Faculdade: EMAP-FGV | Disciplina: Modelagem Estatística | Professor: Claudio José Struchiner | Aluno: Victor Vilanova Bandeira

1 Modelo MCMC para inferências entorno do BITCOIN

MCMC is a computer–driven sampling method (Gamerman and Lopes 2006; Gilks et al. 1996). MCMC - Morkov Chain Monte Carlo são uma classe de algoritmos que nos permite amostrar a posteriori de distribuições nos casos que são difíceis de trabalhar via análises analíticas.

Dessa forma, em uma inferência Bayesiana tradicional, temos os parâmetros, a verrossimilhança, e as prioris que temos dos parâmetros para virarem assim a posterior das nossas crenças dos parâmetros. Tudo isso, seguindo a formula de Bayes:

$$p(\mu|D) \sim p(D|\mu)p(\mu)$$

onde $p(\mu|D)$ é a probabilidade de μ dado os dados, $p(D|\mu)$ indica a verrosimilhança e \$p(μ)*apriori*.

Assim, quando a expressão analítica da verrossimilhança é alcançável, combinada com a piori podemos derivar a posteriori analiticamente. Porém, algumas vezes isso não é possível em prática. Dessa forma, esse problema na estatística é resolvido por meio do MCMC: que desenha uma amostragem de amostras da posterior.

2 Uma pequena introdução a MCMC

Os dados que vamos usar foram retirados do kaggle. Representam série de tempo diárias históricas para moeda digital (BTC - Bitcoin) negociadas no mercado saudita (SAR / Sudi Riyal). Sendo assim, estipularemos primeiramente sua liquidez e , após isso, seu valor comercial diário em dólar. Usando para isso o método de Markov chain Monte Carlo (MCMC), mais especificamente usaremos Metropolis-Hastings algorithm.

Para atingir esse objetivo, usaremos a biblioteca pymc3 que possui todo ferramental que precisaremos.

Importando os pacotes

[1]:
```
import pandas as pd
import pymc3 as pm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import norm
import statistics


# matplotlib for plotting
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format = 'retina'
from IPython.core.pylabtools import figsize
```

```python
import matplotlib
import seaborn as sns
sns.set()

# scipy for algorithms
import scipy
from scipy import stats
```

Importando os dados

[2]:
```python
data = pd.read_csv('dc.csv')
```

[3]:
```python
data.isnull().values.any()
```

[3]:
```
False
```

[4]:
```python
data.describe()
```

[4]:
```
            open_SAR      open_USD       high_SAR      high_USD  \
count    1000.000000   1000.000000    1000.000000   1000.000000
mean    34825.322255   9285.762120   35789.618165   9542.880270
std     21728.028028   5793.522832   22785.946842   6075.604427
min     12045.197184   3211.710000   12288.185600   3276.500000
25%     24254.558752   6467.192500   24686.089152   6582.255000
50%     30714.632128   8189.695000   31321.953152   8351.630000
75%     38317.311744  10216.860000   39077.527200  10419.562500
max    152217.334784  40586.960000  157329.280000  41950.000000

             low_SAR       low_USD      close_SAR     close_USD         volume
count    1000.000000   1000.000000    1000.000000   1000.000000    1000.000000
mean    33796.329057   9011.393200   34917.483572   9310.335850   53100.498000
std     20565.410145   5483.524463   21928.280072   5846.917681   35329.832031
min     11837.237504   3156.260000   12045.234688   3211.720000    5743.000000
25%     23721.336256   6325.015000   24252.946080   6466.762500   30045.750000
50%     30010.869568   8002.045000   30713.263232   8189.330000   43795.500000
75%     37158.878816   9907.977500   38329.725568  10220.170000   64909.250000
max    145215.488000  38720.000000  152201.770624  40582.810000  402201.000000
```

[5]:
```python
data.head()
```

[5]:
```
   Unnamed: 0       open_SAR  open_USD       high_SAR  high_USD  \
0  2021-01-30  128437.248512  34246.28  131012.723200  34933.00
1  2021-01-29  125144.022272  33368.18  144510.037760  38531.90
2  2021-01-28  113870.357376  30362.19  126703.438592  33783.98
3  2021-01-27  121753.023104  32464.01  122102.860416  32557.29
4  2021-01-26  120966.114176  32254.19  123470.218752  32921.88
```

```
        low_SAR   low_USD      close_SAR  close_USD  volume
0  123106.880000  32825.00  128333.212416   34218.54   43072
1  119695.516160  31915.40  128459.450880   34252.20  231827
2  111919.811840  29842.10  125131.570944   33364.86   92621
3  109668.146688  29241.72  113885.208960   30366.15   95911
4  115652.472448  30837.37  121767.124608   32467.77   84972
```

