CS 131 Compilers: Discussion 14: Static Analysis

杨易为 季杨彪 尤存翰

{yangyw,jiyb,youch}@shanghaitech.edu.cn

2021 年 6 月 4 日

1 What's Data Flow Analysis

Data-flow analysis is a technique for gathering information about the possible set of values calculated at various points in a computer program. A program's control-flow graph (CFG) is used to determine those parts of a program to which a particular value assigned to a variable might propagate. The information gathered is often used by compilers when optimizing a program. A canonical example of a data-flow analysis is reaching definitions.

1.1 Iterative Algorithm

1. 对于一个含 k 个节点的 CFG, 每个迭代算法对于每个 node n 更新 OUT $[n]$。
2. 假设迭代算法的研究对象 (domain) 是 V, 定义一个 k 元组 $V^k = (\mathrm{OUT}\left[\mathrm{n}_1\right], \mathrm{OUT}\left[\mathrm{n}_2\right], \ldots, \mathrm{OUT}\left[\mathrm{n}_\mathrm{k}\right])\$, \$V^k \in$ $(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k)$ V^k 即一次迭代产生的输出，每次迭代会更新 V^k, 可以将每次迭代经过 transfer functions 和 control-flow handing 的过程抽象为 $F : V^k \rightarrow V^{k'}$
3. 当 $V^k \rightarrow V^{k'}$ 时, 即 $X = F(X)$, 称 $F(x)$ 在 X 处到达了不动点, X 为 $F(x)$ 的不动点,

1.2 Poset & partial order（偏序集和偏序）

We define poset as a pair $(P, 5)$ where $\subseteq$ is a binary relation that defines a partial ordering over P, and $\sqsubseteq$ has the following properties:

1. $\forall x \in P, x \sqsubseteq x$ (Reflexivity, 自反性)
2. $\forall x, y \in P, x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetry, 反对称性)
3. $\forall x, y, z \in P, x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$ (Transitivity, 传递性)

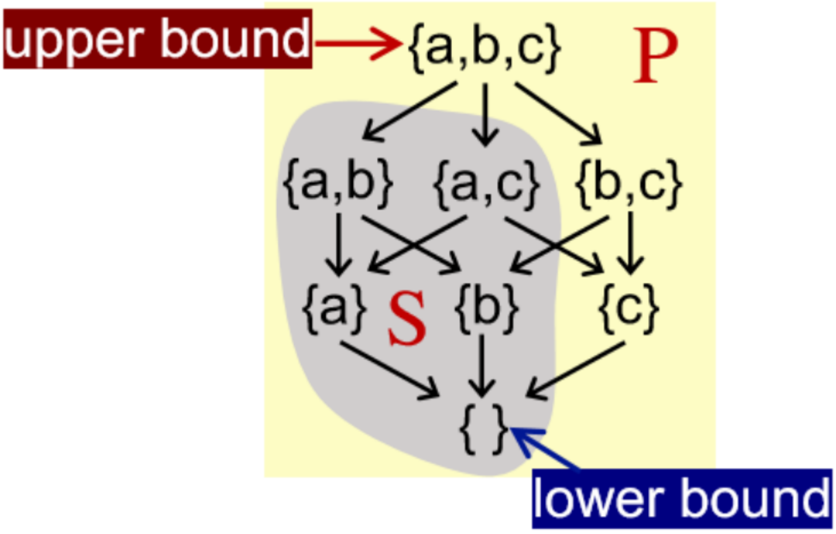
偏序集为一个二元组 $(P, \sqsubseteq), P$ 为一集合, 三为在集合上的一种比较关系，这个二元组为偏序集当且仅当集合元素在关系上满足自反性、反对称性和传递性。

偏序的含义：一个集合中的任意两个元素不一定存在顺序关系 (任意两元素不一定能比较大小)

1.3 Uppper and Lower Bounds（上界和下界）

Given a poset $(P, \sqsubseteq)$ and its subset S that $S \subseteq P$, we say that $u \in P$ is an upper bound of S, if $\forall x \in P, x \sqsubseteq u$. Similarly, $l \in P$ is an lower bound of S, if $\forall x \in P, l \sqsubseteq u$.

