

Cours : Intégrales de Lebesgue (INTL)

Emily Clement

Professeur : Thibault Deheuvels

Licence de Mathématiques
Semestre 1
2014-2015

Table des matières

0	Cardinaux et dénombrabilité	4
0.1	Cardinaux	4
1	Dénombrabilité	7
2	Tribus	10
2.1	Définitions	10
2.1.1	Borélien de \mathbb{R}	12
2.2	Hors cours/TD : Lemme de Borel-Cantelli	13
2.3	Tribu image réciproque - Tribu image	14
2.4	Boréliens de \mathbb{R}	15
3	Mesures	17
3.1	Définitions	17
3.2	Propriétés	19
4	Fonctions mesurables	22
4.1	Définitions	22
4.2	Fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes	24
5	Intégrale de Lebesgue	27
5.1	Intégration des fonctions mesurables positives	27
5.1.1	Fonctions étagées positives	27
5.1.2	Intégration des fonctions mesurables positives.	33
5.2	Fonctions intégrables	41
5.3	Théorème de convergence dominée et applications	46
5.3.1	Théorème de convergence dominée	46
5.4	Comparaison intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue	53
5.4.1	Rappels	53
5.4.2	Lien intégrale de Riemann-intégrale de Lebesgue	54
6	Espace L^p	57
6.1	Définitions	57
6.2	Inégalité de Hölder et Minkowski	59
6.3	Espaces de Banach $L^p_\mu(E), 1 \leq p \leq +\infty$	62

TABLE DES MATIÈRES

6.4	Densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p_\mu(E)$	66
6.5	théorème de Radon-Nikodym	68
7	Convolution et applications	70
7.1	Opérateurs de translation	70
7.2	Convolution sur \mathbb{R}^d	71
7.2.1	Le cas positif	71
7.2.2	Le cas général	72
7.2.3	Condition d'existence	73
7.2.4	L'algèbre $L^1(\mathbb{R}^d)$	74
7.3	Approximation de l'unité	74
7.4	Régularisation par convolution	75
8	Construction de mesures, Unicité	76
8.1	Construction de mesures	76
8.1.1	Mesures extérieures	76
8.1.2	Mesure de Lebesgue	79
8.1.3	Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$	82
8.2	Unicité des mesures	82
8.2.1	Unicité de la mesure de Lebesgue	85
8.3	Tribu complétée, mesure complétée	86
8.3.1	Généralités	86
8.3.2	Complétion de $BBB(\mathbb{R}^d)$	88
9	Mesures produits	90
9.1	Tribu produit	90
9.1.1	Définitions	90
9.1.2	Sections	92
9.2	Mesure produit	93
9.2.1	Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$	95
9.3	Théorème de Fubini	96
10	Changement de variables	100
10.1	Mesure image	100
10.2	Changement de variables	101
10.2.1	Rappels	101
10.2.2	Changement de variables	102

Introduction-Mise en contexte

On va avoir un ensemble E , on cherchera une mesure μ i.e :

$$\mu : \mathcal{P}(E) \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$$

tel que :

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset E$, avec A_n 2 à 2 disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Application : Probabilité, par exemple.

Cas de \mathbb{R} : On veut une mesure $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$ (Mesure de Lebesgue) vérifiant :

$$\lambda([0, 1]) = 1$$

λ invariant par translation : i.e si $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, $\lambda(A + a) = \lambda(A)$.

Intégrale de Lebesgue : On va vouloir intégrer sur n'importe quel ensemble pour peu qu'on ai mis une mesure dessus.

C'est une généralisation de Riemann

On pourra intégrer des fonctions qui n'étaient pas Riemann intégrable

On pourra intégrer des fonction sur autre chose que \mathbb{R}

Les théorèmes de convergences sont plus forts

On pourra écrire pour de bon une somme comme une intégrale

Chapitre 0

Cardinaux et dénombrabilité

0.1 Cardinaux

On considère E un ensemble quelconque.

Définition 1.

Soient E, F deux ensembles. On dit que E et F sont équipotents si il existe une bijection entre E et F . On note alors $E \simeq F$, ou encore $\text{Card } E = \text{Card } F$ (C'est juste une notation !)

Remarque 1.

La relation \simeq vérifie :

$$E \simeq E$$

$$\text{Si } E \simeq F, \text{ alors } F \simeq E$$

$$\text{Si } E \simeq F, F \simeq G, \text{ alors } E \simeq G$$

mais ce n'est pas une relation d'équivalence !

Exemple 1.

$$\text{Card } \mathbb{N} = \text{Card } 2\mathbb{N} \text{ car } \varphi : \begin{matrix} \mathbb{N} & \mapsto & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{matrix} \text{ est une bijection.}$$

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = \text{Card } \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \text{ car } \varphi : \begin{matrix} \mathcal{P}(E) & \mapsto & \text{Card } \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{matrix} \text{ est une bijection.}$$

$$\text{Rappel : } \mathbb{1}_A : \begin{matrix} E & \mapsto & \text{Card } \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix}$$

Proposition 1.

Soit E un ensemble. Il n'existe pas de surjection de E dans $\mathbb{P}(E)$.
En particulier $\text{Card } E \neq \text{Card } \mathbb{P}(E)$.

Démonstration.

Supposons qu'on ait $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}(E)$ surjective. On pose $A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\} \subset \mathbb{P}(E)$, donc $\exists a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. Soit $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$:

Si $a \in A$, $a \notin \varphi(a)$, donc $a \notin A$

Sinon, $a \in \varphi(a)$ donc $a \in A$.

C'est absurde. □

Remarque 2 (Notation).

Soit E, F deux ensembles, lorsqu'il existe une injection de E dans F on note $E \leq F$, ou encore $\text{Card } E \leq \text{Card } F$.

Si de plus il n'existe pas de bijection entre E et F on note $\text{Card } E < \text{Card } F$.

De même s'il existe une surjection de E dans F on note $E \geq F$, ou encore $\text{Card } E \geq \text{Card } F$.

Proposition 2 (démonstration admise).

Si $\text{Card } E \geq \text{Card } F$, alors $\text{Card } F \leq \text{Card } E$ (Axiome du choix)

Si $\text{Card } E \leq \text{Card } F$, alors $\text{Card } F \geq \text{Card } E$

Théorème 1 (Canton-Bernstein).

Si $\text{Card } E \leq \text{Card } F$ et $\text{Card } F \leq \text{Card } E$, alors $\text{Card } E = \text{Card } F$

La démonstration est en ligne (mais technique).

Remarque 3.

Si $E \subset F$ alors $\text{Card } E \leq \text{Card } F$ car $\begin{matrix} E & \hookrightarrow & F \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$ est injective.

Définition 2.

On dit qu'un ensemble E est infini si $\text{Card } \mathbb{N} \leq \text{Card } E$ i.e si l'on peut établir une injection de \mathbb{N} dans E .

Exemple 2.

\mathbb{R} est infini : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Card } \mathbb{N} \leq \text{Card } \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 $n \mapsto \{n\}$ est injective.

Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infinie, et même $\text{Card } (\mathcal{P}(\mathbb{N})) > \text{Card } \mathbb{N}$.

Chapitre 1

Dénombrabilité

Définition 3 (Ensemble dénombrable).

On dit qu'un ensemble E est dénombrable si $\text{Card } E \leq \text{Card } \mathbb{N}$. i.e s'il existe une injection de E dans \mathbb{N} .

Remarque 4.

Si il existe une surjection de \mathbb{N} dans E alors E est dénombrable. (sans utiliser l'axiome du choix)

Quelques fois, on dit que E est "au plus" dénombrable si $\text{Card } E \leq \text{Card } \mathbb{N}$ et dans ce cas dénombrable signifie $\text{Card } E = \text{Card } \mathbb{N}$. (pas le cas dans ce cours).

Exemple 3.

$2\mathbb{N}$ est dénombrable.

\mathbb{Z} est dénombrable :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \mapsto & \mathbb{Z} \\ 2n & \rightarrow & n \\ 2n-1 & \rightarrow & -n \end{array}$$

est une bijection donc $\text{Card } \mathbb{Z} = \text{Card } \mathbb{N}$

\mathbb{N}^2 est dénombrable.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \mapsto & \mathbb{N} \\ (m, n) & \rightarrow & \frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + n \end{array}$$

Proposition 3.

Si E et F dénombrables, alors $E \times F$ l'est, car si :
 $\varphi_E : E \mapsto \mathbb{N}$ et $\varphi_F : F \mapsto \mathbb{N}$ sont des injections, alors :
 $\varphi : E \times F \mapsto \mathbb{N}^2$
 $(x, y) \mapsto (\varphi_E(x), \varphi_F(y))$ est une injection.
 Donc $\text{Card } E \times F \leq \text{Card } \mathbb{N}^2 \leq \text{Card } \mathbb{N}$
 Plus généralement, si E_1, \dots, E_n est dénombrable, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est.

Corollaire 1.

\mathbb{N}^k est dénombrable $\forall k \in \mathbb{N}^*$. \mathbb{Q} est dénombrable, en effet :
 $\frac{p}{q} \mapsto (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$
 $\frac{p}{q} \mapsto (p, q)$ est injective avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.
 donc $\text{Card } \mathbb{Q} \leq \text{Card } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable : il n'existe pas de surjection de \mathbb{N} dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
 donc pas d'injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans \mathbb{N} .

Suites à valeur dans $\{0, 1\}$:

$$\text{Card } \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

donc $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Proposition 4.

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable,
 donc :
 Si $\forall n \in \mathbb{N}, E_n$ est dénombrable, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.

Démonstration.

Soit $\varphi_n : E_n \mapsto \mathbb{N}$ est injective, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \mapsto \mathbb{N}^2$ l'est
 $x \mapsto \varphi_{n_x}(x)$

où $n_x \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in E_n\}$

donc $\text{Card } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \leq \text{Card } \mathbb{N}^2 \leq \mathbb{N}$. □

Théorème 2.

\mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Démonstration.

On va montrer que $\text{Card } \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leq \text{Card } \mathbb{R}$.

Je veux construire $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ (on se place en fait en base 3.)

Si $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites distinctes, alors $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \geq 1 \mid x_n \neq y_n\}$ existe. on a alors :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3^{n_0}} + \sum_{n \geq n_0} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{3^{n_0}} \right| - \left| \sum_{n \geq n_0} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| \end{aligned}$$

Or $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ sont à valeur dans $\{0, 1\}$, donc :

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{3^{n_0}} - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{3^n} \\ &\geq \frac{1}{3^{n_0}} - \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Tribus

2.1 Définitions

Soit E un ensemble quelconque.

Définition 4 (Classe de parties).

On appelle classes de partie de E tout sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.

Définition 5 (Tribus- α -algèbre).

On appelle tribus sur E une classe de partie \mathcal{A} qui vérifient :

$$\emptyset \in \mathcal{A}$$

Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$. (Stabilité par complémentaire)

Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. (Stabilité par union dénombrable.)

On appelle alors le couple (E, \mathcal{A}) espace mesurable.

Exemple 4.

$\mathcal{P}(E)$, qu'on appelle tribu triviale sur E .

$\{\emptyset, \mathcal{P}(E)\}$ qu'on appelle tribu grossière sur E .

Soit $A \subset E$, $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu et c'est la plus petit tribu contenant A , on l'appelle tribu engendrée par A .

$\{A \subset E \mid A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$ est une tribu sur A , en effet :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- Si $A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$
- Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, on a deux cas :
 Soit $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ est dénombrable, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.
 Soit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_{n_0}^c$ est dénombrable, alors $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \subset A_{n_0}^c$. Donc $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c$ est dénombrable et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarque 5.

toute tribu est stable par intersection dénombrable.

Tribu engendrée, tribu borélienne

Remarque 6.

Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de tribu, alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu, en effet :

- $\emptyset \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$, donc $\emptyset \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
- Si $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, alors $\forall i \in I, A^c \in \mathcal{A}_i$, donc $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$
- Si $A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\forall i \in I, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Définition 6 (Tribu engendrée).

Si $C \subset \mathcal{P}(E)$, il existe une plus petite tribu sur E (au sens de l'inclusion) qui contient C . On la note $\sigma(C)$ et on l'appelle tribu engendrée par C . i.e si \mathcal{A} est une tribu qui contient C alors $\sigma(C) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration.

On pose $\sigma(C) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ tribu sur } E \\ C \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}$: la plus petite tribu sur E contenant C . \square

Exemple 5.

Soit $A \subset E$, quelle est la tribu engendrée par A ?

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$$

Tribu engendrée par les singletons de E :

$$\sigma(\{\{x\}, x \in E\}) = \{A \subset E \mid A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$$

Définition 7 (Tribu borélienne).

Soit (E, τ) , τ topologie sur E .

On rappelle que $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ tel que :

$$\emptyset, E \in \tau$$

τ stable par union quelconque et intersection finie.

On appelle tribu borélienne sur E la tribu sur E engendrée par τ , on la note $\mathcal{B}(E)$. i.e $\mathcal{B}(E) = \sigma(\tau)$. On appelle ses éléments des boréliens de E .

Remarque 7.

$\mathcal{B}(E)$ est aussi la tribu engendrée par les fermés de E .

En général $\mathcal{B}(E) \neq \mathcal{P}(E)$.

Cas $E = \mathbb{R}$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on peut montrer que $\text{Card } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \text{Card } \mathbb{R}$.
(TD : construction d'un ensemble non borélien)

2.1.1 Borélien de \mathbb{R}

Proposition 5.