[6]:
```
data.columns
```

[6]:
```
Index(['Unnamed: 0', 'open_SAR', 'open_USD', 'high_SAR', 'high_USD', 'low_SAR',
       'low_USD', 'close_SAR', 'close_USD', 'volume'],
      dtype='object')
```

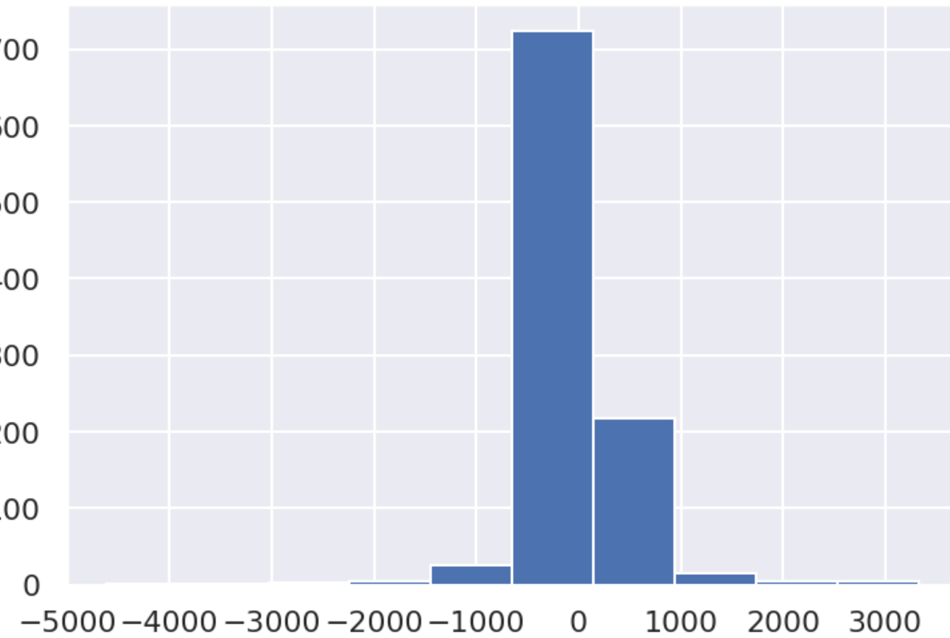
2.1 Primeira análise liquidez do ativo

Para primeira hipótese, iremos supor que o valor diário de liquidez da moeda Bitcoin comercializada será a subtração do fechamento e da abertura do ativo diária.

[7]:
```
USD_liq = (data['close_USD'] - data['open_USD'])
USD_liq.head()
```

[7]:
```
0     -27.74
1     884.02
2    3002.67
3   -2097.86
4     213.58
dtype: float64
```

[8]:
```
plt.hist(USD_liq);
```



[9]:
```
USD_liq = np.array(USD_liq)
```

2.1.1 Modelo MCMC

As váriaveis mu e sigma terão como prioris distribuições normal e uniforme, respectivamente, com um alto espassamento de forma ao modelo escolher qual espaço elas devem ficar.

$$\mu \sim Norm \; e \; \sigma \sim Unif$$

Além disso, nossa variável de interesse será uma verrossimilhança de distribuição Normal.

[10]:
```
%%time
with pm.Model() as model:
    mu = pm.Normal('mu', mu=0.0, tau=0.01, testval=0.0)
    sigma = pm.Uniform('sigma',lower=0, upper=1000)

    S = pm.Normal('S', mu=mu, sigma=sigma, observed=USD_liq)

    N_SAMPLE = 5000

    step = pm.Metropolis()

    trace = pm.sample(N_SAMPLE, step=step)
```

```
Multiprocess sampling (4 chains in 4 jobs)
CompoundStep
```

```
>Metropolis: [sigma]
>Metropolis: [mu]
```

```
<IPython.core.display.HTML object>
```

```
Sampling 4 chains for 1_000 tune and 5_000 draw iterations (4_000 + 20_000 draws
total) took 2 seconds.
The number of effective samples is smaller than 25% for some parameters.
```

