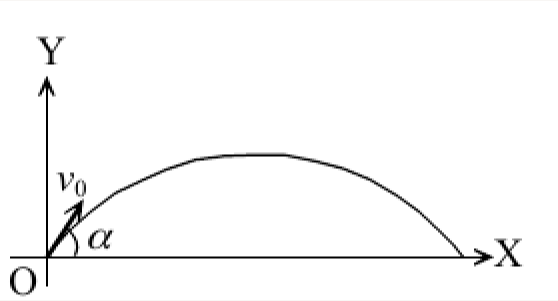
13. Un cañón dispara una bala con una velocidad de 200 m/s formando un ángulo de 40º con la horizontal.

a) Encontrar la velocidad y la posición de la bala después de 20s.

b) Encontrar también el alcance y el tiempo necesario para que la bala retorne a tierra.



$$v_0 = 200\, m/s; \quad \alpha = 40^{\circ};$$

$$\begin{cases} v_{0X} = 200\cos 40^{\circ} = 153.2\, m/s; \\ v_{0Y} = 200\sin 40^{\circ} = 128.6\, m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_X = v_{0X} = 200\cos 40^{\circ} = 153.2\, m/s; \\ v_Y = v_{0Y} - gt = 128.6 - 9.81\cdot t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 153.2\cdot t \\ y = 128.6\cdot t - 4.9\cdot t^2 \end{matrix}$$

Después de $t = 20$s, la velocidad y la posición de la bala son:

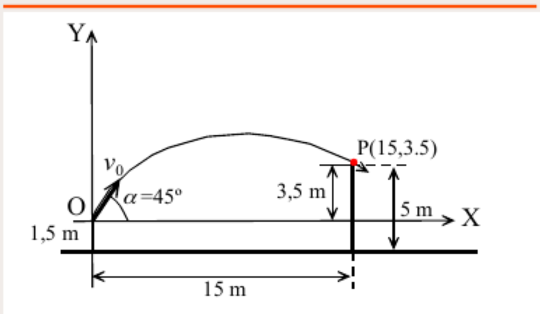
$$\begin{cases} v_{X(t=20)} = \boxed{153.2\, m/s}; \\ v_{Y(t=20)} = 128.6 - 9.81\cdot 20 = \boxed{-67.4\, m/s}; \end{cases}$$

$$x_{(t=20)} = 153.2\cdot 20 = \boxed{3064\, m};$$

$$y_{(t=20)} = 128.6\cdot 20 - 4.9\cdot 20^2 = \boxed{612\, m};$$

ru

14. Un muchacho de 1.5m de altura y que está parado a 15m de distancia de un muro de 5m de altura, lanza una piedra bajo un ángulo de 45º con respecto a la horizontal ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la piedra para que ésta pase por encima del muro?



$$\begin{cases} y = v_{0Y}\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = v_0 sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \\ x = v_{0X}\cdot t = v_0\cos\alpha\cdot t \end{cases}$$

La piedra tiene que pasar por el punto P(15,3.5)

$$\begin{cases} 3.5 = v_{0Y}\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = v_0 sen45º\cdot t - 4.9\cdot t^2 \\ 15 = v_{0X}\cdot t = v_0\cos 45º\cdot t \end{cases}$$

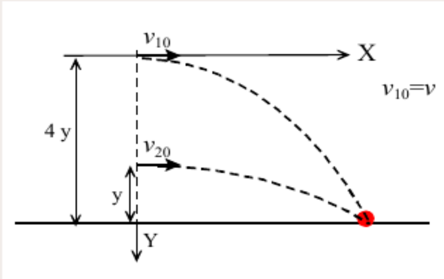
$$15 = v_0\cos 45º\cdot t \quad\rightarrow\quad t = \frac{15}{v_0\cos 45º}$$

$$3.5 = v_0 sen45º\cdot t - 4.9\cdot t^2 = \frac{\cancel{v_0 sen45º}\cdot 15}{\cancel{v_0\cos 45º}} - 4.9\cdot\left(\frac{15}{v_0\cos 45º}\right)^2 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad v_0^2 = \frac{2205}{11.5} \quad\rightarrow\quad \boxed{v_0 = 13.8\, m/s}$$

rr

15. Dos aviones están situados sobre la misma vertical, siendo la altura de uno de ellos sobre el suelo cuatro veces la del otro. Ambos pretenden bombardear el mismo objetivo, siendo la velocidad del mas alto v ¿qué velocidad debería llevar el mas bajo?