On a :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{] \alpha, \beta[, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\})$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, \alpha[, \alpha \in \mathbb{Q}\})$$

$$= \sigma(\{]-\infty, \alpha], \alpha \in \mathbb{Q}\})$$

$$= \sigma(\{[\alpha, +\infty[, \alpha \in \mathbb{Q}\})$$

$$= \sigma(\{[\alpha, +\infty], \alpha \in \mathbb{Q}\})$$

Démonstration.

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $] \alpha, \beta[\in \mathcal{O}(\mathbb{R})$: ouvert de \mathbb{R} .

$$\sigma(\{] \alpha, \beta[, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Soit $\omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, on a :

$$\omega \in \bigcap_{p, q \in \mathbb{Q}, p, q \in \omega}]p, q[.$$

On a bien $\omega \in \sigma(\{] \alpha, \beta[, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\})$, d'où l'inclusion.

2. Soit $a \in \mathbb{Q}$, $] - \infty, a[\in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, donc :

$$\sigma(\{]-\infty, \alpha], \alpha \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, montrons que $]\alpha, \beta[\in \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}\})$.

$$]\alpha, \beta[=] - \infty, \beta[\setminus] - \infty, \alpha[$$

or $]-\infty, \alpha[= \bigcap_{n>0}] - \infty, \alpha + \frac{1}{n}[$. donc

$$]\alpha, \beta[=] - \infty, \beta[\setminus \left(\bigcap_{n>0}] - \infty, \alpha + \frac{1}{n}[\right) \subset \sigma(\{]-\infty, \alpha], \alpha \in \mathbb{Q}\}).$$

□

2.2 Hors cours/TD : Lemme de Borel-Cantelli

Normalement ce lemme figure dans le TD, mettons le formellement dans ce cours :

Lemme 1 (Lemme de Borel-Cantelli).

Soit μ une mesure sur (E, \mathcal{A}) et $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

Démonstration.

Supposons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$, or $\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$ donc :

$$\mu\left(\limsup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 0$ et $\mu\left(\limsup_n A_n\right) = 0$. □

2.3 Tribu image réciproque - Tribu image

Soient 2 ensembles E et F , soit $f : E \mapsto F$.

Définition 8.

Si \mathcal{B} est une tribu sur F , alors

$$\{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu sur E . On l'appelle tribu image réciproque par f de \mathcal{B} , on la note $f^{-1}(\mathcal{B})$.

Démonstration.

Il faut montrer que :

- $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{B})$
- Si $A \in f^{-1}(\mathcal{B}) : A = f^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{B}$. $A^c = f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{B})$
- Si $A_n \in f^{-1}(\mathcal{B}), n \in \mathbb{N}, A_n = f^{-1}(B_n), B_n \in \mathcal{B}$.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

□

Exemple 6.

Si $X \subset E$ et \mathcal{A} tribu sur E . $\{A \cap X, A \in \mathcal{A}\}$ tribu sur X . Si $i : \begin{matrix} X & \mapsto & E \\ x & \rightarrow & E \end{matrix}$

$$\{i^{-1}(A), A \in \mathcal{A}\} = \{A \cap X, A \in \mathcal{A}\}$$

Remarque 8.

Si \mathcal{A} est une tribu sur E , $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas une tribu en général.

Définition 9 (Tribu image).

Soit \mathcal{A} tribu sur E , alors $\mathcal{B} = \{B \in F, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu image par f de \mathcal{A} .

Démonstration.

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ Si $B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \mathcal{A}$
Si $B_n \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}.$$

□

Lemme 2 (Lemme du transfert).

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$,

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

Notons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{P}(E)$ et $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu sur F , donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est une tribu sur E . de plus $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{C}\}$.

Démonstration.

\subseteq : On a $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ donc

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

\supseteq : Soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$, on veut montrer que :

$$f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

On considère $\mathcal{B} = \{B \subset F, f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ On a clairement $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$. \mathcal{B} est une tribu sur F , c'est la tribu image par f de $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Donc \mathcal{B} (tribu contenant \mathcal{C}) contient $\sigma(\mathcal{C})$. on a montré que :

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{C}), f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

$$\text{i.e } f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

□

2.4 Boréliens de $\bar{\mathbb{R}}$

Construction de $\bar{\mathbb{R}}$

On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \rightarrow & \arctan(x) \end{array}$$

f homéomorphisme de \mathbb{R} dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On introduit deux éléments : $-\infty$ et $+\infty$ et on définit : $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ On définit $\tilde{f}: \bar{\mathbb{R}} \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\tilde{f}|_{\mathbb{R}} = f$$

$$\tilde{f}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \tilde{f}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Ordre sur $\bar{\mathbb{R}}$:

On prolonge l'ordre \leq sur \mathbb{R} en posant $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$

Topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$:

On définit la distance δ sur $\bar{\mathbb{R}}$ par : $\delta(x, y) = \left| \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \right|$ On munit $\bar{\mathbb{R}}$ de la topologie associée à la distance δ , on peut montrer que :

$\tilde{f}|_{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme de \mathbb{R} dans $] \frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2} [$.

\tilde{f} est un homéomorphisme de $\bar{\mathbb{R}}$ dans $[\frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}]$.

Proposition 6.

$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{R}}))$ vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) &= \sigma(\{[-\infty, a[; a \in \mathbb{Q}]\}) \\ &= \sigma(\{[-\infty, a]; a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{]a, +\infty]; a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{[a, +\infty]; a \in \mathbb{Q}\}) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Mesures

3.1 Définitions

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable.

Définition 10 (mesure).

On appelle mesure sur (E, \mathcal{A}) une application $\mu : \mathcal{A} \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$ et les A_n soient 2 à 2 disjoints : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ alors

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si $\mu(E) < \infty$, on dit que μ est une mesure finie. On appelle parfois $\mu(E)$ la masse de la mesure, on appelle mesure de probabilité une mesure de masse 1.

Exemple 7 (Exemple de mesures).

- *Mesure nulle sur $(E, \mathcal{P}(E))$ définie par :*

$$\forall A \subset E, \mu(A) = 0$$

- *Mesure de comptage m sur $(E, \mathcal{P}(E))$ définie par : si $A \subset E$,*

$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini} \end{cases}$$

- *Mesure de Dirac sur $(E, \mathcal{P}(E))$: Soit $x \in E$, on définit la mesure de Dirac en x par :*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \forall A \subset E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Mesure de Lebesgue

Théorème 3.

Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ vérifiant :

- $\lambda([0, 1]) = 1$
- λ invariante par translation, i.e :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}, \lambda(B + a) = \lambda(B), \text{ où } B + a = \{x + a; x \in B\}.$$

On l'appelle mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

On a même :

Théorème 4.

Il existe une unique mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$ vérifiant :

- $\lambda_d([0, 1]) = 1$
- λ_d invariante par translation, i.e :

On l'appelle mesure de Lebesgue d -dimensionnelle.

Proposition 7 (Preuve en TD).

Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda([a, b]) = b - a$$

$$\lambda(]a, b[) = b - a$$

Définition 11 (Espace mesuré).

Si on munit un espace mesurable (E, \mathcal{A}) d'une mesure μ , (E, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré.

3.2 Propriétés

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Proposition 8.

Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
et si $\mu(A) < +\infty$.

$$\mu(A) - \mu(B) = \mu(A \setminus B)$$

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A \sqcup B \setminus A) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ &\geq \mu(A) \text{ car } \mu(B \setminus A) \geq 0 \end{aligned}$$

et si $\mu(A) > \infty$, on a alors

$$\mu(A) - \mu(B) = \mu(B \setminus A).$$

□

Proposition 9.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{A} .

— Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion (i.e $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

— Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion (i.e $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$ et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}, \mu(A_{n_0}) < \infty$ (*), alors

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Remarque 9.

L'hypothèse (*) est nécessaire. Si on se place dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, et si on pose $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket n, \infty \rrbracket$, $m(A_n) = \infty$ mais $m\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = m(\emptyset) = 0$.

Démonstration.

1. On définit la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$— B_0 = A_0$$

$$— \forall n \geq 1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Soit $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n, x \in A_n\}$.

si $n = 0$: ok.

sinon, $x \in A_n \setminus A_{n-1}$. Les B_n sont 2 à 2 disjoints, par construction, donc :

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mu(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\sum_{k=0}^n B_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\sum_{k=0}^n A_k \right) \end{aligned}$$

2. $\mu(A_{n_0}) < \infty$, on pose $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$ pour $n \geq n_0$ ($B_n)_{n \geq n_0}$ est une suite croissante dans \mathcal{A} , donc d'après 1),

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq n_0} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\sum_{k=0}^n B_k \right).$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \geq n_0} B_n &= \bigcup_{n \geq n_0} A_{n_0} \setminus A_n \\ &= A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n \geq n_0} A_n \right) \\ &= A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mu \left(\bigcup_{n \geq n_0} B_n \right) = \mu(A_{n_0}) - \mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \text{ D'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu[(A_{n_0}) - \mu(A_n)].$$

$$\text{Donc } \mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

□

Proposition 10.

Une mesure μ sur E est sous-additive, i.e si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Démonstration.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

- $B_0 = A_0$
- $\forall n \geq 1, B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$

On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, les B_n sont 2 à 2 disjoints par construction, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{A}$. Donc

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \mu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Fonctions mesurables

4.1 Définitions

On considère $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ deux ensembles mesurables.

Définition 12.

Soit $f : E \mapsto F$. On dit que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, i.e si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$

Remarque 10.

On dit souvent que f est mesurable sans préciser les tribus si le contexte est clair.

Définition 13.

Si E et F sont deux espaces topologique munis de leur tribus boréliennes respectives. On appelle aussi les fonctions mesurables des fonctions boréliennes.

Exemple 8.

1. Si f est constante, f est mesurable : $f : \begin{matrix} E & \mapsto & F \\ x & \rightarrow & y_0 \end{matrix}$ où $y_0 \in F$. Soit

$$B \in \mathcal{B}, \begin{cases} f^{-1}(B) = E & \text{si } y_0 \in B \\ f^{-1}(B) = \emptyset & \text{si } y_0 \notin B \end{cases}$$

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

2. Si f est la fonction indicatrice. $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \subset E$. $f : E \mapsto F$

$$\text{Soit } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) = \begin{cases} E & \text{si } 0, 1 \in B \\ \emptyset & \text{si } 0, 1 \notin B \\ A & \text{si } 0 \in B, 1 \notin B \\ A^c & \text{si } 0 \notin B, 1 \in B \end{cases}$$

de même si f est de la forme $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, où les A_i forment une partition. Si f est mesurable, alors $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_i \in \mathcal{A}$.

Proposition 11.

Soit $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (F, \mathcal{B})$ avec $B = \sigma(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(E)$ alors si $\forall B \in \mathcal{C}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ alors f est mesurable.

Démonstration.

Supposons $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$, on a alors $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{A}$.

Par le lemme de transfert $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}\sigma(\mathcal{C}) = f^{-1}(\mathcal{B})$ donc f est mesurable. \square

Corollaire 2.

Si E et F sont deux espaces topologiques alors si $f : E \mapsto F$ continue, alors f est $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -mesurable.

Démonstration.

Si ω est un ouvert de F , alors $f^{-1}(\omega)$ ouvert de E donc $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{B}(E)$ donc f est mesurable par la proposition. \square

Cas $F = \mathbb{R}$

Rappel :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{]-\infty, a[; a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{]-\infty, a]; a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{[a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\}) \end{aligned}$$

Donc pour montrer que $f : E \mapsto F$ est mesurable il suffit de vérifier que $\forall a \in \mathbb{Q}, f^{-1}([-\infty, a]) = \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$

Remarque 11 (Notation).

On note

$$f^{-1}([-\infty, a]) = \{f \leq a\} = \{x \in E, f(x) \leq a\}$$

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = (\{f > a\})$$

Cas $F = \bar{\mathbb{R}}$

Pour montrer que $f : E \mapsto F$ est mesurable il suffit de vérifier que $\forall a \in \mathbb{Q}, f^{-1}([-\infty, a]) = \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$

Proposition 12.

Soient $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B}), (G, \mathcal{C})$ espaces mesurables. Si $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ sont respectivement $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurables et $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ -mesurables, alors $f \circ g : E \mapsto G$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ -mesurable.

Démonstration.

$f \circ g^{-1}(\mathcal{C}) = f(g^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ car f est mesurable. \square

Corollaire 3.

- Si $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est mesurable, alors $|f|$ l'est.
- Si $f : E \mapsto \mathbb{R}^*$ est mesurable, alors $\frac{1}{f}$ l'est.

Démonstration.

Prendre $|f| = g \circ f$ où $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{matrix}$ qui est continue donc mesurable. \square

4.2 Fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes

On considère (E, \mathcal{A}) un ensemble mesurable.

Proposition 13.

Soient $f, g : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + g$ est mesurable.
2. fg est mesurable.

Démonstration.

1. Soient les fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ \varphi : x &\rightarrow (f(x), g(x)) \\ \psi : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ \psi : (x, y) &\rightarrow \alpha x + y \end{aligned}$$

$$\alpha f + g = \psi \circ \varphi$$

ψ est continue de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R} donc $(\mathbb{R}^\epsilon, \mathbb{R})$ –mesurable. φ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ –mesurable.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma \{I_1 \times I_2, I_1, I_2 \text{ intervalles ouverts de } \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)\}$$

$$\text{Soit } \omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2), \omega = \bigcup_{\substack{]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\subset \omega \\ a_i, b_i \in \mathbb{Q}}}]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$$

Soient I_1, I_2 intervalles ouverts de \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(I_1 \times I_2) &= \{x \in E, f(x) \in I_1, g(x) \in I_2\} \\ &= f^{-1}(I_1) \cap g^{-1}(I_2) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

2. $fg = \psi \circ \varphi$

$$\psi : (x, y) \rightarrow xy$$

$$\varphi : x \rightarrow (f(x), g(x)) \text{ tous deux mesurables.}$$

donc fg est mesurable.