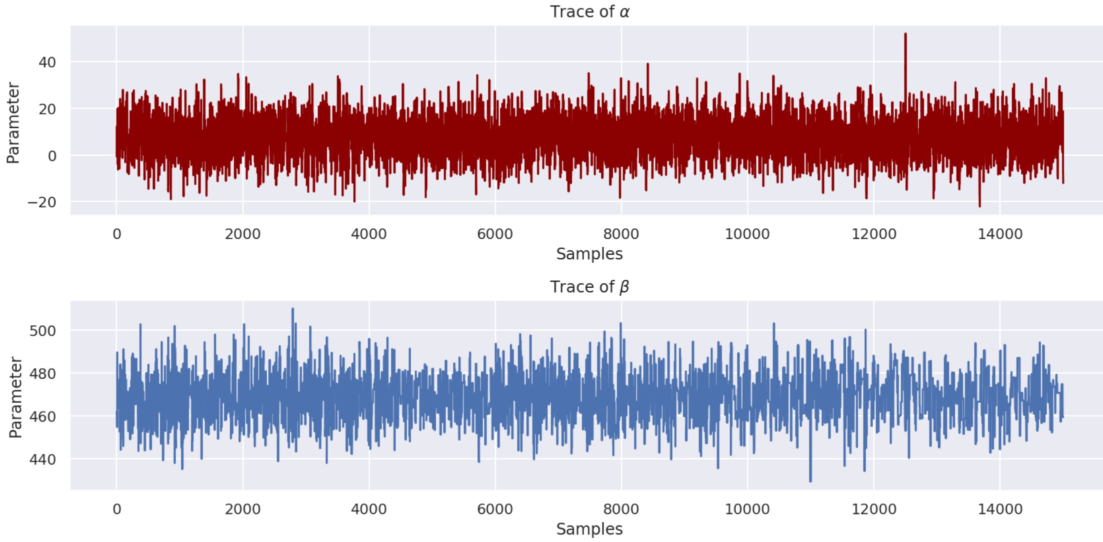
```
CPU times: user 2.68 s, sys: 267 ms, total: 2.95 s
Wall time: 4.68 s
```

2.1.2 Construindo o diagnóstico

[11]:
```
mu_samples = trace["mu"][5000:,None]
sigma_samples = trace["sigma"][5000:,None]
```

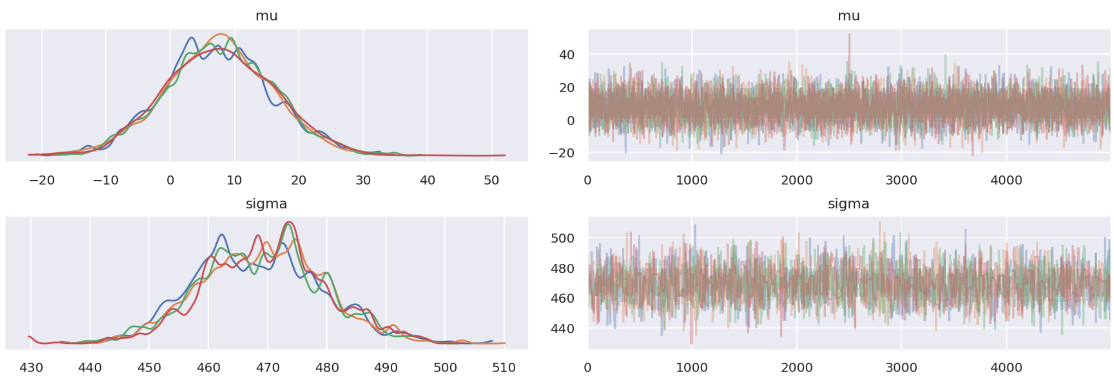
2.1.3 Trace plot

[12]:
```
figsize(12,6)

# Plot alpha trace
plt.subplot(211)
plt.title(r'Trace of $\alpha$')
plt.plot(mu_samples, color = 'darkred')
plt.xlabel('Samples'); plt.ylabel('Parameter');

# Plot beta trace
plt.subplot(212)
plt.title(r'Trace of $\beta$')
plt.plot(sigma_samples, color='b')
plt.xlabel('Samples'); plt.ylabel('Parameter');
plt.tight_layout(h_pad=0.8)
```



[13]:
```
pm.plot_trace(trace);
```

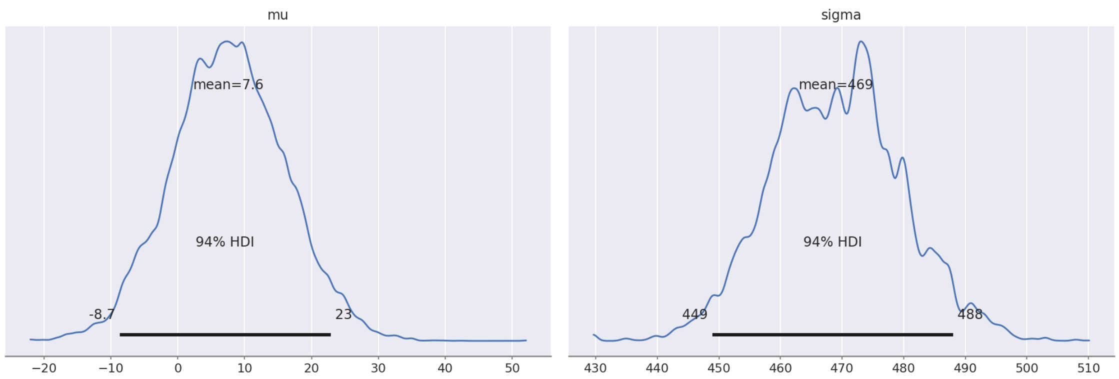
```
/home/victor/.local/lib/python3.8/site-packages/arviz/data/io_pymc3.py:87:
FutureWarning: Using `from_pymc3` without the model will be deprecated in a
future release. Not using the model will return less accurate and less useful
results. Make sure you use the model argument or call from_pymc3 within a model
context.
  warnings.warn(
```