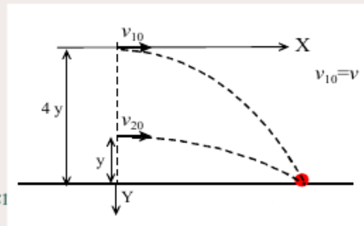


Ecuaciones del avión 1:

$$\left.\begin{array}{l} v_{1x} = v_{10} \quad \rightarrow \quad x = v_{10} \cdot t = v \cdot t \\ v_{1y} = g \cdot t \quad \rightarrow \quad 4y = \dfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 4y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v^2}$$

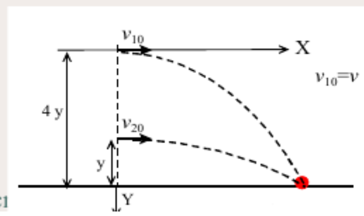
Ecuaciones del avión 2:

$$\left.\begin{array}{l} v_{2x} = v_{20} \quad \rightarrow \quad x = v_{20} \cdot t' \\ v_{2y} = g \cdot t' \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2} g \cdot t'^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_{20}{}^2}$$



$$\frac{4y}{y} = \frac{\dfrac{1}{2} g \cdot \dfrac{x^2}{v^2}}{\dfrac{1}{2} g \cdot \dfrac{x^2}{v_{20}{}^2}} \quad \rightarrow \quad 4 = \frac{v_{20}{}^2}{v^2} \quad \rightarrow$$

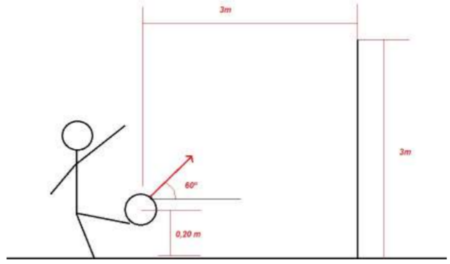
$$\rightarrow \quad v_{20}{}^2 = 4v^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_{20} = 2v}$$



rc

8. Un niño da un puntapié a un balón que está a 20 cm del suelo, con un ángulo de 60º sobre la horizontal. A 3 metros, delante del niño, hay una alambrada de un recinto deportivo que tiene una altura de 3 metros. ¿Qué velocidad mínima debe comunicar al balón para que sobrepase la alambrada?

Planteamiento gráfico:



En este caso tenemos un tiro parabólico el cual debe cumplir la condición de pasar por la valla, por lo tanto para que pase la alambrada la posición final en Y debe ser como mínimo 3 m cuando la X sea igual a 3 m ya que la alambrada se encuentra a 3 m en el eje x.

Antes de plantear las ecuaciones descomponemos la velocidad inicial en los dos ejes:

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen(60º)$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos(60º)$$

(1) Eje X:

$$X_f = X_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

Sabemos que la posición final en el eje x es 3m que la inicial es cero ya que situamos ahí nuestro sistema de referencia, que no hay aceleración en el eje x y que la velocidad inicial en x la tenemos en función de la velocidad inicial total.

$$3 = 0 + v_0 \cdot \cos(60º) \cdot t + 0$$

Nos queda una ecuación con dos incógnitas.