□

Remarque 12.

On peut montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont et les points de la proposition 1 et 2 restent vrais, avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposition 14.

Si $f_n : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ sont des formes mesurables. alors :

— $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ sont mesurables. où

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : E \mapsto \bar{\mathbb{R}} \\ x \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n : E \mapsto \bar{\mathbb{R}} \\ x \rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

— Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers $f : E \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ alors f est mesurable.

Démonstration.

Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} &= \{x \in E, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq a\} \\ &= \{x \in E, \forall n \in \mathbb{N} f_n(x) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E, f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{A} \text{ car } f_n \text{ est mesurable.} \end{aligned}$$

donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est mesurable.

Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \{\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n < a\} &= \{x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, f_n(x) < a\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x) < a\} \in \mathcal{A} \text{ car } f_n \text{ est mesurable.} \end{aligned}$$

donc $\inf_n f_n$ est mesurable.

On a $\limsup_n f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k$. Comme les f_k sont mesurables, les fonctions

$\sup_{k \geq n} f_k$ le sont, et $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable.

De même $\liminf_n f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k$

Si f_k converge simplement vers f alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$.

Donc f est mesurable. \square

Chapitre 5

Intégrale de Lebesgue

5.1 Intégration des fonctions mesurables positives

5.1.1 Fonctions étagées positives

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Définition 14 (Fonction étagée sur E).

On appelle fonction étagée sur E une fonction $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable ayant un nombre fini de valeurs. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est étagée, on peut l'écrire.

$$f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$$

où $A_i = \{x \in E, f(x) = \alpha_i\}$.

Plus généralement : si f s'écrit $\sum_{k=1}^N \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ où les B_i forment une partition de E , on appelle $\sum_{k=1}^N \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ une écriture canonique de f .

On rappelle que :

Définition 15 (Partition de E).

On appelle partition de E une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telles que :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$
- Si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

Remarque 13.

Si $f : E \mapsto \mathbb{R}$ s'écrit $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$.

$$(f \text{ est étagée}) \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_i \in \mathcal{A}).$$

Remarque 14 (Notations).

On note $\mathcal{E}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{f : E \mapsto \mathbb{R}, f \text{ étagée positive}\}$.

Remarque 15.

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$$(f \text{ est en escalier}) \Rightarrow (f \text{ est étagée}).$$

Mais la réciproque est fausse, un contre-exemple sera $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Définition 16.

Si $f \in \mathcal{E}_t$, $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $A_i = \{f = \alpha_i\}$. On pose $\int_E f d\mu =$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_k)$$

Si $f = \sum_{k=1}^M \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ est une écriture canonique de f , alors :

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^M \beta_k \mu(B_k).$$

On choisit la convention : $\alpha_i \mu(A_i) = 0$ si $\alpha_i = 0$ et $\mu(A_i) = +\infty$.

Démonstration.

Si $f = \sum_{k=1}^M \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ est une écriture conique de f .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \beta_k \mu(B_k) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_i \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^M \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) \end{aligned}$$

$$\text{car } \sum_{j=1}^M \mu(B_j) = \mu\left(\bigsqcup_{j, \beta_j = \alpha_i} B_j\right) \text{ car } \bigsqcup_{j, \beta_j = \alpha_i} \beta_j = \{x \in E, f(x) = \alpha_i\} = A_i. \quad \square$$

Remarque 16.

On note aussi $\int_E f \, d\mu, \int_E f(x) \, d\mu(x)$, ou même $\int f \, d\mu$ si le contexte est clair.

Exemple 9.

1. *Mesure de Dirac* : Soit $x \in E$, δ_x mesure sur $(E, \mathcal{P}(E))$ définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f \in \mathcal{E}_t$, si $\mu = \delta_x$, alors $\int_E f \, d\mu = f(x)$, en effet :

Démonstration.

Si $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$, ($A_i = \{f = \alpha_i\}$).

$$\int_E f \, d\delta_x = \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta_x(\{f = \alpha_i\})$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $f(x) = \alpha_{i_0}$ donc $\delta_x(\{f = \alpha_i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc :

$$\int_E f \, d\delta_x = \alpha_{i_0} = f(x).$$

□

2. Mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Si $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ étagée positive.
alors $\int_{\mathbb{N}} f dm = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$

Démonstration.

$$\text{Si } f = \sum_{i=0}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \text{ où } A_i = \{f = \alpha_i\}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) &= \sum_{i=0}^N \sum_{n, f(n)=\alpha_i} f(n) \\ &= \sum_{i=0}^N \alpha_i \sum_{n, f(n)=\alpha_i} 1 \\ &= \sum_{i=0}^N \alpha_i \text{Card} \{f = \alpha_i\} \\ &= \sum_{i=0}^N \alpha_i m(\{f = \alpha_i\}) \\ &= \int_{\mathbb{N}} f dm \end{aligned}$$

□

Proposition 15.

Soient $f, g \in \mathcal{E}_+$, alors :

1. $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ (additivité)
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int_E (\alpha f) d\mu = \alpha \int_E f d\mu$
3. Si $f \leq g$ alors $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ (croissance).

Démonstration.

1. $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ et $g = \sum_{j=1}^M \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ alors $f + g = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M (\alpha_k + \beta_j) \mathbb{1}_{A_k \cap B_j}$
 $f + g \in \mathcal{E}_+$ car $\alpha_i + \beta_j \geq 0$, $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ partition de E, et $\forall i \in$

$$\llbracket 1, N \rrbracket, j \in \llbracket 1, M \rrbracket, A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$$

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) \, d\mu &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^M \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^M \beta_j \sum_{i=1}^N \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu \left(\bigsqcup_{j=1}^M A_i \cap B_j \right) + \sum_{j=1}^M \beta_j \mu \left(\bigsqcup_{i=1}^N A_i \cap B_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^M \beta_j \mu(B_j) \\ &= \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu \end{aligned}$$

$$2. \text{ Si } \alpha \in \mathbb{R}_+, \alpha f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^N \alpha \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{E}_+$$

$$\begin{aligned} \int_E \alpha f &= \sum_{i=1}^N \alpha \alpha_i \mu(A_i) \\ &= \alpha \int_E f \, d\mu \end{aligned}$$

3. Si $f \leq g$, $g = (g - f) + f$, or $(g - f) \in \mathcal{E}_+$, donc l'additivité est prouvée.

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\mu &= \int_E (g - f) + f \, d\mu \\ &= \int_E (g - f) \, d\mu + \int_E f \, d\mu \\ &\geq \int_E f \, d\mu \text{ car } (f - g) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 16 (Intégration sur une partie mesurable).

Si $A \in \mathcal{A}$, si $f \in \mathcal{E}_+$, alors $f \mathbb{1}_A \in \mathcal{E}_+$, et on note :

$$\int_A f \, d\mu = \int_E (f \mathbb{1}_A) \, d\mu.$$

Si $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors :

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap A}.$$

Donc comme $A_i \cap A \in \mathcal{A} \, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $f \mathbb{1}_A \in \mathcal{E}_+$.

Lemme 3.

Si $A, B \in \mathcal{A}$, et $A \cap B = \emptyset$. Alors $\forall f \in \mathcal{E}_+$:

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Démonstration.

Comme $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ on a :

$$\int_E f \mathbb{1}_{A \cup B} \, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu + \int_E f \mathbb{1}_B \, d\mu.$$

□

Lemme 4.

Soit $f \in \mathcal{E}_+$, soient $E_n \in \mathcal{A}$ tels que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \subset E_{n+1}$ (croissance par inclusion)
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

Démonstration.

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

$$\begin{aligned} \int_{E_n} f \, d\mu &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f \, d\mu &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \cap E_n\right) \end{aligned}$$

Or $A_i \cap E_n \in \mathcal{A}$ et $(A_i \cap E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante donc

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \cap E_n = A_i \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = A_i \cap E = A_i.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) = \int_E f \, d\mu.$$

□

5.1.2 Intégration des fonctions mesurables positives.

On note $\mathcal{M}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) , f \text{ mesurable}\}.$

Définition 17.

Soit $f \in \mathcal{M}_+$, on définit :

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

Remarque 17.

- Par croissance de l'intégrale des fonctions de \mathcal{E}_+ , la définition est compatible avec celle de l'intégrale pour \mathcal{E}_+ .
- Si $f \in \mathcal{M}_+$ alors $\int_E f \, d\mu \geq 0$ ($\varphi \equiv 0 \leq f$ et $\varphi \in \mathcal{E}_+$)
- Si $f, g \in \mathcal{M}_+$ avec $f \leq g$ alors

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$$

Si $\varphi \in \mathcal{E}_+$ avec $\varphi \leq f$ alors $\varphi \leq g$ donc $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$ par passage au sup pour $\varphi \leq f$, où $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

Théorème 5 (Beppo-Levi, ou théorème de convergence monotone).

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissance sur \mathcal{M}_+ ($f_n \leq f_{n+1}$) alors :

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$$

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$ par croissance donc :

$$\int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$$

Montrons que $\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+$, avec $\varphi \leq f$, soit $\alpha \in]0, 1[$.

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E, \alpha\varphi(x) \leq f_n(x)\} = \{\alpha\varphi - f_n < 0\} \in \mathcal{A}$$

On note que $\int_E (\alpha\varphi) \, d\mu \leq \int_E f_n \, d\mu$, car $\alpha\varphi \mathbb{1}_{E_n} \leq f_n$ On a

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

(si $x \in E, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) > \alpha\varphi(x)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) > \alpha\varphi(x)$)

et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissance donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} (\alpha\varphi) \, d\mu = \int_E (\alpha\varphi) \, d\mu$$

donc $\int_E \alpha\varphi \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu$ On laisse tendre α vers 1 et on obtient :

$$\int_E \varphi \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \leq f$

□

Théorème 6 (Lemme d'approximation).

Si $f \in \mathcal{M}_+$ alors il existe une suite croissance $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{E}_+ telle que $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Démonstration.

Soient :

- $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{f \geq n\} = \{x \in E, f(x) \geq n\}$
- $B_{n,i} \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{i}{2^n} \leq f \leq \frac{i+1}{2^n}\}$ pour $i \in \llbracket 0, n2^n - 1 \rrbracket$.

On pose :

$$f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{B_{n,i}} + n \mathbb{1}_{A_n}$$

- On a $f_n \in \mathcal{E}_+$, f_n a un nombre fini de valeur, $A_n, B_{n,i} \in \mathcal{A}$ car f est mesurable.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ si $f(x) = +\infty$, $f_n(x) = n$ qui tend vers ∞ si n tend vers $+\infty$.
- Si $f(x) < +\infty$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, f(x) < n$ et si $\frac{i}{2^n} < f(x) < \frac{i+1}{2^n}$ alors $f_n(x) = \frac{i}{2^n}$

$$\forall n \geq n_0, f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$. Soit $x \in E$, deux cas :

Si $f(x) \geq n+1$, $f_n(x) = n, f_{n+1}(x) > f_n(x)$

Si $f(x) \leq n$, $f_n(x) = \frac{i}{2^n}$, où $i \in \llbracket 0, n2^n - 1 \rrbracket$, $f_n(x) \in \{\frac{2i}{2^{n+1}}, \frac{2i+1}{2^{n+1}}\}$ et $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

Si $n \geq f(x) \leq n+1$, $f_n(x) = n, f_{n+1}(x) = \frac{i}{2^{n+1}}$, avec $i \geq n2^{n+1}$ et $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

□

Corollaire 4 (Corollaire de Beppo Levi).

Si $f_n \in \mathcal{M}_+$ alors $\sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int_E \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int_E f_n d\mu$$

Démonstration.

On a $\sum_n f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k$ comme limite de fonctions mesurables. Soit $g_n =$

$\sum_{k=0}^n f_k, g \in \mathcal{M})_+$, et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc par Beppo-Levi :

$$\int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \sum_{k=0}^n f_k \, d\mu$$

Par additivité de l'intégrale :

$$\int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_E f_k \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n \, d\mu$$

□

Proposition 17.

Si $f, g \in \mathcal{M}_+$ alors

1. $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$
3. Si $A \in \mathcal{A}$, alors $f \mathbb{1}_A \in \mathcal{M}_+$ et on note $\int_A f \, d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu$ et si on a $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ alors

$$\int_{A \sqcup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

Démonstration.

1. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 suites croissantes de \mathcal{E}_+ telles que :

$$\forall x \in E \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x) \end{cases}$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_E (f_n + g_n) \, d\mu &= \int_E f_n \, d\mu + \int_E g_n \, d\mu \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_E (f_n + g_n) \, d\mu \right) &= \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu \text{ par Beppo-Levi} \end{aligned}$$

$(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de \mathcal{M}_+ donc par Beppo-Levi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E (f_n + g_n) d\mu = \int_E (f + g) d\mu$$

2. Si $\alpha \geq 0$, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante dans \mathcal{E}_+ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$. On a :

— $(\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha f_n = \alpha f$

— $\alpha f_n \in \mathcal{M}_+, \forall n \in \mathbb{N}$

donc

$$\begin{aligned} \int_E \alpha f_n d\mu &= \alpha \int_E f_n d\mu \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \alpha f_n d\mu &= \alpha \int_E f d\mu \text{ par Beppo Levi} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu.$$

3. est laissé au lecteur courageux...

