1. Demuestre que si D es una digráfica, entonces su condensación D^* es acíclica.

   Demostración. Sean $C_1, C_2, ..., C_n$ las componentes fuertemente conexas de D. Por definición de condensación, D^* es la digráfica cuyos vértices son exactamente $C_1, C_2, ..., C_n$ y cuyo conjunto de flechas cumple lo siguiente: existe una flecha de C_i a C_j si y solo si existe una flecha desde algún vértice de C_i hacia algún vértice de C_j en D.

   Ahora, procederemos por contradicción. Supongamos que D^* sí tiene un ciclo dirigido. Sin pérdida de generalidad, sea el ciclo $C = C_1, C_2, ..., C_k, C_1$. Podemos verlo en la figura 1.

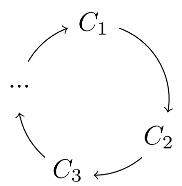

Figura 1: Ciclo dirigido en D^*

   Ahora, consideremos a D', la subgráfica de D inducida por el conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Veamos que D' es fuertemente conexa. Para esto, consideremos a cualquier par de vértices u y v en $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ y veamos que debe existir una trayectoria de u a v y otra trayectoria de v a u. Primero, si ambos vértices pertenecen a la misma componente, entonces por definición de componente fuertemente conexa ya terminamos. Entonces supongamos que pertenecen a distintas componentes, digamos C_u y C_v, respectivamente.

   Veamos que hay una trayectoria de u a v. Es la que utiliza las siguientes flechas:

   - Dentro de C_u, sigue la trayectoria desde u hasta el vértice que sale a la siguiente componente en el ciclo (dicha trayectoria existe porque C_u es fuertemente conexa).
   - De ahí, se va a la siguiente componente y al ser esta a su vez fuertemente conexa, puede también tomar una trayectoria que salga de ella y se dirija a la siguiente componente del ciclo.
   - Hace esto hasta llegar a C_v.
   - Una vez en C_v, tomamos la trayectoria hasta v, que existe por ser C_v fuertemente conexa.

   Por lo tanto, hay una trayectoria de u a v. De manera análoga, hay una trayectoria de v a u. Como u y v eran vértices arbitrarios, entonces D' es fuertemememente conexa. Pero esto es una contradicción, ya que D' contiene a C_1, que es una componente fuertemenete conexa, lo que signficia que es maximal por contención.

   Por lo tanto, no puede haber un ciclo en D^*.

   □

2. Demuestre que si D es una digráfica acíclica, entonces tiene un único núcleo. Además, a partir de su demostración obtenga un algoritmo para encontrar un núcleo en una digráfica acíclica. ¿Qué complejidad tiene su algoritmo?

   Demostración. Tenemos que hacer tres observaciones.

(a) Si la digráfica tiene sumideros, entonces estos deben estar en el núcleo. Esto es debido a que el núcleo es un conjunto absorbente y nadie absorbe a un sumidero.

(b) Los vecinos de los sumideros **no** pueden estar en el núcleo. Esto debido a que el núcleo es independiente y los sumideros están en él.

(c) Toda digráfica acíclica tiene al menos un sumidero. Para ver esto, supongamos que no es así y sea $T = v_1, v_2, v_3, ..., v_m$ la trayectoria dirigida de mayor longitud. Como no hay sumideros, en particular v_m no es un sumidero. Entonces v_m debe tener un exvecino. El exvecino no puede estar en la trayectoria, pues tendríamos un ciclo dirigido. Entonces el exvecino es v_{m+1}, un vértice fuera de la trayectoria. Pero entonces tenemos una trayectoria más larga $v_1, v_2, ..., v_{m+1}$, contradiciendo la hipótesis de que T era la trayectoria más larga.

Con estas observaciones, podemos proceder a hacer una prueba por inducción sobre el número de vértices de la gráfica.

- **Base de inducción:** Sea D una digráfica con un solo vértice v. Clarmente $\{v\}$ es el único núcleo de D.
- **Hipótesis de inducción:** Supongamos que la propiedad se cumple para todas las digráficas acíclicas de orden menor o igual que k para alguna k en los naturales.
- **Paso inductivo:** Demostraremos la propiedad para las digráficas de orden $k + 1$.

  Sea D una digráfica de órden $k + 1$ y sea S el conjunto de sus sumideros. Por la observación 2c S es no vacío.

  Sea $C = S \cup N(S)$. Tenemos dos casos. Si $C = V(D)$, entonces por las observaciones 2b y 2a, el núcleo debe contener a S y no contener a $N(S)$. Como estos son todos los vértices de la digráfica, el núcleo es el conjunto S y terminamos.

  Si, en otro caso $C \subset V(D)$, entonces nos fijamos en la digráfica $D' = D \setminus C$. Como S era no vacío, esta digráfica tiene orden k o menor y podemos aplicarle la hipótesis de inducción, por lo que tiene un único núcleo K'. Observemos que $K = K' \cup S$ es un núcleo para D, ya que:

  - Es independiente. Para ver esto, consideremos a dos vértices v_1, v_2 en K. Tenemos tres casos:
    (a) Si v_1 y v_2 están ambos en K', son independientes por ser parte de un núcleo.
    (b) Si ambos están en S, son independientes por ser ambos sumideros de D.
    (c) Si hay uno en K' y otro en S, son independientes pues $K' \cup N(S) = \emptyset$ por construcción.
  - Es absorbente, ya que todo vértices en $D' \setminus K'$ es absorbido por K' y todo vértice en $N(S)$ es absorbido por S.

  Por lo tanto K es núcleo de D. Ahora, veamos que es único. Supongamos que existe otro núcleo Q. Fijémonos en $Q' = Q \setminus (S \cup N(S))$. Q' debe ser un núcleo para D', ya que ningún vértice en D' es absorbido por $S \cup N(S)$. Pero como K' era único por hipótesis de inducción, entonces $Q' = K'$ y por lo tanto $Q = K$.