(1) $3 = v_0 \cdot \cos(60º) \cdot t$

(2) Eje Y:

$$Y_f = Y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$$

Sabemos que la posición final en el eje y debe ser como mínimo 3m por lo que imponemos este valor que la inicial es 0,20m ya que nuestro sistema de referencia está situado en el suelo, que la aceleración en el eje y es la de la gravedad y que la velocidad inicial en y la tenemos en función de la velocidad inicial total.

$$3 = 0{,}20 + v_0 \cdot sen(60º) \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$3 = 0{,}20 + v_0 \cdot sen(60º) \cdot t - 5t^2$$

(2) $5t^2 - v_0 \cdot sen(60º) \cdot t + 2{,}8 = 0$

Nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

(1) $3 = v_0 \cdot \cos(60º) \cdot t$

(2) $5t^2 - v_0 \cdot sen(60º) \cdot t + 2{,}8 = 0$

Despejamos v_0 en la ecuación (1) y lo sustituimos en (2) para hallar primeramente t, ya que es más complicado hallar directamente v_0.

$$(1) v_0 = \frac{3}{\cos(60º) \cdot t}$$

$$5t^2 - \frac{3}{\cos(60º) \cdot t} \cdot sen(60º) \cdot t + 2{,}8 = 0$$

$$5t^2 - \frac{3}{\cos(60º) \cdot t} \cdot sen(60º) \cdot t + 2{,}8 = 0$$

$$5t^2 - 3\,tg\,(60º) + 2{,}8 = 0$$

$$5t^2 = 3\,tg\,(60º) - 2{,}8 = 2{,}4$$

$$t = \sqrt{\frac{2{,}4}{5}} = 0{,}693$$

Sustituimos en (1):

(1) $3 = v_0 \cdot \cos(60º) \cdot t$

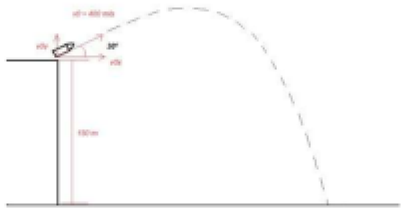
$$3 = v_0 \cdot \cos(60º) \cdot 0{,}693$$

$$\mathbf{v_0} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{cos(60º)} \cdot 0{,}693} = \mathbf{8{,}65\ m/s}$$

.ri

9. Se lanza un proyectil desde lo alto de un acantilado de 150 metros de altura a 400 m/s con una inclinación de 30º. Calcula: a) El tiempo que tarda en caer al suelo y b) La altura máxima que alcanza.

Planteamiento gráfico:



a) Para hallar el tiempo que tarda en caer al suelo plantearemos la ecución de posición de la cinemática para el Eje Y, y para ello hay que descomponer la velocidad inicial en velocidad inicial en el eje Y, y en el eje X:

$$v_0 = 400\ m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen(30º) = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200\ m/s$$

Planteamos la ecuación:

$$Y_f = Y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

Sabemos que $Y_0 = 150$m ya que el sistema de referencia lo colocamos en la vertical del proyectil en el momento inicial y en el suelo por lo tanto también sabemos que $Y_f = 0$, conocemos v_{0y} y g. Nos queda una ecuación con una incógnita, y resolvemos:

$$0 = 150 + 200 \cdot t - 5t^2$$

Ecuación de 2º grado:

x1 = 40,74s

x2 = -0,74s

El tiempo no puede ser negativo por lo que cogemos la primera solución x1 = 40,74s

Tiempo que tarda en caer = 40,74s

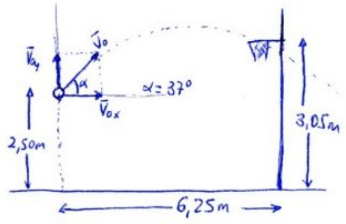
re

Composición de movimientos (tiro horizontal, tiro oblicuo -parabólico-)

Problema 3.

Un jugador de baloncesto lanza el balón desde una altura de 2,50 m con una elevación de 37º y encesta en la canasta situada a 6,25 m de distancia y 3,05 m de altura. Calcula la velocidad con que lanzó el balón.

Solución



¿$\vec{v}_0$?

Origen S.R. → posición de la pelota al inicio el movimiento.