[14]:
```
figsize(6,4)
pm.plot_posterior(trace);
```

```
/home/victor/.local/lib/python3.8/site-packages/arviz/data/io_pymc3.py:87:
FutureWarning: Using `from_pymc3` without the model will be deprecated in a
future release. Not using the model will return less accurate and less useful
results. Make sure you use the model argument or call from_pymc3 within a model
```

```
context.
  warnings.warn(
```



Perceba que nosso modelo achou que a média dos nossos parâmetros μ foi de 7.5 e a média de σ de 468

[15]:
```
new_mu = trace["mu"].mean()
new_mu
```

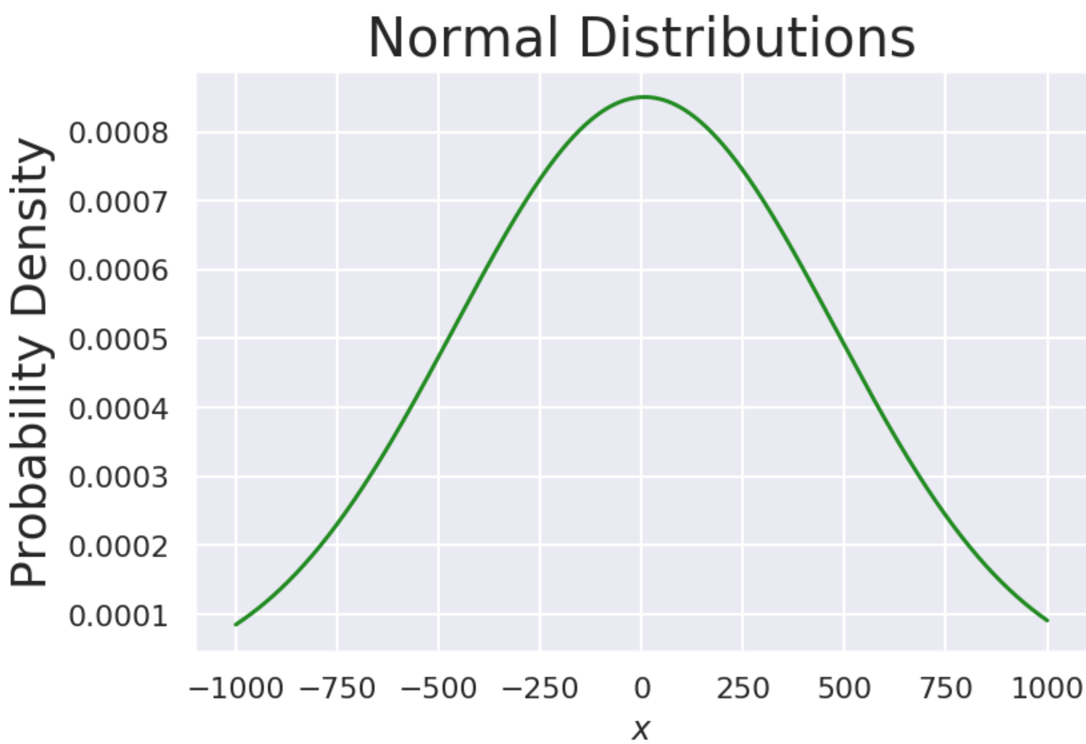
[15]: 7.569629201210699

[16]:
```
new_sigma = trace["sigma"].mean()
new_sigma
```

[16]: 469.0754605569835

Podemos plotar a posteriori da nossa variável de interesse

[17]:
```
x_axis = np.arange(-1000, 1000, 0.01)
plt.plot(x_axis, norm.pdf(x_axis, new_mu, new_sigma), color = "forestgreen")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("Probability Density", size = 18)
plt.title("Normal Distributions", size = 20);
plt.show()
```



2.2 Uma segunda análise da média diária do valor do ativo

Para a segunda análise, queremos identificar a distribuição do preço da BITCOIN em dólar no período estudado, dessa forma: Começaremos com uma simplificação de que o valor do nosso ativo é discreto diariamente, dessa forma passaremos como dado a média do valor diária do ativo.