□

Proposition 18.

Soit $f \in \mathcal{M}_+$ alors

$$\int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

Remarque 18. Notations

On dit qu'une propriété \mathcal{P} sur E est vraie μ -presque partout (notée $\mu - pp$)

si $\{x \in E, x \text{ ne vérifie pas } \mathcal{P}\} \in \mathcal{A}$ et $\mu(\{x \in E, x \text{ ne vérifie pas } \mathcal{P}\}) = 0$

Exemple : Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ alors on dit que $f = 0 \mu - pp$

Démonstration.

" \Leftarrow " : Si $f = 0 \mu - pp$, et $\varphi \in \mathcal{E}_+$ avec $\varphi \leq f$ alors $\{\varphi \neq 0\} \subset \{f \neq 0\}$ donc $\mu(\{\varphi \neq 0\}) \leq \mu(\{f \neq 0\})$ donc $\varphi = 0 \mu - pp$

Si $\varphi \in \mathcal{E}_+$ alors si $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors $\alpha_i > 0 \Rightarrow \mu(A_i) = 0$. $\varphi = 0 \mu - pp$, donc :

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i).$$

" \rightarrow " : Si $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$ montrons que $\int_E f \, d\mu > 0$.

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}$$

$$0 < \mu(\{f \neq 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}\right)$$

donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\mu\left(\left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}\right) > 0$ on a $f \geq \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}$ donc

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &\geq \int_E \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} \, d\mu \\ &\geq \frac{1}{n} \int_E \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} \, d\mu \\ &\geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}\right) > 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.

Si $f, g \in \mathcal{M}_+$, et $f = g$ μ -pp alors

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

Démonstration.

On a $\mu(\{f \neq g\}) = 0$

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \int_{\{f \neq g\}} f \, d\mu + \int_{\{f = g\}} f \, d\mu \\ &= \int_{\{f = g\}} g \, d\mu \text{ car } \mu(\{f \neq g\}) = 0 \\ &= \int_{\{f \neq g\}} g \, d\mu + \int_{\{f = g\}} g \, d\mu \\ \int_E f \, d\mu &= \int_E g \, d\mu \end{aligned}$$

□

Proposition 19 (Inégalité de Markov).

Soit $f \in \mathcal{M}_+$ alors $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, d\mu$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \int_{\{f < a\}} f \, d\mu + \int_{\{f \geq a\}} f \, d\mu \\ &\geq 0 + \int_{\{f \geq a\}} a \, d\mu \\ &\geq a \int_{\{f \geq a\}} 1 \, d\mu \\ &\geq a \mu(\{f \geq a\}) \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.

Si $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int_E f \, d\mu < +\infty$ alors

$$\mu(\{f = +\infty\}) = 0$$

Exemple 10.

1. *Dirac* : Soit $x \in E$, si $\mu = \delta_x$, $\forall f \in \mathcal{M}_+$, $\int_E f \, d\mu = f(x)$, en effet :

Démonstration.

Si $f \in \mathcal{E}_+$, c'est évident, sinon $f \in \mathcal{M}_+$ soit $(f_n)_n$ croissante dans \mathcal{E}_+ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$. Par Beppo-Levi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

Or $\int_E f_n \, d\mu = f_n(x)$ donc $\int_E f \, d\mu = f(x)$

□

2. *Mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$:*

$$\text{Si } f \in \mathcal{M}_+, \int_{\mathbb{N}} f dm = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

Cas des famille sommables sur $(E, \mathcal{P}(E))$: Théorie des familles sommables. $\int_E f dm = \sum_{x \in E} f(x)$

Exercice : $f \in \mathcal{M}_+$, montrez que si $\int_E f dm < +\infty$ alors $\{f \neq -\}$ dénombrable.

Théorème 7 (Lemme de Fatou).

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables positives.

$$\int_E \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n d\mu.$$

Démonstration.

On pose $g_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{k \geq n} f_k$:

- $g_n \in \mathcal{M}_+$ car les f_n sont mesurables positives.
- $(g_n)_n$ est une suite croissante par Beppo-Levi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k d\mu$$

On a pour $m \geq n$, $\inf_{k \geq n} f_k \leq f_m$, donc

$$\int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \int_E f_m d\mu$$

et par passage à l'inf pour $m \geq n$, on a

$$\int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int_E f_m d\mu$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n d\mu$ d'où

$$\int_E \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n d\mu.$$

□

5.2 Fonctions intégrables

On se place dans un espace mesurables (E, \mathcal{A}, μ) .

Définition 18.

On dit que $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est μ -intégrable si $\begin{cases} f \text{ mesurable de } (E, \mathcal{A}) \text{ dans } (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \\ \int_E |f| d\mu < \infty \end{cases}$

On note

$$\mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) , f \text{ est } \mu - \text{intégréable}\}$$

On le note parfois $\mathcal{L}_\mu^1(E)$ ou même \mathcal{L}_μ^1 , ou même \mathcal{L}^1 ... (si la contexte est clair)

Proposition 20.

$$(f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R})) \Leftrightarrow (f^+, f^- \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R}^+))$$

Où $f^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, f\}$ et $f^- \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, -f\}$ et

$$(f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{C})) \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R}))$$

Remarque 19.

Si f est mesurable, f^-, f^+ sont mesurables positives :

$$f^+ = f \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}} \in \mathcal{M}_+, f^- = f \mathbb{1}_{\{f \leq 0\}} \in \mathcal{M}_+$$

On a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

Démonstration.

Par la remarque on a f mesurable $\Leftrightarrow f^+, f^-$ sont mesurables.

On a $|f| = f^+ + f^-$ donc si f est mesurable,

$$\int_E |f| d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$

donc $\left(\int_E |f| d\mu < +\infty \right) \Leftrightarrow \left(\int_E f^+ d\mu < +\infty, \int_E f^- d\mu < +\infty \right)$ (f^+, f^- sont à valeurs positives).

- $f : E \mapsto \mathbb{C}$ mesurable $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont mesurables. Si f est mesurable on a :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f| &\leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \\ |\operatorname{Im} f| &\leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Définition 19 (Intégrale de Lebesgue).

Soit $f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R})$, on définit :

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

Soit $f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{C})$, on définit :

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f \, d\mu$$

Proposition 21.

Si f, g mesurables de E dans \mathbb{K} et $f = g$ μ -pp Alors

$$f \in \mathcal{L}_\mu^1 \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}_\mu^1$$

et dans ce cas

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$$

Démonstration.

On a $\{x \in E, |f(x)| \neq |g(x)|\} \subset \{x \in E, f(x) \neq g(x)\}$ donc

$$\mu(\{|f| \neq |g|\}) \leq \mu(\{f \neq g\}) = 0$$

$$\{|f| - |g| \neq 0\} = (|f| - |g|)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \in \mathcal{A}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\{x \in E, f^+ \neq g^+\} \subset \{x \in E, f \neq g\}$$

$$\{x \in E, f^- \neq g^-\} \subset \{x \in E, f \neq g\}$$

donc

$$f^+ = g^+ \mu - \text{pp}, f^- = g^- \mu - \text{pp}$$

donc

$$\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\{x \in E, \operatorname{Re} f \neq \operatorname{Re} g\} \subset \{x \in E, f \neq g\}$$

$$\{x \in E, \operatorname{Im} f \neq \operatorname{Im} g\} \subset \{x \in E, f \neq g\}$$

...reproduire le même raisonnement.

□

Remarque 20.

Soit $f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R})$,

$\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$ donc $\mu(\{x \in E, f = \infty\}) = 0$. Donc si $f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R})$

et si on pose $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} f \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}}$, on a $f = \tilde{f} \mu - \text{pp}$ et

$$\int_E f d\mu = \int_E \tilde{f} d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}} d\mu$$

Proposition 22 (Linéarité de l'intégrale).

Si $f, g \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$, alors

— $f + g \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$ et

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

— si $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$ et $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

Démonstration.

— $f + g$ mesurable car f et g le sont.

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

donc

$$\int_E |f + g| d\mu = \int_E |f| d\mu + \int_E |g| d\mu < +\infty$$

et $f + g \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: on remarque que $f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ alors $(f + g)^+ + (f + g)^- = f^+ + g^+ + f^- + g^-$ d'où

$$\int_E (f + g)^+ + f^- + g^- d\mu = \int_E (f + g)^- + f^+ + g^+ d\mu$$

$$\begin{aligned} \int_E (f + g)^+ - (f + g)^- d\mu &= \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu + \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu \\ &= \int_E f d\mu - \int_E g d\mu \end{aligned}$$

par additivité de l'intégrale des fonctions de \mathcal{M}_+ .

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_E (\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g) d\mu + i \int_E (\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) d\mu \\ &= \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \int_E \operatorname{Re} g d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} g d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \end{aligned}$$

— Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha f| = |\alpha| |f|$, $\alpha f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$,
soit $\alpha \geq 0$ et

$$\begin{aligned} (\alpha f)^+ &= \alpha f^+ \\ (\alpha f)^- &= \alpha f^- \end{aligned}$$

soit $\alpha \leq 0$ et

$$\begin{aligned} (\alpha f)^+ &= -\alpha f^+ \\ (\alpha f)^- &= -\alpha f^- \end{aligned}$$

On conclut par l'homogénéité positive pour l'intégrale sur \mathcal{M}_+ .

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\alpha = a + ib$.

$$\alpha f = (a + ib)(\operatorname{Re} f + i\operatorname{Im} f) = (a\operatorname{Re} f - b\operatorname{Im} f) + i(b\operatorname{Re} f + a\operatorname{Im} f)$$

$$\begin{aligned}
 \int_E \alpha f \, d\mu &= \int_E (a \operatorname{Re} f) \\
 &= \int_E (a \operatorname{Re} f - b \operatorname{Im} f) \, d\mu + i \int_E (b \operatorname{Re} f + a \operatorname{Im} f) \, d\mu \\
 &= (a + ib) \int_E \operatorname{Re} f \, d\mu + i(a + ib) \int_E \operatorname{Im} f \, d\mu \\
 &= \alpha \int_E f \, d\mu
 \end{aligned}$$

□

Proposition 23 (Inégalité triangulaire).

Soit $f \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On a :

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu$$

Démonstration.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a $|f| = f^+ + f^-$ donc :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu \right| \\
 &\leq \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu \\
 &\leq \int_E f^+ + f^- \, d\mu \\
 &\leq \int_E |f| \, d\mu
 \end{aligned}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Si $\int_E f \, d\mu \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \int_E \frac{\left| \int_E f \, d\mu \right|}{\int_E f \, d\mu} \, d\mu \\ &= \int_E \operatorname{Re}(\alpha f) \, d\mu + i \int_E \operatorname{Im}(\alpha f) \, d\mu \\ &\leq \int_E |\operatorname{Re}(\alpha f)| \, d\mu \\ &\leq \int_E |\alpha f| \, d\mu = \int_E \left| \frac{\int_E f \, d\mu}{\int_E f \, d\mu} \right| \, d\mu \\ &\leq \int_E |f| \, d\mu \end{aligned}$$

□

5.3 Théorème de convergence dominée et applications

5.3.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 8 (Convergence dominée de Lebesgue).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K}))^\mathbb{N}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} telle que :

- Pour μ -presque tout $x \in E$ $(f_n(x))_n$ converge.
- $\exists g \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{K})$ telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ -pp et

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Cette convergence sera appelée Convergence \mathcal{L}_μ^1 .

Remarque 21.

On dit que $(f_n(x))_n$ convergence pour μ -presque tout x si

$$\mu(\{x \in E, f_n(x) \text{ ne converge pas}\}) = 0$$

On note aussi $(f_n(x))_n$ converge μ -pp x

Plus généralement, si \mathcal{P} est une propriété sur E , on dit que \mathcal{P} est vérifiée en

x pour μ -presque tout x (ou \mathcal{P} est vérifiée en x μ -pp x) si et seulement si :

- $\{x \in E, \mathcal{P} \text{ n'est pas vérifiée en } x\} \in \mathcal{A}$
- $\mu(\{x \in E, \mathcal{P} \text{ n'est pas vérifiée en } x\}) = 0$

À noter également que

$$\left(f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \mu - pp\right) \Leftrightarrow \mu\left(\left\{x \in E, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)\right\}\right) = 0$$

Démonstration.

On pose $f \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_n f_n$ donc f est mesurable. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \mu - pp$:

$$\begin{aligned} \left\{x \in E, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)\right\} &= \left\{x \in E, \liminf_n f_n(x) \neq \limsup_n f_n(x)\right\} \\ &= \{x \in E, (f_n(x))_n \text{ ne converge pas} = 0\} \end{aligned}$$

$$\mu\left(\left\{f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f\right\}\right) = 0 \text{ } f \text{ est intégrale.}$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f\right\} \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| \leq g\}\right) \in \mathcal{A}$$

car les f_n, f, g sont mesurables.

$$\begin{aligned} \mu(A^c) &\leq \mu\left(\left\{f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f\right\} \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| > g\}\right)\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f\right\}\right) + \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| > g\}\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{|f_n| > g\}) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_E |f| \, d\mu &= \int_A |f| \, d\mu \\ &\leq \int_A g \, d\mu \\ &\leq \int_E g \, d\mu < +\infty \end{aligned}$$

car si $x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$, donc $|f(x)| \leq g(x)$

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Si $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$, donc $\mathbb{1}_A(2g - |f_n - f|)$ est mesurable, positive, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \int_A \liminf_n (2g - |f_n - f|) \, d\mu &\leq \liminf_n \int_A (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\ 2 \int_A g \, d\mu - \int_A \liminf_n |f_n - f| \, d\mu &\leq 2 \int_A g \, d\mu + \liminf_n \left(- \int_A |f_n - f| \, d\mu \right) \\ \text{Or } \liminf_n |f_n - f| &= 0 \text{ car } \inf_{k \geq n} (-f_k(x)) = - \sup_{k \geq n} (f_k(x)) \end{aligned}$$

donc $\limsup_n \int_A |f_n - f| \, d\mu \leq 0$ alors :

$$0 \geq \liminf_n \int_A |f_n - f| \, d\mu \leq \limsup_n \int_A |f_n - f| \, d\mu = 0$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_A |f_n - f| \, d\mu &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_E |f_n - f| \, d\mu &= \int_A |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 24 (Extension du théorème de convergence dominée).

