普通天文學 2024 作業一

B11202041 物理二 劉晁泓

March 15, 2024

Parsec $\sim 3 \times 10^{18} cm$

1. [20 分][關於望遠鏡的大小] 如果我們使用 SDSS 的望遠鏡直徑 **2.5** 公尺，觀測某星系曝光 1 分鐘，算出該星系的視星等為 22 等 ($m = 22$) 之後該測量值的訊噪比 (signal/noise ratio) 為 5，在此我們考慮訊噪比 (signal to noise ratio) 正比於一次曝光所收集到的所有光子數目 N 的 1/2 次方，

$$\frac{S}{N} \propto N_{\text{photon}}^{\frac{1}{2}}$$

請問

(a) 該 22 星等的星系距離我們約 3000Mpc (1Mpc $= 10^6$ pc)，請問他的絕對星等為？

(a) 解：

我們先列出一些我們可能會用到的算式：

$$m - M = -2.5 \cdot \log_{10} \frac{f_{\text{observed}}}{f_{\text{observed@10pc}}} \tag{1}$$

$$m - M = 5 \cdot \log_{10} \frac{d}{\text{pc}} - 5 \tag{2}$$

$$f_{\text{observed}} = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{3}$$

$$f_{\text{observed@10pc}} = \frac{L}{4\pi (10\text{pc})^2} \tag{4}$$

我們整理公式 (2) 得到：

$$M = m - 5 \cdot \log_{10} \frac{d}{\text{pc}} + 5$$

$$\Rightarrow M = 22 - 5 \cdot \log_{10}(3000 \cdot 10^6) + 5$$

$$\Rightarrow M = -20.386$$

(b) 如果我們用 GMT 望遠鏡直徑 **25.4** 公尺，觀測同一個星系也是曝光 1 分鐘，請問這個觀測的訊噪比會是多少？[觀測收集到的光子數正比於望遠鏡的鏡面面積 × 觀測時間 × 星系的 flux]

(b) 解：

由於觀測時間與 flux 與題幹相比皆為守恆量，收集到的光子數比正比於望遠鏡的鏡面面積比，意即：

$$\frac{N_{\text{phot, GMT}}}{N_{\text{phot, SDSS}}} = \frac{25.4^2}{2.5^2}$$
$$\Rightarrow \frac{S/N_{\text{GMT}}}{S/N_{\text{SDSS}}} = \sqrt{\frac{N_{\text{phot, GMT}}}{N_{\text{phot, SDSS}}}} = \frac{25.4}{2.5} = 10.16$$
$$\Rightarrow \frac{S}{N}_{\text{GMT}} = 10.16 \cdot \frac{S}{N}_{\text{SDSS}} = 50.8$$

(c) 請問 GMT 的望遠鏡曝光 1 分鐘，能偵測到訊噪比為 5 的星系視星等為何？

(c) 解：

設此題要求之星系視星等為 m_x，題幹之星系視星等為 m，因偵測到的光子數相同，題幹之星系的 flux(f) 與此題之星系的 flux(f_x) 之比為：

$$\frac{f}{f_x} = \frac{25.4^2}{2.5^2}$$

此題要求之星等可以由此資訊求出：

$$m_x = m - 2.5\log_{10}\left(\frac{f_x}{f}\right) = 22 - 2.5\log_{10}\left(\frac{2.5^2}{25.4^2}\right) = 27.034$$

(d) 如果使用 GMT 觀測 22 星等的星系，之後我們要求訊噪比為 5，請問所需的曝光時間為何？[以上假設用同一個濾鏡。這些計算都是實際上天文學家在構思觀測計畫會做的運算]

(d) 解：

此小題相較題幹固定的變數為光子數與 flux，因此曝光時間比會是鏡面面積比的倒數，我們如下求得此題要求之曝光時間 (t_x)：

$$\frac{t_x}{t} = \frac{2.5^2}{25.4^2}$$
$$\Rightarrow t_x = \frac{2.5^2}{25.4^2} \cdot 1 = 9.68 \cdot 10^{-3}(\text{min})$$

