 \right) \right) \quad (2.41)$$

A direção de Δg_T na (Figura 2.18b) é para cima, oposta à gravidade; a correção do terreno correspondente deve ser adicionada à gravidade medida.

Na prática, as correções de terreno podem ser feitas usando um gráfico de terreno (Figura 2.18c) no qual círculos concêntricos e linhas radiais dividem a área ao redor da estação de gravidade em setores que possuem simetria radial como a seção transversal do elemento de um cilindro vertical. Na Figura 2.18b. Os raios interno e externo de cada setor correspondem a r_1 e r_2 e o ângulo subtendido pelo setor é ϕ . A correção do terreno para cada setor dentro de cada zona é pré-calculada usando a Equação (2.41) e tabulado. O gráfico é desenhado em uma folha transparente que é sobreposta em um mapa topográfico na mesma escala e centrada na estação de gravidade. A elevação média dentro de cada setor é estimada com a maior precisão possível, e a diferença de elevação (ou seja, h na Equação (2.41)) do setor em relação à estação é calculada. Isso é multiplicado pelo fator de correção do setor para dar sua contribuição para a correção do terreno. Finalmente, a correção do terreno na estação gravitacional é obtida pela soma das contribuições de todos os setores. O procedimento deve ser repetido para cada estação de gravidade.

Quando o gráfico de terreno está centrado numa nova estação, o relevo topográfico médio dentro de cada setor muda e deve ser calculado de novo. Como resultado, as correções do terreno são demoradas e tediosas. Os efeitos mais importantes vêm da topografia mais próxima da estação. No entanto, as correções do terreno são geralmente necessárias se uma diferença topográfica dentro de um setor estiver a mais de 5% de sua distância da estação.

2.6.5.3 Correção Bouger (placa Bouger)

A correção da placa Bouguer (Δg_{BP}) compensa o efeito de uma camada de rocha cuja espessura corresponde à diferença de elevação entre os níveis de medição e referência. Isto é modelado por um disco sólido de densidade ρ e raio infinito centrado na estação gravitacional P . A correção é computada por extensão do cálculo para a correção do terreno. Um prisma cilíndrico elementar é definido como na Figura 2.18b. Seja o ângulo ϕ subtendido pelo prisma aumentar para 2π e o raio interno diminuir para zero; o primeiro termo entre parênteses na Equação (2.41) reduz para h . A aceleração gravitacional no centro de um disco sólido de raio r é então

$$\Delta g_T = 2\pi G\rho \left(h - \left(\sqrt{r^2 + h^2} - r \right) \right) \quad (2.42)$$

Agora seja o raio r do disco aumentar. O valor de h torna-se gradualmente insignificante comparado a r ; no limite, quando r é infinito, o segundo termo na Equação (2.42) tende a zero. Assim, a correção da placa de Bouguer (Δg_{BP}) é dada por

$$\Delta g_{BP} = 2\pi G\rho h \quad (2.43)$$

Inserindo valores numéricos dá $0.0419 \times 10^{-3} \rho \text{ mgal m}^{-1}$ para (Δg_{BP}), onde a densidade ρ está em kg m^{-3} . A escolha correta da densidade é muito importante no cálculo de (Δg_{BP}) e (Δg_T). Alguns métodos para determinar a melhor escolha são descritos em detalhes abaixo.

Uma consideração adicional é necessária em pesquisas de gravidade marinha. (Δg_{BP}) requer densidade uniforme abaixo da superfície do elipsoide de referência. Para calcular a (Δg_{BP}) sobre uma região oceânica, devemos, com efeito, substituir a água do mar pela rocha de densidade ρ . No entanto, a gravidade medida contém um componente devido à atração da água do mar (densidade 1030 kg m^{-3}) na bacia oceânica. A correção da placa Bouguer em levantamentos de gravidade marinha é feita substituindo a densidade ρ na Equação (2.43) por $(\rho - 1030) \text{ kg m}^{-3}$. Quando um levantamento por gravidade a bordo é feito sobre um lago grande e profundo, uma tolerância similar deve ser feita para a profundidade da água no lago usando uma densidade presumida de $(\rho - 1000) \text{ kg m}^{-3}$.

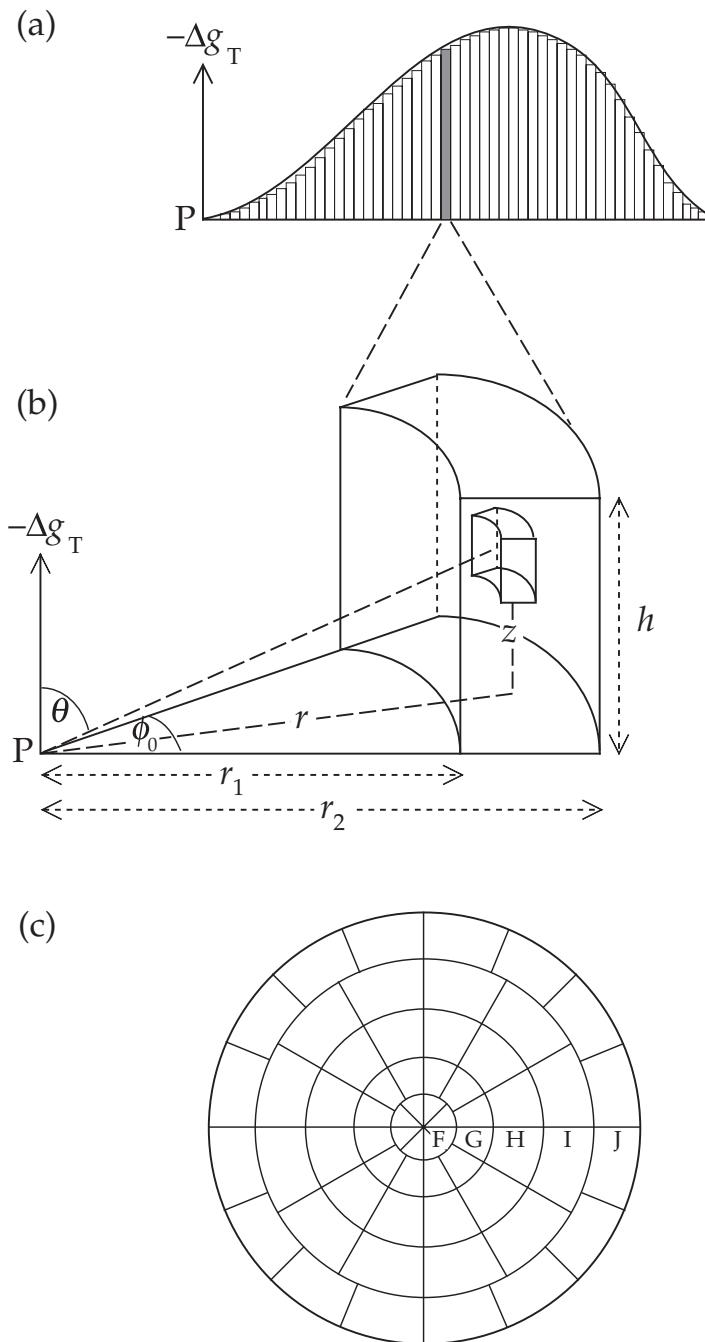


Figura 2.18: As correções de terreno Δg_T são feitas (a) dividindo a topografia em elementos verticais, (b) computando a correção para cada elemento cilíndrico de acordo com sua altura acima ou abaixo da estação de medição e (c) somando as contribuições para todos os elementos ao redor a estação com o auxílio de uma sobreposição transparente em um mapa topográfico.

2.6.5.4 Correção ar livre (free-air)

A correção de ar livre (Δg_{FA}) tem um título bastante colorido, mas um pouco enganador, dando a impressão de que a estação de medição está flutuando no ar acima do elipsoide. A densidade do ar à temperatura e pressão padrão é de cerca de 1.3 kg m^{-3} e uma massa de ar entre os níveis de observação e referência causaria um efeito de gravidade detetável de cerca de $50 \mu\text{gal}$ a uma elevação de 1000 m. De fato, a correção de ar livre não presta atenção à densidade do material entre a elevação da medição e o elipsoide. É uma correção direta para a diminuição da aceleração gravitacional com a distância do centro da Terra:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-G \frac{E}{r^2} \right) = +2G \frac{E}{r^3} = -\frac{2}{r} g \quad (2.44)$$

Ao substituir o raio da Terra (6371 km) por r e o valor médio da gravidade (981,000 mgal) por g , o valor de Δg_{FA} é encontrado ser de $0.3086 \text{ mgal m}^{-1}$.

2.6.5.5 Correção de elevação combinada

As correções da placa de ar livre e Bouguer são frequentemente combinadas em uma única correção de elevação, que é $(0.3086 - (0.0419\rho \times 10^{-3})) \text{ mgal m}^{-1}$. A substituição de uma densidade típica por rochas crustais, geralmente considerada como sendo 2670 kg m^{-3} , fornece uma correção de elevação combinada de $0.197 \text{ mgal m}^{-1}$. Isto deve ser adicionado à gravidade medida se a estação está acima do elipsoide e é subtraída se estiver abaixo.

A alta sensibilidade dos gravímetros modernos permite uma precisão alcançável de $0.01 - 0.02 \text{ mgal}$ nos levantamentos de gravidade modernos. Para alcançar essa precisão, as correções das variações de gravidade com latitude e elevação devem ser feitas com exatidão. Isso requer que as coordenadas precisas de uma estação de gravidade sejam determinadas por levantamentos geodésicos precisos. A precisão necessária do posicionamento horizontal é indicada pela correção de latitude. Este é o máximo a 45° latitudes, onde, para atingir uma precisão de pesquisa de $\pm 0.01 \text{ mgal}$, as posições norte-sul das estações de gravidade devem ser conhecidas por cerca de $\pm 10 \text{ m}$. A precisão necessária no posicionamento vertical é indicada pela correção de elevação combinada de 0.2 mgal m^{-1} . Para alcançar uma precisão em um levantamento de $\pm 0.01 \text{ mgal}$, a elevação do gravímetro acima do elipsoide de referência deve ser conhecida a cerca de $\pm 5 \text{ cm}$.

A elevação de um local acima do elipsoide é frequentemente considerada como sendo sua altitude acima do nível médio do mar. No entanto, o nível médio do mar é igualado ao geóide e não ao elipsoide. As ondulações geoidais podem chegar a dezenas de metros. Eles são recursos de longo comprimento de onda. Em um levantamento local, a distância entre o geóide e o elipsoide provavelmente não varia muito, e as diferenças de gravidade da estação base selecionada provavelmente não serão afetadas fortemente. Em uma pesquisa nacional, as discrepâncias devido a ondulações geoidais podem ser mais sérias. No caso de ondulações geoidais serem grandes o suficiente para afetar um levantamento, as altitudes das estações devem ser corrigidas para elevações reais acima do elipsoide.

2.7 Densidade das rochas

A densidade de rochas na vizinhança de um perfil de gravidade é importante para o cálculo da placa Bouguer e das correções do terreno. Densidade é definida como a massa por unidade de volume de um material. Ela tem diferentes unidades e diferentes valores numéricos no c.g.s. e sistemas SI. Por exemplo, a densidade da água é de 1 g cm^{-3} no sistema c.g.s., mas 1000 kg m^{-3} no sistema SI. Na prospecção por gravidade unidades como c.g.s. ainda estão em uso comum, mas estão sendo lentamente substituídas por unidades do SI. As fórmulas dadas para Δg_T e Δg_{BP} nas Equações (2.41) e (2.43), respectivamente, exigem que a densidade seja dada em kg m^{-3} .

Uma maneira simples de determinar a densidade apropriada para usar em um estudo de gravidade é fazer uma coleção representativa de amostras de rochas com o auxílio de um mapa geológico. A gravidade específica

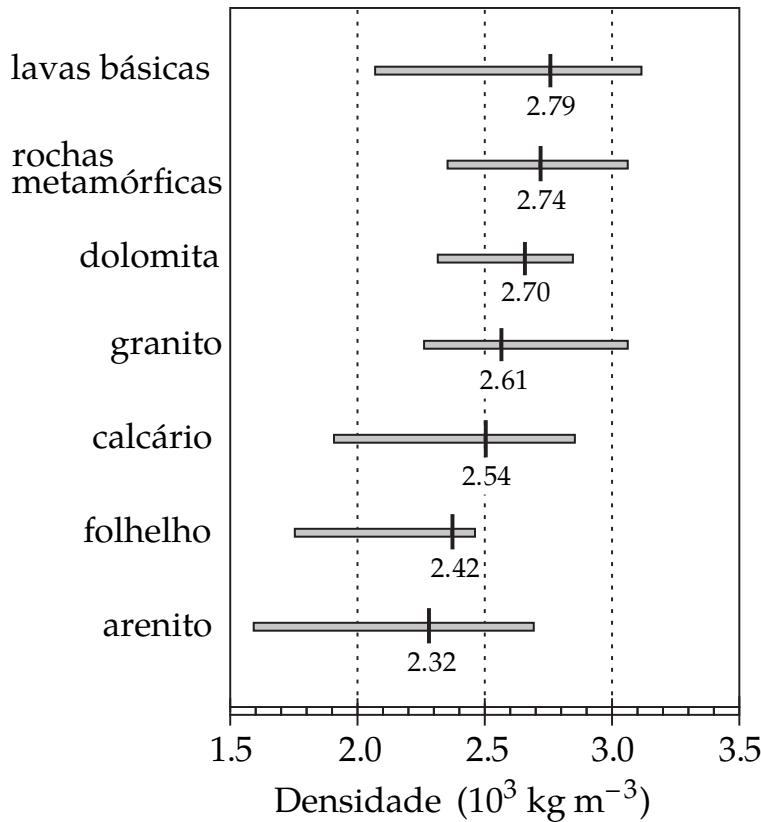


Figura 2.19: Valores médios típicos e intervalos de densidade para alguns tipos de rochas mais comuns.

de uma amostra pode ser encontrada diretamente pesando-a primeiro no ar e depois na água, e aplicando o princípio de Arquimedes. Isto dá sua densidade ρ_r em relação à da água:

$$\rho_r = \frac{W_a}{W_a - W_w} \quad (2.45)$$

Tipicamente, as densidades encontradas para diferentes tipos de rochas por este método mostram uma grande quantidade de dispersão sobre suas médias, e as faixas de valores para diferentes tipos de rochas se sobrepõem (Figura 2.19). As densidades das rochas ígneas e metamórficas são geralmente mais altas que as das rochas sedimentares. Este método é adequado para o reconhecimento de uma área. Infelizmente, muitas vezes é difícil garantir que a coleção superficial de rochas seja representativa dos tipos de rochas em estruturas subsuperficiais, de modo que métodos alternativos de determinação da densidade apropriada são geralmente empregados. A densidade pode ser medida em furos verticais, perfurados para explorar a natureza de uma estrutura presumida. A densidade determinada no poço é usada para refinar a interpretação da estrutura.

2.7.1 Densidade a partir de velocidades sísmicas

Medições em amostras de sedimentos saturados de água e rochas sedimentares, e em rochas ígneas e metamórficas, mostram que a densidade e as velocidades da ondas sísmicas P e S estão relacionadas. O ajuste ideal para cada conjunto de dados é uma curva suave (Figura 2.20). Cada curva é idealizada, pois os dados reais contêm uma dispersão considerável. Por esta razão, as curvas são mais adequadas para calcular a densidade média de um corpo crustal grande a partir da sua velocidade sísmica média. Devem ser feitos ajustes para as temperaturas e pressões mais altas em profundidade na Terra, que afetam tanto a densidade quanto os parâmetros elásticos das rochas. No entanto, os efeitos de alta pressão e temperatura só podem ser

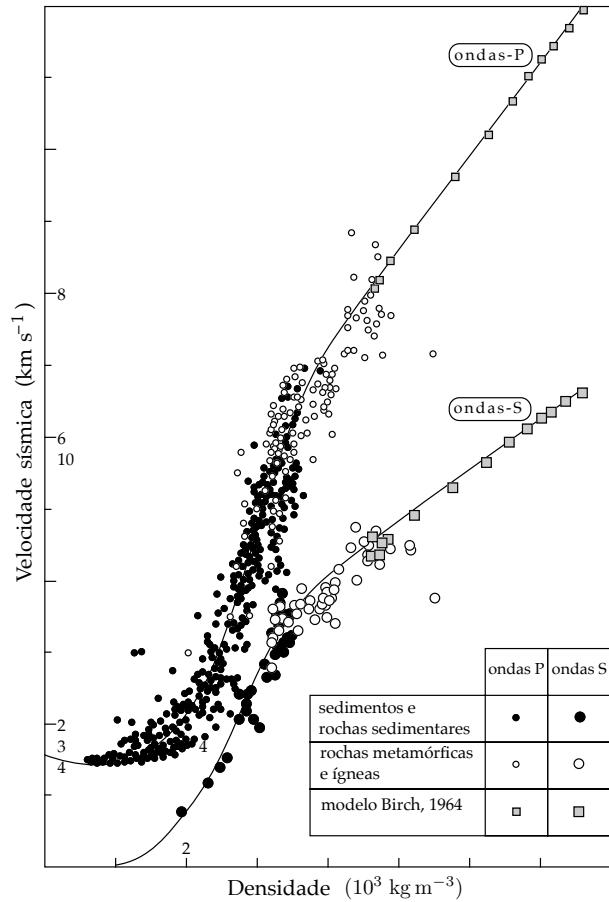


Figura 2.20: relações empíricas entre a densidade e as velocidades das ondas sísmicas P e S em sedimentos saturados de água e rochas sedimentares, rochas ígneas e metamórficas.

examinados em experimentos de laboratório em amostras pequenas. Não se sabe até que ponto os resultados são representativos da relação velocidade-densidade *in situ* em grandes blocos crustais.

As curvas velocidade-densidade são relações empíricas que não possuem base teórica. Os dados da onda P são usados mais comumente. Em conjunto com estudos de refração sísmica, eles foram usados para modelar as distribuições de densidade na crosta terrestre e do manto superior responsável por anomalias de gravidade regional em larga escala.

2.7.2 Perfil de raio gama

A densidade das formações rochosas adjacentes a um poço pode ser determinada a partir de um instrumento no poço. O princípio faz uso do espalhamento Compton de raios- γ por elétrons fracamente ligados na rocha adjacente a um poço. Um físico americano, Arthur H. Compton, descobriu em 1923 que a radiação espalhada por elétrons frouxamente ligados experimentava um aumento no comprimento de onda. Essa observação simples não pode ser explicada de maneira alguma se a radiação for tratada como uma onda; a radiação espalhada teria o mesmo comprimento de onda que a radiação incidente. O efeito Compton é facilmente explicado considerando a radiação como partículas ou fôtons, ou seja, partículas de energia quantificada, em vez de como ondas. A energia de um fôton é inversamente proporcional ao seu comprimento de onda. A colisão de um fôton de raios- γ com um elétron é como uma colisão entre bolas de bilhar; parte da energia do fôton é transferida para o elétron. O fôton espalhado tem menor energia e, portanto, um comprimento de onda maior que o fôton incidente. O efeito Compton foi uma importante verificação da teoria quântica.

O perfilador de densidade, ou perfilador *gamma-gamma* (Figura 2.21), é um dispositivo cilíndrico que contém uma fonte radioativa de raios- γ , como ^{137}Cs , que emite radiação através de uma fenda estreita. Os fótons de raios- γ colidem com os elétrons de átomos frumentosamente ligados próximos ao buraco e são espalhados. Um contador de cintilação para detectar e medir a intensidade dos raios- γ está localizado na ferramenta a cerca de 45 a 60 cm acima do emissor; a radiação que chega também passa por uma fenda. O emissor e o detector são blindados com chumbo, e a ferramenta é pressionada contra a parede do furo por uma mola forte, de modo que a única radiação registrada é aquela resultante do espalhamento de Compton na formação circundante. A intensidade da radiação detectada é determinada pela densidade dos elétrons e, portanto, pela densidade da rocha próxima à ferramenta de extração. Os raios- γ penetram apenas cerca de 15 cm na rocha.

Perfis calibrados *gamma-gama* fornecem a densidade aparente da rocha ao redor de um poço. Esta informação é também necessária para calcular a porosidade, que é definida como o volume fracionário da rocha representado por espaços porosos. A maioria das rochas sedimentares é porosa, dependendo a quantidade da quantidade de compactação experimentada. Rochas ígneas e metamórficas geralmente têm baixa porosidade, a menos que tenham sido fracturadas. Normalmente, os poros são preenchidos com ar, gás ou fluido, como água ou óleo. Se as densidades da rocha da matriz e do fluido dos poros são conhecidas, a densidade aparente obtida da extração de *gama-gama* permite que a porosidade da rocha seja determinada.

2.7.3 Gravimetria de poço

A instrumentação moderna permite que a gravidade seja medida com precisão em poços. Um tipo de gravímetro de poço é uma modificação do instrumento LaCoste – Romberg, adaptado para uso no poço estreito e sob condições de temperatura e pressão elevadas. Instrumentos alternativos foram projetados em diferentes princípios; eles têm uma sensibilidade comparável de cerca de 0.01 mgal. Seu uso para a determinação da densidade do poço é baseado na aplicação das correções de ar livre e da placa Bouguer.

Sejam g_1 e g_2 os valores de gravidade medidos em um poço vertical nas alturas h_1 e h_2 , respectivamente, acima do elipsoide de referência (Figura 2.22). A diferença entre g_1 e g_2 deve-se às diferentes alturas e ao material entre os dois níveis de medição no poço. O valor g_2 será maior que g_1 por dois motivos. Primeiro, porque o nível de medição mais baixo está mais próximo do centro da Terra, g_2 será maior que g_1 pela quantidade da correção de elevação combinada, nominalmente $(0.3086 - (0.0419\rho \times 10^{-3}))\Delta h$ mgal, onde $\Delta h = h_1 - h_2$. Em segundo lugar, no nível inferior h_2 , o gravímetro experimenta uma atração Bouguer ascendente devido ao material entre os dois níveis de medição. Isto reduz a gravidade medida em h_2 e requer um aumento de compensação para g_2 de quantidade $(0.0419\rho \times 10^{-3})\Delta h$ mgal. A diferença entre os valores corrigidos de g_1 e g_2 após a redução para o nível h_2 é então

$$\begin{aligned}\Delta g &= (0.3086 - 0.0419\rho \times 10^{-3}) \Delta h - 0.0419\rho \times 10^{-3} \Delta h \\ &= (0.3086 - 0.0838\rho \times 10^{-3}) \Delta h\end{aligned}\quad (2.46)$$

O rearranjo desta equação fornece a densidade ρ do material entre os níveis de medição no poço de sondagem:

$$\rho = \left(3.683 - 11.93 \frac{\Delta g}{\Delta h} \right) \times 10^3 \text{kgm}^{-3} \quad (2.47)$$

Se as medições da gravidade do poço são feitas com uma precisão de ± 0.01 mgal a uma separação de cerca de 10 m, a densidade do material perto do poço pode ser determinada com uma precisão de cerca de $\pm 10 \text{ kg m}^{-3}$. Mais de 90% da variação na gravidade do poço é devido ao material dentro de um raio de cerca de $5\Delta h$ do poço (cerca de 50 m para uma distância $\Delta h \approx 10$ m entre os níveis de medição). Isso é muito maior do que a faixa lateral penetrada pelo perfil gama-gama. Como resultado, os efeitos relacionados ao poço em si não são importantes.

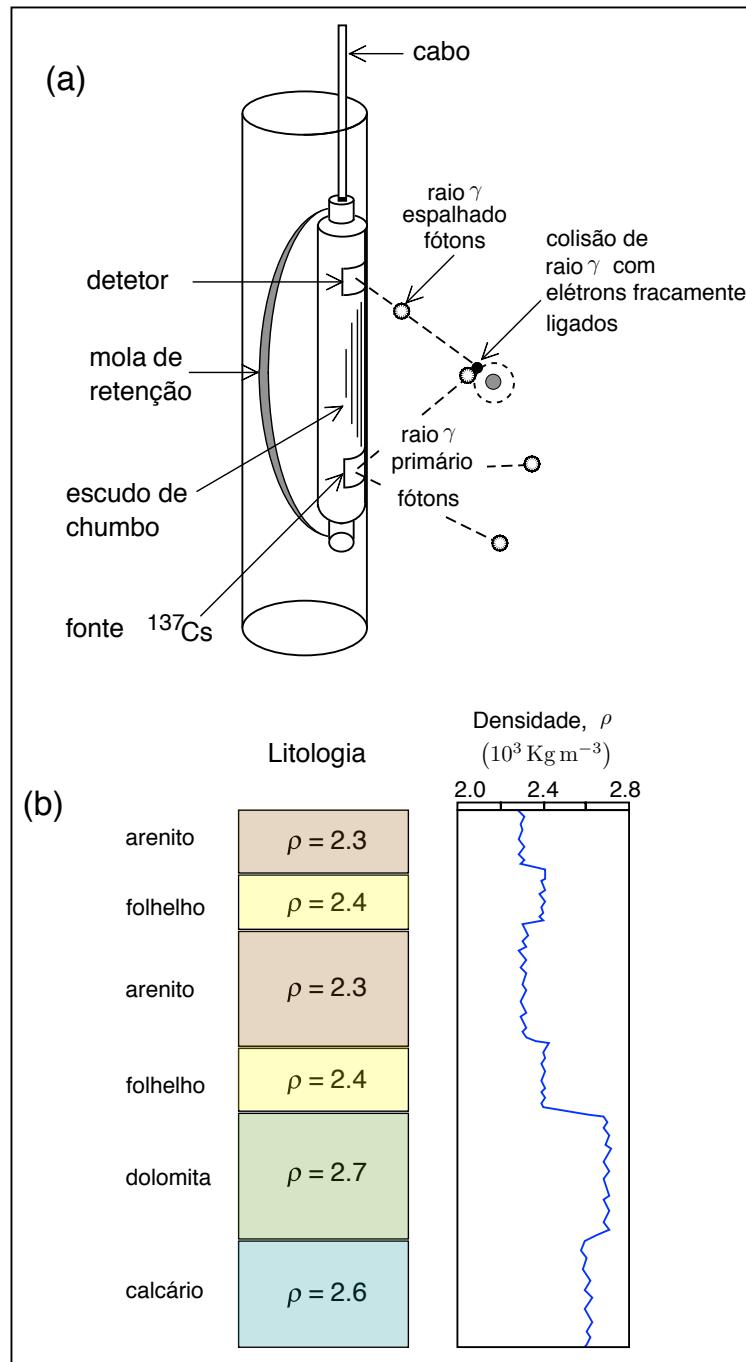


Figura 2.21: (a) O projeto de um dispositivo de um perfil gama-gama para determinar a densidade em um poço e (b) um perfil esquemático gama-gama calibrado em termos da densidade da rocha.

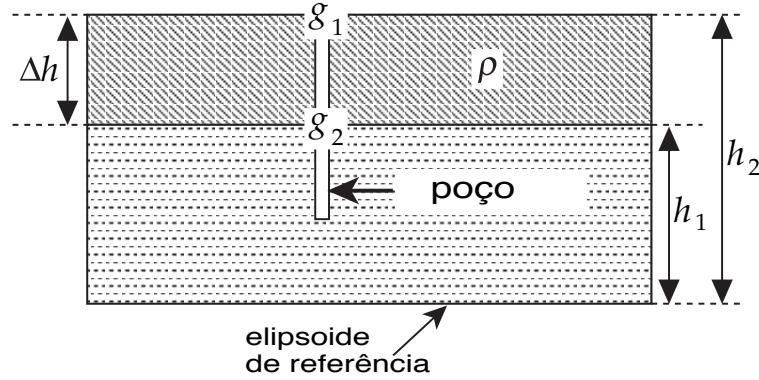


Figura 2.22: Geometria para cálculo da densidade de uma camada rochosa a partir de medições de gravidade feitas em um poço vertical.