Ecuaciones

Eje x → m.r.u. → $x = x_0 + v_x t$

$v_x = v_{0x}$

$x = 0 + v_0 t \cdot \cos\alpha \rightarrow \boxed{x = v_0 t \cdot \cos\alpha}$

$\boxed{v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha}$

Eje y → m.r.u.a (caída libre)

$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 0 + v_0 t \,\text{sen}\,\alpha - 4{,}9t^2 \rightarrow \boxed{y = v_0 t \cdot \text{sen}\,\alpha - 4{,}9t^2}$

$v_y = v_{0y} + g t \rightarrow \boxed{v_y = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha - 9{,}8\,t}$

$\boxed{g = -9{,}8\ m/s^2}$

Posición de la canasta respecto del S.R.

$x = 6{,}25\ m$

$y = 3{,}05 - 2{,}50 = 0{,}55\,m$

Sustituimos estos datos en sus respectivas ecuaciones:

Eje x → $6{,}25 = v_0 \cdot t \cdot \cos 37 \rightarrow v_0 t = \frac{6{,}25}{\cos 37} = 7{,}826\ m.$

Eje y → $0{,}55 = v_0 t \cdot \text{sen}\,37 - 4{,}9t^2$

$0{,}55 = 7{,}826 \cdot \text{sen}\,37 - 4{,}9t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{0{,}55 - 7{,}826 \cdot \text{sen}\,37}{-4{,}9}}$; $t = 0{,}92\,s$

Ya podemos calcular el módulo de la velocidad inicial.

$v_0 \cdot t = 7{,}826 \rightarrow v_0 = \frac{7{,}826}{0{,}92} = 8{,}5\ m/s \rightarrow \boxed{v_0 = 8{,}5\ m/s}$

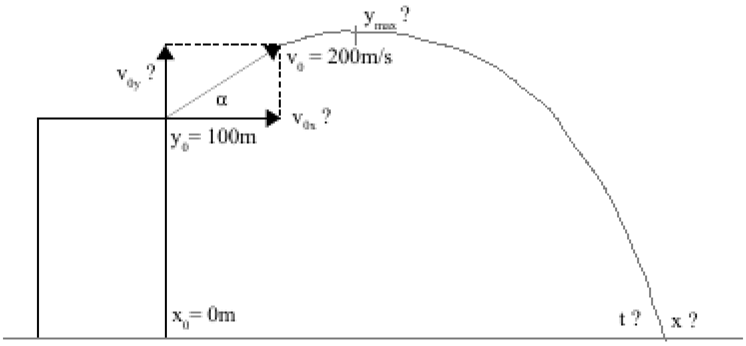
Respecto del S.R. elegido, el vector velocidad inicial es:

$$\left.\begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 8{,}5 \cdot \cos 37 = 6{,}8\ m/s \\ v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha = 8{,}5 \cdot \text{sen}\,37 = 5{,}1\ m/s \end{array}\right\} \boxed{\vec{v}_0 = 6{,}8\,\hat{\imath} + 5{,}1\,\hat{\jmath}}\ (m/s)$$

rl

Problema 0849: Desde un acantilado que está a 100m sobre el nivel del mar se dispara una bala de cañón hacia el mar. Si la bala sale a 200m/s y el cañón forma un ángulo de 35º con la horizontal, calcula:
a) las componentes de la velocidad inicial de la bala,
b) el tiempo que tarda en caer al mar,
c) el alcance de la bala y
d) la altura máxima que alcanza.

Hacemos un esquema con los datos del problema:



Este movimiento es la composición de dos movimientos, uno uniformemente acelerado en dirección vertical, y otro uniforme en dirección horizontal.

a)
Las componentes de la velocidad son en función del ángulo de salida:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 200\text{m/s} \cdot \cos 35º = \underline{163{,}8\text{m/s}}$$
$$v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\alpha = 200\text{m/s} \cdot \text{sen}35º = \underline{114{,}7\text{m/s}}$$

b)
Cuando la pelota llega al suelo la altura es y=0

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 100 + 114{,}7t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$
$$4{,}9t^2 - 114{,}7 \cdot t - 100 = 0$$
$$t = \frac{114{,}7 \pm \sqrt{114{,}7^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 100}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{114{,}7 \pm 122{,}9}{9{,}8}$$

$$t_1 = \underline{\underline{24{,}24\text{s}}}$$
$$t_2 = -0{,}84\text{s}$$

La solución que nos vale es el tiempo positivo de 24,24s.