Ou seja, a média da alta e da baixa diária do ativo

[18]:
```
USD_mean = (data.high_USD + data.low_USD) / 2
USD_mean.head()
```

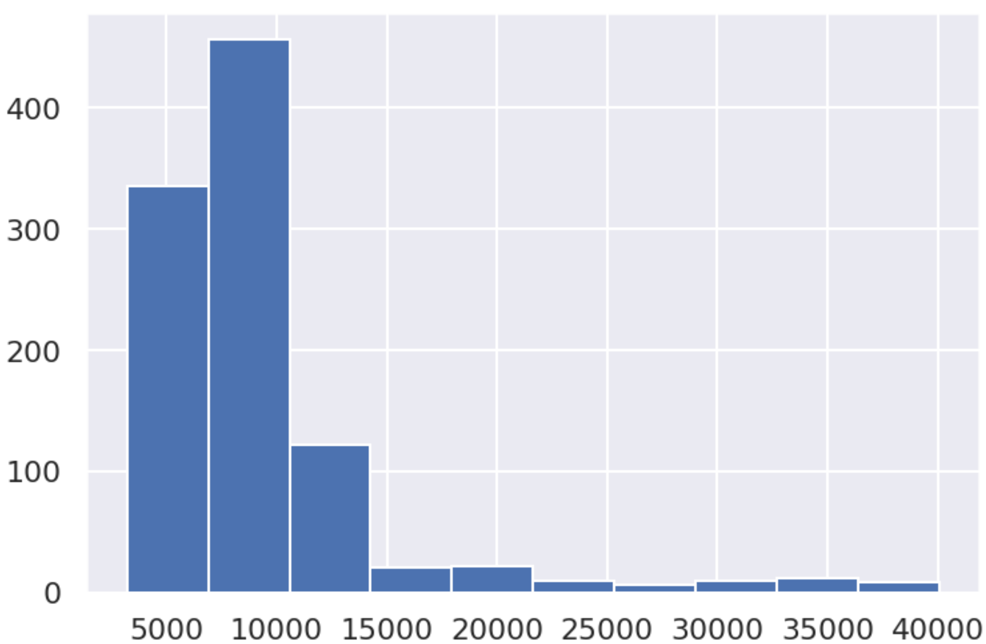
[18]:
```
0    33879.000
1    35223.650
2    31813.040
3    30899.505
4    31879.625
dtype: float64
```

[19]:
```
USD_mean.plot()
```

[19]:
```
<matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot at 0x7ffb1dfb6040>
```

[20]:
```
USD_mean.hist()
```

[20]: <matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot at 0x7ffb1df063a0>



[21]:
```
USD_mean = np.array(USD_mean)
```

2.2.1 Modelo MCMC

As váriaveis mu e sigma terão como prioris distribuições normal e uniforme, respectivamente, com um alto espassamento de forma ao modelo escolher qual espaço elas devem ficar.

$$\mu \sim Norm \text{ e } \sigma \sim Unif$$

Além disso, a c.d.f. uma distribuição Lognormal.

[22]:
```
%%time
with pm.Model() as model:
    mu = pm.Normal('mu', mu=0.0, tau=0.01, testval=0.0)
    sigma = pm.Uniform('sigma', lower=0, upper=800)

    S = pm.Lognormal('S', mu=mu, sigma=sigma, observed=USD_mean)

    N_SAMPLE = 5000

    trace = pm.sample(N_SAMPLE)
```

```
Auto-assigning NUTS sampler...
Initializing NUTS using jitter+adapt_diag...
Multiprocess sampling (4 chains in 4 jobs)
NUTS: [sigma, mu]

<IPython.core.display.HTML object>

Sampling 4 chains for 1_000 tune and 5_000 draw iterations (4_000 + 20_000 draws
total) took 4 seconds.
The acceptance probability does not match the target. It is 0.8788726039897976,
but should be close to 0.8. Try to increase the number of tuning steps.

CPU times: user 3.63 s, sys: 200 ms, total: 3.83 s
Wall time: 5.3 s
```

