

# Laborator 3: Sisteme de ecuații diferențiale

**Exercițiul 1** Determinați soluțiile generale a următoarelor sisteme de ecuații diferențiale:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases} & (e) \quad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 3y(t) + 1 \\ y'(t) = -6x(t) - 4y(t) + e^t \end{cases} \\
 (b) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} & (f) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + 2t \end{cases} \\
 (c) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = -y(t) + 2z(t) \end{cases} & (g) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - 2z(t) + e^{-t} \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) - 3z(t) + e^t \end{cases} \\
 (d) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases} & (h) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) - 4z(t) + 25t \\ y'(t) = -2x(t) - 6z(t) + 12e^t \\ z'(t) = -2x(t) - 6y(t) + 6z(t) + 12 \end{cases}
 \end{array}$$

**Exercițiul 2** Determinați și reprezentați grafic soluțiile următoarelor probleme Cauchy:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases} & x(0) = 1, \quad y(0) = 2 \\
 (b) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + t - 1 \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) + e^t \end{cases} & x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \\
 (c) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + e^{-t} \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 1 \end{cases} & x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \\
 (d) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + 3z(t) + 27t^2 \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) - 5z(t) + 3t \\ z'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 6z(t) + 3 \end{cases} & x(0) = 50, \quad y(0) = -30, \quad z(0) = 26
 \end{array}$$

**Exercițiul 3** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

(a) Determinați soluțiile sistemului ce satisfac condițiile

$$\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = -3 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = -2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

(b) Pentru fiecare dintre aceste soluții calculați  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ ;

(c) Reprezentați portretul fazic corespunzător în care să apară orbitele soluțiilor de la punctul (a).

**Exercițiul 4** Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

- (a) Determinați soluția generală;
- (b) Calculați  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ ;
- (c) Reprezentați portretul fazic corespunzător.

**Exercițiul 5** Reprezentați portretele fazice și precizați (fără a determina soluția) pentru care din sistemele următoare are loc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ :

- (a)  $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$
- (d)  $\begin{cases} x'(t) = -2x(t) \\ y'(t) = -4x(t) - 2y(t) \end{cases}$
- (e)  $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) \end{cases}$
- (f)  $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$