Le théorème de convergence dominée ne couvre pas tous les cas de convergence, $\int_E f_n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f \, d\mu$

Si $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, n+1]}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Or Si $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) \, \mu\text{-pp.}$ Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, n+1]} \, d\lambda &\leq \int_{\mathbb{R}} g(x) \, d\lambda(x) \\ \text{Or } \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, n+1]} \, d\lambda &\geq \sum_{n > 0} n > 0 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, n+1]} \, d\lambda \end{aligned}$$

Par Beppo-Levi $\sum_{n > 0} n > 0 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, n+1]} \, d\lambda = \sum_{n > 0} \frac{1}{n} = \infty$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \infty$$

Remarque 22.

On utilise dans la pratique que (car en général on connaitra f) :

- Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables, f mesurable.
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ -pp
- $\exists g \in \mathcal{L}^1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ μ -pp en x .

Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

et en particulier

$$\int_E f_n \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_E f \, d\mu$$

Proposition 25 (Interversion Somme et Integrale).

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrales telles que :

$$\sum_n \int_E |f_n| \, d\mu < \infty$$

Alors la fonction $\sum_N f_n$ est définie μ -pp et est intégrable, et

$$\sum_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E \sum_n f_n \, d\mu$$

Démonstration.

C'est une conséquence quasi-immédiate du théorème de convergence dominée : On a $\sum_n \int_E |f_n| \, d\mu < \infty$ donc comme les $|f_n|$ sont mesurables, positifs, on a :

$$\int_E \sum_n |f_n| \, d\mu < \infty$$

donc $\sum_n |f_n| \in \mathcal{L}^1_\mu(E)$, et $\mu\left(\left\{\sum_n |f_n| = \pm\infty\right\}\right) = 0$ Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument (donc converge) μ -pp x . $\sum_n f_n$ est donc définie μ -pp (on peut la prolonger en une fonction définie partout, par exemple par 0). $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{L}^1_\mu$

$$\int_E \left| \sum_n f_n \right| \, d\mu \leq \int_E \sum_n |f_n| \, d\mu < \infty$$

On pose $g_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n f_k$, mesurable car les f_k le sont. On a :

- $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ pour μ -presque tout $x \in E$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, pour μ -presque tout x ,

$$|g_n(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \in \mathcal{L}_\mu^1(E)$, alors par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n \, d\mu &= \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \sum_{k=0}^n f_k \, d\mu &= \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_E f_k \, d\mu &= \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu \end{aligned}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_k \, d\mu = \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu$$

□

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit (Y, d) un espace métrique. On considère $f : E \times Y \mapsto \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Théorème 9 (Continuité sous l'intégrale).

Soit $z \in Y$, on suppose :

- Intégrabilité par rapport à la première variable : $\forall y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable.
- continuité par rapport à la deuxième variable : Pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue en z .
- Hypothèse de domination : $\exists g \in \mathcal{L}_\mu^1(E)$, telle que : $\forall y \in Y$, pour μ -presque tout $x \in E$, $|f(x, y)| \leq |g(x)|$ est continue en z .

Alors la fonction : $F : y \in Y \mapsto \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$ est définie en tout point de Y et est continue en z .

Démonstration.

- Par la première hypothèse, la fonction F est définie partout.
- Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$. On pose $f_n : x \mapsto f(x, z_n)$,
par la première hypothèse, les f_n sont mesurables
 $f(x, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x, z)$ μ -pp x
 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |f(x, z_n)| \\ &\leq g(x) \quad \mu - \text{pp } x \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$F(z_n) = \int_E f(x, z_n) \, d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f(x, z) \, d\mu(x) = F(z)$$

□

Remarque 23.

Si on remplace la deuxième hypothèse par $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow z} l$ μ -pp x . Où l est une fonction mesurable, alors on obtient de la même façon la conclusion :

$$F(y) = \int_E f(x, y) \, d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow z} \int_E l(x) \, d\mu(x).$$

On a l'application suivante : Soit $f \in \mathcal{L}_\lambda^1(\mathbb{R})$ on pose : $F : y \mapsto \int_{]-\infty, y]} f(x) \, d\lambda(x)$

Alors F est continue sur \mathbb{R} .

Démonstration. $\forall y \in Y$, $F(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x) \, d\lambda(x)$ On pose $\varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x)$ On a $\forall z \in \mathbb{R}$:

- $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x)$ est mesurable, comme produit de telles fonctions.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x) \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x) = f(x) \mathbb{1}_{[x, +\infty[}(y)$ est continue en z si et seulement si $x \neq y$. Donc $y \mapsto \varphi(x, y)$ est continue en z pour λ -presque tout x .
- $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi(x, y)| = |f(x) \mathbb{1}_{]-\infty, y]}(x)| \leq |f(x)|$$

Comme $f \in \mathcal{L}_\lambda^1(\mathbb{R})$, par le théorème de continuité sous l'intégrale, $\forall y \in \mathbb{R}$, f est continue en z . Alors F est continue sur \mathbb{R} .

□

Théorème 10 (Dérivabilité sous l'intégrale).

Soit $f : E \times I \mapsto \mathbb{R}$ où I intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} . On suppose :

- Intégrabilité par rapport à la première variable : $\forall y \in I, x \mapsto f(x, y)$ est intégrable.
- Dérivabilité par rapport à la deuxième variable : Pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I . On note $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ la dérivée en x .
- Hypothèse de domination : $\exists g \in \mathcal{L}_\mu^1(E, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall y \in I$, pour μ -presque tout $x \in E$,

$$|der f| \leq g(x)$$

Alors la fonction $F : y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ est définie sur I , dérivable sur I et :

$$\forall y \in I, F'(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $z \in I$, soit $(z_n)_n \in I^\mathbb{N}$ telle que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z, \forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq z$ $\frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} = \int_E \frac{f(x, z_n) - f(x, z)}{z_n - z} d\mu(x) \varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x, z_n) - f(x, z)}{z_n - z}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n$ est mesurable car f l'est, par la deuxième hypothèse, $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, z)$ pour μ -presque tout $x \in E$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_n(x)| \leq \sup_{y \in [z_n, z]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \text{ par le théorème des accroissements finis}$$

$$|\varphi_n(x)| \leq \sup_{y \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq g(x) \text{ pour } \mu - \text{presque tout } x \in E$$

Alors par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} &= \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) d\mu(x) \\ F'(z) &= \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) d\mu(x) \end{aligned}$$

□

5.4 Comparaison intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

5.4.1 Rappels

On se place dans un intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 20 (Fonction de escalier).

1. On appelle fonction en escalier sur le segment $[a, b]$ toute fonction de la forme

$$\varphi = \sum k = 0^N \alpha_k \mathbb{1}_{I_k}$$

où les I_k sont des intervalles de $[a, b]$.

2. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bornée, on note :

$$\int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi d\lambda, \varphi \text{ en escalier}, \varphi \leq f \right\}$$

$$\int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \int_{[a,b]} \varphi d\lambda, \varphi \text{ en escalier}, \varphi \geq f \right\}$$

f est Riemann intégrale (RI) sur $[a, b] \Leftrightarrow$
 $\left(\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \right)$ On note alors :

$$\int_a^b \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

Contre-exemple où c'est faux : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

Remarque 24.

La définition est équivalente à la définition par somme de Riemann-Darboux.

Proposition 26.

- $\{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} ; f \text{ Riemann intégrable}\}$ est un espace vectoriel.
- Relation de Chasles.

Théorème 11.

Si $(f_n)_n$ suite de fonctions Riemann intégrable sur $[a, b]$, et f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors f est Riemann intégrable et

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x).$$

Définition 21 (Fonction réglée).

On appelle fonction réglée une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} qui est limite uniforme de fonctions en escalier.

Remarque 25.

Par le théorème précédent, toute fonction réglée sur $[a, b]$ est Riemann intégrable.

Proposition 27.

(Une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est réglée) \Leftrightarrow
(f a une limite à gauche et à droite en tout point.)

exemple de fonctions vérifiées : les fonctions \mathcal{C}^0 continues par morceaux, monotones...

5.4.2 Lien intégrale de Riemann-intégrale de Lesbegue

Si (E, \mathcal{A}, μ) espace mesurée et \mathcal{P} une propriété sur E . On étend la situation : \mathcal{P} est vraie μ -pp : si $\exists A \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(E) = 0$ et $\forall x \notin A, x$ vérifie \mathcal{P} .

Cela autorise le cas $\{x \in E, x \text{ vérifie pas } \mathcal{P}\} \notin \mathcal{A}$

Théorème 12.

Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ Riemann intégrable alors $\exists g \in \mathcal{L}_\lambda^1([a, b])$ telle que :

$$f = g \lambda - \text{pp}$$

au sens où $\exists F \in \mathcal{B}([a, b])$ telle que $\lambda(A) = 0, \forall x \notin A, f(x) = g(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} g(x) d\lambda$$

Démonstration.

Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions en escalier telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n \leq f$ et

$$\int_{[a,b]} \varphi_n(x) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f(x) dx$$

On peut supposer $(\varphi_n)_n$ croissante quitte à considérer $\tilde{\varphi}_n \stackrel{\text{def}}{=} \max(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$, où φ_n est en escalier, $\tilde{\varphi}_n \leq f$ et

$$\int_{[a,b]} \tilde{\varphi}_n(x) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f(x) dx$$

Soit $g : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$ mesurable, $g \leq f$, montrons que

$$\int \varphi_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int g dx$$

On a $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x), \forall x \in [a, b]$,

$$\varphi_0(x) \leq \varphi_n(x) \leq \max(\|f\|_\infty, -\varphi_0) \in \mathcal{L}^1([a, b])$$

Donc par le théorème de convergence dominées :

$$\int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} g d\lambda$$

On a donc $\int_{[a,b]} g d\lambda = \int_{[a,b]} f(x) dx$.

Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers avec :

$$— \psi_n \geq f$$

$$- \int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

On peut supposer que $(\psi_n)_n$ est décroissante, quitte à considérer $\tilde{\psi}_n = \min(\psi_0, \psi_n)$

Soit $h \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n$ alors : h est mesurable et $h \geq f$ comme ci-dessus par le théorème de convergence dominée.

$$\int_{[a,b]} \psi_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h d\lambda$$

On a alors

$$\int_{[a,b]} h d\lambda = \int_a^b f(x) = \int_{[a,b]} g d\lambda$$

donc $g = h$ λ -pp i.e $\lambda(\{g \neq h\}) = 0$ or $g \leq f \leq h$ donc $\{g \neq f\} \subset \{g \neq h\}$ et $f = g$ λ -pp au sens de l'énoncé. \square

Remarque 26.

Si f est mesurable, le théorème devient :

f est Riemann intégrable, $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ et $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$

Si on se place dans $[a, b]$ muni de la tribu de Lebesgue (voir plus loin) le théorème devient :

Si f est Riemann intégrable, alors f est lebesgue intégrable et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$

La réciproque est cependant fautive : en effet si $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, f n'est pas Riemann intégrable, $\int_a^b f(x) dx = 0$ et $\int_a^b f(x) dx = 1$ $\varphi d\lambda \leq 0$ si φ est en escalier telle que $\varphi \leq f$.

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum \alpha_k \mathbb{1}_{I_k}$$

$\exists x \in I_k \setminus \mathbb{Q}, t.q., \alpha_k = \varphi(x) \leq f(x) = 0$ et $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ et $\int_{[0,1]} f d\lambda = \lambda(\{\mathbb{Q} \cap [0, 1]\}) = 0$

Théorème 13.

Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ localement Riemann intégrable d'intégrale absolument convergente, i.e Riemann intégrable sur tout compact de \mathbb{R} ,

$\exists g \in \mathcal{L}^1_\lambda(\mathbb{R})$ telle que $f = g$ λ -pp et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Chapitre 6

Espace L^p

On se place sur un espace mesurable (E, \mathcal{A}, μ) .

6.1 Définitions

Définition 22.

Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit :

$$\mathcal{L}_\mu^p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \int_E |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}_\mu^\infty(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists c > 0, |f| \leq c \mu - \text{pp} \}$$

Les fonctions de \mathcal{L}_μ^∞ sont dites essentiellement bornées. On note aussi $\mathcal{L}^p(E), \mathcal{L}^\infty(E), \mathcal{L}^p, \mathcal{L}^\infty$, lorsque le contexte est clair.

Remarque 27.

Si $p \in [1, +\infty[$, si m mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

$$\mathcal{L}_m^p(\mathbb{N}) = l^p(\mathbb{N}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\}$$

Proposition 28 (Demo en TD).