2.7.4 Método de Nettleton para densidade próxima da superfície

A densidade da superfície próxima do material sob uma colina pode ser determinada por um método criado por L. Nettleton que compara a forma de uma anomalia da gravidade Bouguer com a forma da topografia ao longo de um perfil. O método faz uso da correção de elevação combinada ($\Delta g_{FA} + \Delta g_{BP}$) e da correção do terreno (Δg_T), que são dependentes da densidade. A correção do terreno é menos importante que a correção da placa Bouguer e geralmente pode ser negligenciada.

Um perfil de estações gravitacionais estreitamente espaçadas é medido através de uma pequena colina (Figura 2.23). A correção de elevação combinada é aplicada a cada medição. Suponha que a densidade média real da colina seja 2600 kgm^{-3} . Se o valor assumido para ρ for muito pequeno (digamos, 2400 kgm^{-3}), o valor de Δg_{BP} em cada estação será muito pequeno. A discrepância é proporcional à elevação, então a anomalia da gravidade Bouguer é uma imagem positiva da topografia. Se o valor assumido para ρ for muito grande (digamos, 2800 kgm^{-3}), a situação oposta ocorre. O muito é subtraído em cada ponto, dando uma anomalia computada que é uma imagem negativa da topografia. O valor ótimo para a densidade é encontrado quando a anomalia da gravidade tem correlação mínima com a topografia.

2.8 Anomalias gravimétricas ar livre (free-air) e Bouger

Suponha que possamos medir a gravidade no elipsoide de referência. Se a distribuição da densidade dentro da Terra é homogênea, a gravidade medida deve concordar com a gravidade teórica dada pela fórmula da gravidade normal. As correções de gravidade descritas anteriormente compensam a situação usual de que o ponto de medição não está no elipsoide. Uma discrepancia entre a gravidade medida corrigida e a gravidade teórica é chamada de anomalia gravitacional. Surge porque a densidade do interior da Terra não é homogênea como se supõe. Os tipos mais comuns de anomalia gravitacional são a *anomalia Bouger* e a *anomalia do ar livre (free-air)*.

A anomalia gravimétrica Bouger (Δg_B) é definida pela aplicação de todas as correções descritas individualmente

$$\Delta g_B = g_m + (\Delta g_{FA} - \Delta g_{BP} + \Delta g_T + \Delta g_{tide}) - g_n \quad (2.48)$$

Nesta fórmula, g_m e g_n são os valores de gravidade medida e gravidade normal; as correções entre parênteses são a correção de ar livre (Δg_{FA}), correção da placa Bouger (Δg_{BP}), correção do terreno (Δg_T) e correção de maré (Δg_{tide}).

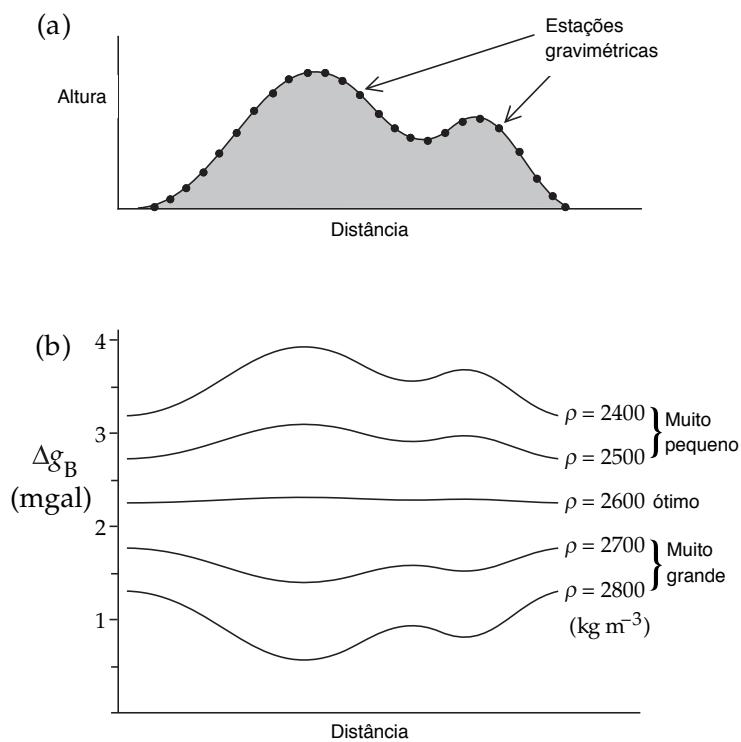


Figura 2.23: Determinação da densidade de rochas próximas à superfície pelo método de Nettleton. (a) Medições de gravidade são feitas em um perfil através de uma pequena colina. (b) Os dados são corrigidos para elevação com vários valores de teste da densidade. A densidade ótima fornece uma correlação mínima entre a anomalia gravitacional (Δg_B) e a topografia.

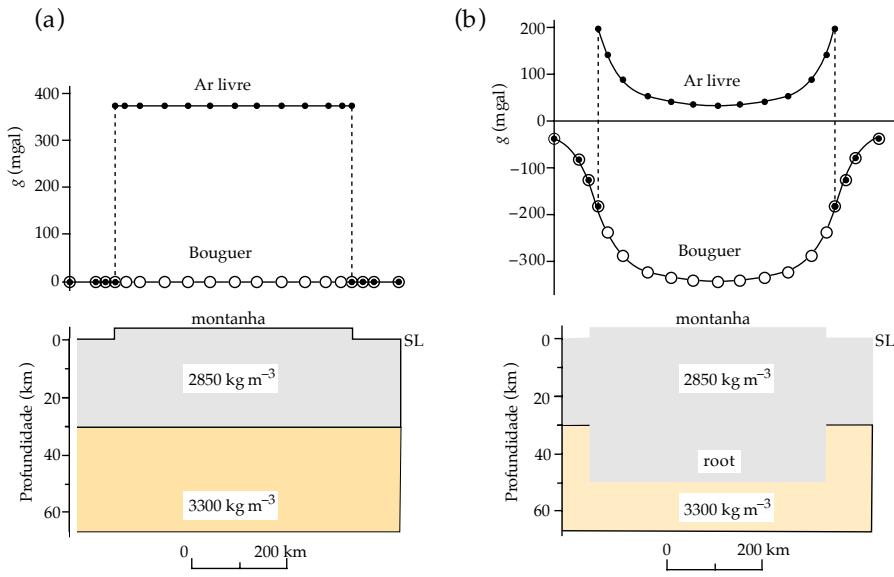


Figura 2.24: Anomalias de ar livre e Bouguer em toda a cordilheira. Em (a) a montanha é modelada por um bloco totalmente suportado, e em (b) a massa da montanha acima do nível do mar (SL) é compensada por uma raiz crustal menos densa, que se projeta para baixo no manto mais denso.

A anomalia de ar livre (Δg_F) é definida aplicando-se apenas as correções de ar livre, terreno e maré à gravidade medida:

$$\Delta g_F = g_m + (\Delta g_{FA} + \Delta g_T + \Delta g_{tidc}) - g_n \quad (2.49)$$

As anomalias Bouguer e de ar livre na mesma estrutura podem parecer bem diferentes. Considere primeiro o bloco topográfico (representando uma cadeia de montanhas) mostrado na Figura 2.24a. Para essa estrutura simples, negligenciamos as correções do terreno e das marés. A diferença entre a anomalia de Bouguer e a anomalia do ar livre surge da correção da placa de Bouguer. No cálculo da anomalia de Bouguer, a elevação simples da estação de medição é levada em conta juntamente com a correção de ar livre. A gravidade medida contém a atração da massa de terra acima do elipsoide, que é compensada com a correção da placa de Bouguer. A estrutura subterrânea não varia lateralmente, portanto a medida corrigida está de acordo com o valor teórico e a anomalia de Bouguer está em toda parte zero ao longo da cadeia montanhosa. Ao computar a anomalia de ar livre, somente a correção de ar livre é aplicada; a parte da gravidade medida devido à atração da massa de terra acima do elipsoide não é levada em consideração. Longe do bloco de montanha, as anomalias de Bouguer e de ar livre são iguais a zero. Sobre a montanha, a massa do bloco de montanha aumenta a gravidade medida em comparação com o valor de referência e resulta em uma anomalia de ar livre positiva em toda a cadeia montanhosa.

De fato, dados sísmicos mostram que a crosta terrestre é geralmente muito mais espessa do que o normal sob uma cadeia de montanhas. Isso significa que um bloco de rochas crustais menos densas se projeta no manto mais denso (2.24b). Depois de fazer as correções da placa de ar livre e da Bouguer, permanece uma anomalia de Bouguer devido a um bloco que representa a “zona das raízes” da cordilheira. Como isso é menos denso que o manto adjacente e subjacente, constitui um déficit de massa. A atração em um gravímetro nas estações em um perfil através da cordilheira será menor do que na Figura 2.24a, então a medida corrigida será menor que o valor de referência. Uma anomalia Bouguer fortemente negativa é observada ao longo do perfil. A certa distância do bloco da montanha, as Bouguer e as anomalias de ar livre são iguais, mas elas não são

mais zero, porque a anomalia de Bouguer agora contém o efeito da zona de raiz. Sobre o bloco de montanha, a anomalia de ar livre tem um deslocamento positivo constante da anomalia de Bouguer, como no exemplo anterior. Note que, embora a anomalia de ar livre seja positiva, ela cai para um valor muito baixo sobre o centro do bloco. Neste ponto, a atração da montanha é parcialmente cancelada pela falta de atração da zona de raiz menos densa.

2.9 Interpretação de anomalias gravimétricas

2.9.1 Anomalias regional e resídual

Uma anomalia gravitacional resulta da distribuição não homogênea da densidade na Terra. Suponha que a densidade de rochas em um corpo subsuperficial seja ρ e a densidade das rochas ao redor do corpo seja ρ_0 . A diferença é chamada de contraste de densidade do corpo em relação às rochas circundantes. Se o corpo tiver uma densidade mais alta que a rocha encaixante, ele terá um contraste de densidade positivo; um corpo com densidade menor que a rocha encaixante tem um contraste de densidade negativo. Sobre um corpo de alta densidade, a gravidade medida é aumentada; após a redução para o elipsoide de referência e a subtração da gravidade normal, uma anomalia gravitacional positiva é obtida. Da mesma forma, uma anomalia negativa ocorre em uma região de baixa densidade. A presença de uma anomalia gravitacional indica um corpo ou estrutura com densidade anômala; o sinal da anomalia é o mesmo do contraste de densidade e mostra se a densidade do corpo é maior ou menor que o normal.

A aparência de uma anomalia gravitacional é afetada pelas dimensões, contraste de densidade e profundidade do corpo anômalo. A extensão horizontal de uma anomalia é frequentemente chamada de seu “comprimento de onda” aparente. O comprimento de onda de uma anomalia é uma medida da profundidade da massa anômala. Corpos grandes e profundos dão origem a anomalias amplas (de comprimento de onda longo) e de baixa amplitude, enquanto corpos pequenos e rasos causam anomalias estreitas (de curto comprimento de onda) e agudas.

Normalmente, um mapa de anomalias da gravidade Bouguer contém anomalias sobrepostas de várias fontes. As anomalias de comprimento de onda longo devido a contrastes de densidade profunda são chamadas de anomalias regionais. Eles são importantes para entender a estrutura em larga escala da crosta terrestre sob grandes características geográficas, como cordilheiras, cadeias oceânicas e zonas de subducção. Anomalias residuais de comprimento de onda curto são devidas a massas anômalas superficiais que podem ser de interesse para exploração comercial. O conhecimento geológico é essencial para interpretar as anomalias residuais. Em áreas de escudo erodidas, como o Canadá ou a Escandinávia, anomalias com comprimentos de onda muito curtos podem ser devidas a corpos mineralizados próximos da superfície. Em bacias sedimentares, anomalias de curto ou médio comprimento de onda podem surgir de estruturas relacionadas a reservatórios de petróleo ou gás natural.

2.9.2 Representação de anomalias regional e resídual

A separação de anomalias de origem regional e local é um passo importante na interpretação de um mapa gravitacional. A análise pode ser baseada em perfis selecionados em alguma estrutura, ou pode envolver a distribuição bidimensional de anomalias em um mapa de gravidade. Diversas técnicas foram aplicadas à decomposição de uma anomalia gravitacional em suas partes constituintes. Eles variam em sofisticação, desde a simples inspeção visual do padrão de anomalia até a análise matemática avançada. Alguns exemplos desses métodos são descritos abaixo.

2.9.2.1 Análise visual

A maneira mais simples de representar a anomalia regional em um perfil de gravidade é ajustando visualmente a tendência de larga escala com uma curva suave (Figura 2.25). O valor da gravidade regional dado por esta tendência é subtraído ponto a ponto da anomalia da gravidade Bouguer. Esse método permite que o intérprete se ajuste a curvas que deixam anomalias residuais com um sinal

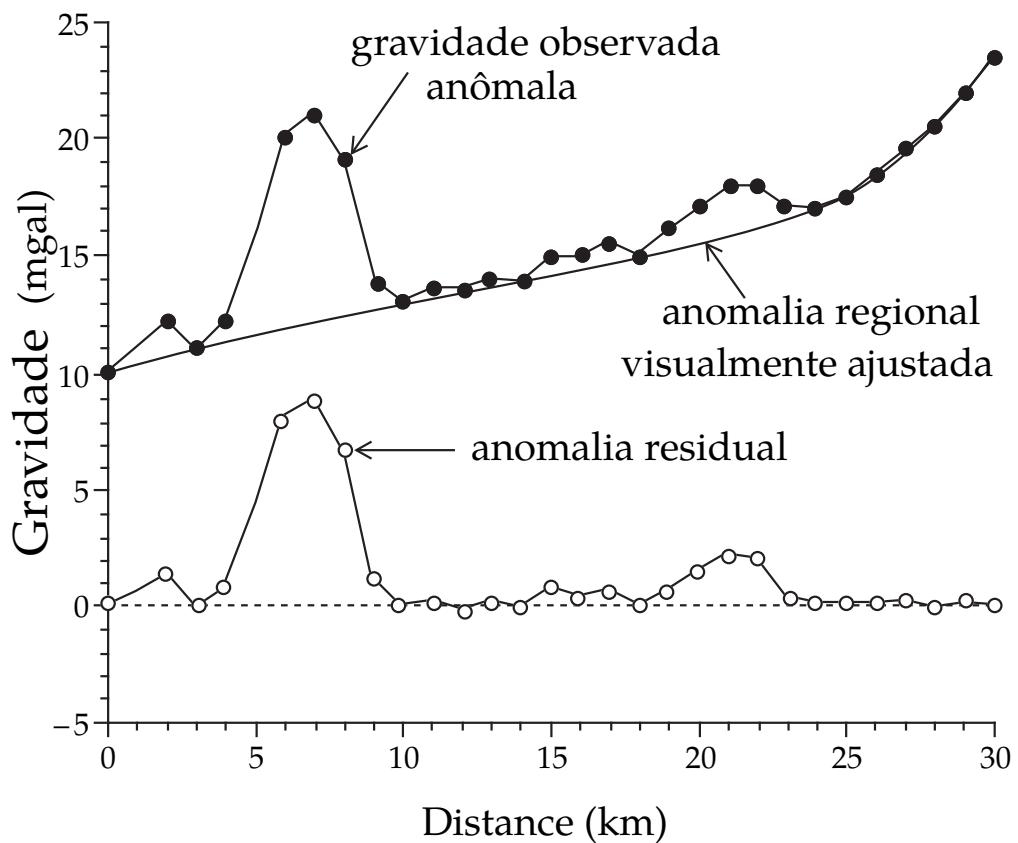


Figura 2.25: Representação da anomalia regional em um perfil de gravidade ajustando visualmente a tendência em grande escala com uma curva suave.

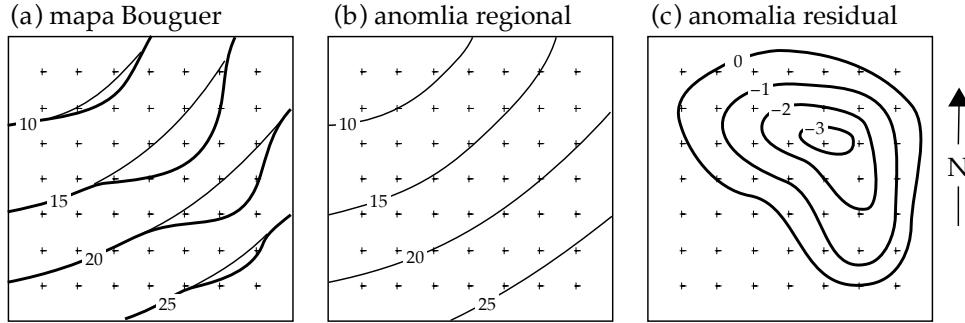


Figura 2.26: Remoção de tendência regional de um mapa de gravidade por suavidade de contorno: (a) suavidade manual de contorno das linhas sobre o mapa original de Bouguer, (b) mapa da variação da gravidade regional, (c) anomalia da gravidade residual após subtrair a variação regional do mapa da gravidade de Bouguer. Os valores estão em mgal.

Esta abordagem pode ser adaptada para a análise de um mapa de gravidade, suavizando visualmente as linhas de contorno. Na Figura 2.26a, as linhas de contorno da curva de gravidade Bouguer são bem nítidas em torno de uma anormalidade local. Os contornos mais suavemente curvos foram continuados suavemente como linhas pontilhadas. Eles indicam como o intérprete pensa que o campo gravitacional (Figura 2.26b) continuaria na ausência da anormalidade local. Os valores da gravidade Bouguer regional e original são interpolados dos mapas correspondentes em pontos espaçados em uma grade regular. O valor regional é subtraído da anomalia de Bouguer em cada ponto e os resíduos calculados são contornados para dar um mapa da anomalia da gravidade local (Figura 2.26c). A experiência e habilidade do intérprete são fatores importantes no sucesso dos métodos visuais.

2.9.2.2 Representação polinomial

Em um método alternativo, a tendência regional é representada por uma linha reta ou, mais geralmente, por uma curva polinomial lisa. Se x denota a posição horizontal em um perfil de gravidade, a gravidade regional Δg_R pode ser escrita

$$\Delta g_R = \Delta g_0 + \Delta g_1 x + \Delta g_2 x^2 + \Delta g_3 x^3 + \cdots + \Delta g_n x^n \quad (2.50)$$

O polinômio é ajustado pelo método dos mínimos quadrados ao perfil de gravidade observado. Isto dá valores ótimos para os coeficientes Δg_n . O método também tem desvantagens. Quanto maior a ordem do polinômio, melhor se ajusta às observações (Figura 2.27). O extremo ridículo é quando a ordem do polinômio é um a menos que o número de observações; a curva então passa perfeitamente por todos os pontos de dados, mas a anomalia da gravidade regional não tem significado geológico. O julgamento do intérprete é importante na seleção da ordem do polinômio, que geralmente é escolhido para ser a menor ordem possível que represente a maior parte da tendência regional. Além disso, uma curva ajustada por mínimos quadrados deve passar pela média dos valores de gravidade, de modo que as anomalias residuais sejam divididas igualmente entre valores positivos e negativos. Cada anomalia residual é flanqueada por anomalias de sinais opostos (Figura 2.27), que são devidas à mesma massa anômala que causou a anomalia central e, portanto, não têm significado próprio.

Ajuste polinomial também pode ser aplicado a mapas de gravidade. Assume-se que a anomalia regional pode ser representada por uma superfície lisa, $\Delta g(x, y)$, que é um polinômio de baixa ordem das coordenadas de posição horizontal x e y . No caso mais simples, a anomalia regional é expressada como um polinômio de primeira ordem, ou plano. Para expressar mudanças no gradiente da gravidade, é necessário um polinômio de ordem superior. Por exemplo, a gravidade regional dada por um polinômio de segunda ordem é escrita

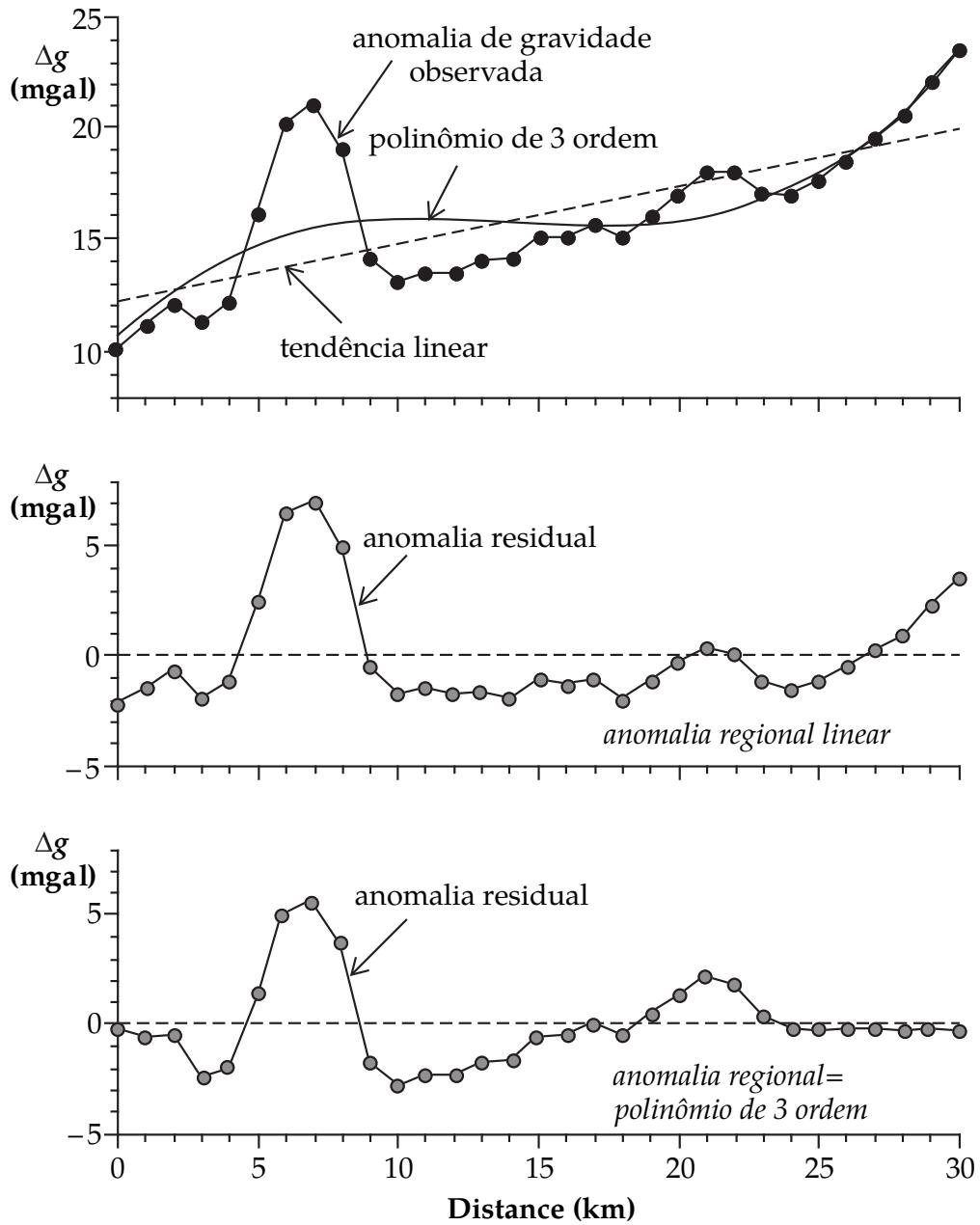


Figura 2.27: Representação da tendência regional por uma curva polinomial suave ajustada ao perfil de gravidade observado pelo método dos mínimos quadrados.

$$\Delta g(x, y) = \Delta g_0 + \Delta g_{x1}x + \Delta g_{y1}y \quad (2.51)$$

$$+ \Delta g_{x2}x^2 + \Delta g_{y2}y^2 + \Delta g_{xy}xy. \quad (2.52)$$

Como na análise do perfil, os valores ótimos dos coeficientes Δg_{x1} , Δg_{y1} , etc., são determinados por ajuste por mínimos quadrados. A anomalia residual é novamente computada ponto a ponto pela subtração da regional do dado original.

2.9.2.3 Representação por séries de Fourier

A anomalia gravitacional ao longo de um perfil pode ser analisada com técnicas desenvolvidas para investigar séries temporais. Em vez de variar com o tempo, como o sinal sísmico faz em um sismógrafo, a anomalia gravitacional $\Delta g(x)$ varia de acordo com a posição x ao longo do perfil. Para uma distribuição espacial, o número da onda, $k = 2\pi/\lambda$, é a contrapartida da frequência de uma série temporal. Se for possível supor que sua variação é periódica, a função $\Delta g(x)$ pode ser expressa como a soma de uma série de harmônicos discretas. Cada harmônico é uma função seno ou cosseno cujo argumento é um múltiplo do número da onda fundamental. A expressão para $\Delta g(x)$ é chamada de uma série de Fourier.

A decomposição de uma anomalia complexa (ou série temporal) em termos de variações periódicas mais simples de diferentes comprimentos de onda é chamada análise de Fourier e é um método poderoso para resolver as componentes mais importantes do sinal original.

A variação bidimensional de uma anomalia gravitacional mapeada pode ser expressa de maneira semelhante com o auxílio de **séries duplas de Fourier**. Como no caso unidimensional mais simples de uma anomalia gravitacional em um perfil, a expressão de anomalias gravimétricas bidimensionais por duas séries de Fourier é análoga à soma das funções senoidais ponderadas. Estes podem ser visualizados como corrugações do plano de xy (Figura 2.28), com cada ondulação ponderada de acordo com sua importância para $\Delta g(x, y)$.

2.9.2.4 Aprimoramento e filtragem de anomalias

A discussão acima mostra como uma função que é periódica pode ser expressa como uma soma de harmônicos de Fourier de um comprimento de onda fundamental. Ao dividir o sinal observado em componentes discretos, é possível remover alguns deles e reconstruir uma versão filtrada da anomalia original. No entanto, os requisitos de comportamento periódico e descrição do conteúdo harmônico geralmente não são atendidos. Por exemplo, a variação da gravidade de um ponto para outro geralmente não é periódica. Além disso, se o conteúdo harmônico de uma função é composto de múltiplos distintos de uma frequência fundamental ou número de onda, o espectro de comprimento de onda consiste em um número de valores distintos. No entanto, muitas funções de interesse geofísico são melhor representadas por um espectro contínuo de comprimentos de onda.

Para lidar com esse tipo de problema, a variação espacial da gravidade é representada por uma integral de Fourier, que consiste em um conjunto contínuo de frequências ou números de onda, em vez de um conjunto discreto. A integral de Fourier pode ser usada para representar funções não periódicas. Ele usa números complexos, que são números que envolvem i , a raiz quadrada de -1 . Se a anomalia da gravidade é analisada em duas dimensões (em vez de em um único perfil), uma integral bidimensional é necessário, análogo à representação da série dupla de Fourier. A gravidade observada pode então ser manipulada usando as técnicas de transformada de Fourier. Essas técnicas envolvem cálculos intensivos e são ideais para o processamento de dados digitais com computadores poderosos.