如图, $\{a, b, c\}$ 是S 的上界 (灰色) , $\{\}$ 是S 的下界:



1.4 最小上界、最大下界

We define the least upper bound (lub or join) of S, written $\sqcup S$, if for every upper bound of S_1 say $u, \sqcup S \sqsubseteq u$. Similarly, We define the greatest lower bound (glb or meet) of S, written $\sqcap S$, if for every lower bound of S, say $l, l \sqsubseteq \sqcap S$.

特别的, 对于仅有两个元素的集合$S = \{a, b\}, \sqcup S$ 可以写为$a \sqcup b$, 同理$\sqcap S$ 可以写为$a \sqcap b$ 。

注意：（最小）上界和（最大）下界是针对集合中的特定子集的，而上下界本身不一定在子集中，并且：

1. 不是所有偏序集均存在 lub 或者 glb（如先前灰色的集合就不含 lub）
2. 如果一个偏序集存在 lub 和 glb，那么它是唯一的

   证明：设 $g1$ 和 $g2$ 同为 P 的 glb，那么根据定义 $g_1 \sqsubseteq (g_2 = \sqcap P)$ 并且 $g_2 \sqsubseteq (g_1 = \sqcap P)$，又因为反对称性，所以 $g_1 = g_2$

2 Lattice, Semilattice, Complete and Product Lattice

2.1 Lattice（格）

Given a poset $(P, \sqsubseteq), \forall a, b \in P$, if $a \sqcup b$ and $a \sqcap b$ exist, then $(P, \sqsubseteq)$ is called a lattice.

如果一个偏序集的任意两个元素都有最小上界和最大下界，那么这一偏序集是一个**格**

2.2 Semilattice

最小上界和最大下界只存在一个的偏序集称**半格**，只存在最小上界称为“join semilattice”，只存在最大下界称为“meet semilattice”。

2.3 Complete Lattice, top & bottom (全格, $\top$ 和 $\bot$) *

Given a lattice $(P, \sqsubseteq)$, for arbitrary subset S of P, if $\sqcup S$ and $\sqcap S$ exist, then $(P, \sqsubseteq)$ is called a complete lattice.

一个偏序集的任意子集均存在最小上界和最大下界，那么这个偏序集成为全格。每个全格都存在一个最大元素 top $(\top = \sqcup P)$ 和最小元素 bottom $(\bot = \sqcap P)$ 所有元素有限的格 (finite lattice) 均是全格。(反之不成立)

2.4 Product Lattice

Given lattices $L_1 = (P_1, \sqsubseteq_1), L_2 = (P_2, \sqsubseteq_2), \ldots, L_n = (P_n, \sqsubseteq) n)$, if for all $i, (P_i, \sqsubseteq_i)$ has $\sqcup i$ (least upper bound) and Π_i (greatest lower bound), then we can have a product lattice $L^n = (P, \sqsubseteq)$ that is defined by:

1. $P = P_1 \times \ldots \times P_n$
2. $(x_1, \ldots, x_n) \sqsubseteq (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow (x_1 \sqsubseteq y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n \sqsubseteq y_n)$
3. $(x_1, \ldots, x_n) \sqcup (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 \sqcup_1 y_1, \ldots, x_n \cup_n y_n)$
4. $(x_1, \ldots, x_n) \sqcap (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 \sqcap_1 y_1, \ldots, x_n \sqcap_n y_n)$

Product Lattice 仍是 Lattice, 若每个子格为全格，那么乘积也是全格。

2.5 Data Flow Analysis Framework via Lattice

一个数据流分析框架可以表示为一个三元组 (D, L, F), 其中:

1. D: 指数据流分析的方向, i.e., forward or backward;
2. L : 指 lattice, 该格表示所有 domain 值域, 以及 meet ( ) 或 join ($\sqcup$) 操作;
3. F: 一组 transfer function.

3 Monotonicity and Fixed Point Theorem

Monotonicity (单调性) A function $f : L \to L$(L is a lattice) is monotonic if $\forall x, y \in L, x \sqsubseteq y \Longrightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$ 普通函数的单调性的推广

3.1 Fixed-Point Theorem

Given a complete lattice $(L, \sqsubseteq)$, if (1) $f : L \to L$ is monotonic and (2) L is finite, then the least fixed point of f can be found by iterating $f(\perp), f(f(\perp)), \ldots, f^k(\perp)$ until a fixed point is reached the greatest fixed point of f can be found by iterating $f(\top), f(f(\top)), \ldots, f^k(T)$ until a fixed point is reached.