Si $\mu(E) < \infty$ si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors $\mathcal{L}_\mu^p(E) \subset \mathcal{L}_\mu^q(E)$
Si $p \leq q$, $l^p(E) \subset l^q(E)$

Exemple 11 (Exemple de non égalité).

$$\begin{aligned} x &\mapsto \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1 \\ x &\mapsto \frac{\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2 \end{aligned}$$

Définition 23.

Si $p \in [1, +\infty]$, on introduit la relation d'équivalence, si $f, g \in \mathcal{L}_\mu^p(E)$,

$$(f \sim g) \Leftrightarrow (f = g \text{ } \mu\text{-pp})$$

Définition 24.

Si $p \in [1, +\infty]$, on définit $L_\mu^p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_\mu^p / \sim$

Remarque 28.

si $f \in \mathcal{L}_\mu^p(E)$, $\bar{f} = \{g \in \mathcal{L}_\mu^p(E), f = g \text{ } \mu\text{-pp}\}$ Les éléments de $L_\mu^p(E)$ sont des classes d'équivalences de fonctions égales μ -pp. Dans toute la suite, on fera l'abus d'écriture consistant à assimiler $f \in \mathcal{L}^p$ à sa classe d'équivalence pour \sim .

On ne fait plus la différence entre les deux fonctions égales μ -pp

Exemple 12.

On dit que $f = 0$ dans $L_\mu^1(E)$ si $f = 0 \text{ } \mu\text{-pp}$

$$(f \in L^p \text{ est continue}) \Leftrightarrow (\exists g \in C^0, f = g \text{ } \mu\text{-pp})$$

Remarque 29 (Notations).

Si $1 \leq p \leq +\infty, \forall f \in L^p \mu(E)$ on note

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $f \in L_\mu^\infty(E)$ on note

$$\|f\|_\infty = \inf \{c > 0, |f| < c \text{ } \mu\text{-pp}\}$$

Avec la convention : $\inf \emptyset = \infty$, on appelle $\|f\|_\infty$ le sup essentiel, noté aussi $\text{supess } f$.

Il est à noter que les notations ne sont pas ambiguës :

- Si $f, g \in L^p, 1 \leq p \leq +\infty$, et $f = g \text{ } \mu\text{-pp}$, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$ (exercice)
- $\forall f \in L_\mu^\infty(E), |f| \geq \|f\|_\infty \text{ } \mu\text{-pp}$

6.2 Inégalité de Hölder et Minkowski

Définition 25 (Composantes conjuguées).

Si $p, q \in [1, +\infty]$, on dit que p et q sont des composantes conjuguées si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exemple 13.

$p = q = 2$

Théorème 14 (Inégalité de Hölder).

Soient p, q 2 composantes conjuguées, si $(f, g) \in L^p_\mu(E) \times L^q_\mu(E)$, alors

$$fg \in L^1_\mu(E), \text{ et } \int_E |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz si $p = q = 2$

Démonstration.

Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, on a $|fg| = 0$ μ -pp et l'inégalité est vraie. Supposons que $\|f\|_p \neq 0$ et $\|g\|_q \neq 0$, alors on a plusieurs cas :

Cas $p = 1$ et $q = \infty$: On a $|fg| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ μ -pp. alors :

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| \, d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Cas $1 < p$ et $q < \infty$: On montre que $\forall u, v \geq 0, \forall \alpha \in]0, 1[$,

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha) v$$

On effectue la démonstration de cela dans le cas $u, v > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(u^\alpha v^{1-\alpha}) &= \alpha \ln u + (1 - \alpha) \ln v \\ &\leq \ln(\alpha u + (1 - \alpha) v) \\ u^\alpha v^{1-\alpha} &\leq \alpha u + (1 - \alpha) v \end{aligned}$$

L'inégalité reste vraie si $u = 0$ ou $v = 0$.

Soit $x \in E$, $u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}$ et $v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ et $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p}$ on a alors

$$\frac{|fg(x)|}{\|g\|_q \|f\|_p} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

On intègre sur E :

$$\frac{\int_E (|fg| \, d\mu)}{\|g\|_q \|f\|_p} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_E (|f|^p \, d\mu)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_E (|g|^q \, d\mu)}{\|g\|_q^q} = 1$$

$$\text{car } \frac{\int_E (|g|^q \, d\mu)}{\|g\|_q^q} = 1 = \frac{\int_E (|f|^p \, d\mu)}{\|f\|_p^p}.$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\int_E (|fg| \, d\mu) \leq \|g\|_q \|f\|_p.$$

□

Exemple 14 (Exercice). *Cas d'égalité : Montrer que il y a cas d'égalité si et seulement si $\exists \alpha, \beta$ non tous nuls, $\alpha |f|^p = \beta |g|^q \, \mu$ -pp*

Remarque 30. Si $\mu(E)$ est fini (i.e si μ est une mesure fini), et $f \in L_\mu^p(E)$ alors :

$$\begin{aligned} \int |f| \, d\mu &= \int |f| \times 1 \, d\mu \\ &\leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int 1 \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \mu(E)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Proposition 29.

Si $\mu(E) < \infty$, on sait que si $p \leq q$, $L_\mu^p(E) \subset L_\mu^q(E)$ De plus :

$$\begin{array}{ccc} L_\mu^q(E) & \hookrightarrow & L_\mu^p(E) \\ f & \rightarrow & f \end{array} \text{ est continue.}$$

En d'autres termes, $\exists c > 0, \forall f \in L_\mu^q(E), \|f\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^q}$.

Théorème 15 (Inégalité de Minkowski).

dans le cas où $1 \leq p \leq +\infty$. $p \in \mathbb{N}$ Soient $f, g \in L_\mu^p(E)$, alors $f + g \in L_\mu^p(E)$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration.

On a plusieurs cas :

Cas $1 < p < +\infty$ On a :

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq 2 \max(|f|, |g|)^p \\ &\leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p \, d\mu &\leq 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right) \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

et $f + g \in L^p_\mu(E)$ On a

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} \\ &\leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} \end{aligned}$$

On intègre sur E :

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p \, d\mu &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} \, d\mu \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1 \Leftrightarrow p + q = pq \\ \text{Donc } q &= \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } |f + g|^{q(p-1)} = |f + g|^p$$

On a $|g|, |f| \in L^p$ et $|f + g|^{p-1} \in L^q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc en appliquant Hölder :

$$\int |f + g|^p \, d\mu \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

D'où : $\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1}$ Si $\|f + g\|_p = 0$, l'inégalité est triviale.

Sinon, on divise par $\|f + g\|_p^{p-1}$, et on a :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Cas $p = 1$ $|f + g| \leq |f| + |g|$ par l'inégalité triangulaire.

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu.$$

Cas $p = +\infty$ $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ -pp, par passage au plus petit majorant on a :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

6.3 Espaces de Banach $L_\mu^p(E), 1 \leq p \leq +\infty$

Proposition 30.

Soit $p \in [1, +\infty]$, $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $L_\mu^p(E)$.

Démonstration.

Si $p < +\infty$,

$$\begin{aligned} \|f\|_p = 0 &\Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-pp} \\ &\Leftrightarrow f = 0 \text{ dans } L_\mu^p(E) \end{aligned}$$

Si $p = +\infty$

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow |f| \leq 0 \text{ } \mu\text{-pp} \\ &\Leftrightarrow f = 0 \text{ dans } L_\mu^\infty(E) \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$

Pour l'inégalité triangulaire, se référer à Minkowski.

□

Théorème 16 (Riesz-Fischer).

Soit $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(L_\mu^p(E), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

Démonstration.

Cas $p < +\infty$, soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L_\mu^p(E)$, il existe donc une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

On pose $g_n \stackrel{\text{def}}{=} f_{\varphi(n)}$, montrons à présent que $\sum_{n=0}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n| \in L^p_\mu(E)$: On peut montrer que

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n| \right)^p d\mu = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_E \left(\sum_{n=0}^N |g_{n+1} - g_n| \right)^p d\mu$$

Par Beppo-Levi, car $\left(\left(\sum_{n=0}^N |g_{n+1} - g_n| \right)^p \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables, ayant pour limite μ -pp $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n| \right)^p$. Donc

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n| \right)^p d\mu &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N \|g_{n+1} - g_n\|_p \right)^p \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|g_{n+1} - g_n\|_p \right)^p \end{aligned}$$

$$\text{Or } (\|g_{n+1} - g_n\|_p)^p \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n| \right)^p d\mu < +\infty$$

Donc, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n| \right)^p < \infty$ μ -pp et on définit :

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} g_{n+1}(x) - g_n(x) + g_0(x)$$

h est définie μ -pp, (partout quitte à prolonger par 0...) $h = \lim_{N \rightarrow +\infty} g_N$, h mesurable comme limite de fonctions mesurable, $h \in L^p_\mu(E)$.

$$\begin{aligned} \int |h|^p d\mu &= \int \liminf_{N \rightarrow +\infty} |g_N|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \int |g_N|^p d\mu \\ &\leq \sup_N \int |g_N|^p d\mu \\ &< +\infty \end{aligned}$$

car $((f_n)_n)$ est de Cauchy dans L^p donc est bornée.

$$\begin{aligned}
 |h - g_n|^p \, d\mu &= \int \liminf_N |g_N - g_n|^p \, d\mu \\
 &\leq \liminf_N \int |g_N - g_n|^p \, d\mu \\
 &\leq \liminf_N \|g_N - g_n\|_p^p \, d\mu \\
 &\leq \left(\sum_{k=n}^N \|g_{k+1} - g_k\|_p \right)^p \, d\mu \text{ Minkowski} \\
 &\leq \left(\sum_{k=n}^N \frac{1}{2^k} \right)^p \\
 &\leq \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right)^p
 \end{aligned}$$

Cas $p = \infty$ on se ramène au cas de fonctions bornées. soit (f_n) suite de Cauchy dans $L_\mu^{+\infty}(E)$. Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_n \{|f_n| \leq \|f_n\|_{+\infty}\} \cap \bigcap_{n,m} \{|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_{+\infty}\}$

On a $\mu(A^c) = 0$ et on pose $g_n \stackrel{\text{def}}{=} f_n \mathbb{1}_A$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|g_n\|_{\text{sup}} = \sup \{|g_n(x)|, x \in E\} = \|f_n\|_{+\infty}$

$\forall n, m \in \mathbb{N}, \|g_n - g_m\|_{\text{sup}} = \|f_n - f_m\|_{\text{sup}}$ donc $(g_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{F}_f(E, \mathbb{R})$ donc convergence uniformément vers une fonction f . On a $\|g_n - f\|_{\text{sup}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ or $|f_n - f| \leq \|g_n - f\|_{\text{sup}}$, d'où :

$$\|f_n - f\|_{+\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Remarque 31 (Notations).

Soit (f_n) une suite de $L_\mu^p(E)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$

on note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f$ si et seulement si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

i.e (f_n) converge vers f dans $(L_\mu^p(E), \|\cdot\|_p)$.

Remarque 32.

$f_n \in L_\mu^p(E)$, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ μ -pp $\nRightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f$

Exemple :

$$- f_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}, f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ } \lambda\text{-pp}, \int |f| \, d\lambda = 1.$$

$$f_n \in L_\mu^p(E), f \in L^p, f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f \nRightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f \text{ } \mu\text{-pp}.$$

$$\begin{aligned}
 - f_{n,k} : x &\mapsto \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} \text{ où } k \in [0, 2^n - 1]. \text{ Si } x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \\
 &\forall k_n, \frac{k}{2^n} \leq x \leq \frac{k+1}{2^n}, f_{n, \frac{k}{2^n}}(x) = 1 \text{ Or } (f_{n,k}(x))_n \text{ ne converge pas.}
 \end{aligned}$$

En revanche, la démonstration du théorème de Riesz Fischer donne immédiatement :

Proposition 31.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n, f \in L^p_\mu(E)$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge μ -pp.

Théorème 17 (Convergence dominée - L^p).

Si $(f_n)_n$ suite de fonctions dans $L^p_\mu(E)$ et $f \in L^p_\mu(E)$ telle que

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ -pp
- $\exists g \in L^p_\mu(E), \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -pp donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f$.

Démonstration.

On a $|f_n - f|^p$ mesurable donc $|f_n - f|^p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ μ -pp et $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$, or $g^p \in L^1$ car $g \in L^p$, donc par le théorème de convergence dominée :

$$\int_E |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

Dans le cas où $p = 2$: L'espace $L^2_\mu(E)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_E fg d\mu$$

est un espace de Hilbert :

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini (par Cauchy Schwarz)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, de norme associée $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

Or $(L^2_\mu(E), \|\cdot\|_2)$ est complet. On peut donc utiliser tous les résultats dans les espaces de Hilbert.

6.4 Densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p_\mu(E)$

Définition 26.

On appelle $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, (l'espace des fonctions continues à support compact), l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ continues telles qu'il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact avec $\varphi \equiv 0$ K^c

Théorème 18.

L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^p_\mu(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$.

Il faut noter que $\forall f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^d), \forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - \varphi\|_{L^p} < \epsilon$

Démonstration.

$d = 1$, on va faire une série de simplification :

- On peut supposer f positive, quitte à écrire $f = f^+ - f^-$.
Si $\|f^+ - \varphi\|_p \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $\|f^- - \psi\|_p \leq \frac{\epsilon}{2}$ où $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$\|f - \psi\|_p = \|f^+ - f^- - (\varphi - \psi)\|_p \leq \epsilon$$

par inégalité triangulaire.