A transformada bidimensional de Fourier de um mapa gravitacional permite filtrar digitalmente as anomalias da gravidade. Um filtro é uma função espacial das coordenadas x e y . Quando a função $\Delta G(x, y)$ representando os dados da gravidade é multiplicada pela função do filtro, uma nova função é produzida. O processo é chamado de convolução e a saída é um mapa dos dados de gravidade filtrados. O cálculo no domínio espacial definido pelas coordenadas x e y pode ser demorado. Geralmente, é mais rápido calcular as transformadas de Fourier das funções de gravidade e filtro, multiplicá-las juntas no domínio de Fourier e,

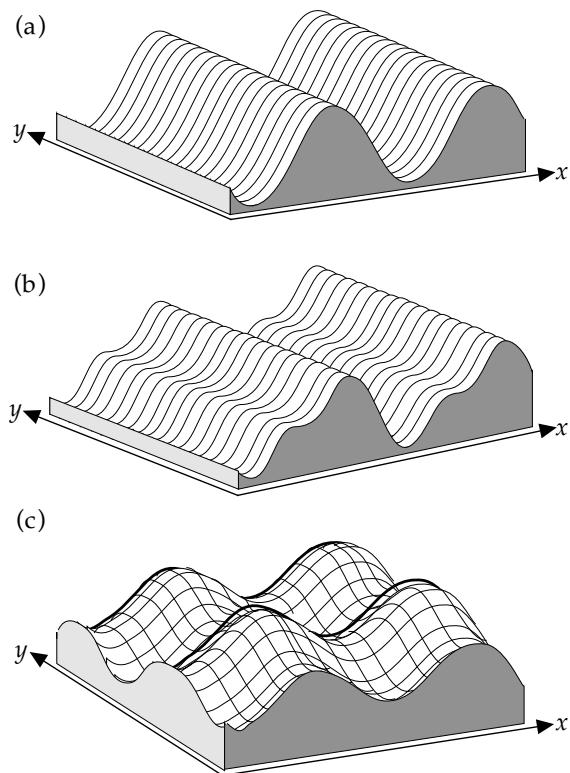


Figura 2.28: Expressão da variação bidimensional de uma anomalia gravitacional usando duas séries de Fourier: (a) um único harmônico na direção x , (b) dois harmônicos na direção x , (c) harmônicos únicos sobrepostos nas coordenadas x e y direções, respectivamente (depois de Davis, 1973).

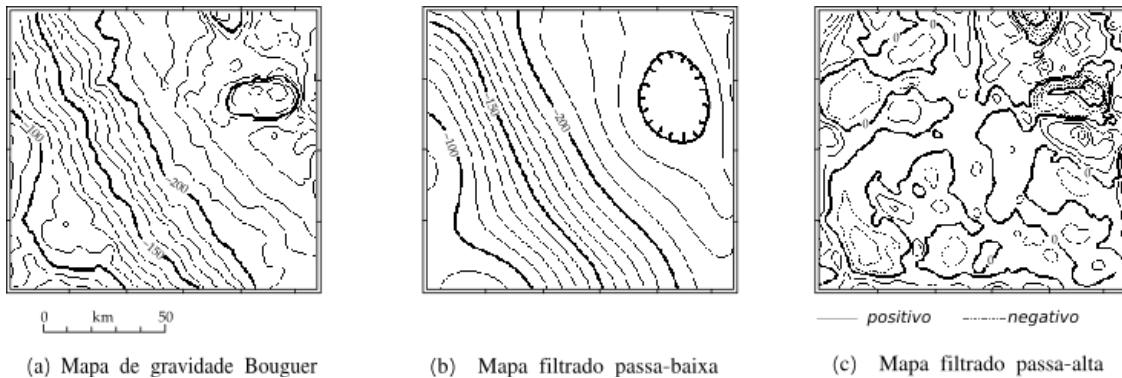


Figura 2.29: O uso da filtragem de comprimento de onda para enfatizar anomalias selecionadas na Sierra Nevada, Califórnia: (a) mapa de gravidade Bouguer não filtrado, (b) mapa de gravidade filtrado de passa-baixa com anomalias regionais de comprimento de onda longo e (c) mapa de gravidade filtrado de passa-alta realçando anomalias locais de curto comprimento de onda. Intervalo de contorno: (a) e (b) 10 mgal, (c) 5 mgal (após Dobrin e Savit, 1988).

em seguida, realizar uma transformação inversa de Fourier no produto para convertê-lo de volta ao domínio espacial.

A natureza do filtro aplicado no domínio de Fourier pode ser escolhida para eliminar certos comprimentos de onda. Por exemplo, ele pode ser projetado para cortar todos os comprimentos de onda mais curtos do que um comprimento de onda selecionado e para passar comprimentos de onda maiores. Isso é chamado de filtro *passa-baixa*; Ele passa comprimentos de onda longos que têm números baixos de onda. As irregularidades em um mapa de anomalia gravitacional Bouguer (Figura 2.29a) são removidas por filtragem *passa-baixa*, deixando um mapa filtrado (Figura 2.29b) muito mais suave do que o original. Alternativamente, o filtro no domínio de Fourier pode ser projetado para eliminar comprimentos de onda maiores que um comprimento de onda selecionado e para passar comprimentos de onda menores. A aplicação de tal filtro *passa-alta* aumenta o componente de comprimento de onda curto (alto número de ondas) do mapa de gravidade (Figura 2.29c).

A filtragem de comprimento de onda pode ser usada para enfatizar anomalias selecionadas. Por exemplo, ao estudar a estrutura crustal em grande escala, as anomalias da gravidade devidas a pequenos corpos locais são de menor interesse que as anomalias regionais, que podem ser melhoradas pela aplicação de um filtro *passa-baixa*. Por outro lado, na investigação de anomalias devido a fontes superficiais da crosta terrestre, o efeito regional pode ser suprimido por filtragem *passa-alta*.

2.9.2.5 Modelagem de anomalias gravimétricas

Após a remoção dos efeitos regionais, a anomalia da gravidade residual deve ser interpretada em termos de uma distribuição de densidade anômala. Análises modernas são baseadas em modelagem iterativa usando computadores de alta velocidade. Métodos anteriores de interpretação utilizaram a comparação das anomalias da gravidade observadas com as anomalias computadas das formas geométricas. O sucesso dessa abordagem simples é devido à insensibilidade da forma de uma anomalia gravitacional a pequenas variações na distribuição da densidade anômala. Alguns problemas fundamentais da interpretação de anomalias gravitacionais podem ser aprendidos a partir dos efeitos computados dos modelos geométricos. Em particular, é importante perceber que a interpretação das anomalias da gravidade não é única; distribuições de densidade diferentes podem dar a mesma anomalia.

2.9.2.5.1 Esfera uniforme: modelo para um diapiro

Estruturas diapiricas introduzem material de densidade diferente na rocha encaixante. Um domo de sal de baixa densidade ($\rho = 2150 \text{ kg m}^{-3}$) que invade rochas de carbonato de densidade mais alta ($\rho_0 = 2500 \text{ kg m}^{-3}$) tem um contraste de densidade de $\Delta\rho = -350 \text{ kg m}^{-3}$ e causa uma anom-

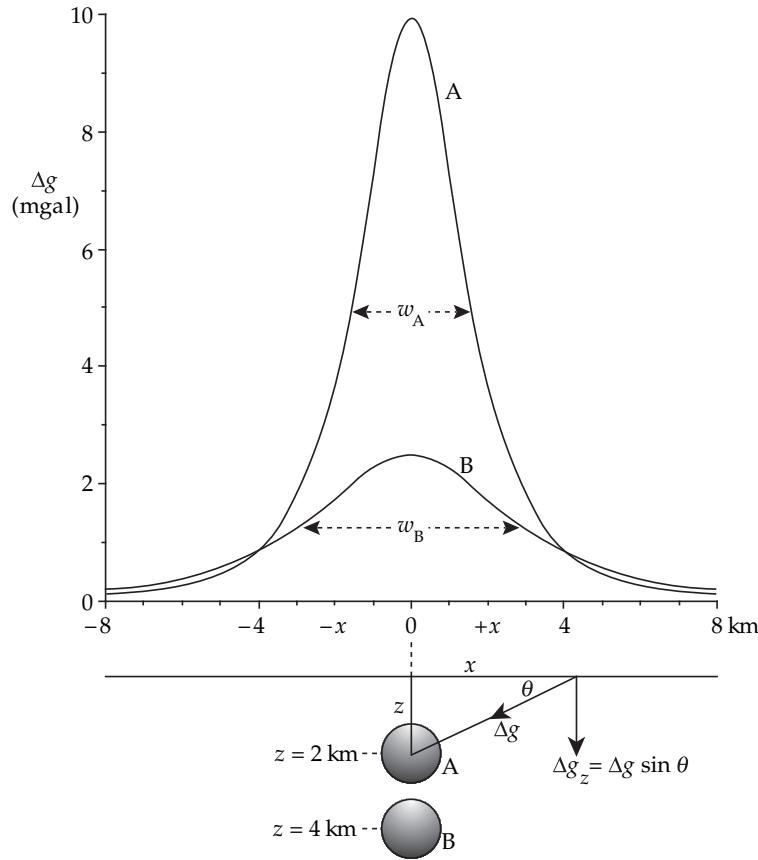


Figura 2.30: Anomalias de gravidade para esferas enterradas com o mesmo raio R e contraste de densidade $\Delta\rho$ mas com seus centros em diferentes profundidades z abaixo da superfície. A anomalia da esfera mais profunda B é mais plana e mais larga que a anomalia da esfera menor A .

lia de gravidade negativa. Um tampão vulcânico ($\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$) que invade um corpo de granito ($\rho_0 = 2600 \text{ kg m}^{-3}$) tem um contraste de densidade de $\Delta\rho = +200 \text{ kg m}^{-3}$, o que causa uma anomalia de gravidade positiva. As linhas de contorno em um mapa da anomalia são centralizadas no diapiro, então todos os perfis no centro da estrutura são equivalentes. O corpo anômalo pode ser modelado igualmente por um cilindro vertical ou por uma esfera, que nós iremos avaliar aqui por causa da simplicidade do modelo

Assumindo uma esfera de raio R e densidade de contraste $\Delta\rho$ com seu centro na profundidade z abaixo da superfície (Figura 2.30). A atração Δg da esfera é como se a massa anômala M da esfera estivesse concentrada em seu centro. Se medirmos a posição horizontal a partir de um ponto acima do seu centro, à distância x , a componente vertical Δg_z é dado por

$$\Delta g_z = \Delta g \sin \theta = G \frac{M}{r^2} \frac{z}{r} \quad (2.53)$$

onde

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\rho \quad \text{e} \quad r^2 = z^2 + x^2$$

Substituindo estas expressões na Equação (2.53) e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}\Delta g_z &= \frac{4}{3}\pi G \Delta \rho R^3 \frac{z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{4}{3}\pi G \left(\frac{\Delta \rho R^3}{z^2}\right) \left[\frac{1}{(1 + (x/z)^2)}\right]^{3/2}\end{aligned}\quad (2.54)$$

Os termos no primeiro par de parênteses dependem do tamanho, profundidade e densidade do contraste da esfera anômala. Eles determinam a amplitude máxima da anomalia, Δg_0 , que é alcançada sobre o centro da esfera em $x = 0$. O valor de pico é dado por

$$\Delta g_0 = \frac{4}{3}\pi G \left(\frac{\Delta \rho R^3}{z^2}\right) \quad (2.55)$$

Esta equação mostra como a profundidade ao centro da esfera afeta a amplitude de pico da anomalia; quanto maior a profundidade do centro, menor a amplitude (Figura 2.30). Para uma dada profundidade, a mesma anomalia de pico pode ser produzida por numerosas combinações de $\Delta \rho$ e R ; uma esfera grande com um contraste de baixa densidade pode fornecer uma anomalia idêntica a uma pequena esfera com um contraste de alta densidade. Os dados gravimétricos, por si só, não nos permitem resolver essa ambiguidade.

Os termos do segundo par de parênteses na Equação. (2.54) descrevem como a amplitude da anomalia varia com a distância ao longo do perfil. A anomalia é simétrica em relação a x , atinge um valor máximo Δg_0 sobre o centro da esfera ($x = 0$) e diminui para zero a grandes distâncias ($x = \infty$). Note que quanto maior a profundidade z , mais lentamente a amplitude diminui lateralmente com o aumento de x . Uma fonte profunda produz uma anomalia menor mas mais ampla do que a mesma fonte a uma profundidade menor. A largura w da anomalia, onde a amplitude tem metade do seu valor máximo, é chamada de “largura de meia altura”. A profundidade z para o centro da esfera é deduzida dessa largura de anomalia a partir da relação $z = 0.652w$.

2.9.2.5.2 Elemento de linha horizontal

Muitas estruturas geologicamente interessantes se estendem a grandes distâncias em uma direção, mas têm a mesma forma de seção transversal ao longo da trajetória da estrutura. Se o comprimento ao longo da direção fosse infinito, a variação bidimensional da densidade na área da seção transversal seria suficiente para modelar a estrutura. No entanto, isso não é realmente válido, pois a extensão lateral nunca é infinita. Como regra geral, se o comprimento da estrutura normal ao perfil for maior que vinte vezes sua largura ou profundidade, ela pode ser tratada como bidimensional (2D). Caso contrário, os efeitos finais devido à extensão lateral limitada da estrutura devem ser levados em conta no cálculo de sua anomalia. Um corpo alongado que requer correções finais é por vezes referido como uma estrutura 2.5D. Por exemplo, a distribuição de massa sob corpos alongados como anticlinais, sinclinais e falhas deve ser modelada como estruturas 2.5D. Aqui, vamos lidar com os modelos bidimensionais mais simples dessas estruturas.

Seja uma distribuição de massa linear infinitamente longa com massa m por unidade de comprimento que se estende horizontalmente ao longo do eixo y na profundidade z (Figura 2.31). A contribuição $d(\Delta g_z)$ para a anomalia da gravidade vertical Δg_z em um ponto no eixo x devido a um pequeno elemento de comprimento dy é

$$d(\Delta g_z) = G \frac{mdy}{r^2} \sin \theta = G \frac{mdy}{r^2} \frac{z}{r} \quad (2.56)$$

O elemento de linha se estende ao infinito ao longo dos eixos y positivo e negativo, então sua anomalia de gravidade vertical é encontrada pela integração:

$$\Delta g_z = Gmz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{r^3} = Gmz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(u^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.57)$$

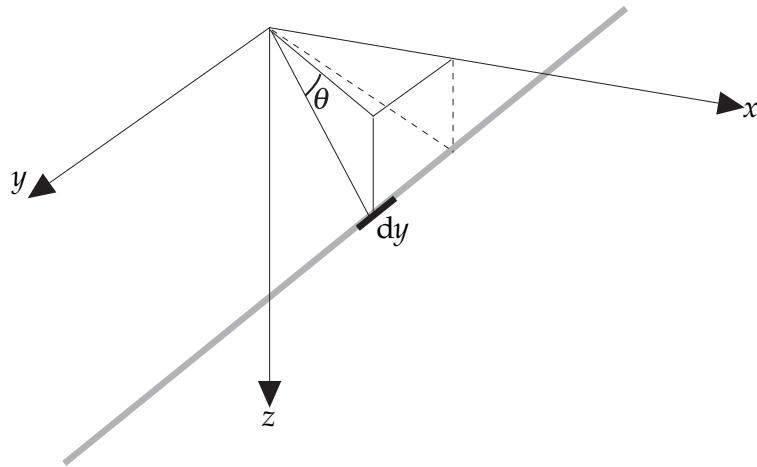


Figura 2.31: Geometria para cálculo da anomalia gravimétrica de uma distribuição de massa linear infinitamente longa com massa m por unidade de comprimento que se estende horizontalmente ao longo do eixo y na profundidade z .

onde $u^2 = x^2 + z^2$. A integração é simplificada pela mudança de variável, tal que $y = u \tan \varphi$; então $dy = u \sec^2 \varphi d\varphi$ e $(u^2 + y^2)^{3/2} = u^3 \sec^3 \varphi$. Isto dá

$$\Delta g_z = \frac{Gmz}{u^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \quad (2.58)$$

que após a avaliação da integral, temos

$$\Delta g_z = \frac{2Gmz}{z^2 + x^2}. \quad (2.59)$$

Esta expressão pode ser escrita como a derivada de uma função potencial Ψ

$$\Delta g_z = Gm \frac{2z}{u^2} = - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.60)$$

$$\Psi = Gm \log_e \left(\frac{1}{u} \right) = Gm \log_e \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \quad (2.61)$$

Ψ é chamado de *potencial logarítmico*. As equações (2.59) e (2.61) são resultados úteis para derivar fórmulas para a anomalia gravitacional de estruturas lineares como um anticlinal (ou sinclinal) ou uma falha.

2.9.2.5.3 Cilindro horizontal: modelo para anticlinal e sinclinal

A anomalia gravitacional de um anticlinal pode ser modelada assumindo que a dobra ascendente dos estratos trazendo rochas com maior densidade mais próxima da superfície (Figura 2.32a), causando, assim, um contraste de densidade positivo. Um sinclinal é modelado assumindo que seu núcleo é preenchido com camadas de baixa densidade que causam um contraste negativo de densidade. Em cada caso, o modelo geométrico da estrutura é um cilindro horizontal infinito (Figura 2.32b).

Um cilindro horizontal pode ser considerado como composto de numerosos elementos de linha paralelos ao seu eixo. A área da seção transversal de um elemento (Figura 2.33) fornece uma anomalia de massa por unidade de comprimento, $m = \Delta\rho r dr d\theta$. A contribuição $d\Psi$ de um elemento de linha para o potencial na superfície é

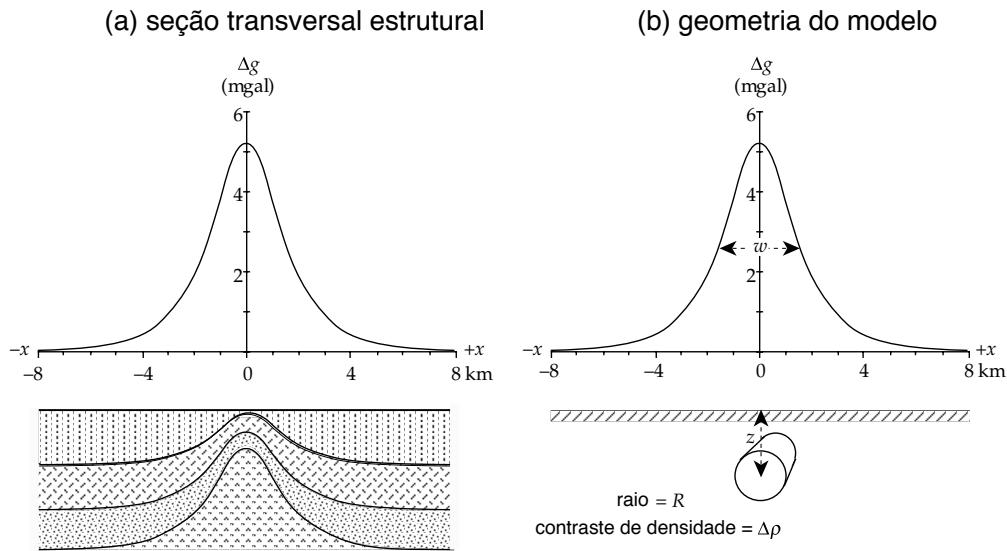


Figura 2.32: Cálculo da anomalia gravitacional de um anticlinal: (a) seção transversal estrutural, (b) geometria do modelo por um cilindro infinito.

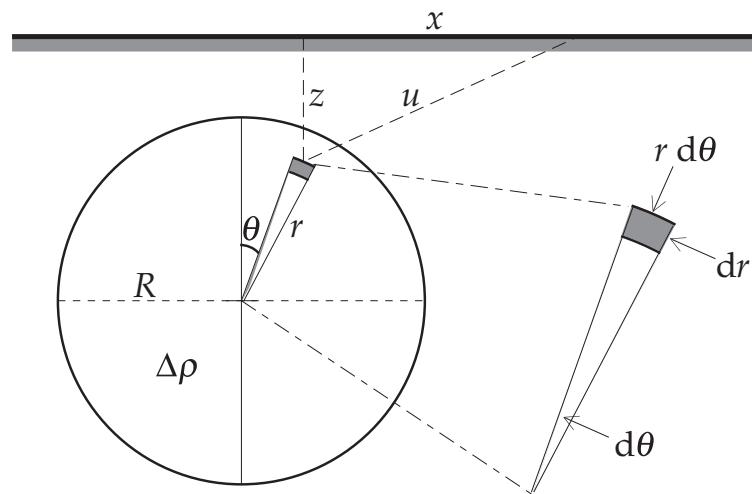


Figura 2.33: Geometria da seção transversal para o cálculo da anomalia gravitacional de um cilindro horizontal enterrado feito de elementos de linhas paralelos ao seu eixo.

$$d\Psi = 2G\Delta\rho \log_e \left(\frac{1}{u} \right) r dr d\theta \quad (2.62)$$

A integração sobre a seção transversal do cilindro dá o seu potencial Ψ ; a anomalia gravitacional vertical do cilindro é então encontrada diferenciando-se Ψ em relação a z . Observando que $du/dz = z/u$ conseguimos

$$\begin{aligned} \Delta g_z &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{z}{u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\ &= -\frac{2G\Delta\rho}{u} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial}{\partial u} \log_e \left(\frac{1}{u} \right) r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.63)$$

Depois de realizar a diferenciação dentro da integral, isso simplifica

$$\Delta g_z = \frac{2G\Delta\rho z}{u^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \frac{2\pi G R^2 \Delta\rho z}{x^2 + z^2} \quad (2.64)$$

Comparando as equações (2.64) e (2.59) é evidente que a anomalia gravitacional do cilindro é a mesma que a de um elemento de massa linear concentrado ao longo de seu eixo, com massa $m = \pi R^2 \Delta\rho$ por unidade de comprimento ao longo da direção da estrutura. A anomalia pode ser escrita

$$\Delta g_z = 2\pi G \left(\frac{\Delta\rho R^2}{z} \right) \left[\frac{1}{1 + (x/z)^2} \right] \quad (2.65)$$

A forma da anomalia em um perfil normal a estrutura (Figura 2.32b) assemelha-se à de uma esfera (Figura 2.30). O valor central do pico Δg_0 é dado por

$$\Delta g_0 = 2\pi G \left(\frac{\Delta\rho R^2}{z} \right) \quad (2.66)$$

A anomalia de um cilindro horizontal diminui lateralmente menos rapidamente que a de uma esfera, devido à longa extensão do cilindro normal ao perfil. A “largura de meia altura” da anomalia depende novamente da profundidade z do eixo do cilindro; Neste caso, a profundidade é dada por $z = 0.5w$.

2.9.2.5.4 Fina camada horizontal

Agora, calculamos a anomalia de uma fina camada horizontal de comprimento infinito normal ao plano do perfil. Isto é feito substituindo de modo fictício a camada por numerosos elementos de linha infinitamente longos colocados lado a lado. Seja a profundidade da camada ser z , sua espessura t e seu contraste de densidade $\Delta\rho$ (Figura 2.34a); a massa por unidade de comprimento na direção y de um elemento de linha de largura dx é $(\Delta\rho t dx)$. Substituindo na Equação (2.59) fornece a anomalia gravitacional do elemento de linha; a anomalia da fina camada é então computada pela integração entre os limites x_1 e x_2 (Figura 2.34b)

$$\begin{aligned} \Delta g_z &= 2G\Delta\rho t z \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2 + z^2} \\ &= 2G\Delta\rho t \left[\tan^{-1} \left(\frac{x_2}{z} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x_1}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Escrevendo $\tan^{-1}(x_1/z) = \phi_1$ e $\tan^{-1}(x_2/z) = \phi_2$ como na (Figura 2.34c) equação torna-se

$$\Delta g_z = 2G\Delta\rho t [\phi_2 - \phi_1] \quad (2.68)$$

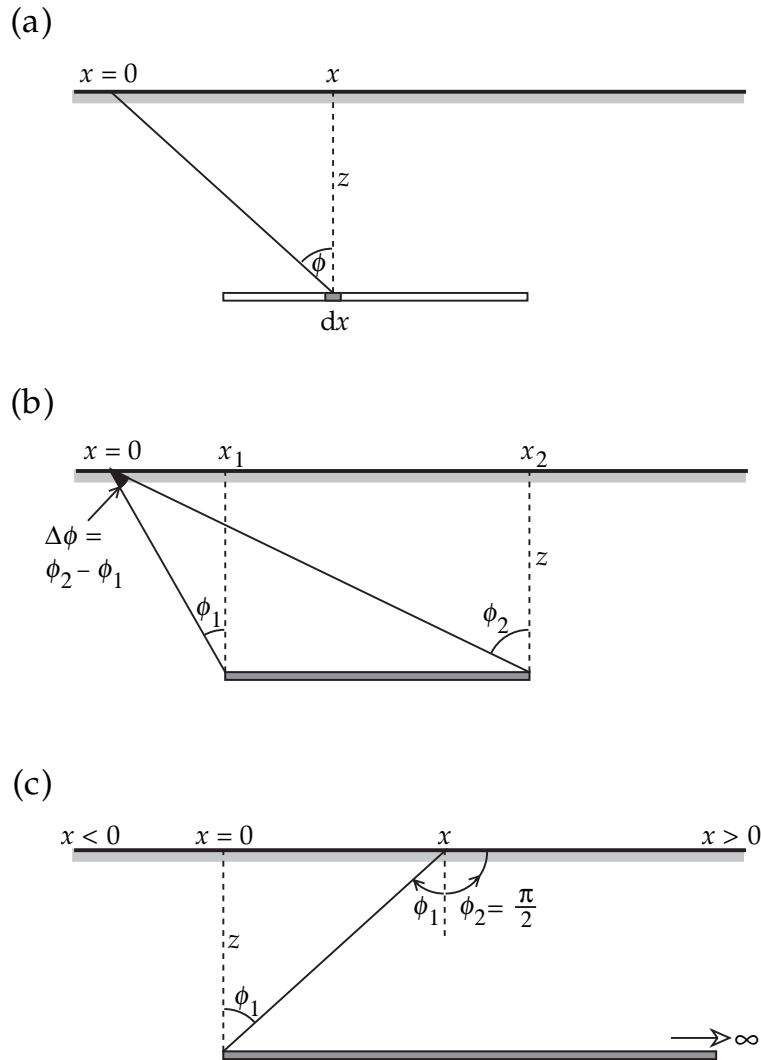


Figura 2.34: Geometria para cálculo da anomalia gravimétrica através de uma fina camada horizontal: (a) subdivisão da faixa em elementos de linha de largura dx , (b) fina faixa entre os limites horizontais x_1 e x_2 e (c) fina camada horizontal semi-infinita.

isto é, a anomalia gravitacional da fita horizontal é proporcional ao ângulo que ela subtende no ponto de medição.