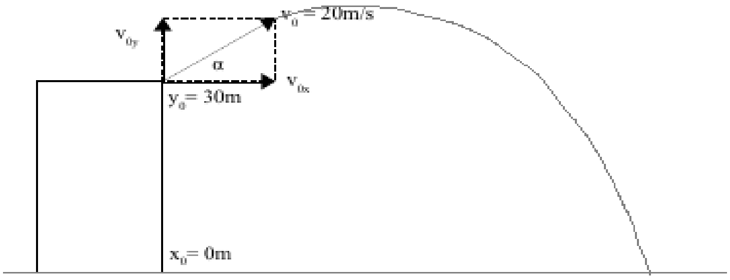
c)
El alcance lo calculamos sustituyendo el tiempo de vuelo en la ecuación del movimiento horizontal

$$x = v_{0x} t = 163{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 24{,}24\text{s} = \underline{3971\text{m}}$$

ra

Problema 0844: Se lanza una piedra desde lo alto de un acantilado de 30m, con una velocidad de 20m/s y con un ángulo de 30º sobre la horizontal. Calcula: a) las componentes de la velocidad inicial, b) el tiempo que tarda en caer sobre el agua, c) el alcance de la piedra y d) la altura máxima de la piedra.

Hacemos un esquema con los datos del problema:



Este movimiento es la composición de dos movimientos, uno uniformemente acelerado en dirección vertical, y otro uniforme en dirección horizontal.

a)
Las componentes de la velocidad son en función del ángulo de salida:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 20m/s \cdot \cos 30^o = \underline{17{,}32m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \cos\alpha = 20m/s \cdot \mathrm{sen} 30^o = \underline{\underline{10{,}00m/s}}$$

b)
Cuando la piedra llega al agua la altura es y=0

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = 30 + 10 \cdot t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

$$4{,}9t^2 - 10 \cdot t - 30 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 30}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{10 \pm 26{,}23}{9{,}8}$$

$$t_1 = \underline{\underline{3{,}70s}}$$

$$t_2 = -1{,}66s$$

La solución que nos vale es el tiempo positivo de 3,7s.

c)
El alcance lo calculamos sustituyendo el tiempo de vuelo en la ecuación del movimiento horizontal

$$x = v_{0x} t = 17{,}32\frac{m}{s} \cdot 3{,}7s = \underline{\underline{64{,}08m}}$$

d)
En el punto de altura máxima v_y=0

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Calculamos el tiempo que se tarda en elcanzar la altura máxima:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{-g} = \frac{0 - 10m/s}{-9{,}8m/s^2} = 1{,}02s$$

Sustituimos este valor en la ecuación de la altura y:

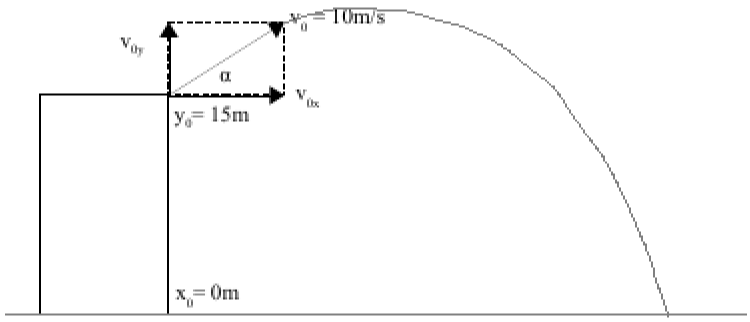
$$y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{máx} = 30m + 10m/s \cdot 1{,}02s - \frac{1}{2}9{,}8m/s^2 \cdot (1{,}02s)^2 = \underline{\underline{35{,}10m}}$$

rg

Problema 0845: Se lanza una pelota desde lo alto de un edificio de 15m, con una velocidad de 10m/s y con un ángulo de 40º sobre la horizontal. Calcula: a) las componentes de la velocidad inicial, b) el tiempo que tarda en caer al suelo, c) el alcance de la pelota y d) la altura máxima de la pelota.