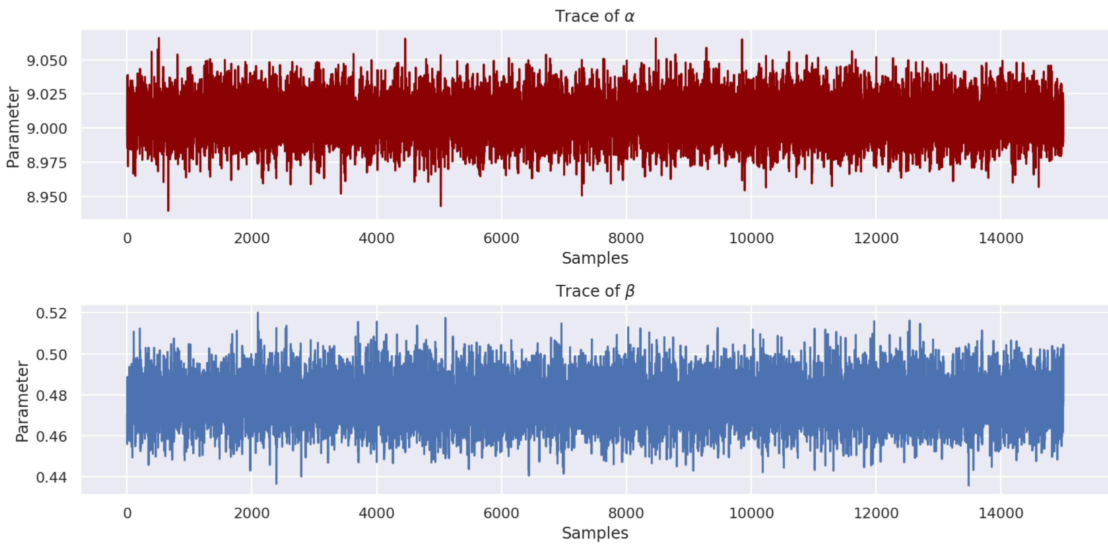
2.2.2 Construindo o diagnóstico

[23]:
```
mu_samples = trace["mu"][5000:,None]
sigma_samples = trace["sigma"][5000:,None]
```

2.2.3 Trace plot

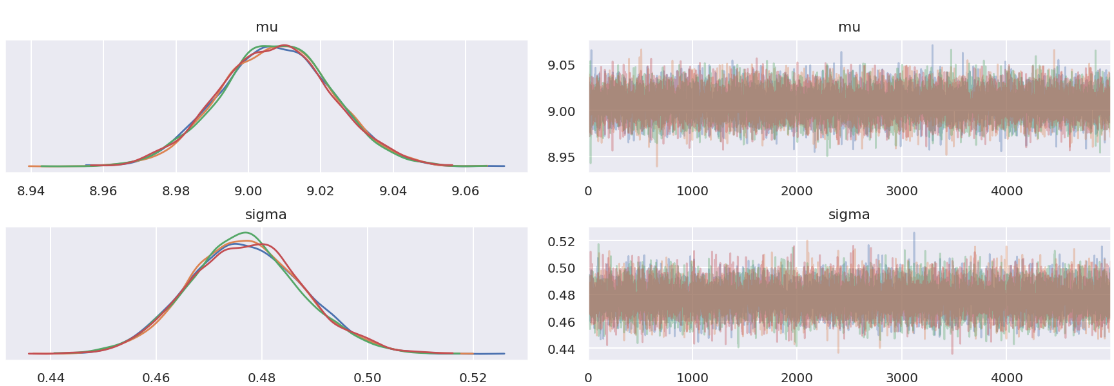
[24]:
```
figsize(12,6)

# Plot alpha trace
plt.subplot(211)
plt.title(r'Trace of $\alpha$')
```

```
plt.plot(mu_samples, color = 'darkred')
plt.xlabel('Samples'); plt.ylabel('Parameter');

# Plot beta trace
plt.subplot(212)
plt.title(r'Trace of $\beta$')
plt.plot(sigma_samples, color='b')
plt.xlabel('Samples'); plt.ylabel('Parameter');
plt.tight_layout(h_pad=0.8)
```



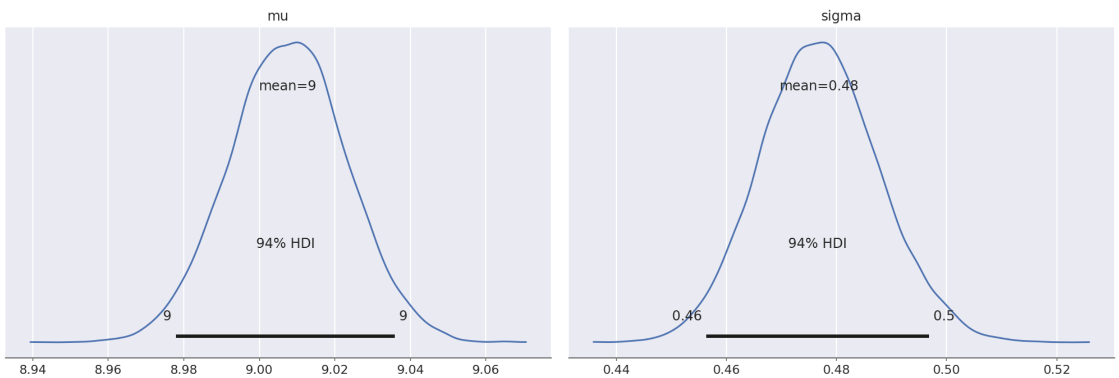
[25]:
```
pm.plot_trace(trace);
```

```
/home/victor/.local/lib/python3.8/site-packages/arviz/data/io_pymc3.py:87:
FutureWarning: Using `from_pymc3` without the model will be deprecated in a
future release. Not using the model will return less accurate and less useful
results. Make sure you use the model argument or call from_pymc3 within a model
context.
  warnings.warn(
```



[26]:
```
figsize(6,4)
pm.plot_posterior(trace);
```

```
/home/victor/.local/lib/python3.8/site-packages/arviz/data/io_pymc3.py:87:
FutureWarning: Using `from_pymc3` without the model will be deprecated in a
future release. Not using the model will return less accurate and less useful
results. Make sure you use the model argument or call from_pymc3 within a model
context.
  warnings.warn(
```