A anomalia de uma folha horizontal semi-infinita é um caso limitante desse resultado. Para referência mais fácil, a origem de x é movida para a borda da folha, de modo que as distâncias para a esquerda são negativas e as da direita são positivas (Figura 2.34c). Isso faz $\phi_1 = -\tan^{-1}(x/z)$. A extremidade remota da folha está no infinito e $\phi_2 = \pi/2$. A anomalia da gravidade é então

$$\Delta g_z = 2G\Delta\rho t \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{x}{z} \right) \right] \quad (2.69)$$

Um outro exemplo é a folha horizontal infinita, que se estende ao infinito nas direções positiva e negativa x e y . Com $\phi_2 = \pi/2$ e $\phi_1 = -\pi/2$ a anomalia é

$$\Delta g_z = 2\pi G\Delta\rho t \quad (2.70)$$

que é a mesma expressão para a correção da placa Bouguer.

2.9.2.6 Calha horizontal: modelo para uma falha vertical

A anomalia gravitacional através de uma falha vertical aumenta progressivamente para um valor máximo sobre o lado elevado (Figura 2.35a). Isso é interpretado devido ao deslocamento ascendente do material mais denso, que causa um contraste de densidade horizontal ao longo de um degrau vertical de altura h (Figura 2.35b). O bloco com falha pode ser modelado como uma calha horizontal semi-infinita de altura h e contraste de densidade $\Delta\rho$ com seu ponto médio na profundidade z_0 (Figura 2.35c).

Considere a calha ser dividida em finas folhas semi-infinitas horizontais de espessura dz na profundidade z . A anomalia gravitacional de uma dada folha é dada pela Equação (2.69) com dz para a espessura t . A anomalia da calha semi-infinita é encontrada pela integração em relação a z sobre a espessura da calha; os limites de integração são $z - (h/2)$ e $z + (h/2)$. Depois de termos ligeiramente rearranjados isso dá

$$\Delta g_z = 2G\Delta\rho h \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{h} \int_{z_0-h/2}^{z_0+h/2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{z} \right) dz \right] \quad (2.71)$$

A segunda expressão entre parênteses é o valor médio do ângulo $\tan^{-1}(x/z)$ em média sobre a altura do degrau de falha. Isso pode ser substituído por uma boa aproximação pelo valor no ponto médio da degrau, na profundidade z_0 . Isto dá

$$\Delta g_z = 2G\Delta\rho h \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{x}{z_0} \right) \right] \quad (2.72)$$

Comparação desta expressão com a Equação (2.69) mostra que a anomalia da falha vertical (ou uma calha horizontal semi-infinita) é a mesma que se a calha anômala fosse substituída por uma fina camada de espessura h no ponto médio do degrau vertical. A equação (2.72) é chamada de “aproximação de fina folha”. Ela é precisa em cerca de 2% desde que $z_0 > 2h$.

2.10 Isostasia

2.11 Exercícios

Exercício 2.1. Descreva o princípio de funcionamento de um gravímetro.

Exercício 2.2. Explique por que um gravímetro só fornece medidas relativas de gravidade.

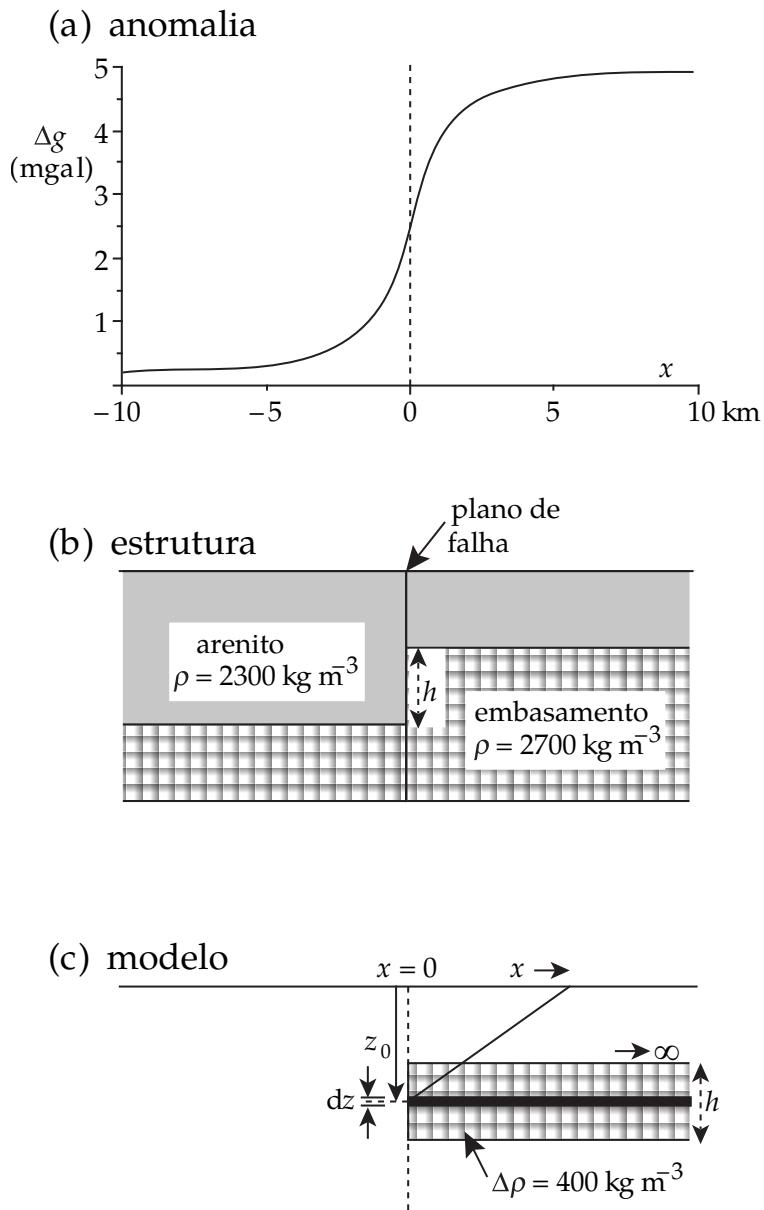


Figura 2.35: (a) A anomalia da gravidade através de uma falha vertical; (b) estrutura de uma falha com deslocamento vertical h , e (c) modelo do corpo anômalo como uma calha horizontal semi-infinita de altura h .

Exercício 2.3. O que é o geoide? O que é elipsoide de referência? Como e por que eles diferem?

Exercício 2.4. O que é uma anomalia geoidal? Explique como um positivo (ou negativa) surge a anomalia.

Exercício 2.5. O que é gravidade normal? O que a palavra normal implica? Qual superfície está envolvida?

Exercício 2.6. A aceleração gravitacional é direcionada para um centro de massa. Com a ajuda de um esboço que mostra que as direções das componentes da gravidade, explique por que a gravidade não é uma aceleração dirigida centralmente.

Exercício 2.7. Anote a expressão geral para a fórmula normal de gravidade. Explique o que determinam os parâmetros geofísicos em cada uma das constantes na fórmula?

Exercício 2.8. O que é a correção topográfica na redução de dados de gravidade? Por que isso é necessário?

Capítulo 3

Sismologia e a estrutura interna da Terra

3.1 Introdução

A sismologia é uma ciência venerável com uma longa história. O cientista chinês Chang Heng é creditado com a invenção em 132 dC, quase dois mil anos atrás, do primeiro sismoscópio funcional, um dispositivo primitivo, mas engenhoso, de construção elegante e design bonito que registrou a chegada de ondas sísmicas e permitiu ao observador inferir a direção de onde eles vieram. As origens dos terremotos não foram ao todo compreendidas. Durante séculos, esses temíveis eventos foram atribuídos a poderes sobrenaturais. A destruição e a perda de vidas que o acompanhavam eram freqüentemente entendidas em termos supersticiosos e interpretadas como punição infligida pelos deuses a uma sociedade pecaminosa. Menções bíblicas de terremotos - por exemplo, na destruição de Sodoma e Gomorra - enfatizam esse tema vingativo. Embora os primeiros astrônomos e filósofos procurassem explicar os terremotos como fenômenos naturais não relacionados a fatores espirituais, a crença de que os terremotos eram uma expressão da ira divina prevaleceu até o advento da Era da Razão no século XVIII. O caminho para uma compreensão lógica dos fenômenos naturais foi estabelecido no século XVII pelas observações sistemáticas de cientistas como Galileu, a descoberta e afirmação de leis físicas por Newton e o desenvolvimento do pensamento racional pelos filósofos contemporâneos. Além do desenvolvimento das técnicas de observação científica, uma compreensão das leis da elasticidade e da força limitada dos materiais era necessária antes que a sismologia pudesse progredir como ciência. Em um estudo pioneiro, Galileu, em 1638, descreveu a resposta de um feixe ao carregamento e, em 1660, Hooke estabeleceu a lei da primavera. No entanto, outros 150 anos se passaram antes que as equações generalizadas de elasticidade fossem estabelecidas por Navier. Durante as primeiras décadas do século XIX, Cauchy e Poisson completaram os fundamentos da moderna teoria da elasticidade. As descrições precoces das características do terremoto foram necessariamente restritas a observações e medições na região de “campo próximo” do terremoto, ou seja, em proximidade comparativamente próxima ao local onde ocorreu. Um avanço conspícuo na ciência da sismologia foi conseguido com a invenção de um sismógrafo sensível e confiável por John Milne em 1892. Embora macia e primitiva em comparação com instrumentos modernos, a precisão e a sensibilidade deste novo dispositivo revolucionário permitiram descrições precisas e quantitativas de terremotos a grandes distâncias de suas fontes, em sua região de “campo distante”. O acúmulo de registros confiáveis de terremotos distantes (designados como eventos “telessísmicos”) tornou possível o estudo sistemático da sismicidade da Terra e de sua estrutura interna. O grande terremoto de São Francisco, em 1906, foi intensamente estudado e forneceu um ímpeto aos esforços para entender a origem desses fenômenos naturais, que foram esclarecidos no mesmo ano pelo modelo elástico de rebote de H. F. Reid. Além disso, em 1906, R. D. Oldham propôs que a melhor explicação para os tempos de viagem das ondas telessísmicas através do corpo da Terra requeria um núcleo grande, denso e provavelmente fluido; a profundidade ao seu limite exterior foi calculado em 1913 por B. Gutenberg. A partir da análise dos tempos de viagem das ondas do corpo sísmico de perto de terremotos na Iugoslávia, A. Mohoroviči em 1909 inferiu a existência da fronteira

entre a crosta e o manto, e em 1936 a existência do sólido núcleo interno foi deduzida por I. Lehmann. As definições dessas e outras descontinuidades associadas à estrutura interna profunda da Terra, desde então, tem sido muito refinada. As necessidades das potências mundiais para detectar de maneira incontroversa o teste de bombas nucleares por seus adversários proporcionaram considerável estímulo à ciência da sismologia nas décadas de 1950 e 1960. A quantidade de energia liberada em uma explosão nuclear é comparável à de um terremoto, mas os fenômenos podem ser discriminados através da análise das direções do primeiro movimento registrado pelos sismógrafos. A localização precisa do evento exigiu um melhor conhecimento das velocidades sísmicas da onda de corpo em todo o interior da Terra. Essas necessidades políticas da Guerra Fria levaram a grandes melhorias na instrumentação sismológica e ao estabelecimento de uma nova rede mundial de estações sísmicas com as mesmas características físicas. Esses desenvolvimentos tiveram um importante feedback para as ciências da terra, porque resultaram em uma localização mais precisa dos epicentros do terremoto e uma melhor compreensão da estrutura da Terra. O padrão de sismicidade global, com sua concentração predominante em zonas estreitas ativas, foi um fator importante no desenvolvimento da teoria das placas tectônicas, pois permitiu a identificação das margens das placas e a sensação de movimentos relativos das placas. As técnicas de sismologia de refração e reflexão, utilizando explosões controladas artificialmente, foram desenvolvidas na busca por petróleo. Desde a década de 1960, esses métodos têm sido aplicados com notável sucesso na resolução de estruturas crustais detalhadas sob continentes e oceanos. O desenvolvimento de uma poderosa tecnologia de computadores possibilitou refinamentos na localização do terremoto e na determinação dos tempos de viagem das ondas sísmicas de corpo. Esses avanços levaram ao moderno campo da tomografia sísmica, uma técnica poderosa e espetacular para revelar regiões do interior da Terra que têm velocidades sísmicas anômalas. No campo da sismologia do terremoto, a necessidade de proteger populações e estruturas criadas pelo homem resultou no investimento de um esforço considerável no estudo da previsão de terremotos e no desenvolvimento de códigos de construção para reduzir os danos do terremoto. Para apreciar como os sismólogos descobriram a estrutura do interior da Terra, é necessário entender que tipos de ondas sísmicas podem ser geradas por um terremoto ou uma fonte artificial (como uma explosão controlada). A propagação de um distúrbio sísmico através da Terra é governada por propriedades físicas, como a densidade, e pela maneira como o material do interior da Terra reage à perturbação. O material dentro da fonte sísmica sofre deformação permanente, mas fora da fonte a passagem de um distúrbio sísmico ocorre predominantemente pelo deslocamento elástico do meio; isto é, o meio não sofre deformação permanente. Antes de analisar os diferentes tipos de ondas sísmicas, é importante ter uma boa noção da teoria da elasticidade elementar. Isso requer a compreensão dos conceitos de tensão e deformação, e as várias constantes elásticas que os relacionam.

3.2 Teoria da Elasticidade

3.2.1 Comportamento elástico, anelástico e plástico dos materiais

Quando uma força é aplicada a um material, ele se deforma. Isso significa que as partículas do material são deslocadas de suas posições originais. Desde que a força não excede um valor crítico, os deslocamentos são reversíveis; as partículas do material retornam às suas posições originais quando a força é removida, e nenhuma deformação permanente resulta. Isso é chamado de comportamento elástico. As leis da deformação elástica são ilustradas pelo exemplo a seguir. Considere um bloco cilíndrico de altura h e área de seção transversal A , submetido a uma força F que atua para estender o bloco para uma altura Δh (Figura 3.1).

Experimentos mostram que, para a deformação elástica, Δh é diretamente proporcional à força aplicada e à dimensão não esticada do bloco, mas é inversamente proporcional à seção transversal do bloco. Isto é, $\Delta h = \frac{Fh}{A}$ ou

$$\frac{F}{A} = \frac{\Delta h}{h} \quad (3.1)$$

Quando a área A se torna infinitesimalmente pequena, o valor limite da força por unidade de área (F/A) é chamado de tensão ou esforço. As unidades de tensão são as mesmas que as unidades de pressão. A unidade SI é o pascal, equivalente a uma força de 1 Newton por metro quadrado: $1 \text{ Pa} = \frac{N}{m^2}$, no c.g.s. a

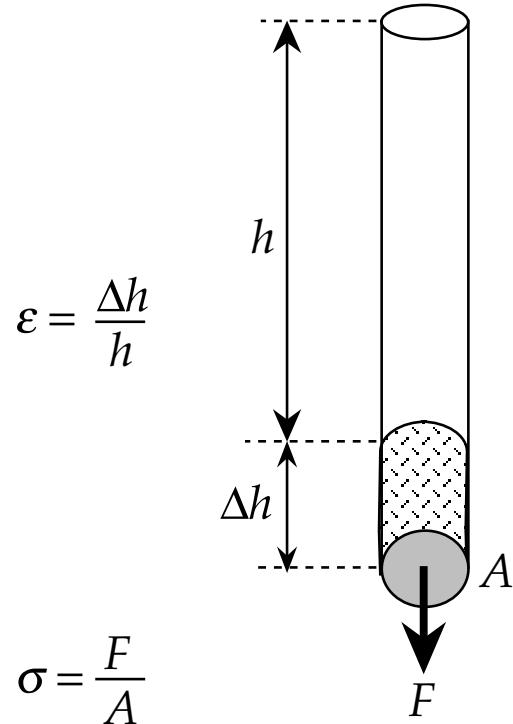


Figura 3.1: Uma força F atuando em uma barra com área transversal A estende o comprimento original h pela quantidade Δh . A lei de Hooke de deformação elástica afirma que Δ/h é proporcional a F/A .

unidade é igual a 106 dina cm^{-2} . Quando h é infinitesimalmente pequeno, a mudança fracionária na dimensão ($\Delta h/h$) é chamada de deformação ϵ , que é uma quantidade adimensional. A equação (3.1) afirma que, para o comportamento elástico, a deformação em um corpo é proporcional à tensão aplicada a ele. Esse relacionamento linear é chamado lei de Hooke que forma a base da teoria da elasticidade.

Além de um certo valor do tensão, chamado de limite de proporcionalidade, a lei de Hooke não mais se sustenta (Figura 3.2a). Embora o material ainda seja elástico (retorna à sua forma original quando a tensão é removida), a relação tensão-deformação não é linear. Se o sólido for deformado além de um certo ponto, conhecido como limite elástico, ele não recuperará sua forma original quando a tensão for removida. Nesta faixa, um pequeno aumento na tensão aplicada causa um aumento desproporcionalmente grande na deformação. Diz-se que a deformação é plástica. Se a tensão aplicada é removida na faixa plástica, a deformação não retorna a zero; uma deformação permanente foi produzida. Eventualmente a tensão aplicada excede a força do material e a falha ocorre. Em algumas rochas, a falha pode ocorrer abruptamente dentro da faixa elástica; isso é chamado comportamento frágil. O comportamento não-frágil ou dúctil dos materiais sob tensão depende da escala de tempo da deformação (Figura 3.2b). Um material elástico deforma imediatamente após a aplicação de uma tensão e mantém uma deformação constante até que a tensão seja removida, sobre a qual a deformação retorna ao seu estado original. Um gráfico de tensão-tempo tem uma forma de caixa. No entanto, em alguns materiais, a tensão não atinge um valor estável imediatamente após a aplicação de uma tensão, mas sobe gradualmente para um valor estável. Esse tipo de resposta de tensão é característico de materiais anelásticos. Após a remoção da tensão, a deformação dependente do tempo retorna reversivelmente ao nível original. Na deformação plástica, a deformação continua aumentando enquanto a tensão é aplicada. Quando a tensão é removida, a deformação não retorna ao nível original; uma deformação permanente é deixada no material.

Nosso conhecimento da estrutura e natureza do interior da Terra derivou em grande parte dos estudos de ondas sísmicas liberadas por terremotos. Um terremoto ocorre na crosta ou no manto superior quando a tensão tectônica excede a força local das rochas e a falha ocorre. Longe da região de rompimento ondas

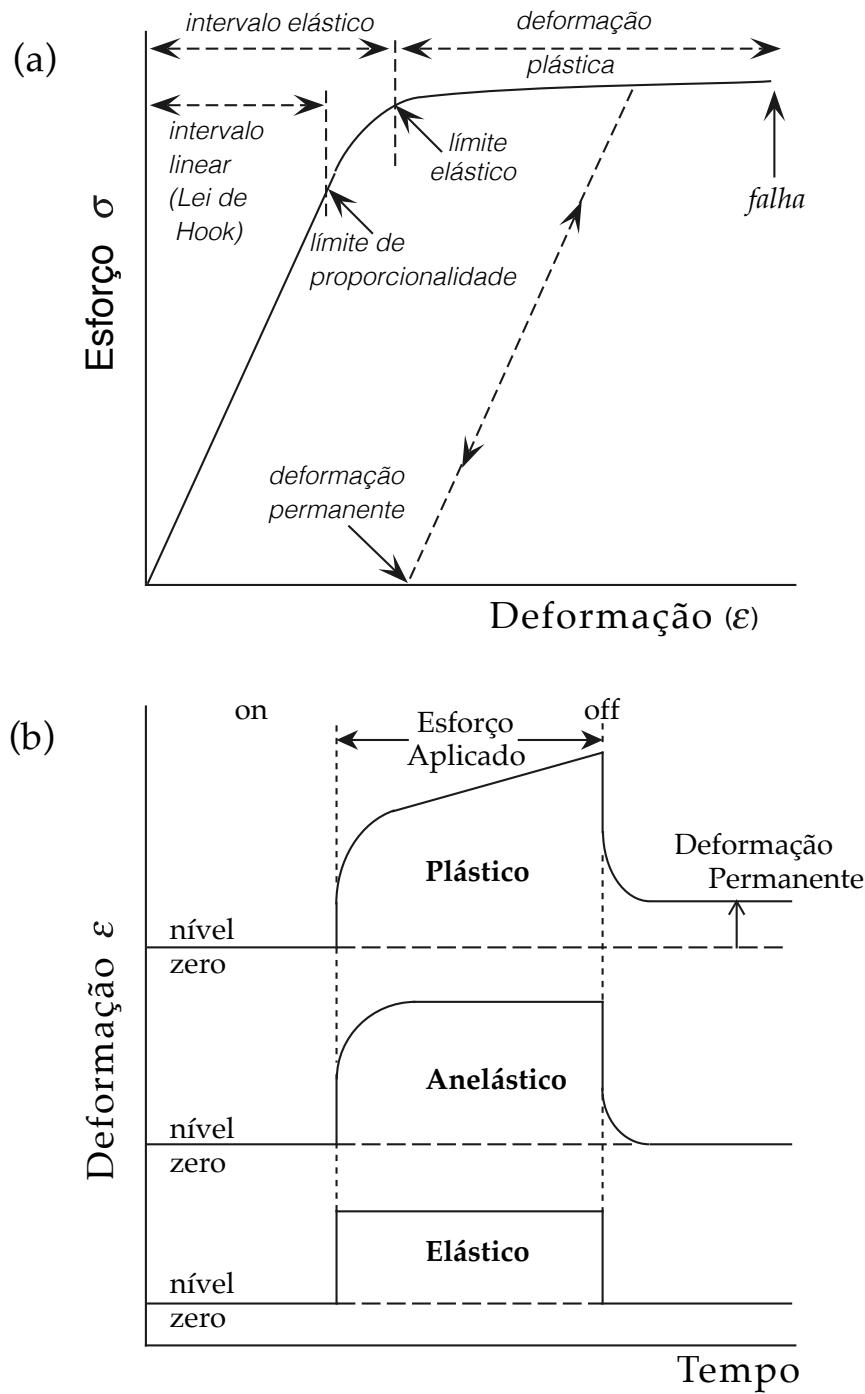


Figura 3.2: (a) A relação tensão-deformação para um sólido hipotético é linear (lei de Hooke) até o limite de proporcionalidade, e o material se deforma elasticamente até atingir o limite elástico; Deformação plástica produz mais tensão até que ocorra falha. (b) Variações de cepas elásticas, anelásticas e plásticas com o tempo, durante e após a aplicação de um esforço.

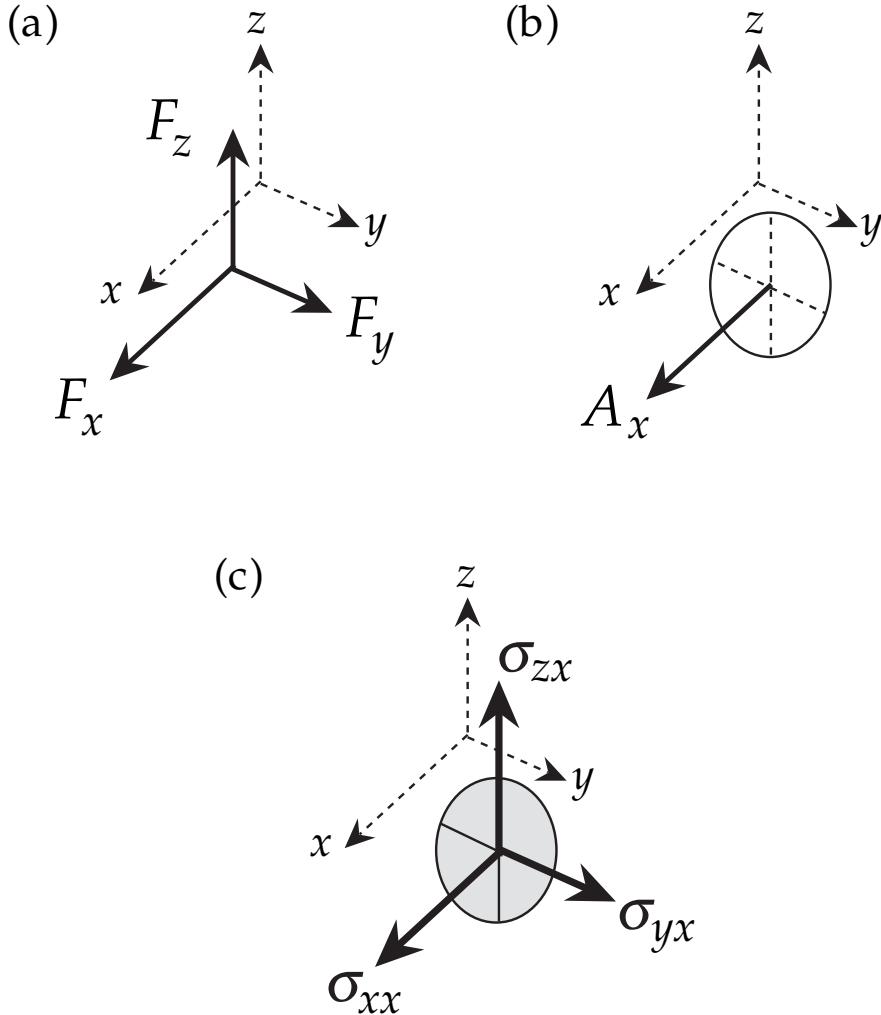


Figura 3.3: (a) Componentes F_x , F_y e F_z da força \mathbf{F} atuando em um referencial definido pelos eixos coordenados cartesianos ortogonais x , y e z . (b) A orientação de um pequeno elemento de superfície com área A_x é descrita pela direção normal à superfície. (c) As componentes de força paralelos ao eixo x resultam na tensão normal em σ_{xx} ; as componentes paralelos aos eixos y e z causam tensões de cisalhamento em σ_{yx} e σ_{zx} .

sísmicas se espalharam de um terremoto por deformação elástica das rochas através das quais eles viajam. Sua propagação depende de propriedades elásticas que são descritas pelas relações entre esforço e tensão.

3.2.2 Matriz de Tensão

Considere uma força \mathbf{F} atuando sobre um prisma retangular P em um referencial definido pelos eixos de coordenadas cartesianas ortogonais x , y e z (Figura 3.3a). A componente de \mathbf{F} que atua na direção do eixo x é designado F_x ; a força \mathbf{F} é totalmente definida pelas suas componentes F_x , F_y e F_z . O tamanho de um pequeno elemento de superfície é caracterizado por sua área \mathbf{A} , enquanto sua orientação é descrita pela direção normal à superfície (Figura 3.3b). A pequena superfície com área normal ao eixo x é designada por A_x .

