1. Demuestre que si D es una digráfica, entonces su condensación D^* es acíclica.

   Demostración. Sean $C_1, C_2, ..., C_n$ las componentes fuertemente conexas de D. Por definición de condensación, D^* es la digráfica cuyos vértices son exactamente $C_1, C_2, ..., C_n$ y cuyo conjunto de flechas cumple lo siguiente: existe una flecha de C_i a C_j si y solo si existe una flecha desde algún vértice de C_i hacia algún vértice de C_j en D.

   Ahora, procederemos por contradicción. Supongamos que D^* sí tiene un ciclo dirigido. Sin pérdida de generalidad, sea el ciclo $C = C_1, C_2, ..., C_k, C_1$. Podemos verlo en la figura 1.

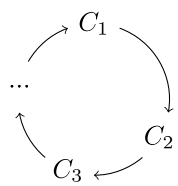

Figura 1: Ciclo dirigido en D^*

   Ahora, consideremos a D', la subgráfica de D inducida por el conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Veamos que D' es fuertemente conexa. Para esto, consideremos a cualquier par de vértices u y v en $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ y veamos que debe existir una trayectoria de u a v y otra trayectoria de v a u. Primero, si ambos vértices pertenecen a la misma componente, entonces por definición de componente fuertemente conexa ya terminamos. Entonces supongamos que pertenecen a distintas componentes, digamos C_u y C_v, respectivamente.

   Veamos que hay una trayectoria de u a v. Es la que utiliza las siguientes flechas:

   - Dentro de C_u, sigue la trayectoria desde u hasta el vértice que sale a la siguiente componente en el ciclo (dicha trayectoria existe porque C_u es fuertemente conexa).
   - De ahí, se va a la siguiente componente y al ser esta a su vez fuertemente conexa, puede también tomar una trayectoria que salga de ella y se dirija a la siguiente componente del ciclo.
   - Hace esto hasta llegar a C_v.
   - Una vez en C_v, tomamos la trayectoria hasta v, que existe por ser C_v fuertemente conexa.

   Por lo tanto, hay una trayectoria de u a v. De manera análoga, hay una trayectoria de v a u. Como u y v eran vértices arbitrarios, entonces D' es fuertemememente conexa. Pero esto es una contradicción, ya que D' contiene a C_1, que es una componente fuertemenete conexa, lo que signficia que es maximal por contención.

   Por lo tanto, no puede haber un ciclo en D^*.

   $\square$

2. Demuestre que si D es una digráfica acíclica, entonces tiene un único núcleo. Además, a partir de su demostración obtenga un algoritmo para encontrar un núcleo en una digráfica acíclica. ¿Qué complejidad tiene su algoritmo?

   Demostración. Tenemos que hacer tres observaciones.

(a) Si la digráfica tiene sumideros, entonces estos deben estar en el núcleo. Esto es debido a que el núcleo es un conjunto absorbente y nadie absorbe a un sumidero.

(b) Los vecinos de los sumideros **no** pueden estar en el núcleo. Esto debido a que el núcleo es independiente y los sumideros están en él.

(c) Toda digráfica acíclica tiene al menos un sumidero. Para ver esto, supongamos que no es así y sea $T = v_1, v_2, v_3, ..., v_m$ la trayectoria dirigida de mayor longitud. Como no hay sumideros, en particular v_m no es un sumidero. Entonces v_m debe tener un exvecino. El exvecino no puede estar en la trayectoria, pues tendríamos un ciclo dirigido. Entonces el exvecino es v_{m+1}, un vértice fuera de la trayectoria. Pero entonces tenemos una trayectoria más larga $v_1, v_2, ..., v_{m+1}$, contradiciendo la hipótesis de que T era la trayectoria más larga.

Con estas observaciones, podemos proceder a hacer una prueba por inducción sobre el número de vértices de la gráfica.

- **Base de inducción:** Sea D una digráfica con un solo vértice v. Clarmente $\{v\}$ es el único núcleo de D.
- **Hipótesis de inducción:** Supongamos que la propiedad se cumple para todas las digráficas acíclicas de orden menor o igual que k para alguna k en los naturales.
- **Paso inductivo:** Demostraremos la propiedad para las digráficas de orden $k + 1$.

  Sea D una digráfica de órden $k + 1$ y sea S el conjunto de sus sumideros. Por la observación 2c S es no vacío.

  Sea $C = S \cup N(S)$. Tenemos dos casos. Si $C = V(D)$, entonces por las observaciones 2b y 2a, el núcleo debe contener a S y no contener a $N(S)$. Como estos son todos los vértices de la digráfica, el núcleo es el conjunto S y terminamos.

  Si, en otro caso $C \subset V(D)$, entonces nos fijamos en la digráfica $D' = D \setminus C$. Como S era no vacío, esta digráfica tiene orden k o menor y podemos aplicarle la hipótesis de inducción, por lo que tiene un único núcleo K'. Observemos que $K = K' \cup S$ es un núcleo para D, ya que:

  - Es independiente. Para ver esto, consideremos a dos vértices v_1, v_2 en K. Tenemos tres casos:
    (a) Si v_1 y v_2 están ambos en K', son independientes por ser parte de un núcleo.
    (b) Si ambos están en S, son independientes por ser ambos sumideros de D.
    (c) Si hay uno en K' y otro en S, son independientes pues $K' \cup N(S) = \emptyset$ por construcción.
  - Es absorbente, ya que todo vértices en $D' \setminus K'$ es absorbido por K' y todo vértice en $N(S)$ es absorbido por S.

  Por lo tanto K es núcleo de D. Ahora, veamos que es único. Supongamos que existe otro núcleo Q. Fijémonos en $Q' = Q \setminus (S \cup N(S))$. Q' debe ser un núcleo para D', ya que ningún vértice en D' es absorbido por $S \cup N(S)$. Pero como K' era único por hipótesis de inducción, entonces $Q' = K'$ y por lo tanto $Q = K$.

□

A partir de esta demostración, obtenemos el algoritmo 1 para obtener el núcleo de una digráfica acíclica.

Entrada: D digráfica
Salida: K el núcleo de D
$K \leftarrow \emptyset$;
while $V(D) \neq \emptyset$ **do**
  $S \leftarrow$ sumideros en D;
  $K \leftarrow K \cup S$;
  $D \leftarrow D \setminus (S \cup N(S))$;
end
return K

Algoritmo 1: Algoritmo para obtener el núcleo de una digráfica acíclica

El algoritmo tiene complejidad $O(|V| + |V||E|)$. El ciclo `while` se repite a lo más tantas veces como vértices, pues se quita un conjunto no vacío de vértices a D en cada iteración. Obtener S toma tiempo lineal, pues es recorrer los vértices y ver cuáles tienen exgrado 0. Unir K y S también toma tiempo lineal. Quitar un vértice es $O(|V| + |E|)$ y se hace potencialmente $|V|$ veces. Por lo tanto, quitar S tiene complejidad $O(|V| + |V||E|)$ y al multiplicar por $O(|V|)$ del ciclo, obtenemos la complejidad previamente mencionada.

3. Demuestre que cualquier digráfica con al menos dos núcleos contiene un ciclo par.