Вступительный экзамен ML и DL. Winter 2022

1. Прогрессивная последовательность, прогрессивная ли? Из множества $\{1,2,\ldots,97\}$ выбирают три числа. Какова вероятность, что из них можно составить арифметическую прогрессию?

Решение.

1) Пусть мы закрепляем число, стоящее в середине прогрессии. Тогда можно посчитать сколько троек, образуют арифметическую прогрессию.

1 $\rightarrow$ кол-во = 0

2 $\rightarrow$ 1-2-3 $\rightarrow$ кол-во = 1

3 $\rightarrow$ 1-3-5, 2-3-4 $\rightarrow$ кол-во = 2

4 $\rightarrow$ 1-4-7, 2-4-6, 3-4-5 $\rightarrow$ кол-во = 3

—

49 $\rightarrow$ 1-49-97, 2-49-96, ... $\rightarrow$ кол-во = 48

2) Получаем способов выбрать тройки чисел $= |A| = 1 + 2 + ... + 48 = \frac{1+48}{2} \cdot 48 = 49 \cdot 24$

3) Всего способов выбрать три числа из $97 = |\sigma| = c_9^3 7 = \frac{97!}{3! \cdot 94!} = \frac{97 \cdot 96 \cdot 95}{2 \cdot 3} = 97 \cdot 16 \cdot 95$

4) $p(A) = \frac{|A|}{|\sigma|} = \frac{49 \cdot 24}{97 \cdot 16 \cdot 95} = \frac{49 \cdot 3}{97 \cdot 2 \cdot 95} = 0.0080 =$ ответ

2. ВКвадратное уравнение Вася пишет функцию $f(x) = x^2 + bx + c$, причем коэффициенты b, c он выбирает наугад из квадрата с вершинами, лежащими в точках (2; 2), (-2; 2), (2; -2), (-2, -2). Найдите вероятность того, что корни окажутся мнимыми.

Решение.

1) Корни будут мнимыми, если дискриминат будет отрицательным. $D = b^2 - 4 \cdot c < 0 \rightarrow b^2 < 4 \cdot c \rightarrow c > \frac{b^2}{2}$

2) Площадь над графиком $c = \frac{b^2}{2}$ в пределах квадрата 4 X 4 $= 2 \cdot \left(4 - \int_0^2 x^2/4 \cdot dx\right) = 2 \cdot \left(4 - \frac{x^3}{3 \cdot 4}\Big|_0^2\right) = 2 \cdot \left(4 - \frac{2^3}{3 \cdot 4}\right) = 2 \cdot \left(4 - \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$

3) Площадь квадрата $= |\sigma| = 4^2 = 16$

4) $p(A) = \frac{|A|}{|\sigma|} = \frac{20}{16 \cdot 3} = \frac{5}{4 \cdot 3} = 0.4167 =$ ответ

3. Three boys, one course Трое ребят Вася, Петя и Миша поступают на курсы по машинному обучению. Известно, что из них троих возьмут только двоих, причем Вася следил за преподавателями и узнал, что Петю точно берут. Какова вероятность того, что Васю тоже возьмут?

Решение.

1) Событие А – взяли первого из ребят $\rightarrow p(A) = 2/3$

2) Событие В – взяли второго из ребят, при условии, что первого уже точно выбрали, т.е. условная вероятность события В $\rightarrow p_A(B) = 1/3$

3) Событие АВ – взяли обоих $\rightarrow p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3 = 0.33 =$ ответ

4. экстрИмальные значения Найдите экстремальные значения функции z, зависящей от x и y, для которой справедливо соотношение:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2), \text{ где } a = const,\ a \neq 0$$

Решение. Для этого приравняем к нулю производную по x и по y.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot(2\cdot x+2\cdot z\cdot z'_x) = a^2\cdot(2\cdot x-2\cdot z\cdot z'_x) \\ 2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot(2\cdot y+2\cdot z\cdot z'_y) = a^2\cdot(2\cdot y-2\cdot z\cdot z'_y) \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot(x+z\cdot z'_x) = a^2\cdot(x-z\cdot z'_x) \\ 2\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot(y+z\cdot z'_y) = a^2\cdot(y-z\cdot z'_y) \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z\cdot z'_x\cdot(x^2+y^2+z^2) - a^2\cdot z\cdot z'_x = a^2\cdot x - 2\cdot x\cdot(x^2+y^2+z^2) \\ z\cdot z'_y\cdot(x^2+y^2+z^2) - a^2\cdot z\cdot z'_y = a^2\cdot y - 2\cdot y\cdot(x^2+y^2+z^2) \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z'_x = \frac{x\cdot(a^2-2\cdot(x^2+y^2+z^2))}{z\cdot(a^2+2\cdot(x^2+y^2+z^2))} \\ z'_y = \frac{y\cdot(a^2-2\cdot(x^2+y^2+z^2))}{z\cdot(a^2+2\cdot(x^2+y^2+z^2))} \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow$$

Дробь $= 0$, если числитель $= 0$, а знаменатель $\neq 0$. Следовательно получаем четыре случая

Первый - получаем мнимые корни $\rightarrow$ убираем их т.к. работаем на множестве вещественных чисел.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \neq 0 \\ a^2 + 2\cdot(x^2+y^2+z^2) \neq 0 \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^4 = -a^2\cdot z^2 \\ z \neq 0 \\ a^2 + 2\cdot(x^2+y^2+z^2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow z = a\sqrt{-1}$$

Второй: корни $z = \pm a/(2\sqrt{2})$ для всех a. По условию $a \neq 0$, поэтому $z \neq 0$.

$$\begin{cases} a^2 - 2\cdot(x^2+y^2+z^2) = 0 \\ z \neq 0 \\ a^2 + 2\cdot(x^2+y^2+z^2) \neq 0 \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2/2 = x^2+y^2+z^2 \\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2) \\ z \neq 0 \\ a^2 + 2\cdot(x^2+y^2+z^2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a^4/4 = a^2(a^2/2 - z^2 - z^2) \Rightarrow a^2/4 = a^2/2 - 2z^2 \Rightarrow a^2/4 = 2z^2 \Rightarrow z = \pm a/(2\sqrt{2})$

Третий:

$$\begin{cases} a^2 - 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ x = 0 \\ z \neq 0 \\ a^2 + 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \neq 0 \\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{сводится ко второму случаю}$$

Четвертый:

$$\begin{cases} a^2 - 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ y = 0 \\ z \neq 0 \\ a^2 + 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \neq 0 \\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{сводится ко второму случаю}$$

5. Друзья останутся без подарков? n друзей собрались и решили отправить письма Деду Морозу. У каждого есть 1 конверт 11 письмо. Потом ребята всё перемешали и стали класть письма в конверты. Сколько в среднем писем попадет в свой конверт?

Решение.

1) Пусть событие A_k – k-е письмо попало в свой конверт. $p(A_k) = 1/n$.

2) Среднее количество попавших в свой конверт писем - это мат.ожидание. $E = \sum_{k=1}^{n} E(A_k) = n \cdot p(A_k) = n \cdot 1/n = 1 =$ ответ