A componente da força F_x atuando normal à superfície A_x produz uma tensão normal, denotada por σ_{xx} . As componentes da força ao longo dos eixos x e z resultam em tensões de cisalhamento σ_{yx} e σ_{zx} (Figura 3.3c), dadas por

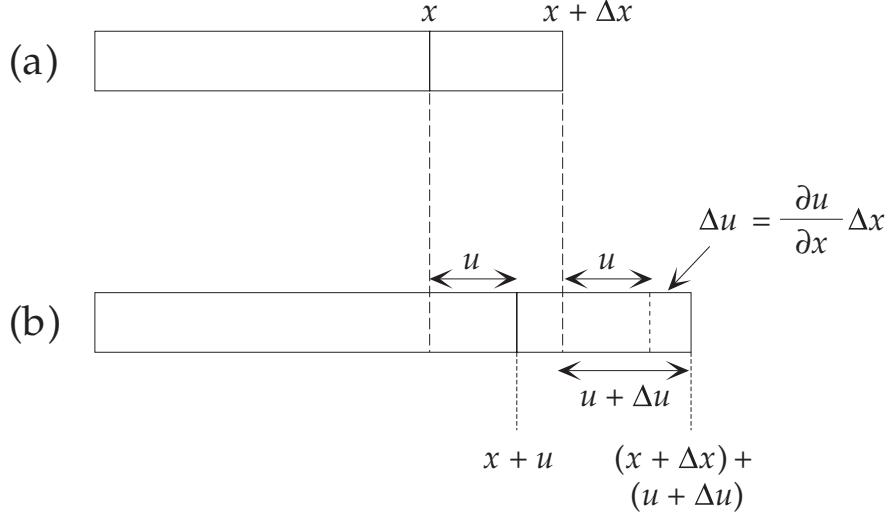


Figura 3.4: Deslocamentos infinitesimais u e $u + \Delta u$ de dois pontos em um corpo que estão localizados próximos nas posições x e $x + \Delta x$, respectivamente.

$$\sigma_{xx} = \lim_{A_x \rightarrow 0} \left(\frac{F_x}{A_x} \right) \quad \sigma_{yx} = \lim_{A_x \rightarrow 0} \left(\frac{F_y}{A_x} \right) \quad \sigma_{zx} = \lim_{A_x \rightarrow 0} \left(\frac{F_z}{A_x} \right) \quad (3.2)$$

Da mesma forma, as componentes da força \mathbf{F} atuando sobre um elemento da superfície A_y normal ao eixo y definem uma tensão normal σ_{yy} e tensões de cisalhamento σ_{xy} e σ_{zy} , enquanto as componentes de \mathbf{F} que atuam sobre um elemento de superfície A_z normal ao eixo z define uma tensão normal σ_{zz} e tensões de cisalhamento σ_{xz} e σ_{yz} . As nove componentes de tensão definem completamente o estado de tensão de um corpo. Elas são descritas convenientemente pela matriz de tensão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

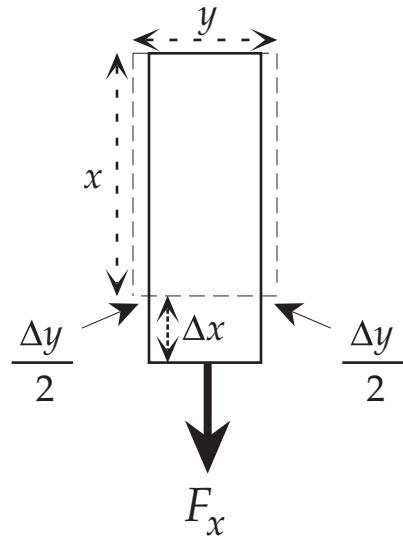
Se as forças de um corpo são equilibradas para não dar rotação, esta matriz 3×3 é simétrica (isto é, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$) e contém apenas seis elementos independentes.

3.2.3 Matriz de Deformação

3.2.3.1 Deformação longitudinal

As deformações produzidas em um corpo também podem ser expressas por uma matriz 3×3 . Considere primeiro o caso unidimensional mostrado na Figura 3.4 de dois pontos em um corpo localizado próximo nas posições x e $(x + \Delta x)$. Se o ponto x é deslocado por uma quantidade infinitesimalmente pequena u na direção do eixo x , o ponto $(x + \Delta x)$ será deslocado por $(u + \Delta u)$, onde Δu é igual a $(\partial u / \partial x) \Delta x$ para primeira ordem. A *deformação longitudinal ou extensão* na direção x é a variação fracionária no comprimento de um elemento ao longo do eixo x . A separação original dos dois pontos era Δx ; um ponto foi deslocado por u , o outro por $(u + \Delta u)$, então a nova separação dos pontos é $(\Delta x + \Delta u)$. A componente da deformação paralela ao eixo x , resultante de um pequeno deslocamento paralelo ao eixo x , é denotado ε_{xx} e é dado por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$



Razão de Poisson:

$$\nu = -\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$$

Figura 3.5: Mudança de forma de uma barra retangular sob extensão. Quando esticada paralelamente ao eixo x , ela se torna mais fina paralelamente ao eixo y e o eixo z .

A descrição da deformação longitudinal pode ser expandida para três dimensões. Se um ponto (x, y, z) é deslocado por uma quantidade infinitesimal para $(x+u, y+v, z+w)$, duas outras deformações longitudinais ε_{yy} e ε_{zz} são definidas por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.5)$$

Em um corpo elástico, as deformações transversais ε_{yy} e ε_{zz} não são independentes da deformação ε_{xx} . Considere a mudança de forma da barra na Figura 3.5. Quando ela é esticada paralelamente ao eixo x , torna-se mais fina paralelamente ao eixo y e paralelamente ao eixo z . As deformações longitudinais transversais ε_{yy} e ε_{zz} são de sinal oposto, mas são proporcionais à extensão ε_{xx} e podem ser expressas como

$$\varepsilon_{yy} = -v\varepsilon_{xx} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{zz} = -w\varepsilon_{xx} \quad (3.6)$$

A constante de proporcionalidade v é chamada razão de Poisson. Os valores das constantes elásticas de um material restringem-se a situar-se entre 0 (sem contração lateral) e um valor máximo de 0,5 (sem alteração de volume) para um fluido incompressível. Em rochas muito duras, rígidas como o granito v é de cerca de 0.45, enquanto que em sedimentos mal consolidados é de cerca de 0.05. No interior da Terra, v geralmente tem um valor em torno de 0.24 – 0.27. Um corpo para o qual o valor de v é igual a 0.25 às vezes chamado de corpo de Poisson ideal.

3.2.3.2 Dilatação

A *dilatação* θ é definida como a mudança fracionária no volume de um elemento no limite quando sua área de superfície diminui para zero. Considere um elemento de volume não deformado (como na descrição da deformação longitudinal) que tem lados Δx , Δy e Δz e volume sem distorção $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Como resultado dos deslocamentos infinitesimais Δu , Δv e Δw , as arestas aumentam para $\Delta x + \Delta u$, $\Delta y + \Delta v$ e $\Delta z + \Delta w$, respectivamente. A mudança fracionária no volume é

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{(\Delta x + \Delta u)(\Delta y + \Delta v)(\Delta z + \Delta w) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \frac{\Delta x \Delta y \Delta z + \Delta u \Delta y \Delta z + \Delta v \Delta z \Delta x + \Delta w \Delta x \Delta y - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\end{aligned}\quad (3.7)$$

onde quantidades muito pequenas, como $\Delta u \Delta v$, $\Delta v \Delta w$, $\Delta w \Delta u$ e $\Delta u \Delta v \Delta w$ foram ignoradas. No limite, como Δx , Δy e Δz todos se aproximam de zero, obtemos a dilatação

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \theta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\end{aligned}\quad (3.8)$$

3.2.3.3 Tensão de Cisalhamento

Durante a deformação, um corpo geralmente experimenta não apenas deformações longitudinais como descrito acima. As componentes de Tensão de cisalhamento (σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx}) produzem tensões de cisalhamento, que se manifestam como mudanças nas relações angulares entre partes de um corpo. Isso é mais facilmente ilustrado em duas dimensões. Considere um retângulo $ABCD$ com lados x e y e sua distorção devido as tensões de cisalhamento atuando no plano $x - y$ (Figura 3.6). Como no exemplo anterior da deformação longitudinal, o ponto A é deslocado paralelamente ao eixo x por uma quantidade u (Figura 3.6a).

Por causa da deformação de cisalhamento, pontos entre A e D experimentam deslocamentos x maiores quanto mais longe eles estiverem do ponto A . O ponto D que está a uma distância vertical Δy acima de A é deslocado pela quantidade $(\partial u / \partial y) \Delta y$ na direção do eixo x . Isso causa uma rotação no sentido horário do lado AD através de um pequeno ângulo ϕ_1 dado por

$$\tan \phi_1 = \frac{(\partial u / \partial y) \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.9)$$

Similarmente, o ponto A é deslocado paralelamente ao eixo y por uma quantidade v (Figura 3.6.b), enquanto o ponto B que está a uma distância horizontal Δx de A é deslocado pela quantidade $(\partial v / \partial x) \Delta x$ na direção do eixo y . Como resultado, o lado AB gira no sentido anti-horário através de um pequeno ângulo ϕ_2 dado por

$$\tan \phi_2 = \frac{(\partial v / \partial x) \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.10)$$

A deformação elástica envolve deslocamentos e distorções infinitamente pequenas e, para pequenos ângulos, podemos escrever $\tan \phi_1 = \phi_1$ e $\tan \phi_2 = \phi_2$. A deformação de cisalhamento no plano xy (ε_{xy}) é definida como metade da distorção angular total (Figura 3.6.c):

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

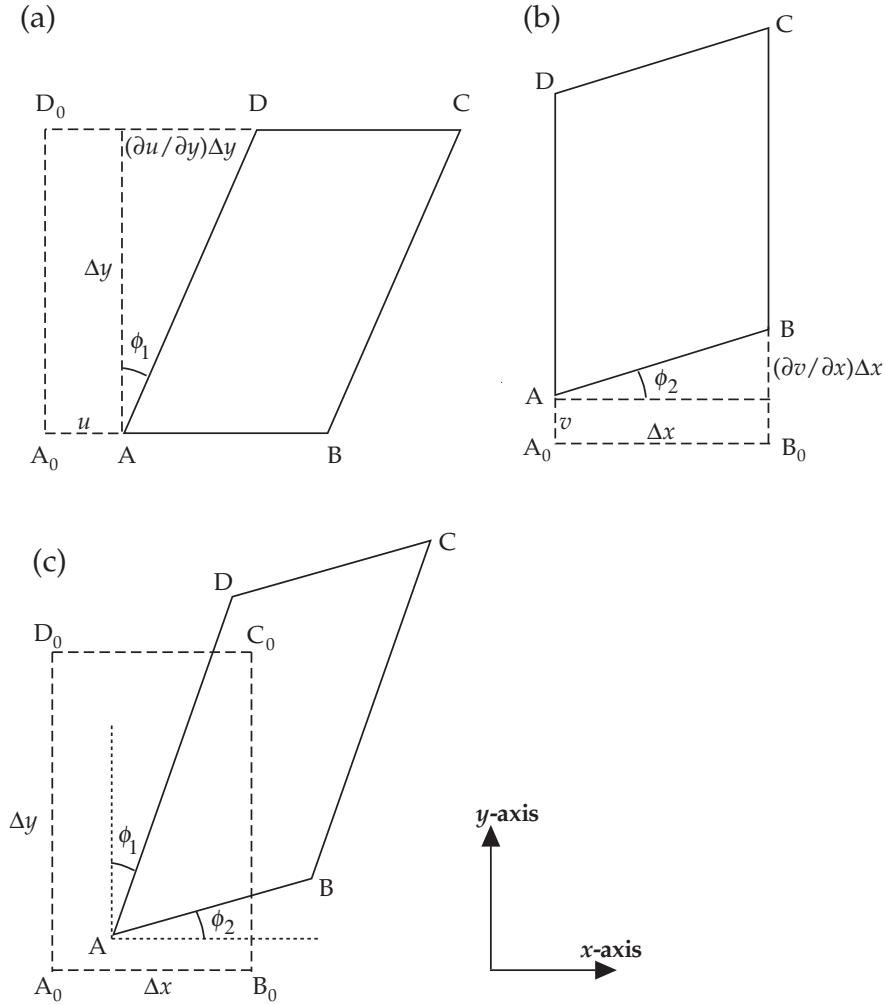


Figura 3.6: a) Quando um quadrado é cortado paralelamente ao eixo x , o lado AD paralelo ao eixo y gira através de um pequeno ângulo ϕ_1 ; (b) quando é cortada paralelamente ao eixo y , o lado AB paralelo ao eixo x gira através de um pequeno ângulo ϕ_2 . Em geral, o cisalhamento faz com que ambos os lados girem, dando uma deformação angular total ($\phi_1 + \phi_2$). Em cada caso, a diagonal AC é estendida.

Transpondo x e y , e os deslocamentos correspondentes u e v , a componente de cisalhamento ε_{yx} é obtida:

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.12)$$

Isso é idêntico ao ε_{xy} . A distorção angular total no plano xy é $(\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx}$. Da mesma forma, as componentes de tensão ε_{yz} ($= \varepsilon_{zy}$) e ε_{zx} ($= \varepsilon_{xz}$) são definidos para distorções angulares nos planos yz e zx , respectivamente.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

As deformações longitudinais e de cisalhamento definem a matriz de deformação 3x3 simétrica

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.2.4 Constantes elásticas

De acordo com a lei de Hooke, quando um corpo se deforma elasticamente, existe uma relação linear entre deformação e tensão. A relação entre tensão e deformação define uma constante elástica (ou módulo de elasticidade) do corpo. A tensão é em si uma relação de comprimentos e, portanto, sem dimensão. Assim, os módulos elásticos devem ter as unidades de tensão ($N\ m^{-2}$). Os módulos elásticos, definidos para diferentes tipos de deformação, são o módulo de Young, o módulo de rigidez e o módulo de incompressibilidade (volume).

O módulo de Young é definido a partir da deformação extensional. Cada deformação longitudinal é proporcional ao componente de tensão correspondente, isto é,

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad \sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} \quad \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$$

onde a constante de proporcionalidade, E , é módulo de Yong.

O módulo de rigidez (ou módulo de cisalhamento) é definido a partir da deformação de cisalhamento. Como as deformações longitudinais, a deformação total de cisalhamento em cada plano é proporcional ao componente de tensão de cisalhamento correspondente:

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \quad \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx}$$

onde a constante de proporcionalidade, μ , é o módulo de rigidez e o fator 2 surge como explicado nas equações (3.11) e (3.12).

O módulo de incompressibilidade (ou de volume) é definido a partir da dilatação experimentada por um corpo sob pressão hidrostática. As componentes de cisalhamento da tensão são zero para condições hidrostáticas ($\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$), e a pressão interna (tensão normal negativa) é igual em todas as direções ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$). O módulo de incompressibilidade, K , é a relação entre a pressão hidrostática e a dilatação, isto é,

$$p = -K\theta$$

O inverso do módulo de incompressibilidade (K^{-1}) é chamada de *compressibilidade*.

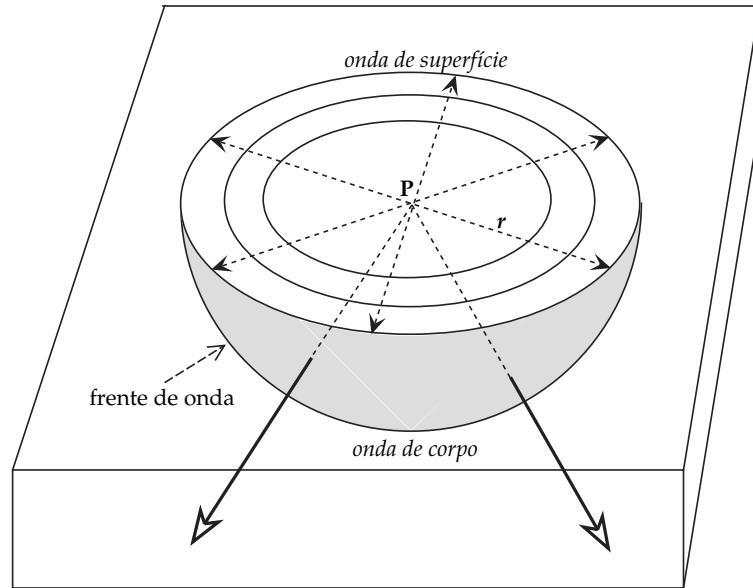


Figura 3.7: Propagação de um distúrbio sísmico de uma fonte pontual P perto da superfície de um meio homogêneo; a perturbação viaja como uma onda do corpo através do meio e como uma onda de superfície ao longo da superfície livre.

3.3 Ondas sísmicas

3.3.1 Introdução

A propagação de um distúrbio sísmico através de um meio heterogêneo é extremamente complexa. Para derivar as equações que descrevam adequadamente a propagação, é necessário fazer suposições simplificadoras. A heterogeneidade do meio é frequentemente modelada dividindo-a em camadas paralelas, em cada uma das quais condições homogêneas são assumidas. Por escolha adequada da espessura, densidade e propriedades elásticas de cada camada, as condições reais podem ser aproximadas. O pressuposto mais importante sobre a propagação de um distúrbio sísmico é que ele viaja por deslocamentos elásticos no meio. Esta condição certamente não se aplica perto da fonte sísmica. Em ou perto de um foco de terremoto ou o ponto de tiro de uma explosão controlada, o meio é destruído. As partículas do meio são deslocadas permanentemente de seus vizinhos; a deformação é anelástica. No entanto, quando um distúrbio sísmico percorreu uma certa distância de sua fonte, sua amplitude diminui e o meio se deforma elasticamente para permitir sua passagem. As partículas do meio realizam movimentos harmônicos simples, e a energia sísmica é transmitida como um conjunto complexo de movimentos de ondas. Quando a energia sísmica é liberada repentinamente em um ponto P próximo à superfície de um meio homogêneo (Figura 3.7), parte da energia se propaga através do corpo do meio como ondas sísmicas do corpo. A parte restante da energia sísmica se espalha pela superfície como uma onda de superfície sísmica, análoga às ondulações na superfície de uma poça de água na qual uma pedra foi lançada.

3.3.2 Ondas Sísmicas de Corpo

Quando uma onda de corpo atinge uma distância r de sua fonte em um meio homogêneo, a frente de onda (definida como a superfície na qual todas as partículas vibram com a mesma fase) tem uma forma esférica, e a onda é chamada de onda esférica. À medida que a distância da fonte aumenta, a curvatura da frente de onda esférica diminui. A grandes distâncias da fonte, a frente de onda é tão plana que pode ser considerada como um plano e a onda sísmica é chamada de onda plana. A direção perpendicular à frente de onda é chamada de caminho do raio sísmico. A descrição do movimento harmônico em ondas planas é mais simples do que para ondas esféricas, porque para ondas planas podemos usar coordenadas cartesianas ortogonais. Mesmo para as ondas planas, a descrição matemática dos deslocamentos tridimensionais da onda do corpo

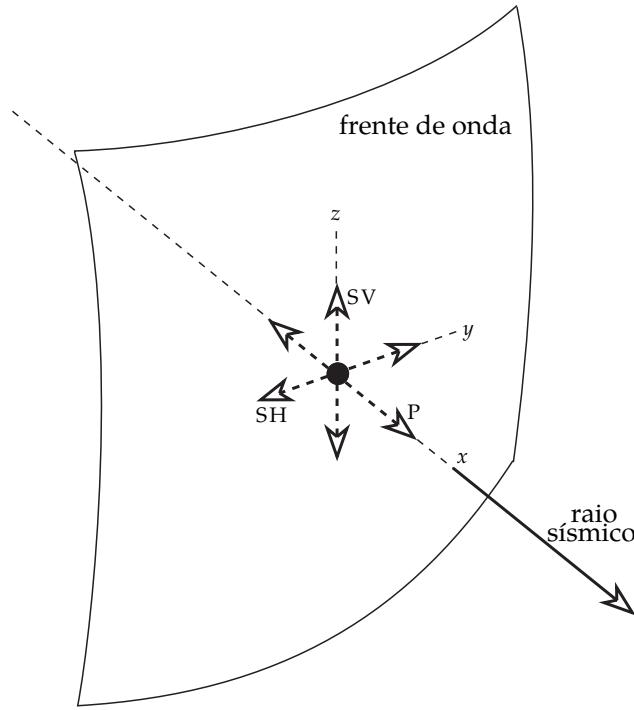


Figura 3.8: Representação de uma vibração generalizada como componentes paralelas a três eixos de referência ortogonais. O movimento de partículas na direção x é para a frente e para trás paralelo à direção de propagação, correspondente à onda P . As vibrações ao longo dos eixos y e z estão no plano da frente de onda e são normais na direção da propagação. A vibração z em um plano vertical corresponde à onda SV ; a vibração y é horizontal e corresponde à onda SH .

da frente de onda do meio é bastante complexa. No entanto, podemos aprender bastante sobre propagação de ondas do corpo a partir de uma descrição mais simples e menos rigorosa.

3.3.3 Ondas de compressão

Sejam os eixos de referência cartesiana definidos de modo que o eixo x seja paralelo à direção de propagação da onda plana; os eixos y e z , então, estão no plano da frente de onda (Figura 3.8). Uma vibração generalizada do meio pode ser reduzida a componentes paralelas a cada um dos eixos de referência. Na direção x , o movimento da partícula volta e avança paralelo à direção de propagação.

Isso resulta no meio sendo alternadamente esticado e condensado nessa direção (Figura 3.9a). Este movimento harmônico produz uma onda corporal que é transmitida como uma seqüência de rarefações e condensações paralelas ao eixo x .

Considere a perturbação do meio mostrado na Figura 3.9b. A área da frente de onda normal à direção x é A_x e a propagação da onda é tratada como unidimensional. Em uma posição arbitrária x (Figura 3.9c), a passagem da onda produz um deslocamento u e uma força F_x na direção x . Na posição $x+dx$ o deslocamento é $u + du$ e a força é $F_x + dF_x$. Aqui dx é o comprimento infinitesimal de um pequeno elemento de volume que tem massa $\rho dx A_x$. A força resultante que atua sobre este elemento na direção x é dada por

$$(F_x + dF_x) - F_x = dF_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \quad (3.15)$$

A força F_x é causada pelo elemento de tensão σ_{xx} atuando sobre a área A_x e é igual a $\sigma_{xx} A_x$. Isto nos permite escrever a equação unidimensional do movimento

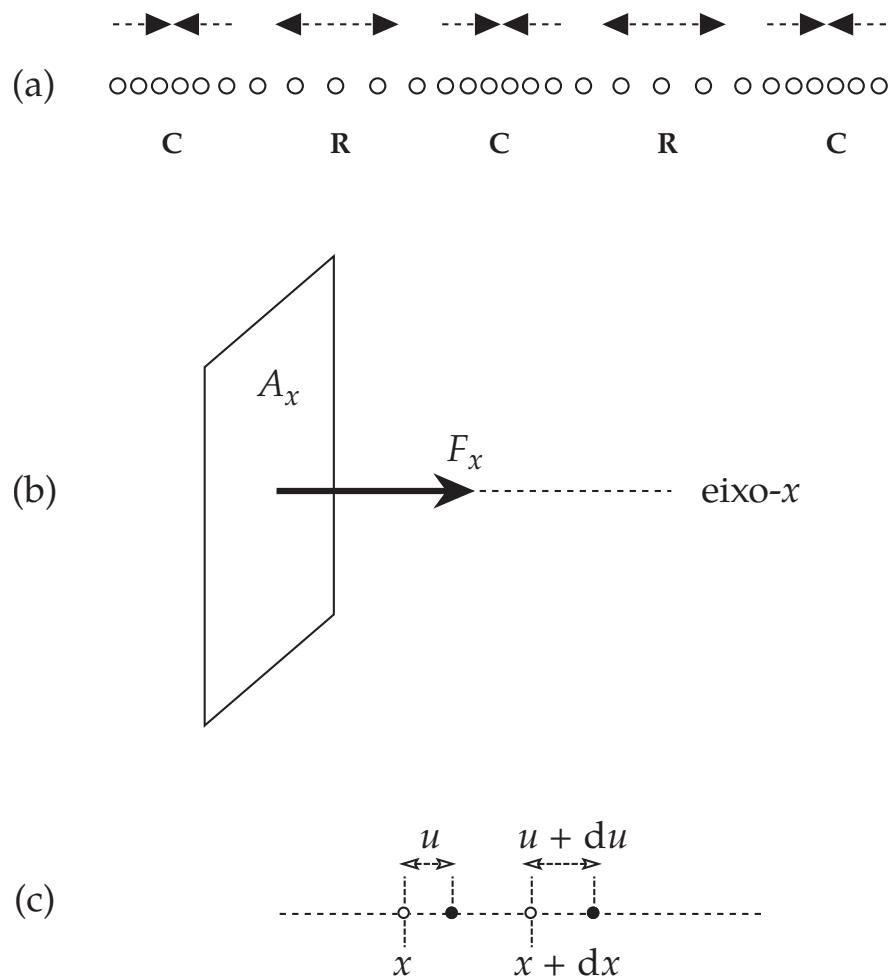


Figura 3.9: (a) O movimento de partículas em uma onda P unidimensional transmite energia como uma seqüência de rarefações (R) e condensações (C) paralelas ao eixo x . (b) Dentro da frente de onda, a componente da força F_x na direção x da propagação é distribuído sobre um elemento da área A_x normal ao eixo x . (c) Uma partícula na posição x experimenta um deslocamento longitudinal u na direção x , enquanto na posição próxima $x + dx$ o deslocamento correspondente é $u + du$.

$$(\rho dx A_x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = dx A_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (3.16)$$

Usando as definições do módulo de Young (E) e a deformação normal ε_{xx} temos que, para uma deformação unidimensional

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.17) na Equação (3.16) dá a equação da onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

onde V é a velocidade da onda, dada por

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.19)$$

em que a constante de proporcionalidade, E , é módulo de Yong e ρ é a densidade do meio.

Uma onda unidimensional é bastante restritiva. Ele representa o alongamento e a compressão na direção x como efeitos independentes do que acontece nas direções y e z . Em um sólido elástico, as deformações elásticas em qualquer direção são acopladas às deformações transversais pela razão de Poisson para o meio. Uma análise tridimensional leva em conta as mudanças simultâneas perpendiculares à direção da propagação. Neste caso, a área A_x não pode mais ser considerada constante. Em vez de olhar para os deslocamentos em apenas uma direção, todos os três eixos devem ser levados em conta. Isto é conseguido através da análise das mudanças no volume. A onda do corpo longitudinal (ou compressional) passa por um meio como uma série de dilatações e compressões. A equação da onda de compressão na direção x é

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

onde α é a velocidade da onda e é dada por

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (3.21)$$

A onda longitudinal é a mais rápida de todas as ondas sísmicas. Quando ocorre um terremoto, essa onda é a primeira a chegar a uma estação de gravação. Como resultado, é chamado de *onda primária* ou onda P . A Equação (3.21) mostra que as ondas P podem viajar através de sólidos, líquidos e gases, todos os quais são compressíveis ($K \neq 0$). Líquidos e gases não permitem cisalhamento. Consequentemente, $\mu = 0$, e a velocidade da onda de compressão em um líquido ou gás é dada por

$$\alpha = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3.22)$$

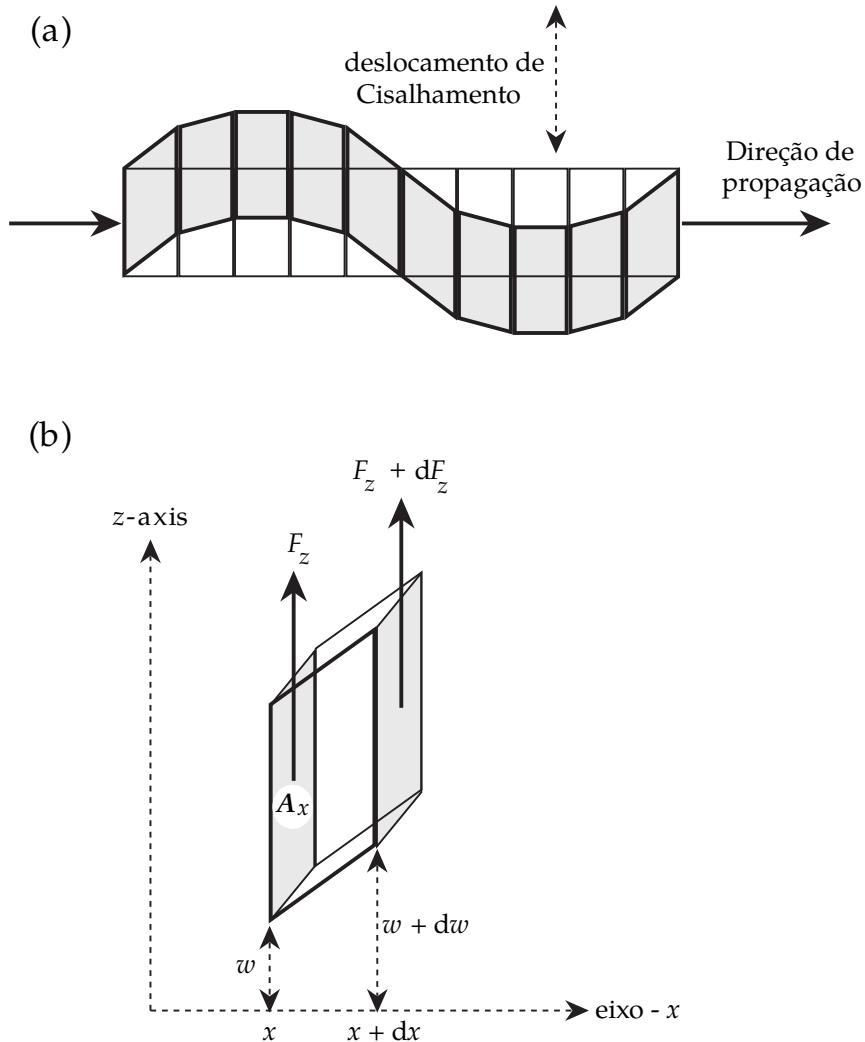


Figura 3.10: (a) Distorção de cisalhamento causada pela passagem de uma onda S unidimensional. (b) Deslocamentos e forças na direção z nas posições x e $x + dx$ delimitando um pequeno elemento cisalhado.