如果番调且 L 有界, 那么荐在不动点, 从上开始迭代执行 f 可得最小不动点, 从丁开始迭代可得最大不动点。

证明:

(1) Existence 由上定义以及 $f : L \to L$ 可槝

$$\perp \sqsubseteq f(\perp)$$

又因 f 是单调的，因此

$$f(\perp) \sqsubseteq f(f(\perp)) = f^2(\perp)$$

由于 L 是有限 (finite) 的, 因此总会存在一个 k, 有

$$f^{Fix} = f^k(\perp) = f^{k+1}(\perp)$$

(2) Least Fixed Point (数归法, 证明最小) 假设我们有另一个不动点 x, i.e., $x = f(x)$ 由上的定义, 我们有 $\perp \sqsubseteq x_i$ 下面用数归法证明：

由于 f 是单调的，因此

$$f(\perp) \sqsubseteq f(x)$$

对于 $f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(x)$, 由于 f 是单调的, 因此有

$$f^{i+1}(\perp) \sqsubseteq f^{i+1}(x)$$

因此对于任意 i, 有

$$f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(x)$$

又因为 $x = f(x)$, 所以存在一个 i, 有 $f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(x) = x$, 因此有

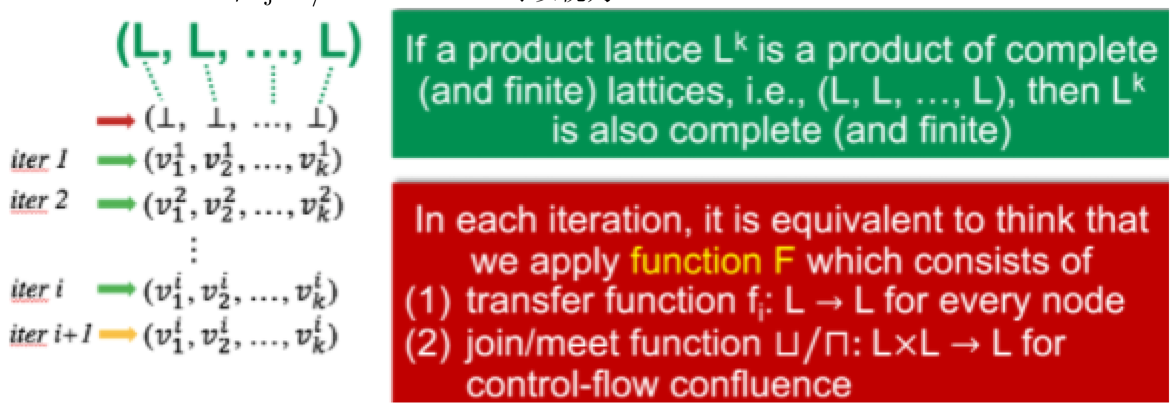
$$f^{Fix} = f^k(\perp) \sqsubseteq x$$

因此 $f^i(\perp)$ 是最小不动点。

4 Relate lterative Algorithm to Fixed Point Theorem

如何将迭代算法和不动点定理联系起来?

1. 程序中每一个状态为一个 product lattice
2. Transfer function 和 join/meet fucntion 可以视为 F



下面只需要证明 Transfer function 和 join/meet function 均为单调的即可

1. Transfer function 是单调的, 因为通过之前分析，所有 Gen/Kill 的函数都是单调的;
2. Join/meet function 是单调的, 证明如下

要证 Join/meet function，就是要证 $\forall x, y, z \in L, x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup z y \sqcup z$ 由 $\sqcup$ 定义可得, $y \sqsubseteq y \sqcup z$, 由于巨传递性, $x \sqsubseteq y$, 因此 $x \sqsubseteq y \sqcup z$, 因此 $y \sqcup z$ 是 x 的上界, 注意到 $y \sqcup z$ 也是 z 的上界, 而 $x \sqcup z$ 是 x 和 z 的最小上界, 因此 $x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup z \sqsubseteq y \sqcup z$