- Montrons que l'on peut supposer f étagé positive intégrale.
Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}^+ \in L^p$ Soit f_n une suite de fonctions de \mathcal{E}_t , croissante et convergeant simplement vers f . On a : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$
 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$ avec $f \in L^p$, donc par le théorème de convergence dominée dans L^p ,

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

On peut même supposer $f = \mathbb{1}_A$ où $A \in \mathcal{B}(E)$ et $\lambda(A) < +\infty$.

- Montrons qu'on peut supposer $f = \mathbb{1}_\omega$, où $\lambda(\omega) < \infty$, et ω est un ouvert. On a $\lambda(A) = \inf \{\lambda(\omega), A \subset \omega, \omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$ donc si $\epsilon > 0, \exists \omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ tels que $A \subset \omega$ et $\lambda(\omega \setminus A) < \epsilon$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_\omega - \mathbb{1}_A|^p d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\omega \setminus A} d\lambda \\ &= \lambda(\omega \setminus A) < \epsilon \end{aligned}$$

- on peut donc supposer que $f = \mathbb{1}_\omega$, ω ouvert borné, car : Soit $\omega_n = \omega \cap]-n, n[$, montrons que $\mathbb{1}_{\omega_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} \mathbb{1}_\omega$, on a déjà que $\mathbb{1}_{\omega_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{1}_\omega$

λ -pp. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{1}_{\omega_n} \leq \mathbb{1}_\omega$, or $\mathbb{1}_\omega \in L^1(\mathbb{R})$ donc :

$$\int_{\mathbb{R}} (|\mathbb{1}_\omega - \mathbb{1}_{\omega_n}|^p) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Si ω est un ouvert bornée de \mathbb{R} , ω s'écrit : $\omega = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, où I_n est un intervalle ouvert et borné de \mathbb{R} . on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_\omega \quad \lambda - \text{pp} \\ &\leq \mathbb{1}_\omega \end{aligned}$$

Donc, par convergence dans L^p , $\|\mathbb{1}_\omega - \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k}\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On peut donc supposer $f = \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k}$, où I_k est un intervalle borné ouvert de \mathbb{R}

— On peut même supposer que $f = \mathbb{1}_I$, où I est un intervalle ouvert bornée de \mathbb{R} . Si $I =]a, b[$, on approche $\mathbb{1}_I$ par f_n :

Alors $\int |f - f_n|^p d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

— alors pour d quelconque, on se ramène comme ci dessus à $f = \mathbb{1}_\omega$, où ω est un ouvert borné, on a $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ où P_n sont des pavés ouverts bornés.

$$\omega = \bigcup_n \bigcup_{k=0}^n P_k = \bigcup_n \bigsqcup_{i=0}^{N_n} P_i^n$$

$$\mathbb{1}_\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N_n} \mathbb{1}_{P_i^n}$$

$$\text{Et on a enfin : } \int \left| \mathbb{1}_\omega - \sum_{i=0}^N \mathbb{1}_{P_i^n} \right|^p d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

6.5 théorème de Radon-Nikodym

Définition 27.

Si (E, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré et que $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto \mathbb{R}$ alors si $\nu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ est définie par : $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu$, alors :

- ν est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .
- On dit que ν est une mesure de densité par rapport de μ
- f est une densité de ν par rapport a μ

On a alors : si $A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ (La réciproque est fausse en général)

Définition 28.

On dit qu'une mesure ν sur (E, \mathcal{A}) est absolument continue par rapport a μ si :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

On note $\nu \ll \mu$.

Théorème 19 (Théorème de Radon-Nikodym).

Si μ, ν deux mesures σ -finies sur (E, \mathcal{A}) , alors :

$$(\nu \ll \mu) \Leftrightarrow (\nu \text{ est à densité par rapport à } \mu)$$

i.e $\exists f : E \mapsto \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu$

Définition 29.

On dit que ν est une mesure sur (E, \mathcal{A}) est étrangère à μ si et seulement si : $\exists A \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(A) = 0$ et $\nu(A^c) = 0$. On note alors $\nu \perp \mu$.

Théorème 20 (Théorème de décomposition des mesures).

Si μ, ν, σ —finies, alors \exists un unique couple de mesures sur (E, \mathcal{A}) (ν_{ac}, ν_{\perp}) tel que :

- $\nu = \nu_{ac} + \nu_{\perp}$
- $\nu_{ac} \ll \mu$
- $\nu_{\perp} \perp \mu$

Chapitre 7

Convolution et applications

7.1 Opérateurs de translation

Définition 30.

Si $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. On définit la fonction $\tau_a f : x \mapsto f(x - a)$, $a \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 32.

τ_a définit une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Démonstration.

si $f = g$ pp, alors $\tau_a f = \tau_a g$ pp. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors : $\tau_a f$ est borélienne, comme composée de fonctions mesurables, et :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_a f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - a)|^p dx$$

(changement de variable $y = x - a$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_a f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy = \|f\|_p^p$$

□

Théorème 21.

Si $1 \leq p < +\infty$ alors : $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow{\|a\| \rightarrow 0} 0$$

Contre-exemple pour si $p = +\infty$, $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $\|\tau_a f - f\|_\infty = 1$, $\forall a \neq 0$.

7.2 Convolution sur \mathbb{R}^d

7.2.1 Le cas positif

Définition 31.

Si f, g boréliennes, positives de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On définit $f \star g$:
 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \in \mathbb{R}^+$ On appelle $f \star g$ le produit de convolution de f et g .

Proposition 33.

$f \star g$ est bien définie, positive, et mesurable sur \mathbb{R}^d .

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \star g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

Démonstration.

$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y) g(y)$ est borélienne car :

- $y \mapsto x-y$ mesurable
- f, g mesurables.
- $f \star g \geq 0$
- $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$ est mesurable On a $(x, y) \mapsto f(x-y) g(y)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ —mesurable, en effet : $\begin{matrix} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \mapsto & \mathbb{R}^d \\ (x, y) & \mapsto & x-y \end{matrix}$

continue, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ —mesurable.

Donc $(x, y) \mapsto f(x-y)$ et $(x, y) \mapsto g(y)$ sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ —mesurable.

Donc par Tonelli-Fubini : $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurable.
Toujours pas Fubini-Tonelli on a aussi que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f \star g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy \right) \end{aligned}$$

□

Proposition 34.

- $f \star g = g \star f$ (changement de variable $z = x - y$)
- $\{f \star g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ Si $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$,
i.e $\forall y \in \{g \neq 0\}, x - y \notin \{f \neq 0\}$.
Si $g(y) \neq 0$, alors $f(x - y) = 0$

Remarque 33 (Rappel). A, B 2 ensembles, $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$

Exemple 15. Soit $f = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

- si $x < -1$, $f \star f(x) = 0$
- si $x > 1$, $f \star f(x) = 0$
- si $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} f \star f(x) &= \int_E \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(y) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(y) dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{x - [\frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]}(y) dy \\ &= \lambda \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cap \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

7.2.2 Le cas général

Si f, g boréliennes de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . on définit :

$$F \star g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$$

aux points $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, i.e tels que $|f| \star |g| < \infty$

7.2.3 Condition d'existence

Proposition 35 (Convolution $L^p - L^q$).

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, si $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: alors : $f \star g$ est définie en tout point, bornée et uniformément continue.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|\tau_y f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

$f \star g$ existe et est bornée. $f \star g$ uniformément continue, soit $a \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} |f \star g(x+a) - f \star g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |(f(x+a-y) - f(x-y))g(y)| \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |(\tau_{y-a}(f) - \tau_y(f))(x)g(y)| \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |(\tau_{-a}(f) - f)(x-y)g(y)| \, dy \right| \\ &\leq \|\tau_{-a}(f) - f\|_p \|g\|_q \xrightarrow{\|a\| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Car $\tau_{-a}f, f \in L^p$. □

Proposition 36 ($(L^p - L^1)$).

Si $f \in L^p, g \in L^1$, alors : $f \star g$ existe pp et $f \star g \in L^p$

7.2.4 L'algèbre $L^1(\mathbb{R}^d)$

Théorème 22.

- $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, \star)$ est une \mathbb{R} -algèbre commutative.
- $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'a pas d'unité : i.e il n'existe pas de fonctions $\varphi \in L^1$ telle que $\forall f \in L^1, f \star \varphi = f$.

Démonstration.

- est laissé en exercice.
- Supposons $\varphi \in L^1$ est une unité, alors posons : $f_n : x \mapsto \exp^{-n\|x\|^2} \in L^\infty, \varphi \in L^1$. Donc $f_n \star \varphi$ est uniformément continue, donc $f_n \star \varphi = f_n$ en tout point.

$$\begin{aligned} f_n \star \varphi(0) &= f(0) = 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(y) \varphi(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp^{-n\|x\|^2} \varphi(y) \, dy \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ par théorème de CVD} \end{aligned}$$

□

7.3 Approximation de l'unité

Définition 32.

On appelle approximation de l'unité une suite $(\varphi_n)_n$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $\varphi_n \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) \, dx = 1$
- $\forall \delta > 0, \int_{\mathcal{B}(0, \delta)} \varphi_n(x) \, dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Théorème 23.

Si $1 \leq p < +\infty$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$f \star \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f.$$

NB : Construction d'approximation de l'unité :

Si $\varphi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$.

Si $\varphi_n : x \mapsto n^d \varphi(nx)$

7.4 Régularisation par convolution

Théorème 24.

Si $f \in L^1$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1$, alors :

$$f \star \varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f \star \varphi) = \left(f \star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right).$$

Démonstration. — Dérivation sur l'intégrale : $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi(x-y) dy$

— Domination : $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$|f(y) \varphi(x-y)| \leq |f(y)| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$$

□

Théorème 25.

$\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\epsilon > 0$, $\exists g \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, $\|f - g\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Si (φ_n) est une suite d'approximation de l'unité, telle que $\forall n \in \mathbb{N} \varphi_n \in \mathcal{C}_c^{\infty}$

(suite régularisante), alors : $g \star \varphi_n \in \mathcal{C}_c^{\infty}$, or on a $g \star \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} g$

Soit alors φ_n telle que $\|g - g \star \varphi_n\|_p < \frac{\epsilon}{2}$, alors

$$\|f - g \star \varphi_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g \star \varphi_n\|_p < \epsilon$$

□

Chapitre 8

Construction de mesures, Unicité

8.1 Construction de mesures

Cas de la mesure de Lebesgue : On cherche λ mesure sur une tribu \mathcal{A} sur \mathbb{R} telle que :

- $\lambda([0, 1]) = 1$
- λ invariante par translation : $\forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(A + x) = \lambda(A)$

Théorème 26 (Demo par l'axiome du choix : construction similaire à celle faite en TD).

Il n'existe pas de mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ vérifiant la première et deuxième hypothèse.

Théorème 27.

Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant 1), 2). On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu sur } \mathbb{R}} \mathcal{A}$.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu sur } \mathbb{R}} \mathcal{A}$$

Quel est le but de tout cela ? Prolonger λ intervalle ouverts bornés sur \mathbb{R}^+ .

8.1.1 Mesures extérieures

Sur les boréliens ça donnera la mesure de Lebesgue, ailleurs quelque chose qui ne sera pas nécessairement une mesure. Une mesure extérieure n'est pas nécessairement une mesure, mais une mesure est une mesure extérieure :

Définition 33 (Mesure extérieure).

Soit E un ensemble, on dit que $\mu^* : \mathcal{P}(E) \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$ est une mesure extérieure sur E si :

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Si $A, B \subset E$, et $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (croissance)
- Si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in E$:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Remarque 34. Une mesure sur $\mathbb{P}(E)$ est une mesure extérieure, la réciproque est fausse.

Définition 34.

Soit $A \subset E$, on dit que A est μ^* -mesurable si et seulement si : $\forall F \subset E, \mu^*(F) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$. On note \mathcal{M}_{μ^*} l'ensemble des parties μ^* -mesurable de E .

Théorème 28.

- \mathcal{M}_{μ^*} est une tribu sur E .
- μ^* est une mesure sur \mathcal{M}_{μ^*} .

Démonstration.

- Si $B \subset E$, $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap \emptyset) + \mu^*(B \setminus \emptyset) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(B)$
- Si $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, soit $B \subset E$, comme $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$,
 $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A^c) + \mu^*(B \setminus A^c)$.

$$A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$$

si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, soit $B \subset E$, montrons que :

$$\begin{aligned}
 \mu^*(B) &\leq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) \\
 &\quad (\text{Par sous-additivité}) : \\
 &= \mu^*(B \cap A_0) + \mu^*(B \setminus A_0) \\
 \mu^*(B \setminus A_0) &= \mu^*(B \cap A_0 \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_0 \cup A_1) \\
 \mu^*(B \setminus A_0 \cup A_1) &= \mu^*(B \setminus (A_0 \cup A_1) \cap A_2) + \mu^*(B \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2))
 \end{aligned}$$

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{i=0}^N \mu^*\left(\left(B \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right) \cap A_n\right) + \mu^*\left(B \bigcup_{n=0}^N A_n\right)$$

On passe à la limite pour $N \rightarrow +\infty$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \mu^*(B) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*\left(\left(B \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right) \cap A_n\right) + \mu^*\left(B \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \\
 &\geq \underbrace{\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \cap A_n\right)}_{=0} + \mu^*\left(B \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \\
 &\geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \setminus \underbrace{\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k}_{= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) + \mu^*\left(B \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \\
 &\geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + \mu^*\left(B \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)
 \end{aligned}$$

— Montrons que μ^* est une mesure sur \mathcal{M}_{μ^*} . $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{\mu^*}^{\mathbb{N}}$, A_n 2 à 2 disjoints.