3.3.4 Ondas transversais

As vibrações ao longo dos eixos y e z (Figura 3.8) são paralelas à frente de onda e transversais à direção de propagação. Se desejarmos, podemos combinar os componentes y e z em um único movimento transversal. É mais conveniente, no entanto, analisar os movimentos nos planos vertical e horizontal separadamente. Aqui nós discutimos a perturbação no plano vertical definido pelos eixos x e z ; uma descrição análoga aplica-se ao plano horizontal.

O movimento das ondas transversais é semelhante ao observado quando uma corda é sacudida. Os planos verticais movem-se para cima e para baixo e os elementos adjacentes do meio experimentam distorções na forma (Figura 3.10a), mudando repetidamente de um retângulo para um paralelogramo e vice-versa. Elementos adjacentes do meio sofrem cisalhamento vertical.

Considere a distorção de um elemento delimitado por planos verticais separados por uma pequena distância horizontal dx (Figura 3.10b) em uma posição horizontal arbitrária x . A passagem de uma onda na direção x produz um deslocamento w e uma força F_z na direção z . Na posição $x + dx$ o deslocamento é $w + dw$ e a força é $F_z + dF_z$. A massa do pequeno elemento de volume delimitado pelos planos verticais é $\rho dx A_x$, onde A_x é a área do plano delimitador. A força resultante que atua sobre este elemento na direção z é dada por

$$(F_z + dF_z) - F_z = dF_z = \frac{\partial F_z}{\partial x} dx \quad (3.23)$$

A força F_z surge da tensão de cisalhamento σ_{xz} na área A_x e é igual a $\sigma_{xz}A_x$. A equação de movimento do elemento em cisalhamento verticalmente é

$$(\rho dx A_x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = dx A_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \quad (3.24)$$

Agora temos que modificar a expressão de Lamé para a lei de Hooke e a definição de tensão de cisalhamento de modo que eles se apliquem à passagem de uma onda de cisalhamento unidimensional na direção x . Nesse caso, como as áreas dos paralelogramos entre os planos verticais adjacentes são iguais, não há alteração de volume. A dilatação θ é zero, e a lei de Hooke é dada:

$$\sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} \quad (3.25)$$

Seguindo a definição de componentes de tensão de cisalhamento, nós temos

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

Para uma onda de cisalhamento unidimensional, não há mudança na distância dx entre os planos verticais; du e $\partial u / \partial z$ são zero e ε_{xz} é igual a $(\partial w / \partial x) / 2$. Em substituição na Equação (3.26) isso dá

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.27)$$

e em substituição adicional na Equação (3.24) e rearranjo os termos obtemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

onde β é a velocidade da onda de cisalhamento, dado por

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.29)$$

A única propriedade elástica que determina a velocidade da onda de cisalhamento é a rigidez ou o módulo de cisalhamento, μ . Em líquidos e gases, μ é zero e as ondas de cisalhamento não podem se propagar. Em sólidos, uma comparação rápida de Equações (3.21) e (3.29) dá

$$\alpha^2 - \frac{4}{3}\beta^2 = \frac{K}{\rho} \quad (3.30)$$

Por definição, o módulo de bulk K é positivo (se fosse negativo, um aumento na pressão de confinamento causaria um aumento no volume) e, portanto, α é sempre maior que β . Ondas de cisalhamento de um terremoto viajam mais lentamente que as ondas P e são registradas em uma estação de observação como chegadas posteriores. Ondas de cisalhamento são geralmente chamadas de ondas secundárias ou ondas S .

3.4 Sismologia do terremoto

3.4.1 Introdução

A maioria dos terremotos que sacodem a Terra a cada ano são tão fracos que só são registrados por sismógrafos sensíveis, mas alguns são fortes o suficiente para ter consequências sérias e até mesmo catastróficas para a humanidade e o meio ambiente. Cerca de 90% de todos os terremotos resultam de eventos tectônicos, principalmente movimentos de falhas. Os 10% restantes estão relacionados a vulcanismo, colapso de cavidades subterrâneas ou efeitos provocados pelo homem.

Nossa compreensão dos processos que levam a terremotos deriva em grande parte das observações de eventos sísmicos na falha de San Andreas, na Califórnia. O movimento relativo médio das placas adjacentes à falha de San Andreas é de cerca de 5 cm por ano, com o bloco a oeste da falha movendo-se para o norte. No plano da falha em si, esse movimento não é contínuo, mas ocorre espasmódicamente. De acordo com a moderna teoria tectônica de placas, este sistema de falhas extensivamente estudado é uma falha de transformação. Este é um tipo bastante especial, portanto, não se pode presumir que as observações relacionadas à falha de San Andreas sejam aplicáveis sem reservas a todas as outras falhas. No entanto, o *modelo de rebote elástico*, proposto por H. F. Reid após o terremoto de 1906 em San Francisco, é um guia útil sobre como um terremoto pode ocorrer.

O modelo é ilustrado na Figura 3.11 pelas mudanças em cinco linhas paralelas, desenhadas normal ao traço da falha no estado sem restrições e cruzando-a nos pontos *A* e *E*. A tensão devido ao movimento relativo dos blocos adjacentes à falha acumula-se ao longo de vários anos. Longe do traço da falha, as cinco linhas permanecem retas e paralelas, mas perto delas elas são dobradas. Quando o ponto de ruptura das rochas crustais em *C* é excedido, a ruptura ocorre e há um deslocamento violento no plano de falha. O deslocamento relativo que vem ocorrendo progressivamente entre as placas adjacentes durante anos ou décadas é alcançado no plano da falha em poucos segundos. As rochas tensas adjacentes à falha “ressalta” repentinamente. A energia de deformação acumulada é liberada com a velocidade sísmica das rochas rompidas, que é de vários quilômetros por segundo. Os segmentos *BC* e *C'D* sofrem compressão, enquanto *CD* e *BC'* experimenta dilatação. Os pontos *A* e *E* não se movem; a energia de tensão armazenada nesses pontos não é liberada. O comprimento total do plano de falha não é deslocado, apenas a região na qual o ponto de ruptura foi excedido. Quanto maior o comprimento do plano de falha que é ativado, maior é o terremoto subsequente.

A ocorrência de um grande terremoto não é necessariamente tão abrupta quanto descrita no parágrafo anterior, embora possa ser muito repentina. Em 1976, um grande terremoto de magnitude 7,8 atingiu uma área densamente povoada do norte da China, perto da cidade de Tangshan. Embora houvesse falhas conhecidas na área, elas estavam sísmicamente inativas há muito tempo, e o grande terremoto ocorreu sem aviso prévio. Quando ocorre um terremoto, a maior parte da energia armazenada é liberada no choque principal. No entanto, durante semanas ou meses após um grande terremoto, pode haver vários choques menores, conhecidos como réplicas, alguns dos quais podem ser comparáveis em tamanho ao terremoto principal. Estruturas enfraquecidas pelo evento principal frequentemente colapsam em grandes choques posteriores, o que pode causar danos físicos tão graves quanto o choque principal. O número de vítimas de tremores secundários provavelmente será menor, porque as pessoas evacuaram as estruturas danificadas.

Embora, na verdade, o terremoto envolva uma parte do plano de falhas medindo muitos quilômetros quadrados de área, do ponto de vista de um observador a uma distância de centenas ou mesmo milhares de quilômetros, o terremoto parece acontecer em um ponto. Esse ponto é chamado de foco ou hipocentro do terremoto (Figura 3.12). Geralmente ocorre em uma profundidade focal a muitos quilômetros abaixo da superfície da Terra. O ponto na superfície da Terra verticalmente acima do foco é chamado de epicentro do terremoto.

3.4.2 Localização do epicentro de um terremoto

A distância de uma estação sísmica a partir do epicentro de um terremoto (a distância epicentral) pode ser expressa em quilômetros Δ_{km} ao longo da superfície, ou pelo ângulo $\Delta^\circ = (180/\pi)(\Delta_{km}/R)$ subentendido no centro da Terra. Os tempos de viagem das ondas *P* e *S* de um terremoto através do corpo da Terra até um observador dependem da distância epicentral (Fig. 3.30a). Os gráficos do tempo de trânsito versus

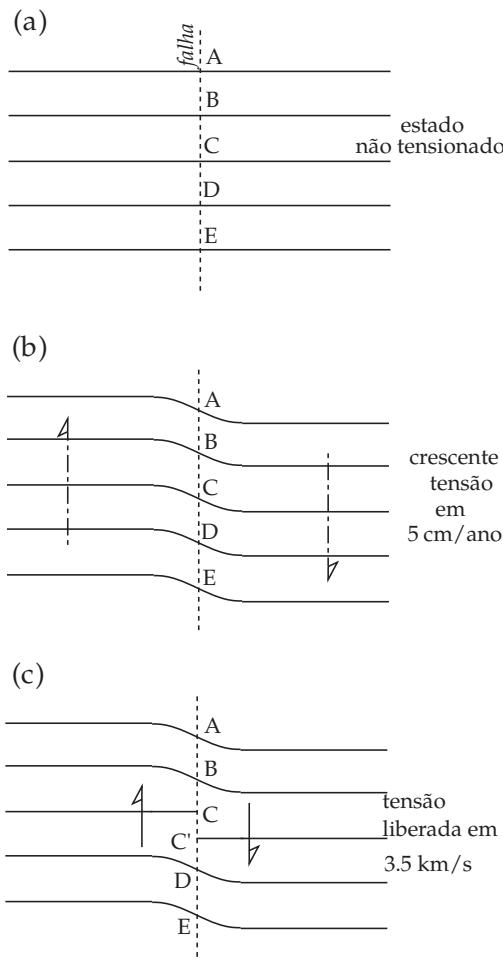


Figura 3.11: Modelo elástico de rebote da origem dos terremotos: (a) estado irrestrito de um segmento de falha, (b) acúmulo de deformação perto da falha devido ao movimento relativo dos blocos crustais adjacentes, e (c) ressalto do segmento esticado como um terremoto com acompanhamento da liberação de energia sísmica.

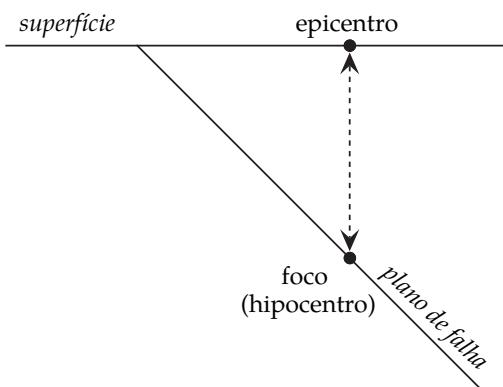


Figura 3.12: Seção vertical perpendicular ao plano normal da falha, definindo o epicentro e o foco (hipocentro) de um terremoto.

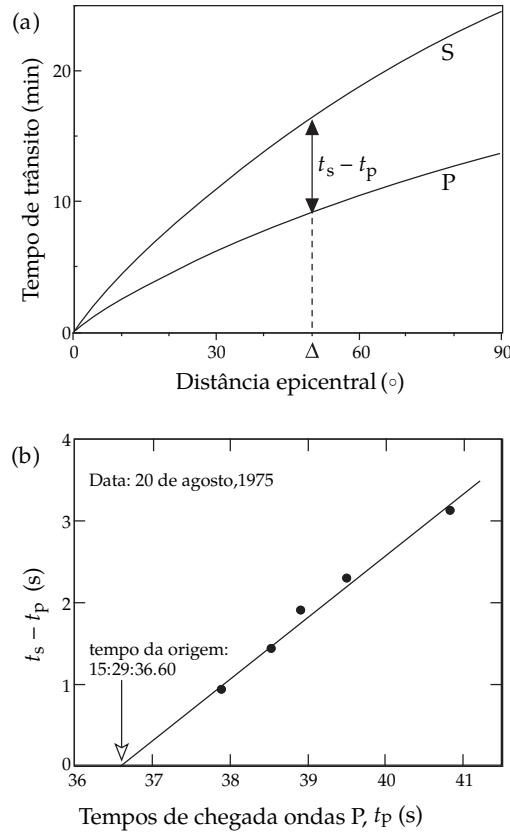


Figura 3.13: (a) Tempos de trânsito das ondas P e S de um terremoto através da Terra para um observador a distâncias epicentrais até 90° . A distância epicentral (Δ) do terremoto é encontrada a partir da diferença nos tempos de viagem ($t_s - t_p$). (b) diagrama de Wadati para determinar o tempo de ocorrência de um terremoto.

distância não são lineares, porque os trajetos dos raios das ondas viajando para sismógrafos distantes são curvos. No entanto, o perfil de velocidade sísmica padrão do interior da Terra é bem conhecido que os tempos de trânsito para cada tipo de onda podem ser tabulados ou representados graficamente em função da distância epicentral. Ao calcular a distância epicentral dos dados sísmicos, o tempo total de viagem não é conhecido a princípio, porque um observador raramente está no epicentro para registrar a hora exata da ocorrência t_0 do terremoto. Entretanto, a diferença nos tempos de viagem para as ondas P e S ($t_s - t_p$) pode ser obtida diretamente do sismograma; e ela aumenta com o aumento da distância epicentral (Figura 3.13a).

Para terremotos locais, podemos supor que as velocidades sísmicas α e β são razoavelmente constantes nas camadas próximas da superfície. O momento em que ocorreu o terremoto, t_0 , pode ser obtido plotando as diferenças ($t_s - t_p$) contra os tempos de chegada t_p da onda P em diferentes estações. O plot, chamado diagrama de Wadati, é uma linha reta (Figura 3.13b). Se D é a distância percorrida pela onda sísmica, os tempos de percurso das ondas P e S são respectivamente $t_p = D/\alpha$ e $t_s = D/\beta$, assim

$$t_s - t_p = D \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) = t_p \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \quad (3.31)$$

A interceção t_0 da reta com o eixo chegada-tempo é o tempo de ocorrência do terremoto e a inclinação da linha é $[(\alpha/\beta) - 1]$. Conhecendo a velocidade da onda P α , a distância até o terremoto é obtida a partir de $D = \alpha(t_p - t_0)$.

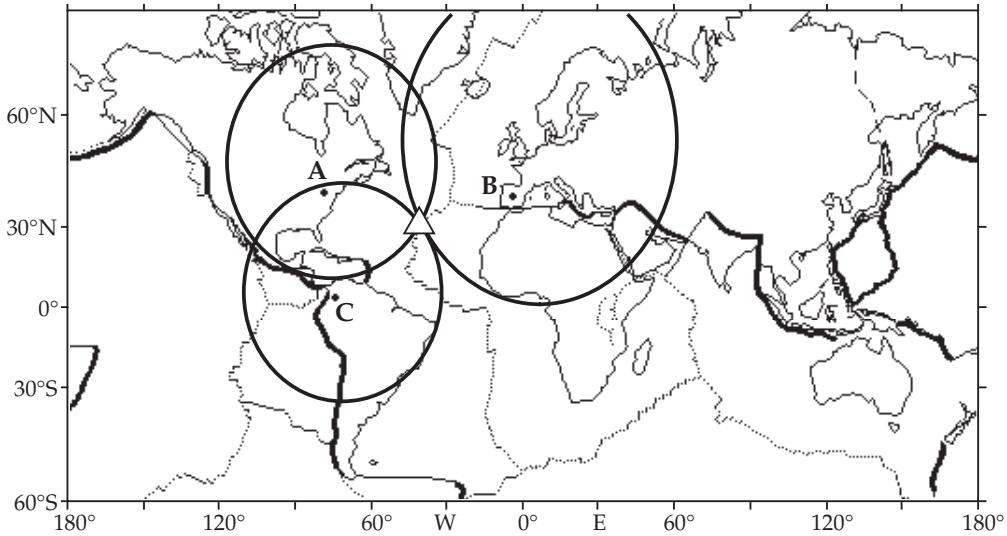


Figura 3.14: Localização de um epicentro sísmico utilizando distâncias epicentrais de três estações sísmicas (em A, B e C). A distância epicentral de cada estação define o raio de um círculo centrado na estação. O epicentro (triângulo) está localizado na interseção comum dos círculos; sua aparência oval é devida à projeção do mapa.

Para determinar a localização de um terremoto, os tempos de percurso do epicentro das ondas P e S para pelo menos três estações sísmicas são necessários (Figura 3.14). Os dados de uma estação dão apenas a distância do epicentro daquela estação. Podia estar em qualquer lugar em um círculo centrado na estação. Os dados de uma estação adicional definem um segundo círculo que intercepta o primeiro círculo em dois pontos, cada um dos quais poderia ser o verdadeiro epicentro. Os dados de uma terceira estação removem a ambiguidade: o ponto comum de interseção dos três círculos é o epicentro.

3.5 Estrutura interna da Terra

Neste tópico, seguimos literalmente o ótimo livro de Ribeiro and Molina [2018] com os seguintes temas:

3.5.1 Ondas sísmicas e o interior da Terra

A estrutura do interior da Terra começou a ser desvendada a partir do início do século XX quando se reconheceu ser possível estimar a variação da velocidade das ondas sísmicas como função da profundidade no interior da Terra. Uma vez que as velocidades das ondas sísmicas são definidas pela densidade e pelos parâmetros elásticos do material atravessado pelas ondas, é possível, utilizando os resultados da teoria da elasticidade, estimar a variação desses parâmetros também em função da profundidade no interior da Terra. Uma vez estimados esses parâmetros, pode-se inferir a distribuição de massa e de pressão no interior do planeta.

A interpretação desses resultados, junto com outras fontes de informação igualmente importantes, permitiu estabelecer um modelo detalhado da estrutura e da composição interna da Terra. Por volta da década de 1940 esse modelo já apresentava um grau de detalhamento bastante grande. No entanto, o modelo continua sendo aprimorado até hoje.

3.5.2 Modelos

Um médico, quando interpreta uma chapa de raios X, observa as variações de atenuação que um feixe desse tipo de radiação sofre ao atravessar o corpo do paciente. Essas variações de atenuação se manifestam na variação da transparência do filme radiográfico utilizado, que representa projeções de uma estrutura

tridimensional que se superpõem em um único plano. A interpretação dessa observação é feita com base no conhecimento que o médico tem da anatomia humana e das suas variações em função de diferentes patologias. Quando Wilhelm Conrad Röntgen, em 1895, viu a primeira radiografia, feita por ele mesmo da mão da Sra. Röntgen, não teve dificuldade em reconhecer os ossos da mão, mas ficou nisso. Com o passar do tempo, a comparação das chapas feitas em muitos e diferentes pacientes com observações clínicas permitiu aos médicos estabelecer os critérios de interpretação para esse tipo de exame.

Os geofísicos desvendaram a estrutura do interior da Terra de forma, até certo ponto, análoga. A observação básica feita pelos geofísicos é o que se chama tempo de percurso de uma onda sísmica, definido como sendo o intervalo de tempo necessário para que as ondas sísmicas percorram a distância que separa o epicentro do terremoto do ponto da superfície onde elas são registradas através de um sismógrafo. O número de observações de tempo de percurso que podem ser feitas depende da frequência com que os terremotos ocorrem na Terra, que é muito grande. Entre 1900 e 2000 foram registrados 699.049 terremotos de magnitude m_b maior do que 5. A distribuição desses eventos não é, como já foi mencionado antes, homogênea sobre a superfície da Terra, o que pode introduzir algum viés na observação. Além disso, as observações dependem do número de estações sísmicas existentes. Hoje em dia existem cerca de 11.956 estações catalogadas, fornecendo dados para os principais bancos de dados sísmicos. Essas estações também não são homogeneamente distribuídas na superfície da Terra, mas, de qualquer forma, existe um número muito grande de observações disponíveis para se investigar o interior do planeta.

A interpretação das observações sísmicas é, no entanto, feita em uma base muito diferente da interpretação de uma chapa de raios X. Enquanto a medicina tem acesso direto ao interior do corpo humano, a Terra não permite quase nenhuma intimidade com o geofísico. Com a exceção de observações feitas em umas poucas perfurações com profundidades da ordem de 10km, o interior da Terra é essencialmente inatingível a qualquer tipo de observação direta. Como consequência, os geofísicos são forçados a criar modelos sobre o interior da Terra.

Nas ciências naturais, modelos são abstrações feitas com o objetivo de permitir o estudo de sistemas naturais que são conhecidos de forma parcial e empírica. Os modelos devem explicar de forma lógica e coerente a essência do comportamento de um sistema natural em condições conhecidas, e fornecer previsões sobre o comportamento desse sistema em situações novas e não observadas. Com o termo “essência do comportamento” queremos dizer que os modelos não precisam ser perfeitos em todos os aspectos, mas devem reter aqueles aspectos do fenômeno estudado, que são mais importantes em um determinado estágio de conhecimento. Quando as previsões são confirmadas, o modelo é mantido; mas, se as previsões não se concretizam ou aspectos inicialmente não considerados essenciais demonstram a sua relevância, os modelos devem ser alterados.

Um exemplo simples de modelo pode ser dado pela forma da Terra. Na descrição do movimento da Terra ao redor do Sol, a forma da Terra pode ser considerada uma esfera perfeita, embora ela não o seja, como todos sabem. A superfície da Terra tem uma topografia variável e a superfície de uma esfera não tem topografia alguma. No entanto, considerando as maiores profundidades dos oceanos e as maiores alturas das cordilheiras, a variação de topografia da Terra não supera 15 km ou 16 km. Comparada com o raio médio da Terra (6.371 km), a diferença máxima de topografia é uma fração muito pequena –0.0025, distribuída ao longo de milhares de quilômetros quadrados, o que impõe, pelo menos na maior parte da superfície, uma certa suavidade.

A rotação da Terra faz com que ela tenha o raio equatorial (6.378 km) ligeiramente maior do que o raio polar (6.357 km). A diferença entre o raio equatorial e o raio polar em relação ao raio médio é 0.0033, ou seja, da mesma ordem de grandeza que a diferença máxima de topografia. Hélio, o deus Sol, que vê e sente os efeitos gravitacionais dos domínios de Gaia, a deusa Terra, a uma distância de 150 milhões de quilômetros, certamente a imagina com a forma de uma pequena, perfeita e homogênea esfera. Por outro lado, se Hélio resolvesse passear em um satélite artificial girando ao redor da Terra a uma altura de 600 km acima da superfície, a descrição da forma do planeta como uma esfera seria insatisfatória. No mínimo, mesmo considerando a possibilidade de o deus Sol ser pouco atento, a forma de um elipsoide de rotação teria de ser considerada, porque a órbita do satélite é afetada pelas diferenças do campo de gravidade geradas, entre outras causas, pelo afastamento da forma esférica.

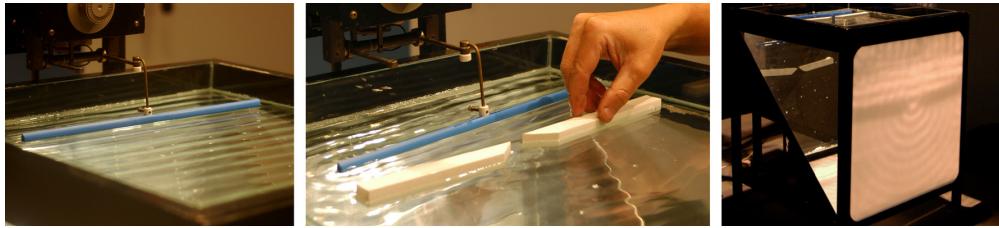


Figura 3.15: Esquema de tanque com água para demonstrar a formação de ondas secundárias. Um trem de ondas planas incide sobre um anteparo rígido com uma pequena fenda central. Essa fenda atua como fonte pontual que gera ondas secundárias circulares na região posterior ao anteparo. Na figura da direita um espelho permite visualizar em um anteparo branco as ondas produzidas.

Os primeiros modelos feitos para interpretar a estrutura da Terra, a partir dos dados de tempo de percurso, consideram a Terra como uma esfera onde a densidade e os parâmetros elásticos variam exclusivamente como função da profundidade. No entanto, antes de descrever esse tipo de modelo e os motivos que levaram à sua concepção, há um aspecto da física das ondas que deve ser considerado.

3.5.3 Construção de frentes de onda e traçado de raios sísmicos – o princípio de Huygens e o princípio de Fermat

Um pedaço de madeira comprido, movimentado de forma cíclica e lenta dentro de um tanque de lavar roupa ou de uma caixa de plástico retangular não muito pequena, produz uma sequência ou, como se diz algumas vezes, um trem de ondas na superfície da água, que, com boa aproximação, representam ondas planas. Quanto mais o comprimento do pedaço de madeira for próximo da dimensão de um dos lados do tanque, mais a onda produzida se aproxima de uma onda plana.

Se no caminho do trem de ondas planas for interposto um obstáculo, por exemplo, um pedaço de papelão grosso com uma abertura pequena na altura do nível da água, o trem de onda plana é refletido, com exceção de um pedaço da frente de onda que atravessa a abertura. O termo “abertura pequena” deve ser entendido como a abertura sendo bem menor do que o comprimento de onda da onda gerada. A fração da frente de onda que passa para o lado oposto do obstáculo (Figura 3.15) perde o caráter de onda plana, tornando-se uma onda com aspecto circular. Se o anteparo for substituído por outro com duas aberturas iguais afastadas uma da outra, duas frentes de onda com o mesmo aspecto circular serão geradas por cada abertura.