4.1 讨论算法复杂度

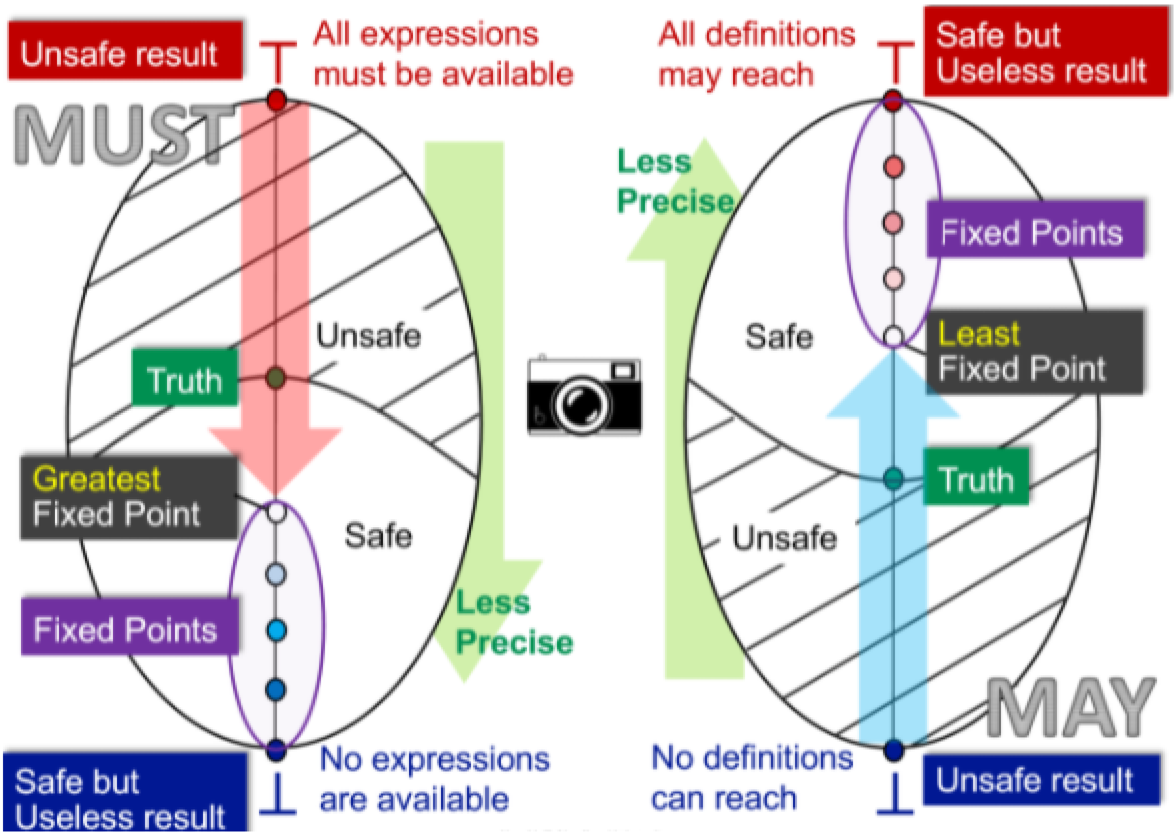
定义格的高度即从 top 至 bottom 的最长路径长, The height of a lattice h is the length of the longest path from Top to Bottom in the lattice. 最坏情况即一次迭代，只变化一个单位高度，因此复杂度为 $O(h \times k)$.

5 May/Must Analysis, A Lattice View*

任何分析初始状态都从 unsafe 至 safe。针对于分析结果而言，处理所有分析结果后，程序行为正常为 safe，反之为 unsafe，极端的 safe 是无用的（如安全扫描中的模式匹配）

Must 和 May 分析的示意图如下图所示，对于 Must 分析，每个代码块都是从 ⊤ 开始的，因为在程序一开始，算法认为所有的待分析对象都是“合格”的（例如存活表达式分析中，算法认为每个表达式都是成活的）——这是一个不安全的状态，经过不断迭代，算法逐渐下降到最大不动点，虽然已经过了 truth 点（漏报)，但是这已经是最好情况了（越往下走越 safe 但是结果也没意义了），对这些结果做优化能确保程序不出错（safe)。