Hacemos un esquema con los datos del problema:



Este movimiento es la composición de dos movimientos, uno uniformemente acelerado en dirección vertical, y otro uniforme en dirección horizontal.

a)
Las componentes de la velocidad son en función del ángulo de salida:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 10m/s \cdot \cos 40^o = \underline{7{,}66m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 10m/s \cdot \operatorname{sen} 40^o = \underline{\underline{6{,}43m/s}}$$

b)
Cuando la pelota llega al suelo la altura es y=0

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 15 + 6{,}43 \cdot t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$

$$4{,}9t^2 - 6{,}43 t - 15 = 0$$

$$t = \frac{6{,}43 \pm \sqrt{6{,}43^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 15}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{6{,}43 \pm 18{,}31}{9{,}8}$$

$$t_1 = \underline{2{,}52s}$$

Velocidad con la que llega al suelo
$V_x = 7{,}66$ m/s
$V_y = 6{,}43 - 9{,}8 \cdot 2{,}52 = -18{,}266$ m/s

$$\vec{v} = 7{,}66\,\vec{i} - 18{,}266\,\vec{j}\,(m/s)¿$$

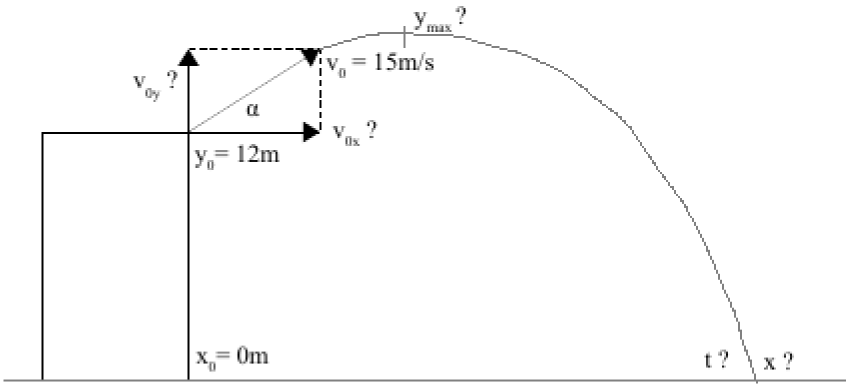
$$tg\,\alpha = \frac{7{,}66}{18{,}266}$$

El ángulo es 22,71º

ro

Problema 0847: Se lanza una pelota desde una terraza de un edificio de 12m, con una velocidad de 15m/s y con un ángulo de 30º sobre la horizontal. Calcula: a) las componentes de la velocidad inicial, b) el tiempo que tarda en caer al suelo, c) el alcance de la pelota y d) la altura máxima de la pelota.

Hacemos un esquema con los datos del problema:



Este movimiento es la composición de dos movimientos, uno uniformemente acelerado en dirección vertical, y otro uniforme en dirección horizontal.

a)
Las componentes de la velocidad son en función del ángulo de salida:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 15\text{m/s} \cdot \cos 30^\circ = \underline{12{,}99\text{m/s}}$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 15\text{m/s} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \underline{7{,}5\text{m/s}}$$

b)
Cuando la pelota llega al suelo la altura es y=0

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 12 + 7{,}5 \cdot t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$

$$4{,}9t^2 - 7{,}53 \cdot t - 12 = 0$$

$$t = \frac{7{,}5 \pm \sqrt{7{,}5^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 12}}{2 \cdot 4{,}9} = \frac{7{,}5 \pm 17{,}07}{9{,}8}$$

$$t_1 = \underline{2{,}51\text{s}}$$

$$t_2 = -0{,}98\text{s}$$

La solución que nos vale es el tiempo positivo de 2,51s.