Fixando, por cima do tanque, um fio fino esticado paralelamente ao anteparo, fica marcada uma distância do anteparo. Olhando as frentes de onda geradas no mesmo instante em cada abertura, percebe-se que elas passam pelo fio também no mesmo instante. Se o anteparo tivesse três aberturas, o mesmo resultado seria observado. Por outro lado, se a posição do anteparo for marcada por outro fio esticado e o anteparo for removido, é possível verificar que a frente de onda plana percorre a distância entre os fios no mesmo intervalo de tempo que as ondas produzidas nas aberturas. Isso significa que a presença do anteparo não altera a velocidade da onda.

Esses resultados sugerem algo que foi percebido pela primeira vez por Christiaan Huygens no final do século XVII. Huygens estudando a propagação da luz, propôs um princípio que leva o seu nome. O princípio de Huygens estabelece cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma fonte pontual que gera novas ondas, chamadas de ondas secundárias, e que se propagam em todas as direções com a velocidade da onda naquele ponto. Huygens era um defensor da teoria ondulatória da luz e se referia, ao propor o seu princípio, a ondas de luz, mas o princípio se aplica a qualquer tipo de onda. Considerando a frente de onda em um determinado instante t_0 , a frente de onda em um instante posterior t_1 pode ser obtida, traçando uma linha, ou uma superfície no caso de ondas em três dimensões, que é tangente a todas as frentes de onda das ondas secundárias em t_0 . A linha ou a superfície tangente às frentes de onda envolve as ondas secundárias e, por isso, recebe o nome de envoltória das ondas secundárias. A Figura 3.16 ilustra como o princípio de Huygens é aplicado para construir uma frente de onda.

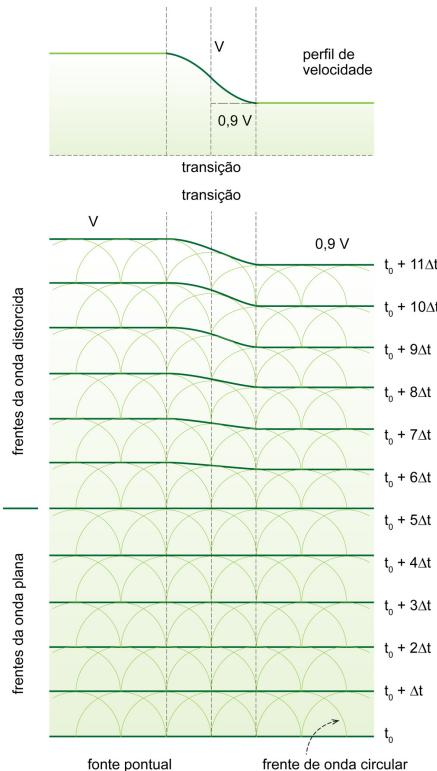


Figura 3.16: Aplicação do princípio de Huygens na construção de uma frente de onda. Entre os instantes t_0 e $t_0 + 5\Delta t$ a onda se propaga em um meio com velocidade constante v . As frentes de onda circulares representadas no diagrama têm raio igual a $v\Delta t$ e a envoltória dessas frentes é uma linha reta que representa uma onda plana. A partir de $t_0 + 6\Delta t$ a velocidade deixa de ser constante e é definida na inserção na parte superior da figura. A aplicação do princípio de Huygens gera uma onda distorcida, na parte central do trem de onda.

A 3.16 representa a propagação de uma onda em duas dimensões, de forma que a frente de onda é representada por uma linha. Na figura, a posição de uma mesma frente de onda é indicada para diferentes instantes contados a partir de t_0 e separados por um intervalo de tempo Δt . Impõe que a frente de onda no instante t_0 seja uma linha reta e que a velocidade da onda em todos os pontos atingidos pela frente de onda seja constante (v), a frente de onda no instante seguinte pode ser obtida aplicando-se o princípio de Huygens. Por cada ponto da frente de onda em t_0 traça-se uma circunferência, cujo raio é $v\Delta t$. Traçando uma linha tangente a todas as frentes de onda secundárias obtém-se a frente de onda em $t_0 + \Delta t$. É fácil ver que, nesse caso, a envoltória das frentes de onda secundária é uma linha reta paralela a frente de onda em t_0 . Mais do que isso, a onda se propaga na direção perpendicular à frente de onda, sendo, portanto, uma onda plana. Na 3.16 nada se altera até a frente de onda correspondente ao instante $t_0 + 5\Delta t$.

A partir da posição correspondente ao instante $t_0 + 5\Delta t$, a velocidade das ondas secundárias deixa de ser constante e passa a ser dada pelo perfil representado na inserção da Figura 3.16. A mudança brusca no comportamento da velocidade da onda gera mais de um efeito, como se verá mais adiante. No entanto, o que importa agora é a forma da frente de onda que avança pelo meio.

Aplicando o princípio de Huygens, a posição da frente de onda no instante $t_0 + 5\Delta t$ é construída traçando, por cada ponto da frente de onda $t_0 + 5\Delta t$, circunferências com raio $v(p)\Delta t$, onde p indica que é a velocidade da onda no ponto considerado. Como agora as velocidades são diferentes, os raios são diferentes e a linha tangente deixa de ser reta. À medida que o tempo passa, aumenta a distorção da frente de onda em relação ao que seria a frente de onda de uma onda plana, e a direção de propagação da onda se altera a cada instante e também para cada ponto.

Logo nos primórdios da Física como ciência bem estabelecida e tal qual a conhecemos hoje, os fenômenos ópticos começaram a ser estudados com algum detalhe. Uma das preocupações daquele tempo foi a de descrever a forma com que a luz se propaga em diferentes meios, o que levou ao desenvolvimento daquilo que hoje é chamado de óptica geométrica. Um dos conceitos fundamentais da óptica geométrica é o de raio de luz, que é definido como sendo o caminho que a luz segue para, partindo de uma fonte luminosa, atingir um ponto qualquer do meio atravessado. Sem entrar em detalhes uma vez que a óptica não é o assunto deste curso, os raios de luz podem ser traçados como sendo linhas orientadas perpendicularmente às frentes de onda e indicam a direção em que a luz está sendo propagada.

Uma das perguntas feitas naquela época foi a seguinte: considerando que a luz emitida por uma fonte atravessa um meio qualquer, qual é o caminho que ela segue? A resposta a essa pergunta foi fornecida por Fermat na forma de um princípio que pode ser assim expresso: para partir de um ponto A e atingir um ponto B de um meio qualquer, a luz percorre o caminho que corresponde ao menor tempo de percurso possível. Considerando, por exemplo, um meio onde a velocidade de propagação da luz é constante, o trajeto seguido pela luz emitida em um ponto A e que atinge um ponto B qualquer é o segmento de reta \overline{AB} . Qualquer outra trajetória ou linha contínua, que possa ser traçada entre A e B é maior do que o segmento de reta \overline{AB} e, como a velocidade do meio é constante, o tempo para percorrer essa linha é maior do que o tempo para percorrer o segmento de reta. Se a velocidade do meio não for constante, de forma geral, o caminho mais rápido entre dois dos seus pontos não será um segmento de reta.

A óptica geométrica descreve uma aproximação muito útil para a descrição dos fenômenos ópticos, mas ela é limitada, uma vez que não permite representar fenômenos como a difração da luz. Em geral, os princípios de Huygens e de Fermat podem também ser aplicados a outros fenômenos ondulatórios como a propagação do som e das ondas elásticas, desde que processos de difração não estejam presentes.

Como exemplo, considere que uma onda elástica plana se propaga em um meio caracterizado por uma velocidade da onda igual a v_1 . A direção de propagação dessa onda, indicada na Figura 3.17 por um único raio que, como prevêem os princípios de Huygens e de Fermat, tem a forma de uma linha reta. Considere agora que esse meio no qual a onda se propaga está em contato com um segundo meio, caracterizado por uma velocidade v_2 , diferente de v_1 . O contato entre os dois meios é um plano, cujo traço representado na Figura 3.17 é o eixo das abscissas (x), e a direção de propagação da onda no meio com velocidade v_1 é oblíqua a esse eixo. Se a onda incidente passar para o meio caracterizado por ter velocidade de propagação v_2 , o que acontece com o raio da onda?

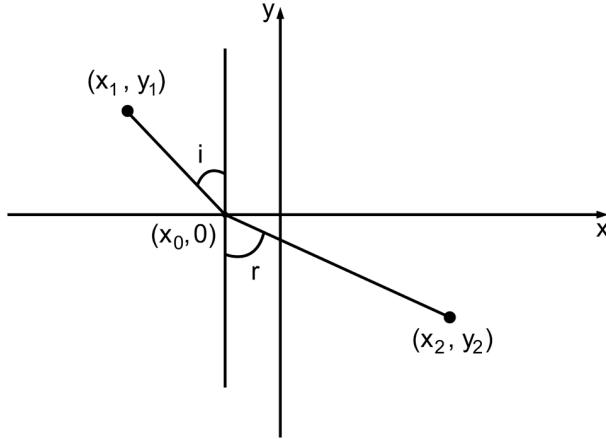


Figura 3.17: Mudança na direção de propagação de uma onda plana devido a uma mudança brusca de velocidade em uma interface plana ea definição do ângulos de incidênci i e r .

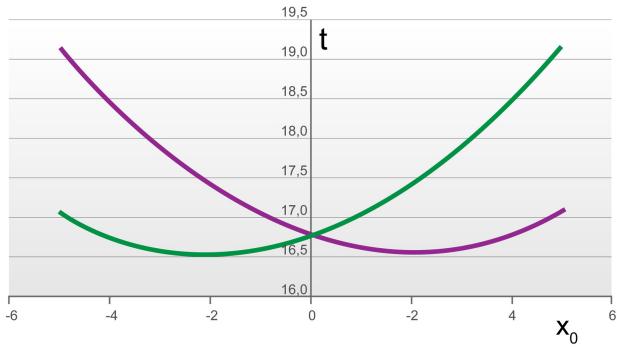


Figura 3.18: Variação do tempo de propagação de dois pontos fixos, um em cada lado da interface onde ocorre uma mudança brusca de velocidade. A curva azul corresponde ao caso em que a velocidade da onda refratada é o dobro da velocidade da onda incidente. A curva magenta corresponde ao caso em que a velocidade da onda incidente é o dobro da velocidade da onda refratada.

A Figura 3.17 esquematiza a forma do raio. Como a velocidade v_2 também é constante, o raio de onda no segundo meio também é uma linha reta. A única coisa que pode mudar, nesse caso, é a direção do raio. Na Figura 3.17, o ângulo com que o raio de onda incide (i) sobre a interface entre os dois meios é definido como sendo o ângulo entre a direção do raio e a direção normal (perpendicular) à interface. O ângulo (r) com que o raio emerge no meio caracterizado por uma velocidade de onda v_2 é definido como sendo o ângulo entre essa direção e a direção normal à interface. Identificando dois pontos pertencentes ao caminho seguido pela onda, um no meio caracterizado por $v_1(x_1, y_1)$ e o outro no meio caracterizado por $v_2(x_2, y_2)$, a posição do ponto $(x_0, 0)$ onde os raios se encontram na interface é determinada impondo o prescrito pelo princípio de Fermat, ou seja, o intervalo de tempo Δt para que a onda saia de (x_1, y_1) e atinja (x_2, y_2) é dado por

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}}{v_2} \quad (3.32)$$

A Figura 3.18 representa Δt como função de x_0 , na forma prevista pela Equação (3.32), para duas situações diferentes: $v_1 = 2v_2$ e $v_1 = 0.5v_2$. Nos dois casos, o menor intervalo de tempo Δt não corresponde a $(x_0, 0)$ alinhado a (x_1, y_1) e a (x_2, y_2) .

A Figura 3.19 mostra o resultado para os dois casos. No entanto, nos dois casos, a relação

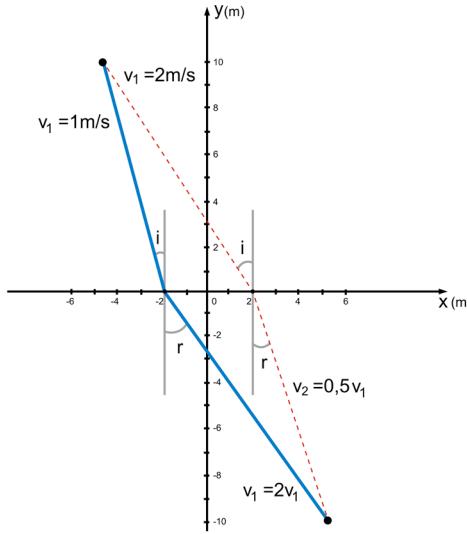


Figura 3.19: Esquema representando os raios de onda nas duas situações consideradas na figura anterior.

$$\frac{\sin(i)}{v_1} = \frac{\sin(r)}{v_2} \quad (3.33)$$

é satisfeita. Quando a velocidade v_1 é maior do que a velocidade v_2 , o raio no segundo meio desvia em direção à normal. Na situação oposta, o raio no segundo meio desvia em direção à interface. O fenômeno de mudança de direção em consequência da mudança de meio onde a onda se propaga é conhecido como refração da onda e é observado experimentalmente.

O resultado expresso pela Equação (3.33) é conhecido como lei de Snell e será demonstrado de forma mais rigorosa logo a seguir. No entanto, é bom que fique claro desde já que esse resultado, por mais bonito que seja e por mais elegante que alguém possa considerar a sua demonstração, tem sentido por uma única e exclusiva razão: ele está em perfeito acordo com a experiência. Se não estivesse, os pressupostos utilizados na demonstração teriam de ser revistos.

A Figura 3.20 esquematiza um meio elástico formado por n camadas horizontais, cada uma das caracterizada por uma velocidade (v_i). Em cada camada, o raio proveniente da camada superior é refratado ao passar para a camada inferior de forma que a trajetória seguida pela onda entre dois pontos f e g é uma poligonal aberta. Considere agora que, mantendo a espessura total do meio, as camadas se tornam cada vez mais delgadas e as variações de velocidade cada vez menores, de forma a manter sempre a velocidade em torno do ponto f e em torno do ponto g constantes. O resultado é uma poligonal com lados cada vez menores, mas com os extremos fixos entre f e g . O aspecto da poligonal variará com o aumento do número de camadas até um ponto em que as variações serão pequenas e pouco nítidas.

Imagine uma pessoa de visão ruim, um míope, por exemplo, olhando alguém subdividir e traçar as poligonais sucessivamente em um mesmo diagrama (Figura 3.21). A forma de poligonal parecerá cada vez menos nítida ao observador no diagrama desenhado e, a partir de certo instante, poligonal e velocidade da onda passarão a parecer curvas contínuas de forma fixa. Além disso, o tempo de percurso entre os pontos será o menor possível. Nesse instante, foi atingido o limite da acuidade visual do observador.

Matematicamente é possível obter de forma exata o resultado simulado no exemplo dado. O método utilizado para demonstrar esse resultado, conhecido como método das variações, é uma ferramenta importante da Física Matemática, mas está fora do propósito deste curso.

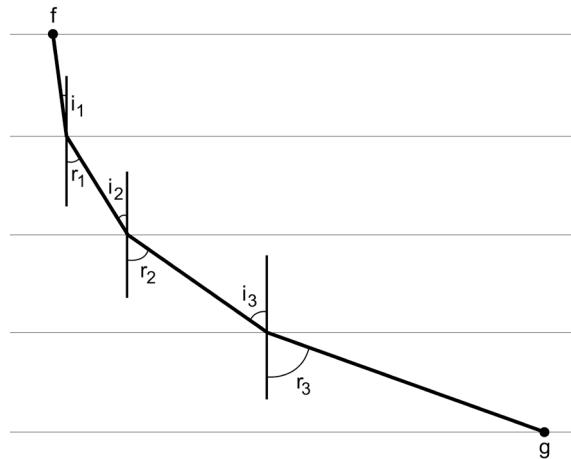


Figura 3.20: Meio elástico estratificado caracterizado por camadas com velocidades v_i constantes dentro de cada camada, mas crescentes em função da profundidade. Os raios sísmicos entre os pontos f e g e os ângulos de incidência (i_i) e de refração (r_i) estão indicados na figura.

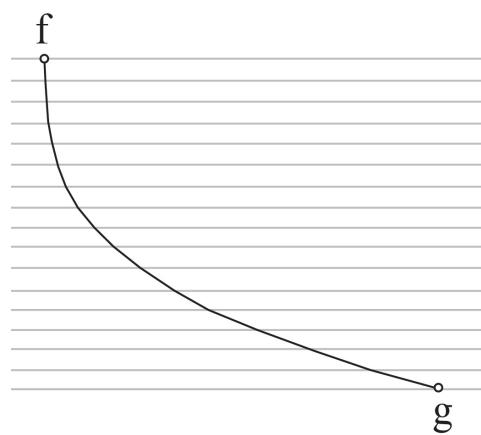


Figura 3.21: Meio elástico estratificado formado por muitas camadas delgadas com velocidades constantes dentro de cada camada, mas crescente em profundidade. Quanto mais delgadas forem as camadas, mais a poligonal que une os pontos f e g se aproxima de uma curva contínua.

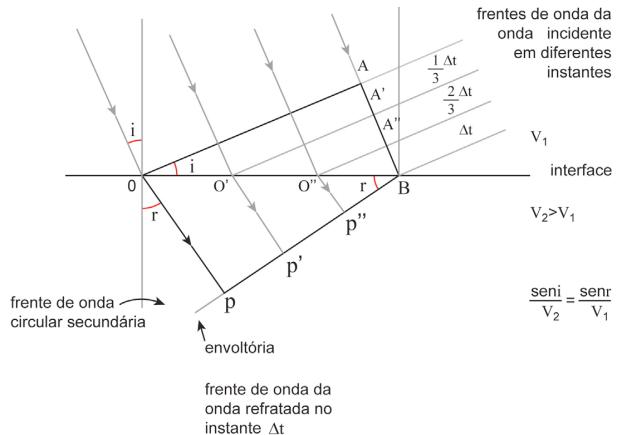


Figura 3.22: Esquema para a demonstração da lei de Snell para o caso de refração (ver o texto).

3.5.4 A lei de Snell

A Figura 3.22 apresenta esquematicamente uma frente de onda plana, proveniente de um meio caracterizado por uma velocidade v_1 , atingindo obliquamente uma interface plana que separa esse meio de outro caracterizado por uma velocidade de onda v_2 . A distância \overline{OB} equivale à distância entre os raios de onda correspondentes aos pontos O e A de uma mesma frente de onda incidente.

Como a direção de propagação da onda no primeiro meio é inclinada em relação à interface, o ponto A da frente de onda toca a interface em um instante Δt , posterior ao momento em que o ponto O toca a interface. Dois raios de onda auxiliares, que tocam a interface nos pontos O' e O'' foram traçados para auxiliar a construção da frente de onda no meio caracterizado pela velocidade v_2 . Os pontos O' e O'' dividem a distância \overline{OB} em três segmentos de igual comprimento. Consequentemente, a frente de onda atinge o ponto O' no instante $\Delta t/3$ e o ponto O'' , no instante $2\Delta t/3$.

Aplicando o princípio de Huygens, centrado no ponto O , é traçada a frente de onda circular da onda secundária no instante de tempo Δt . Da mesma forma, centrado nos pontos O' e O'' , são traçadas as frentes de onda secundária nesse mesmo instante. A reta que, partindo do ponto B , tangencia as frentes de onda das ondas secundárias é a frente de onda construída para a onda refratada no meio caracterizado pela velocidade v_2 . Com essa construção, ficam desenhados dois triângulos retângulos que têm em comum a hipotenusa, que é o segmento \overline{OB} . O ângulo do triângulo OAB com vértice em O é igual ao ângulo de incidência i . Por outro lado, o ângulo do triângulo OBP com vértice em B é igual ao ângulo de refração r .

A distância AB é igual a

$$\overline{AB} = v_1 \Delta t \quad (3.34)$$

e a distância OP é igual a

$$\overline{OP} = v_2 \Delta t \quad (3.35)$$

Por outro lado,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \text{sen}(i), \text{ de onde } v_1 \Delta t = \overline{OB} \text{ sen}(i) \quad (3.36)$$

e

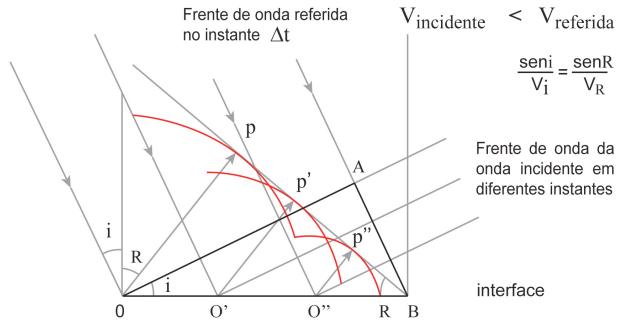


Figura 3.23: Esquema para a demonstração da lei de Snell para o caso de reflexão (ver o texto).

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \text{sen}(r), \text{ de onde } v_2 \Delta t = \overline{OB} \text{ sen}(r) \quad (3.37)$$

Dividindo a Equação (3.36) pela Equação (3.37) tem-se

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} \quad (3.38)$$

que é outra forma de escrever a equação (3.32).

Quando uma onda incide em uma interface entre meios diferentes, um dos efeitos que podem ser observados é a onda ser refratada. Outro é a onda ser refletida, ou seja, tocar na interface e ser direcionada de volta para o meio de incidência. A Figura 3.23 esquematiza a construção da frente de onda refletida.

O ângulo de reflexão (R) é definido como sendo o ângulo que o raio refletido forma com a normal da interface. A frente de onda da onda refletida é obtida de forma absolutamente análoga à construção da frente de onda refratada. Não é difícil ver, no caso de reflexão, que

$$\frac{\text{sen}(i)}{v_i} = \frac{\text{sen}(R)}{v_r} \quad (3.39)$$

onde v_i e v_r são as velocidades das ondas incidente e refletida, respectivamente. Se a onda refletida for do mesmo tipo da onda incidente, por exemplo, se ambas forem ondas de compressão, v_i e v_r serão iguais e

$$\text{sen}(i) = \text{sen}(R) \quad (3.40)$$

Nesse caso, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. As ondas secundárias, provocadas pelo movimento da interface atingida obliquamente por uma onda de compressão, não são, necessariamente, ondas de compressão no caso de o segundo meio elástico ser dotado de rigidez. A reflexão pode converter parte da energia elástica transportada por uma onda de compressão em ondas de cisalhamento e, nesse caso, a velocidade da onda incidente é diferente da velocidade da onda refletida. As equações (3.38) e (3.39) são expressões das leis de Snell para refração e reflexão.

A Equação (3.38) mostra que, quando o ângulo de refração é de 90° , o que só pode ocorrer quando a velocidade v_r é maior do que a velocidade v_i , o ângulo de incidência é

$$\text{sen}(i_r) = \frac{v_1}{v_r} \quad (3.41)$$

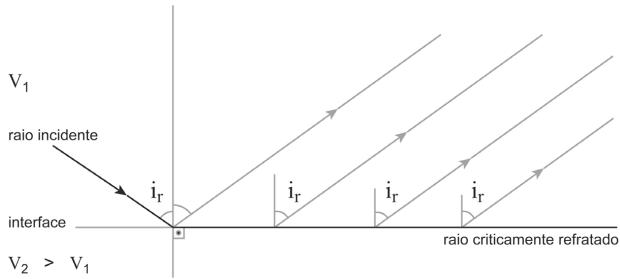


Figura 3.24: Raio de onda incidente sobre uma interface com ângulo crítico de refração i_r e ondas secundárias geradas na interface entre os meios.

O ângulo i_r recebe o nome de ângulo crítico de refração. Para ângulos de incidência maiores do que i_r não há onda refratada, e a interface produz apenas reflexões. O ângulo i_r recebe o nome de ângulo crítico de refração.

A onda refratada produzida por uma onda que incide com ângulo de incidência igual a i_r , algumas vezes chamada de onda criticamente refratada, se propaga no meio caracterizado pela velocidade v_2 na direção paralela à interface, gerando ondas que retornam para o meio caracterizado pela velocidade v_1 partindo da interface com inclinação igual a i_r . (Figura 3.24)

3.5.5 Raios sísmicos e a variação da velocidade das ondas sísmicas no interior da Terra

A estrutura do interior da Terra começou a ser desvendada através do estudo da propagação das ondas sísmicas logo no início do século XX. Em um intervalo de tempo relativamente curto, pouco mais de trinta anos, foi estabelecido um modelo que descreve as principais características da estrutura da Terra. O passo inicial para o estabelecimento desse modelo foi a compilação dos tempos de percurso de todas as fases sísmicas identificadas nos sismogramas registrados na maioria dos observatórios sismológicos.

O termo “fases sísmicas” se refere aos diferentes tipos de onda, P , S e ondas de superfície identificadas em um sismograma. A Figura 3.25 apresenta, esquematicamente, um sismograma onde estão marcados o instante de chegada da onda P , o instante de chegada da onda S e os instantes de chegada das ondas LR e LG .

Esses instantes marcam as chegadas das “fases” P , S e das ondas de superfície. No entanto, escondidos no meio do traçado do sismograma estão registradas as chegadas de outras fases que percorreram um caminho diferente ao da onda P , que marca o início do registro no nosso sismograma. A identificação das diversas fases sísmicas exige muita experiência do analista, uma vez que a chegada dessas fases é, frequentemente, observada como uma variação sutil, na amplitude, no período dominante ou na regularidade do traçado em meio a um registro ruidoso.

A Figura 3.26 apresenta graficamente parte da compilação de tempos de percurso publicada por Jeffreys e Bullen em 1970 , que corresponde aos tempos de percurso das ondas P no intervalo de distâncias epicentrais entre 10° e 90° . A curva traçada na Figura 3.26 corresponde a uma curva média que melhor representa os diversos tempos de chegada, que, se fossem representados, apareceriam como uma nuvem de pontos em torno da curva traçada. Como tempo de percurso é definido como sendo o tempo necessário para uma onda percorrer a distância entre o epicentro e o ponto onde o sismógrafo é instalado, existe uma variação desse tempo associada à profundidade do foco. A Figura 3.26 corresponde a focos superficiais.

A forma da Figura 3.26 fornece alguma informação sobre a velocidade da onda P no interior da Terra, desde que se admita, como ponto de partida, que a propagação das ondas sísmicas possa ser descrita usando a teoria dos raios sísmicos.

Se a Terra fosse um meio com velocidade de onda P constante (v_P), o raio sísmico entre o foco, que se

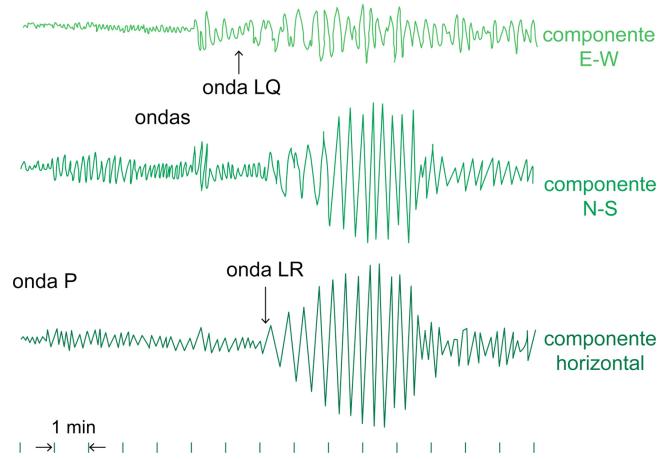


Figura 3.25: Representação esquemática de um registro em uma estação com um sismômetro vertical e dois sismômetros horizontais em direções perpendiculares. A escala na base da figura é a escala de tempo e o intervalo entre cada marca é de um minuto. Os instantes de chegada das ondas P , S , LQ e LR estão indicadas pelas pequenas setas.