Perceba que nosso modelo achou que a média dos nossos parâmetros μ foi de 9 e a média de σ de 0.48

[27]:
```
new_mu = trace["mu"].mean()
new_mu
```

[27]: 9.00754898126472

[28]:
```
new_sigma = trace["sigma"].mean()
new_sigma
```

[28]: 0.47687909849756854

2.3 Será que a aproximação de calcular a média do ativo diária foi uma boa escolha?

A resposta é não! Para estipularmos os intervalos, precisamos mudar a p.d.f. de dentro da verrossimilhança como diferença de c.d.f.s.

Na abordagem anterior: Tinhamos observações do tipo $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ que nos dava uma verrossimilhança:

$$L(\mu, \sigma \mid \boldsymbol{T}) = \prod_{i=1}^{n} f(T_i; \mu, \sigma)$$

onde $f(x; \mu, \sigma)$ é a p.d.f. da distribuição $\mathrm{LogNormal}(\mu, \sigma^2)$.

No entanto, não temos observações, apenas intervalos. Nossos dados são do tipo $T_i \in [T_i^-, T_i^+]$. Assim, nossa verrossimilhança será:

$$L(\mu, \sigma \mid \boldsymbol{T}^-, \boldsymbol{T}^+) = \prod_{i=1}^{n} [F(T_i^+; \mu, \sigma) - F(T_i^-; \mu, \sigma)]$$

onde $F(x; \mu, \sigma)$ é a c.d.f. da distribuição $\mathrm{LogNormal}(\mu, \sigma^2)$.

[29]:
```
import theano.tensor as tt

#funções para alterarmos a verrossimilhança.
def zvalue(x, sigma, mu):

    return (x - mu) / sigma

def cdf(x, mu, sigma):

        z = zvalue(np.log(x), mu=mu, sigma=sigma)

        return tt.switch(
                tt.lt(z, -1.0),
                tt.erfcx(-z / tt.sqrt(2.)) / 2. * np.exp(-tt.sqr(z) / 2),
                tt.erfc(-z / tt.sqrt(2.)) / 2.
        )
```

[30]:
```
USD_high = np.array(data.high_USD)
USD_low = np.array(data.low_USD)
```

[31]:
```
%%time
with pm.Model() as model:
     = pm.Normal('', mu=500, tau=0.01, testval=0.0)
     = pm.Uniform('', lower=0, upper=500)
    pm.Potential('T', tt.sum(tt.log( cdf(USD_high, , ) - cdf(USD_low, , ) )))
    trace = pm.sample(10**5, step=pm.Metropolis())
```

```
Multiprocess sampling (4 chains in 4 jobs)
CompoundStep
>Metropolis: []
>Metropolis: []
```

```
<IPython.core.display.HTML object>
```

```
Sampling 4 chains for 1_000 tune and 100_000 draw iterations (4_000 + 400_000
draws total) took 58 seconds.
The number of effective samples is smaller than 25% for some parameters.
```

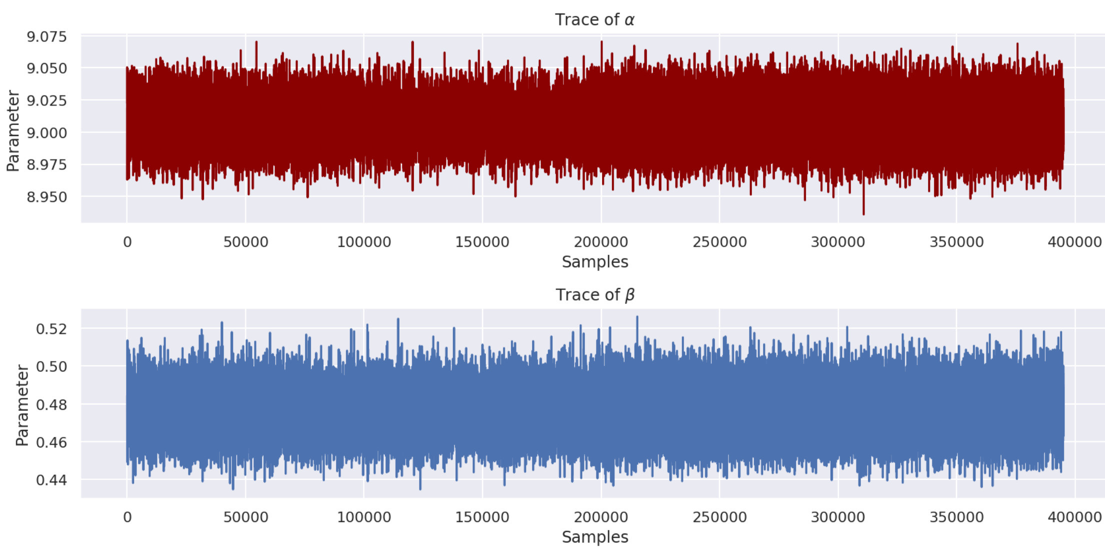
```
CPU times: user 39.3 s, sys: 2.42 s, total: 41.7 s
Wall time: 59.2 s
```