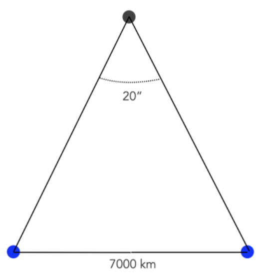

Figure 1

2. [15 分][關於視差法] 上課我們提到以前 Cassini 用視差法量火星距離，分別在歐洲和南美洲兩個距離約 7000km 的地方，量火星的角度變化，發現變化角度約為 20″(20arcsec)(如右圖)，根據視差法和以上資訊算出地球與火星的距離。

2. 解：

設地球火星距離為 x，由於此題角度為角秒的數量級角度甚小，我們可以做適當的角度近似：

$$\sin\theta \sim \theta$$

因此我們有

$$x\theta = 3500(\mathrm{km})$$
$$\Rightarrow x = \frac{3500}{10/3600^{\circ}} = 7.219 \cdot 10^{7}(\mathrm{km})$$

3. [15 分][關於角解析力] 在 2017 年，天文學家成功使用電波望遠鏡，解析了 M87 超大質量黑定的性質，根據廣義相對論，該黑洞直徑約 40×10^{12} 公尺，而 M87 離地球約 16×10^{6}pc，

(a) 請估算該黑洞再天空上的角度約？

(a) 解：

$$\theta = \frac{40 \cdot 10^{12}}{16 \cdot 10^{6} \cdot 3 \cdot 10^{16}}(\mathrm{rad}) = \frac{5}{6 \cdot 10^{10}}(\mathrm{rad}) = 1.719 \cdot 10^{-5\prime\prime}$$

(b) 如果在 1.3mm 的無線電波段觀測，要能達到該黑洞再天空上的角度相對應的角解析度，請問該望遠鏡的 baseline 要多長？

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$
$$\Rightarrow D = 1.22\frac{\lambda}{\theta} = 1.22 \cdot \frac{1.3 \cdot 10^{-3}}{5/6 \cdot 10^{-10}}(\mathrm{m}) = 1.903 \cdot 10^{7}(\mathrm{m})$$

(c) 請問該 baseline 的長度，跟地球大小相比如何？

(c) 地球直徑大小為 12742 公里，也就是 $1.274 \cdot 10^{7}$ 公尺。此題算出的望遠鏡直徑約為地球大小的 1.5 倍，即與地球差不多大。

4. [20 分][關於 Period-Luminosity relationship] 我們上課討論到，Leavitt 觀測造父變星發現週期和亮度的關係，

(a) 根據 Leavitt 實際觀測的數據下圖 (x-axis 是 $\log_{10} P$，y-axis 是 observed magnitude)，推算 α 值。

(a) 解：

複習一下式 (2)，對於每顆造父變星 (我們以 i 作為每顆星的 index)，我們都有:

$$m_i - M_i = 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{d_i}{\mathrm{pc}}\right) - 5$$

但是理 Leavitt 觀測的造父變星們距離銀河系非常遠，我們考慮全部造父變星與我們距離近乎相等的近似，

$$d_i \sim d \ \forall i$$

因此上面的關係式右手邊變成一個與 i 無關的常數：

$$\gamma := 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{d}{\mathrm{pc}}\right) - 5$$

現在我們考慮 Leavitt 的觀測數據，應有：

$$M_i = \alpha \cdot \log_{10} P_i + \beta$$

$$\Rightarrow m_i = \alpha \cdot \log_{10} P_i + (\beta + \gamma)$$

利用 Leavitt 作出的回歸直線 (考慮上面那條線大約通過 (1.0, 13.5) 和 (2.0, 11.5))，我們有

$$\alpha = \frac{\Delta m}{\Delta \log_{10} P} \sim \frac{11.5 - 13.5}{2.0 - 1.0} = -2$$

(b) Hertzsrpung 接著觀測銀河系中的造父變星，發現週期為 6 天視星等為 4.2mag(這裡我們考慮再上面的那條線，即最亮時的視星等) 的造父變星，距離為約 200pc，請用以上資訊推算出 β 值。