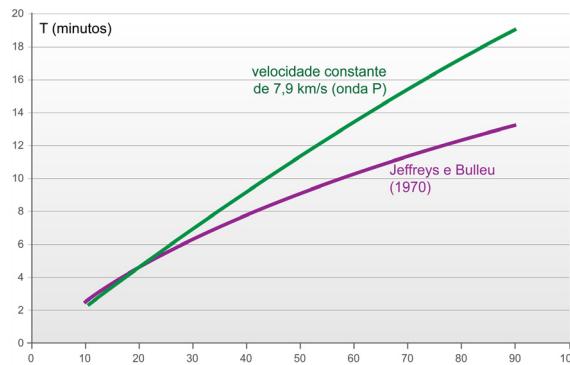


Figura 3.26: Representação gráfica dos tempos de percurso das ondas P compilados por Jeffreys e Bullen (1970), para o intervalo de distâncias epicentrais entre 10° e 90° (curva magenta). Para comparação, a curva azul representa o tempo de chegada que seria observado caso o interior da Terra fosse caracterizado por ondas P com velocidade constante de 7.9 km/s.

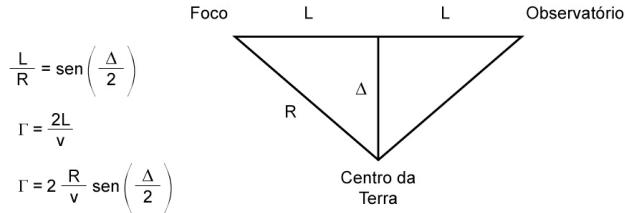


Figura 3.27: Esquema para o cálculo do tempo de percurso de uma onda sísmica como função da distância epicentral admitindo que a sua velocidade seja constante no interior da Terra.

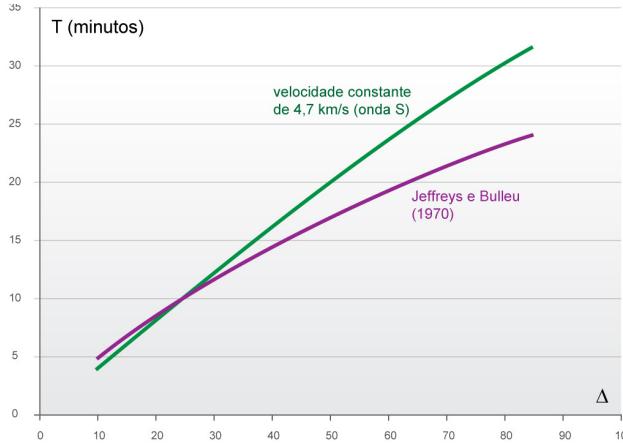


Figura 3.28: Representação gráfica dos tempos de percurso das ondas *S* compilados por Jeffreys e Bullen (1970), para o intervalo de distâncias epicentrais entre 10° e 90° (curva magenta). Para comparação, a curva azul representa o tempo de chegada que seria observado caso o interior da Terra fosse caracterizado por ondas *S* com velocidade constante de 4.7 km/s

confunde com o epicentro no caso de um sismo superficial, e a estação sismográfica seria uma linha reta. A Figura 3.27 indica esse raio e, a partir dessa figura, não é difícil verificar que o tempo de percurso (T) deveria variar como função da distância epicentral (Δ) seguindo a expressão

$$T = 2 \frac{R}{v_P} \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \quad (3.42)$$

onde R é o raio da Terra, considerada esférica.

A curva de tempo de chegada prevista pela Equação (3.42), calculada usando uma velocidade de onda *P* de 7.8 km/s, é comparada com a curva real de tempo de percurso das ondas *P* na Figura 3.26. A comparação mostra que o tempo de percurso das ondas *P* cresce mais lentamente que o tempo de percurso previsto pela equação (3.42). Não adianta variar o valor da velocidade das ondas *P* utilizada na Equação (3.42) porque a forma da curva real não se ajusta à forma prevista pela equação.

O fato de a curva do tempo de percurso variar mais lentamente do que a previsão feita pela equação (10) mostra que a velocidade das ondas *P* não é constante no interior da Terra. A velocidade aumenta com a profundidade e, por isso, os tempos de chegada são menores do que os tempos previstos pela nossa equação.

O comportamento do tempo de percurso das ondas *P* é repetido no caso das ondas *S* (Figura 3.28).

Uma vez que tanto a Figura 3.26 quanto a Figura 3.28 foram construídas com dados de uma tabela de tempo de percurso que compila dados do mundo todo, é de se supor que a variação de velocidade representada em cada curva seja uma boa aproximação para todo o interior da Terra, independentemente tanto da posição do

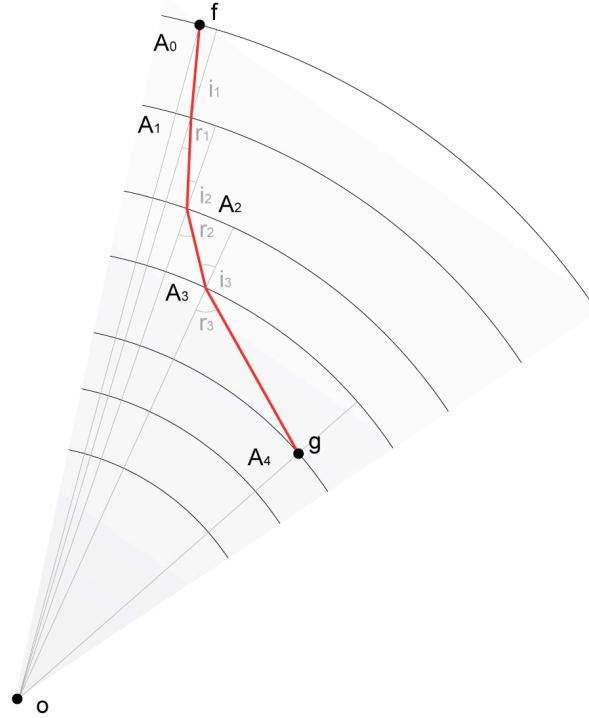


Figura 3.29: Esquema geométrico para dedução das Equações a seguir.

foco do epicentro quanto do observatório sismológico. Essas curvas sugerem, que, pelo menos em primeira aproximação, o interior da Terra, atravessado pelas ondas sísmicas que atingem distâncias epicentrais entre 10° e 90° , pode ser representado por um modelo onde a variação da velocidade das ondas sísmicas depende apenas da profundidade. De forma equivalente, se supusermos a Terra como tendo forma esférica, a velocidade das ondas sísmicas pode ser considerada como função apenas da distância ao centro do planeta. Por outro lado, a suavidade das curvas, sem a presença de interrupções e mudanças bruscas de inclinação, indica que a variação das velocidades deve ser contínua e suave.

O fato de as velocidades das ondas P e S variarem como função da profundidade implica que as ondas são continuamente refratadas no material atravessado pelos raios sísmicos. Considerando uma esfera de raio A formada por n camadas esféricas, cada uma delas caracterizada por uma velocidade v_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) e separadas por superfícies esféricas de raio a_i (Figura 3.29), os raios sísmicos em cada camada são linhas retas e, nas interfaces, pode-se definir um ângulo de incidência i_i e um ângulo de refração r_i .

No ponto g_i , onde o raio sísmico cruza a interface, continua valendo a lei de Snell

$$\frac{\sin(i_i)}{v_i} = \frac{\sin(r_{i+1})}{v_{i+1}} \quad (3.43)$$

onde a descontinuidade plana é representada pelo plano tangente a cada superfície esférica. Da Figura 3.29 pode-se ver que

$$l = a_i \sin(r_{i+1}) = a_{i+1} \sin(i_{i+1}) \quad (3.44)$$

que, combinado com a equação (3.43), fornece

$$\frac{a_i \sin(i_i)}{v_i} = \frac{a_i \sin(r_{i+1})}{v_{i+1}} = \frac{a_{i+1} \sin(i_{i+1})}{v_{i+1}} = \text{constante} \quad (3.45)$$

que é válida para qualquer par de interfaces entre camadas. Fazendo as camadas progressivamente mais delgadas de forma que a variação da velocidade se aproxime cada vez mais de uma função suave, a Equação (3.45) se aproxima de uma expressão contínua em relação à distância ao centro da Terra, dada por

$$\frac{\operatorname{asen}(i(a))}{v(a)} = p = \text{constante} \quad (3.46)$$

onde $i(a)$ é o ângulo formado pela direção do raio sísmico com a direção radial, na distância a ao centro da Terra, e $v(a)$ é a velocidade da onda sísmica nessa posição. A constante p recebe o nome de parâmetro sísmico do raio. A Equação (3.46) mostra que, se p for conhecido, a razão entre a posição do ponto mais profundo atingido pelo raio sísmico, nesse caso, i é igual a 90° , e a velocidade da onda nessa posição pode ser calculada.

Pode-se demonstrar que

$$\frac{dT}{d\Delta} = p \quad (3.47)$$

A demonstração desse resultado não é difícil, mas não é importante que ela seja feita agora.

Com base nesses dados, distância epicentral e parâmetro do raio sísmico, é possível obter a distribuição radial de velocidades $v(a)$. O processo para se obter a distribuição de velocidade das ondas sísmicas é um processo matemático elaborado, algumas vezes chamado de inversão das curvas de tempo de percurso, que envolve uma série de condições e cuja apresentação foge ao propósito deste curso.

Nem todas as curvas de tempo de percurso são simples de serem interpretadas. A Figura 3.30 resume a tabela de tempo de percurso de Jeffreys e Bullen (1970), mostrando a complexidade do problema de se identificar e interpretar esses dados.

Algumas conclusões simples podem ser obtidas diretamente da observação da curva. Por exemplo, a curva correspondente à onda S é interrompida bruscamente a uma distância epicentral um pouco maior do que 100° . Essa interrupção brusca indica que os raios sísmicos encontram, a partir de certa profundidade, um meio com rigidez nula, ou seja, um fluido. A posição onde o meio passa a ser fluido pode ser calculada e é marcada por uma descontinuidade bem definida na profundidade de 2.885 km. Essa descontinuidade recebe o nome de descontinuidade de Gutenberg, em homenagem ao geofísico Beno Gutenberg que a identificou.

A Figura 3.30 mostra que, entre as curvas de tempo de percurso das ondas P e S , existem fases sísmicas que foram identificadas no conjunto dos sismogramas utilizado na construção das tabelas de tempo de percurso. Trata-se de ondas do tipo P , que percorrem caminhos que permitem que o tempo de chegada seja inferior ao tempo de chegada da onda S . Fases identificadas como PP e PPP são ondas do tipo P que sofreram uma e duas reflexões, respectivamente, na superfície da Terra, antes de atingirem a posição de um observatório sismológico (Figura 3.31).

A descontinuidade de Gutenberg marca uma transição brusca, onde o material que compõe o interior da Terra perde a rigidez. Sendo uma descontinuidade brusca, que tem reflexo sobre a velocidade das ondas P , o que se espera é que a curva de tempo de percurso perca, pelo menos, a suavidade na distância epicentral correspondente. Observando a figura 4.16, pode-se ver que a curva de tempo de percurso da onda P se estende de forma suave para além da distância epicentral de 100° , chegando até 150° . Costuma-se referir às ondas P com tempo de percurso registrado para distâncias epicentrais maiores do que 100° como ondas refratadas. O termo refratado é, neste caso, um termo impróprio, uma vez que o contorno da camada fluida pelas ondas P não é induzido por uma irregularidade.

com dimensão característica pequena em relação ao comprimento da onda P . O que ocorre é que, nessa região, a velocidade das ondas P apresenta variações na sua inclinação como função da profundidade, que permitem às ondas P contornarem parcialmente essa região. Ondas P aparecem para distâncias maiores do que 100° com uma curva própria de tempos de percurso. Essa curva identificada como PKP corresponde a

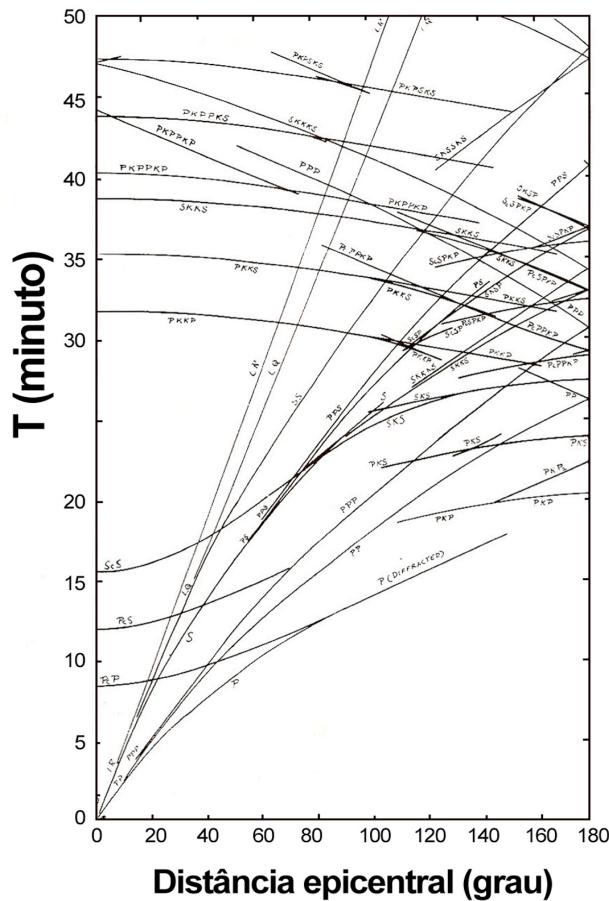


Figura 3.30: Curvas de tempo de percurso para diferentes fases sísmicas construída com os dados compilados por Jeffreys e Bullen (1970). Os tempos de percurso das ondas *I* e *J* foram omitidos.

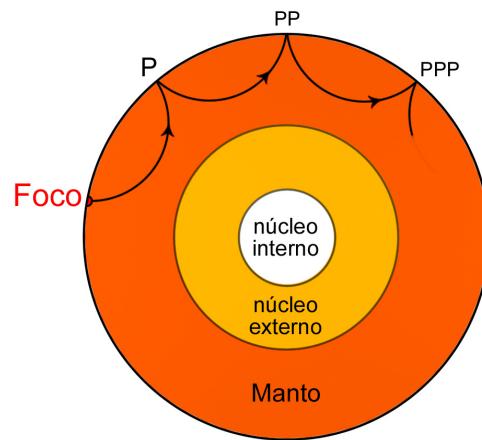


Figura 3.31: Definição das fases sísmicas de compressão *P*, *PP* e *PPP*.

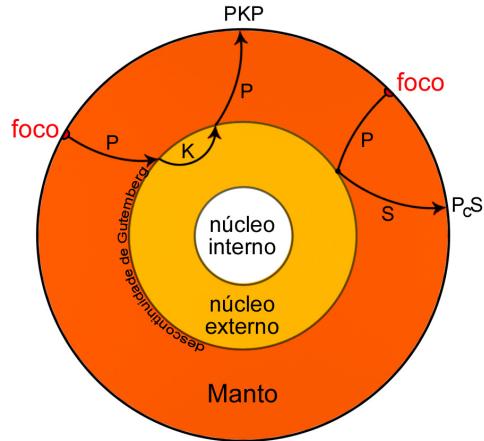


Figura 3.32: Definição da fase sísmica de compressão PKP e da fase sísmica PcS correspondente a uma onda de compressão que, na reflexão na descontinuidade de Gutenberg, é convertida em onda de cisalhamento.

tempos de chegada de ondas P que penetraram na camada líquida abaixo da descontinuidade de Gutenberg (Figura 3.32).

A Figura 3.30 apresenta também curvas que indicam tempos de percurso diferentes de zero para a distância epicentral igual a zero, com valores crescentes para distâncias epicentrais crescentes até, aproximadamente, 60° . Essas fases (existem três bem claras no intervalo de tempo de percurso entre 8 segundos e 16 segundos, aproximadamente), identificadas pelos símbolos PcP , PcS e ScS , correspondem a reflexões na descontinuidade de Gutenberg. A fase PcS corresponde a uma reflexão onde parte da energia da onda P incidente foi convertida em onda S (ver Figura 3.32).

A análise das curvas de tempo de percurso permitiu construir o modelo para a distribuição de velocidades das ondas sísmicas no interior da Terra apresentado na Figura 3.33.

A partir dessa distribuição de velocidade das ondas sísmicas e de considerações sobre a distribuição de massa na Terra, densidade média, massa total e momento de inércia, três grandes regiões foram definidas no interior do planeta: manto, que corresponde ao intervalo de distâncias ao centro da Terra entre 3486 km e, aproximadamente, 6352 km; núcleo externo, correspondendo a distâncias ao centro da Terra entre 1217 km e 3486 km; e o núcleo interno, correspondendo ao intervalo de distâncias ao centro da Terra de 0 a 1217 km.

O manto da Terra é caracterizado por duas regiões distintas. O manto inferior, que se estende desde a descontinuidade de Gutenberg até uma distância radial de 5701 km (670 km de profundidade). Nesse intervalo de profundidades, as velocidades das ondas P e S decrescem como função da distância ao centro da Terra, de forma regular e suave, partindo de 13.8 km/s até 11 km/s e de 7.1 km/s até 6 km/s, respectivamente. O manto superior é separado do manto inferior por uma descontinuidade a 670 km de profundidade, onde a velocidade das ondas P cai bruscamente para 10 km/s e a velocidade das ondas S cai para 5.5 km/s. Logo acima dessa descontinuidade existe uma segunda descontinuidade à profundidade de 420 km. Entre essas duas descontinuidades, as velocidades das ondas P e S decrescem, suavemente, como função da distância ao centro da Terra até 9.5 km/s e 5 km/s, respectivamente. Na descontinuidade a 420 km de profundidade, a velocidade das ondas P cai bruscamente até 7.8 km/s e a velocidade das ondas S cai para 4.5 km/s, e permanecem em torno desse valor até uma profundidade entre 60 km e 220 km de baixo dos oceanos e entre 120 km e 220 km abaixo dos continentes. A partir dessa camada, algumas vezes chamada de zona de baixa velocidade, o modelo de Terra com simetria esférica perde muito do seu sentido. A estrutura abaixo dos continentes é bem diferente da estrutura abaixo dos oceanos. Uma descrição mais detalhada das estruturas dessas regiões será apresentada mais adiante no curso. Acima da zona de baixa velocidade, a velocidade das ondas P passa de forma que, por enquanto, será considerada brusca, para valores médios de 7.9 km/s abaixo dos oceanos e de 8 km/s abaixo dos continentes. As velocidades das ondas S pulam para 4.6 km/s abaixo dos oceanos e para 4.7 km/s abaixo dos continentes.

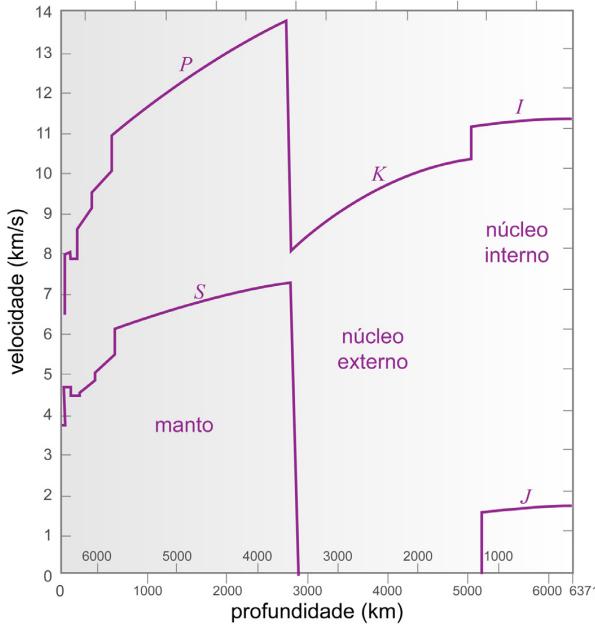


Figura 3.33: Variação das velocidades das ondas sísmicas compressionais P (chamadas de K no núcleo externo e de I no núcleo interno) e das ondas e de cisalhamento S (chamadas de J no núcleo interno) e a identificação do manto terrestre, do núcleo externo e do núcleo interno a partir dessas velocidades.

Abaixo dos oceanos, o limite superior do manto superior é marcado por uma transição brusca das velocidades das ondas P para valores médios de 6.4 km/s e das ondas S para valores médios de 3.7 km/s. Nas regiões continentais, o limite é marcado por uma transição brusca para velocidades médias de 6.5 km/s e de 3.8 km/s para as ondas P e S , respectivamente.

A característica mais marcante do núcleo externo da Terra é a ausência de rigidez, o que acarreta a impossibilidade de propagação de ondas de cisalhamento. Além disso, devido ao fato de a rigidez cair para zero, a descontinuidade de Gutenberg é marcada por uma queda brusca na velocidade das ondas P de 13.8 km/s, no lado do manto inferior, e para 8 km/s no lado do núcleo interno. As ondas de compressão que se propagam no núcleo externo são chamadas ondas K . A velocidade das ondas K cresce suavemente com o aumento da profundidade até 10.1 km/s a uma distância ao centro da Terra de 1217 km, e a velocidade das ondas de compressão salta bruscamente para 11 km/s. A variação brusca marca a posição de uma descontinuidade conhecida como descontinuidade de Lehmann, em homenagem a Inge Lehmann, que a identificou pela primeira vez em 1930. Essa descontinuidade marca a posição do topo do núcleo externo.

Abaixo da descontinuidade de Lehmann, as ondas de compressão são identificadas como onda I , cuja velocidade cresce de forma suave em direção ao centro da Terra, mas com uma variação muito pequena. A análise dos tempos de percurso das ondas sísmicas que atingem a região central da Terra sugere que o núcleo interno seja sólido, o que significa que ondas de cisalhamento, que nessa região são chamadas de ondas J , devem se propagar no seu interior. A velocidade das ondas J é estimada em torno de 1.6 a 1.7 km/s.

3.5.6 Uma palavra final

A tradução das variações das velocidades das ondas sísmicas em termos da variação da densidade do material que compõe o interior da Terra é um processo que envolve o conhecimento da teoria da elasticidade, da termodinâmica dos sólidos e um pouco de matemática, acima do que se espera que tenha um aluno de um curso introdutório. Por isso, apenas o resultado final será apresentado.

A Figura 3.34 apresenta a variação da densidade como função da profundidade no interior da Terra. As três regiões principais do interior do planeta bem como a separação entre o manto superior e o manto inferior

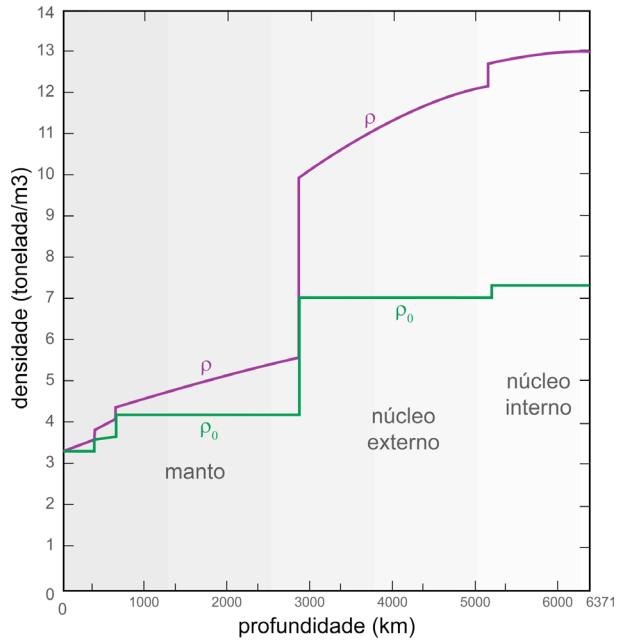


Figura 3.34: Variação da densidade do material que compõe o interior da Terra. A curva identificada por ρ corresponde à densidade nas condições de pressão e temperatura existentes no interior da Terra. A curva identificada por ρ_0 corresponde à densidade desse material extrapolada para a condição de pressão zero e temperatura de 25°C.

são facilmente reconhecíveis nesse diagrama.

A curva traçada em linhas cheias indica a variação da densidade tal como ela deve ocorrer no interior da Terra, variação que se deve a mudanças na composição química do material e aos efeitos da compressão devido ao peso das camadas superiores. A linha tracejada mostra a variação da densidade do material que compõe o interior da Terra com o efeito da compressão corrigido. Os valores indicados correspondem aos valores de densidade que o material deveria ter se a pressão que age sobre ele fosse igual a zero.

A Figura 3.34 mostra que o manto inferior, o núcleo externo e o núcleo interno são caracterizados por valores constantes de densidade à pressão zero, sugerindo que se trata - cada uma dessas camadas - de um meio, até onde se pode perceber, homogêneo. O manto superior também é dividido em camadas caracterizadas por densidades constantes, separadas pelas descontinuidades localizadas a 420km de profundidade e a 670km de profundidade.

Interpretar as densidades do material que compõe o interior da Terra, em termos de composição química, é um problema da geoquímica, que vamos deixar para os textos de geoquímica e de geodinâmica entendida de forma ampla. No entanto, muito mais para estimular a imaginação e despertar o interesse do leitor do que para realmente transmitir alguma informação, alguma coisa pode ser dita.

A densidade de 7000 kg/m³ para o núcleo externo e de 7200 kg/m³ para o núcleo interno sugere que ambos sejam metálicos. Além disso, dados sobre a composição química média de alguns meteoritos, que parecem representar a composição química do material que deu origem à Terra, sugerem que o núcleo externo seja composto por uma liga de ferro e níquel onde estão dissolvidos elementos mais leves. Ligas de Fe e Ni são observadas em alguns meteoritos, chamados meteoritos ferrometálicos. A densidade de pouco mais de 4200 kg/m³ sugere que o manto inferior seja composto, principalmente, por uma mistura de óxidos de ferro e magnésio, enquanto o manto superior deva ser composto, principalmente, por silicatos desses metais. As diferenças de densidade entre as camadas definidas pelas descontinuidades de 420 km e de 670 km sugerem que o material com essa composição se apresente como fases mineralógicas diferentes.

3.6 Exercícios

Exercício 3.1. Descreva os movimentos das partículas em relação à direção de propagação das duas ondas do corpo sísmico e das duas ondas de superfície sísmica.

Exercício 3.2. O que é o epicentro de um terremoto? Explique como o epicentro de um terremoto pode ser localizado? Qual é o número mínimo de registros sísmicos necessários?

Exercício 3.3. Explique a diferença entre intensidade e magnitude do terremoto.

Exercício 3.4. Como as velocidades das ondas sísmicas mudam nas principais descontinuidades na estrutura interna da Terra? Como essas descontinuidades são caracterizadas?

Exercício 3.5. Qual diferença entre ondas *P* e *S*?

Exercício 3.6. Descreva como a propagação das ondas sísmicas ajudam a descrever a composição interna da Terra

Referências Bibliográficas

- C. M. R. Fowler. *The solid earth: an introduction to global geophysics*. Cambridge University Press, 1990.
- David Halliday and Robert Resnick. *Física-volume 2*. LTC - Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, RJ, 4 edition, 1987.
- William Lowrie. *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2007. doi: 10.1017/CBO9780511807107.
- Fernando Brenha Ribeiro and Eder Molina. *Geofísica: Uma Breve Introdução*. Edusp, São Paulo, SP, 2018.