2.3.1 Construindo o diagnóstico

[32]:
```python
mu_samples = trace[''][5000:, None]
sigma_samples = trace[''][5000:, None]
```

2.3.2 Trace plot

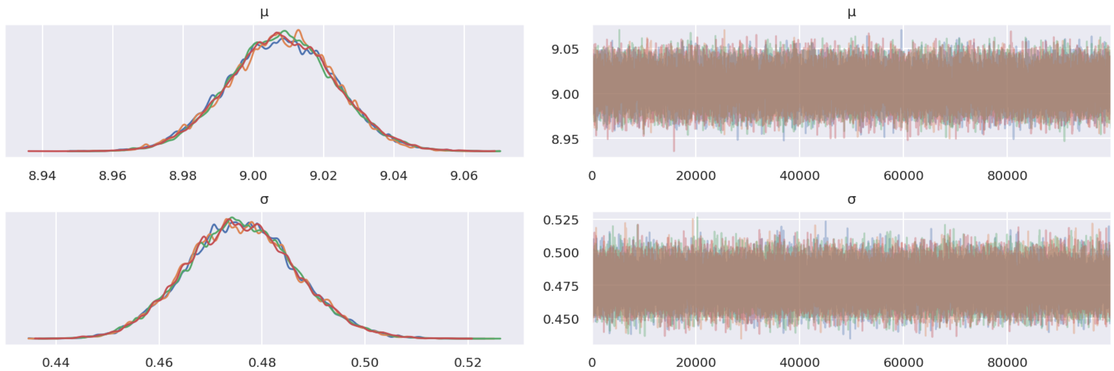
[33]:
```python
figsize(12,6)

# Plot alpha trace
plt.subplot(211)
plt.title(r'Trace of $\alpha$')
plt.plot(mu_samples, color = 'darkred')
plt.xlabel('Samples'); plt.ylabel('Parameter');

# Plot beta trace
plt.subplot(212)
plt.title(r'Trace of $\beta$')
plt.plot(sigma_samples, color='b')
plt.xlabel('Samples'); plt.ylabel('Parameter');
plt.tight_layout(h_pad=0.8)
```



[34]:
```python
pm.plot_trace(trace);
```

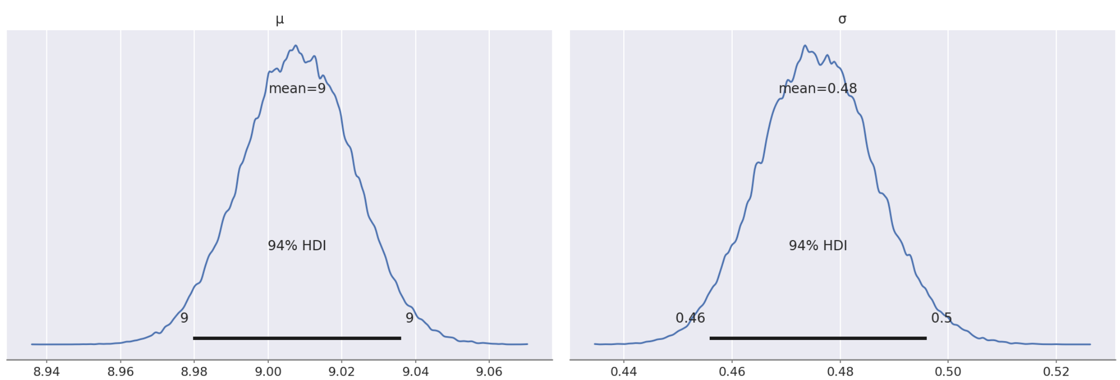
```
/home/victor/.local/lib/python3.8/site-packages/arviz/data/io_pymc3.py:87:
FutureWarning: Using `from_pymc3` without the model will be deprecated in a
```

```
future release. Not using the model will return less accurate and less useful
results. Make sure you use the model argument or call from_pymc3 within a model
context.
  warnings.warn(
```



[35]:
```python
figsize(6,4)
pm.plot_posterior(trace);
```

```
/home/victor/.local/lib/python3.8/site-packages/arviz/data/io_pymc3.py:87:
FutureWarning: Using `from_pymc3` without the model will be deprecated in a
future release. Not using the model will return less accurate and less useful
results. Make sure you use the model argument or call from_pymc3 within a model
context.
  warnings.warn(
```



Perceba que nosso modelo achou que a média dos nossos parâmetros μ se manteve de 9 e a média de σ de 0.48