(b) 解：

套用 (a) 小題推導過的式子，我們考慮代入此題提供的數值:

$$m = \alpha \log_{10} P + \beta + 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{d}{\mathrm{pc}}\right) - 5$$

$$\Rightarrow \beta = m - \alpha \log_{10} P - 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{d}{\mathrm{pc}}\right) + 5$$

$$\sim 4.2 - (-2) \cdot \log_{10} 6 + 5 \cdot \log_{10} 200 + 5 = 22.261$$

(c) 哈伯觀測 M31 的變星發現週期為 30 天的變星，推算出 M31 和地球的距離為約 900,000 光年，根據 (a)(b) 所推算出的週期與光度關係，請問該變星的視星等和絕對星等為何？[以上有些數值為作業設計，並不一定為當時觀測數值]

$$M = \alpha \cdot \log_{10} P + \beta$$

(c) 解：

絕對星等：

$$M = \alpha \cdot \log_{10} P + \beta = (-2) \cdot \log_{10} 30 + 22.261 = 19.307$$

視星等 (1ly $\sim$ 0.3066 pc) ：

$$m = M + 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{d}{\mathrm{pc}}\right) - 5 = 19.307 + 5 \cdot \log_{10}\left(9 \cdot 10^5 \cdot 0.3066\right) - 5 = 41.511$$

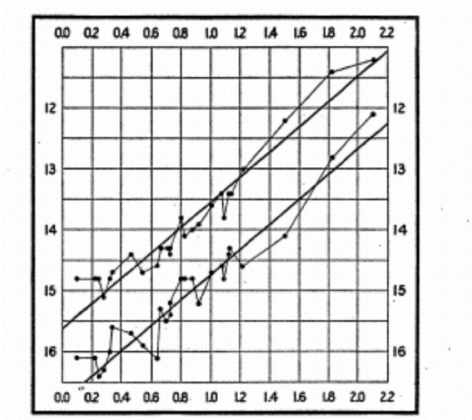

FIG. 2.

Figure 2

5. [20 分][關於望遠鏡] James Webb Space Telescope(JWST) 於 2021 年 12/25 升空，關於它的重要性請讀以下文章 文章 1 並請看 影片 1

   之後回答以下問題：

   (a) JWST 約花了多久的時間蓋？

   (a) 解：

   約 20 年。

   (b) JWST 會飛到哪裡去？

   (b) 解：

   距地球約 150 萬公里的 L2 點 (拉格朗日點) 上。

   (c) 為什麼 JWST 需要 5 層的大帆？

   (c) 解：

   用以阻擋太陽、地球、月球散發出的熱量，以提昇偵測來自宇宙的紅外光的準確度。

   (d) 為什麼 JWST 需要冷卻到很低溫，跟我們上課的哪個物理效應有相關？

   (d) 解：

   因為 JWST 本身的熱輻射也會影響到他的測量數據，此即上課提到的黑體輻射的效應。

   (e) 根據那個物理效應，JWST 的觀測波長範圍 ($\sim$10 micron) 所對應的溫度大約為何？

   (e) 解：

   根據 Wien's Law，我們有：

$$\lambda T = 0.29\text{cm} \cdot \text{K}$$

$$\Rightarrow T = \frac{0.29}{10 \cdot 10^{-4}} = 290\text{K}$$

6. [10 分] 請根據下圖中的四個恆星光譜，估算這四個恆星的表面溫度約為多少 K？請寫出估算方式以及最後算出的恆星 1 2 3 4 的溫度。(資料來源 SDSS)