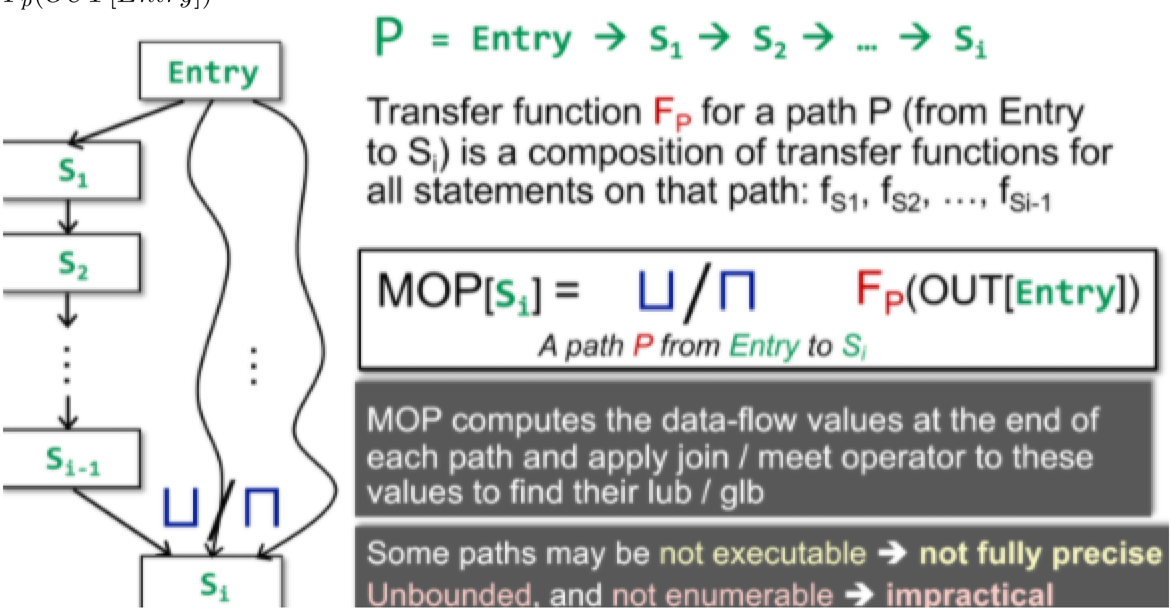
对于 May 分析，每个代码块从 ⊥ 开始，即在一开始，算法认为所有分析对象都是不合格的（例如定义可达性分析中，算法认为每一条定义都没有新的定义）——这是 May 类型的不安全状态，经过不断迭代，算法逐渐上升到最小不动点，同样也过了 truth（误报)，这也是分析的最好情况，算法依旧停留在 safe 区域。



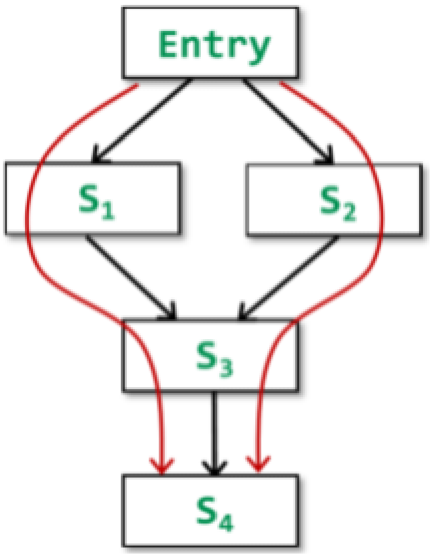
6 Distributivity（分配性）and MOP

6.1 MOP（Meet-Over-All-Paths Solution）

设 s_x 为矢设 F_p 是一个路径 P 上的 transfer function, 那么 MOP $[S_i]$ $= \sqcup/\sqcap_{\text{A path } P \text{ from Entry to } S_i}$ $F_p(OUT[Entry])$



就是说，之前数据流分析的结果是流敏感的, 而 MOP 的结果是路径敏感的, 例如下图所示的数据流，，数据流分析的结果是 IN $[s_4] = f_{s_3}(f_{s_1}(\text{OUT}[\text{ entry }]) \sqcup f_{S_2}(\text{ OUT }[\text{ Entry }]))$, 而 MOP 是 MOP $[s_4] = f_{S_3}(f_{s_1}(\text{OUT}[\text{ entry }])) \sqcup f_{S_3}(f_{S_2}(\text{OUT}[\text{ Entry }]))$ (注意 f_{s_3} 的位置)