$\square$

A partir de esta demostración, obtenemos el algoritmo 1 para obtener el núcleo de una digráfica acíclica.

Entrada: D digráfica
Salida: K el núcleo de D
$K \leftarrow \emptyset$;
while $V(D) \neq \emptyset$ **do**
  $S \leftarrow$ sumideros en D;
  $K \leftarrow K \cup S$;
  $D \leftarrow D \setminus (S \cup N(S))$;
end
return K

Algoritmo 1: Algoritmo para obtener el núcleo de una digráfica acíclica

El algoritmo tiene complejidad $O(|V| + |V||E|)$. El ciclo `while` se repite a lo más tantas veces como vértices, pues se quita un conjunto no vacío de vértices a D en cada iteración. Obtener S toma tiempo lineal, pues es recorrer los vértices y ver cuáles tienen exgrado 0. Unir K y S también toma tiempo lineal. Quitar un vértice es $O(|V| + |E|)$ y se hace potencialmente $|V|$ veces. Por lo tanto, quitar S tiene complejidad $O(|V| + |V||E|)$ y al multiplicar por $O(|V|)$ del ciclo, obtenemos la complejidad previamente mencionada.

3. Demuestre que cualquier digráfica con al menos dos núcleos contiene un ciclo par.

Demostración. Sea D una digráfica con al menos dos núcleos K_1 y K_2. Como los núcleos son distintos, difieren en al menos un vértice. Sin pérdida de generalidad, existe un vértice v_1 que está en K_1 y no en K_2. Como K_2 es núcleo y no tiene a v_1, entonces tiene a algún vértice w_1 que lo absorbe. w_1 no puede estar en K_1, pues K_1 es independiente. Entonces debe haber un vértice v_2 en K_1 que absorba a w_1. Siguiendo este proceso, podemos obtener una subdigráfica bipartita D' con partición (V, W), donde $V = \{v_1, v_2, ..., v_i\}$ y $W = \{w_1, w_2, ..., w_j\}$. Las particiones son independientes por pertenecer a núcleos y son ajenas por construcción.

Ahora, observemos que D' debe tener un ciclo. Para esto, tomemos a P, la trayectoria más larga en D'. Sea $P = u_1 u_2 ... u_m$. Como u_m pertenece a alguna de las particiones, entonces debe haber un vértice u_{m+1} en la otra partición que lo absorba. Si u_{m+1} está en P, entonces tenemos un ciclo $u_{m+1}, u_x, u_{x+1} ..., u_m, u_{m+1}$. Si no, entonces tenemos una contradicción, pues la trayectoria $u_1 ... u_m u_{m+1}$ es más larga que P. Por lo tanto, D' contiene un ciclo, y como $D' \subset D$, D contiene un ciclo. Por último, como D' es bipartita, no contine ciclos impares, por lo que el ciclo contenido es par, como queríamos. □

4. Sea D una digráfica fuertemente conexa y sea $k > 1$ un entero. Demuestre que si todos los ciclos de D tienen longitud congruente a 0 módulo k, entonces V admite una partición $V = (V_0, \ldots, V_{k-1})$ de tal forma que si $(u, v) \in A$, entonces existe $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $u \in V_i$ y $v \in V_{i+1}$ donde los subíndices se toman módulo k.

Demostración. Observemos que en una digráfica fuertemente conexa, se cumple que para dos vértices u y v, están en el mismo ciclo dirigido. Esto es porque hay una trayectoria dirigida de u a v y una trayectoria dirigida de v a u, y la unión de estas dos trayectorias nos da un camino cerrado dirigido que debe contener un ciclo dirigido.

Ahora, observemos que la digráfica se puede colorear de la siguiente manera: elegimos cualquier vértice v y lo coloreamos de color 0. Luego coloreamos a todos sus exvecinos de color 1, y a los exvecinos de sus exvecinos de color $2, \ldots$.

En general, podemos seguir este proceso en el que, para un vértice de color y, coloreamos a sus exvecinos de color $y+1 \mod k$. Hacemos esto hasta que todos los vértices en la gráfica tengan un color.

Podemos realizar la coloración anterior por medio de un simple BFS. Ahora, aseguramos que cada vértice en la coloración, obtiene un único color en el proceso anterior. Supongamos que no es así. Sea u el primer vértice que obtiene dos colores a partir del BFS. Esto quiere decir que, en algún momento u fue coloreado de color i pero uno de sus invecinos (llamémoslo w) tiene color j, donde $j \neq i-1 \mod k$. Pero entonces debe existir un camino P desde u a w con la sucesión de colores $i, i+1, i+2, \ldots, j$. Esto es debido a cómo hicimos la coloración. Observemos que al ser u el primer vértice que recibe dos colores, todos los vértices en el camino anterior deben ser distintos y por lo tanto es una trayectoria. Pero entonces tenemos un ciclo dirigido $u, v_1, v_2, \ldots, v_{j-i-1}, w, u$. Este ciclo tiene longitud $j-i+1$, pero como $j \neq i-1 \mod k$, entonces $j-i+1 \neq 0 \mod k$, lo cual contradice la hipótesis de que los ciclos dirigidos tienen longitud congruente con $0 \mod k$. Por lo tanto, no puede existir un vértice que reciba dos colores y la coloración es propia.

Pero entonces, podemos partir el conjunto de vértices en $(V_0, V_1, \ldots, V_{k-1})$ donde V_i es el conjunto de vértices de color i. Además, por construcción se cumple que los exvecinos de los vértices en V_i están en V_{i+1}, por lo que hemos demostrado que D admite la partición deseada. $\square$