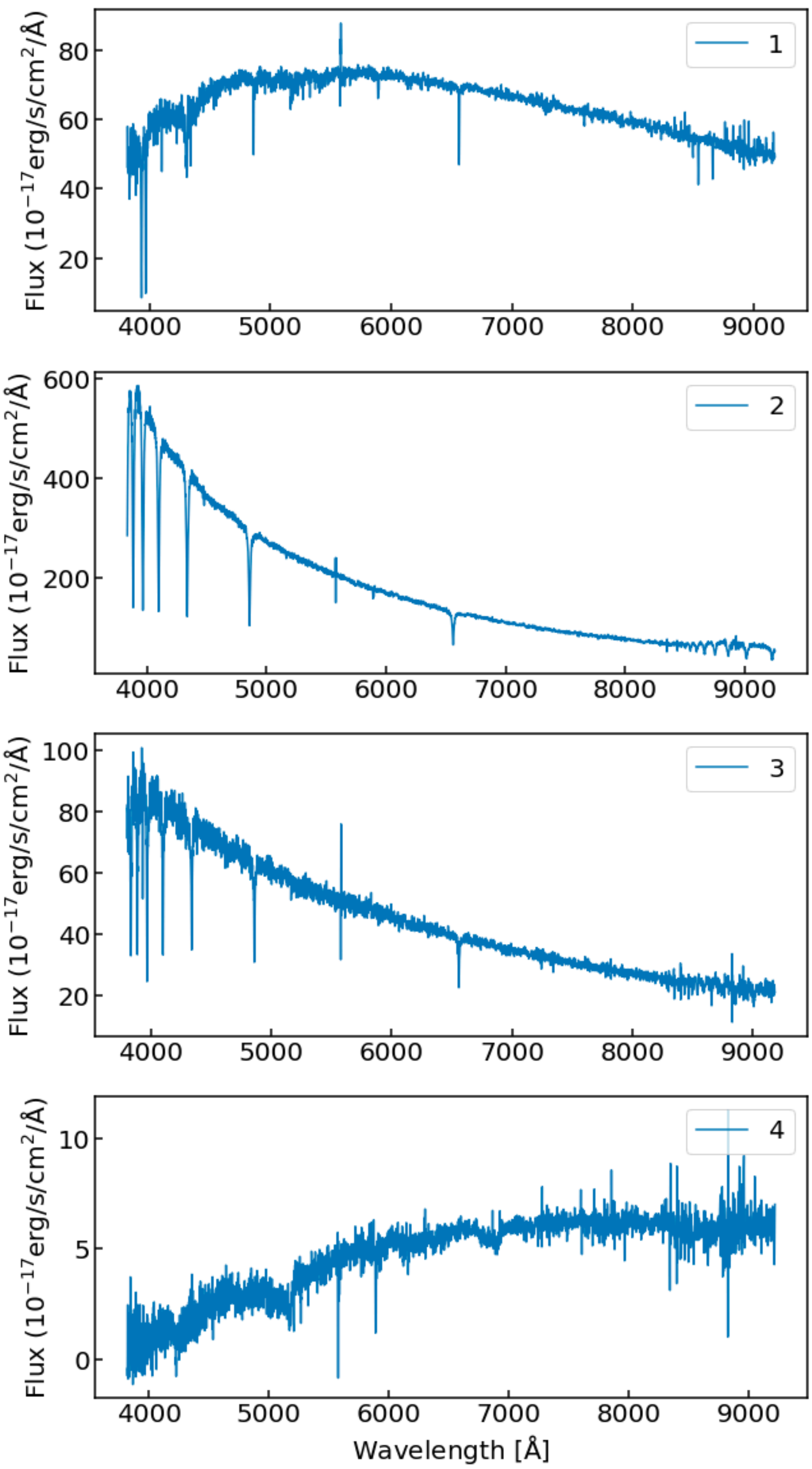
1
Flux (10^{-17}erg/s/cm^2/Å)
80
60
40
20
4000
5000
6000
7000
8000
9000
2
Flux (10^{-17}erg/s/cm^2/Å)
600
400
200
4000
5000
6000
7000
8000
9000
3
Flux (10^{-17}erg/s/cm^2/Å)
100
80
60
40
20
4000
5000
6000
7000
8000
9000
4
Flux (10^{-17}erg/s/cm^2/Å)
10
5
0
4000
5000
6000
7000
8000
9000
Wavelength [Å]

Figure 3

6. 解：

我們應用 wien's law，先估計 λ 的峰值再計算溫度。

(1) $\lambda \sim 5500\text{Å}$

$$\Rightarrow T = \frac{0.29}{5500 \cdot 10^{-8}} \sim 5273\text{K}$$

(2) $\lambda \sim 4000\text{Å}$

$$\Rightarrow T = \frac{0.29}{4000 \cdot 10^{-8}} \sim 7250\text{K}$$

(3) $\lambda \sim 4000\text{Å}$

$$\Rightarrow T = \frac{0.29}{4000 \cdot 10^{-8}} \sim 7250\text{K}$$

(4) $\lambda \sim 8500\text{Å}$

$$\Rightarrow T = \frac{0.29}{8500 \cdot 10^{-8}} \sim 3411\text{K}$$