6.2 Iterative Algorithm v.s. MOP

MOP 比 Iterative 分析更精确，也就是说路径敏感比敏感更精确，下面为证明（这里只需证明两条路径的情况，其它数归即可）：

然而，当 F 是 distributive（F 满足分配率）时，Interative 和 MOP 一样准确。

BitVector 或是 Gen/Kill 问题（set union/intersection for join/meet）都是满足分配率的

6.3 Constant Propagation

Given a variable x at program point p, determine whether x is guaranteed to hold a constant value at p 对于在程序点 p 的一个变量 x，判断 x 是否为在 p 点为一个常量

分析结果：对于每一个 CFG 节点，对应一个 (x,v) 集合，x 是变量，v 是 x 的值

6.4 Lattice

Domain: UNDEF $\rightarrow \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \rightarrow$ NAC, $\rightarrow$ 表示 $\sqsubseteq$ 关系 Meet Operator $\sqcup$:

1. $\mathrm{NAC} \sqcap v = \mathrm{NAC}$
2. $UNDEF \sqcap v = v$
3. $c \sqcap v = \mathrm{NAC}$ (c 为一常量)
4. $c \sqcap c = c$
5. $c_1 \sqcap c_2 = \mathrm{NAC}$

6.5 Transfer Function

讨论 transfer function, 对于一个赋值语句 $\mathrm{s : x = \ldots}$ 来说, 定义其 F 为

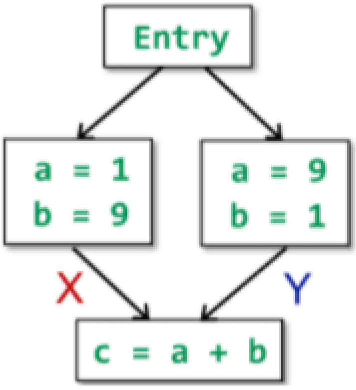
$$F : \mathrm{OUT}[s] = \mathrm{gen} \cup (\mathrm{IN}[s] - \{(x, \_)\})$$

- $\mathrm{s : x = c}$; gen $= \{(x, c)\}$ -s: x = y; gen $= \{(x, \mathrm{val}(y))\}$ - s: $x = y$ op z; gen $= \{(x, f(x, z))\}$ 而 $f(x, z)$ 有三种情况:

$$f(y, z) = \begin{cases} \mathrm{val}(y) \text{ op } \mathrm{val}(z) & \text{// if val(y) and val(z) are constants} \\ \mathrm{NAC} & \text{// if val(y) or val(z) is NAC} \\ \mathrm{UNDEF} & \text{// otherwise} \end{cases}$$

6.6 function 不满足分配性

如下图所示，$F(X \sqcap Y)$ 中 C 的值为 NAC，而 $F(X) \sqcap F(Y)$ 中 C 的值为 10，因此 F 不满足分配性。



$$F(X \sqcap Y) = \{(a, NAC), (b, NAC), (c, NAC)\}$$
$$F(X) \sqcap F(Y) = \{(a, NAC), (b, NAC), (c, 10)\}$$
$$F(X \sqcap Y) \neq F(X) \sqcap F(Y)$$
$$F(X \sqcap Y) \sqsubseteq F(X) \sqcap F(Y)$$

7 Worklist Algorithm

Iterative Algorithm 的优化，Iterative 存在冗余的计算，而 Worklist 只计算有变化的 node：

```
OUT[entry] = ;
for(each basic block B\entry)
        OUT[B] = ;
    Worklist←all basic blocks
        while (Worklist is notempty)
        Pick a basic block B from Worklist
                old_OUT= OUT[B]
        IN[B] = OUT[P]; # join/meet P为B的前置代码块
        OUT[B] = genB U (IN[B] - killB); # transfer function
        if(old_OUT OUT[B])
                Add all successors of B to Worklis
```

7.1 分析特性

1. 流敏感：程序语句随意调换位置，分析结果不变为流非敏感，否则为流敏感；
2. 路径敏感：考虑程序中路径的可行性；

8 总结

本节来自南京大学 Bilibili 程序分析课程，主要介绍格，接着用格抽象描述数据流分析，解释为什么迭代算法能够到达最大/最小不动点，接着比较了流敏感和路径敏感的准确性，最后介绍 worklist 算法，以提升迭代算法的效率。