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^* (A_n) \text{ sous-additivité} \\ \mu^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &\geq \mu^* \left(\bigsqcup_{n=0}^N A_n \right) \quad N \in \mathbb{N} \text{ fixé} \\ \mu^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &\geq \mu^* (A_N) + \mu^* \left(\bigsqcup_{n=0}^{N-1} A_n \right) \\ &\geq \sum_{n=0}^N \mu^* (A_n) \\ \mu^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^* (A_n) \end{aligned}$$

□

8.1.2 Mesure de Lebesgue

Définition 35.

On définit pour $A \subset \mathbb{R}$,

$$\lambda^* (A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} l(I_n), A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ et } I_n \in \mathcal{T} \right\}$$

où \mathcal{T} est l'ensemble des intervalles ouverts et $l = b - a$ si $I =]a, b[$

Proposition 37.

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$ est une mesure extérieure sur \mathbb{R} .

Démonstration.

- $\lambda^* (\emptyset) = 0$
- Si $A, B \subset \mathbb{R}$, avec $A \subset B$,

$$\left\{ (I_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} \subset \left\{ (I_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\}$$

donc $\lambda^*(B) \geq \lambda^*(A)$ par définition de l'inf.

Si $A_k \subset \mathbb{R}$, montrons que $\lambda^*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \lambda^*(A_k)$:

$$\sum_n l(I_n^k) \leq \lambda^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

Or $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_k \bigcup_n I_n^k$, donc $\lambda^*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} L(I_n^k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_k) + \epsilon$ car $\sum_{n \in \mathbb{N}} L(I_n^k) \leq \lambda^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$

En laissant tendre ϵ vers 0, on a :

$$\lambda^*\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^*(A_k)$$

Donc \mathcal{M}_{λ^*} est une tribu, et λ^* est une mesure sur \mathcal{M}_{λ^*} . □

Proposition 38.

— $\lambda^*([0, 1]) = 1$ item λ^* est invariant par translation.

Démonstration.

— $[0, 1] \subset]-\epsilon, 1+\epsilon[, \forall \epsilon > 0, \lambda^*([0, 1]) \leq 1+2\epsilon$. On fait tendre ϵ vers 0, on a : $\lambda^*([0, 1]) \leq 1$ Soit $I_n =]a_n, b_n[$ avec $[0, 1] \subset \bigcup_n I_n$, par compacité,

il existe $N \in \mathbb{N}, [0, 1] \subset \bigcup_{n=0}^N I_n$. Il existe une sous-suite $]a_{i_k}, b_{i_k}[$ telle que :

- $a_{i_0} < 0$
- $\forall k \geq 1, b_{i_{k-1}} \in]a_{i_k}, b_{i_k}[$
- $b_{i_N} > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) &\geq \sum_{k=0}^N (b_{i_k} - a_{i_k}) \\ &\geq \sum_{k=0}^N (b_{i_k} - b_{i_{k-1}}) + b_{i_0} - a_{i_0} \\ &\geq b_{i_N} - a_{i_0} > 1 \end{aligned}$$

On passe à l'inf sur $(I_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, [0, 1] \subset \bigcup_n I_n$, on a $\lambda^*([0, 1]) \geq 1$ d'où :

$$\lambda^*([0, 1]) = 1$$

— $A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &= \inf_{I_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}} \sum_n l(I_n) \\ &= \inf_{\substack{I_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}} \\ A+x \subset \bigcup_n J_n}} \sum_n l(I_n).\end{aligned}$$

□

Proposition 39.

La tribu \mathcal{M}_{λ^*} contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Il suffit de montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R},]-\infty, \alpha[\in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (car $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, \alpha[, \alpha \in \mathbb{R} \})$). On appelle I l'intervalle $]-\infty, \alpha[$, soit $B \subset \mathbb{R}$, montrons que $\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I)$

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I)$$

Soit $(I_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $B \subset \bigcup_n I_n$, où $I_n =]a_n, b_n[$, donc si $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}B \cap I &\subset \bigcup_n]\min(a_n, \alpha), \max(b_n, \alpha)[\\ B \setminus I &\subset \bigcup_n]\max(a_n, \alpha) - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, \max(b_n, \alpha)[\end{aligned}$$

$$S = \lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I)$$

$$S \leq \sum_n (\min(b_n, \alpha) - \max(a_n, \alpha)) + \sum_n \left(\max(b_n, \alpha) - \max(a_n, \alpha) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}\lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I) &\leq \sum_n [(b_n + \alpha - a_n - \alpha)] + \epsilon \\ &\leq \sum_n (b_n - a_n) + \epsilon\end{aligned}$$

On laisse tendre $\epsilon \rightarrow 0$, $\lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I) \leq \sum_n (b_n - a_n)$ On passe à l'inf : $(]a_n, b_n[)_n, B \subset \bigcup_n]a_n, b_n[\lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I) \leq \lambda^*(B)$ Alors $\mathcal{M}_{\lambda^*} \supset \sigma(\{]-\infty, \alpha[, \alpha \in \mathbb{R} \}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

8.1.3 Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

De la même façon, on peut construire une mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que :

- $\lambda_d([0, 1]^d) = 1$
- λ_d invariante par translation.

On appelle λ_d mesure de Lebesgue d -dimensionnelle sur \mathbb{R}^d . Construction :

$\lambda_d^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(P_n), A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n, P_n \in \mathcal{P} \right\}$ où \mathcal{P} pavés ouverts bornés sur \mathbb{R}^d , i.e les $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$, et $\mathcal{V}(P) = \prod_{i=1}^d (a_i - b_i)$, si $P = \prod_{i=1}^d]a_i - b_i[$ Régularité de la mesure de Lebesgue :

Proposition 40.

La mesure de Lebesgue λ_d est régulière au sens où $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^D)$,

$$\lambda_d(B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \lambda(\omega), \omega \text{ ouvert}, B \subset \omega \}$$

$$\lambda_d(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \lambda(K), K \text{ compact}, K \subset \omega \}$$

Démonstration. En exercice. □

8.2 Unicité des mesures

Question : Si (E, \mathcal{A}, μ) espace mesuré, et $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, μ est-elle caractérisée par ses valeurs sur \mathcal{C} ? Non. i.e sur $\mu = \nu$ sur \mathcal{C} . Exemple : $E = a, b, \sigma(\{0\}) = \mathcal{P}(E)$.

Définition 36.

On appelle classe monotone sur E une classe de parties $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :

- $E \in \mathcal{M}$
- si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$
- si $A_n \in \mathcal{M}$ et (A_n) est croissante, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

NB : Toute tribu sur E est une classe monotone. Une intersection quelconque de classes monotones est une classe monotone, donc on peut définir la plus petite classe monotone content $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

$$m(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ classes monotone} \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M}$$

Lemme 5 (des classes monotones).

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est stable par intersection finie alors $m(C) = \sigma(C)$

Théorème 29 (Unicité des mesures).

Si μ, λ deux mesures sur (E, \mathcal{A}) , supposons que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ avec :

- $E \in \mathcal{C}$
- \mathcal{C} stable par intersection finie, $\forall A \in \mathcal{C}, \mu(A) = \nu(A)$

donc :

- Si λ, ν sont finies alors $\mu = \nu$ sur \mathcal{A}
- Il existe $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie :

$(E_n)_n$ croissante pour l'inclusion

$$\bigcup_n E_n = E$$

$$\mu(E_n) = E$$

$$\mu(E_n) = \lambda(E_n)$$

Alors $\mu = \nu$ sur \mathcal{A}

Démonstration.

- On considère $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)\}$, \mathcal{M} est une classe monotone, en effet :

$$E \in \mathcal{M}$$

Si $A \subset B, A, B \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus A) &= \mu(B) - \mu(A) \\ &= \nu(B) - \nu(A) \\ &= \nu(B \setminus A) \end{aligned}$$

Si $A_n \in \mathcal{M}$ et est croissante :

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(A_n) \\ &= \nu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \end{aligned}$$

Par hypothèse $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, donc $\mathcal{M} \supset m(\mathcal{C})$ (\mathcal{M} est une classe monotone) or $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ par le lemme des classes monotones. Donc $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)$.

— On pose : $\mu_n : A \mapsto \mu(A \cap E_n)$ mesure sur \mathcal{A} finie : $\mu_n(E) < \infty$.
 $\nu_n : A \mapsto \nu(A \cap E_n)$ finie sur \mathcal{A} . Par hypothèse, $\nu_n = \mu_n$ sur \mathcal{C} , donc par le premier point, $\nu_n = \mu_n$ sur \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &= \mu(A \cap E_n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcup_n A \cap E_n \right) = \mu(A) \\ \nu_n(A) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu(A) \text{ pour les mêmes raisons.} \end{aligned}$$

donc $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)$. □

Lemme 6.

Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(E)$ est stable par intersection finie alors

$$m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

Démonstration.

— $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu, donc une classe monotone, donc

$$m(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$$

— $m(\mathcal{C})$ est une tribu :

$$\emptyset = E \setminus E \in m(\mathcal{C}).$$

$$\text{Si } A \in m(\mathcal{C}), A^c = E \setminus A \in m(\mathcal{C}).$$

Si $A_n \in m(\mathcal{C})$, $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ est croissante, donc

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$$

Si on a $B_n \in m(\mathcal{C})$, $\bigcup_n B_n \in m(\mathcal{C})$, d'où $\bigcup_n A_n \in m(\mathcal{C})$. Il suffit donc de montrer que $m(\mathcal{C})$ est stable par union finie, ou encore stable par intersection finie. i.e montrons que $\forall A, B \in m(\mathcal{C})$, $A \cap B \in m(\mathcal{C})$.

— montrons que $\forall C \in \mathcal{C}$, $\forall B \in m(\mathcal{C})$, $C \cap B \in m(\mathcal{C})$.

Soit $C \in \mathcal{C}$, posons $\mathcal{M}_c \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in m(\mathcal{C}), C \cap B \in m(\mathcal{C})\} \subset m(\mathcal{C})$. Par hypothèse, $\mathcal{M}_c \supset \mathcal{C}$. \mathcal{M}_c est une classe monotone, en effet :

$$C \cap E = C \in m(\mathcal{C}).$$

Si $B, B' \in \mathcal{M}_c$ avec $B \subset B'$

$$C \cap (B \cap B') = (C \cap B) \setminus (C \cap B') \in m(\mathcal{C})$$

et $B \setminus B' \in \mathcal{M}_c$.

Si $B_n \in \mathcal{M}_c$ est une suite croissante.

$$C \cap \bigcup_N B_n = \bigcup_N (C \cap B_n) \in m(\mathcal{C})$$

Donc \mathcal{M}_c classe monotone contenant \mathcal{C} , alors $\mathcal{M}_c \supset m(\mathcal{C})$.

Finalement, $\mathcal{M}_c = m(\mathcal{C})$ d'où le résultat.

— Montrons que $\forall A \in m(\mathcal{C}), \forall B \in m(\mathcal{C})$, $A \cap B \in m(\mathcal{C})$. Soit $A \in m(\mathcal{C})$, on pose :

$$\mathcal{M}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in m(\mathcal{C}), A \cap B \in m(\mathcal{C})\}$$

\mathcal{M}_A est une classe monotone, qui contient \mathcal{C} , par le point précédent.

Donc : $\mathcal{M}_A \supset m(\mathcal{C})$ d'où $\mathcal{M}_A = m(\mathcal{C})$, d'où le résultat. □

8.2.1 Unicité de la mesure de Lebesgue

Proposition 41 (Voir TD pour la démonstration).

Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que :

- $\mu([0, 1]) = 1$
- μ invariante par translation.

Alors pour tout intervalle I de \mathbb{R} , $\mu(I) = \text{longueur}(I)$

Théorème 30.

La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est unique.

Démonstration.

Si λ, μ sont deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, vérifiant les hypothèses précédentes, alors la propriété précédente donne : Elles coïncident sur $\{I \subset \mathbb{R}, I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$ qui contient \mathbb{R} et est stable par intersection finie.

Si on pose $E_n \stackrel{\text{def}}{=} [-n, n]$, $\lambda(E_n) = \mu(E_n) = 2n < +\infty$ Or $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$ et la suite E_n est croissante. Par le théorème d'unicité de la mesure, $\mu = \lambda$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. \square

8.3 Tribu complétée, mesure complétée

8.3.1 Généralités

(E, \mathcal{A}, μ) espace mesuré.

Définition 37 (μ -négligeable.).

On dit que $N \subset E$ est μ -négligeable si il existe $A \in \mathcal{A}$ telle que :

- $N \subset A$
- $\mu(A) = 0$

On note \mathcal{N}_μ l'ensemble des parties μ -négligeables. Si $\mathcal{N}_\mu \in \mathcal{A}$ on dit que (E, \mathcal{A}, μ) est complet.

Définition 38 (Tribu complétée).

On appelle tribu complétée de \mathcal{A} par μ la tribu :

$$\bar{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \left(\left\{ A \cup N, A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu \right\} \right)$$

on peut montrer que ceci est une tribu.

Lemme 7.

$$\bar{\mathcal{A}} = \{ A \subset E, \exists B, B' \in \mathcal{A}, B \subset A \subset B' \text{ et } \mu(B' \setminus B) = 0 \}$$

Démonstration.

Si $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}_\mu$, $\exists B' \in \mathcal{A}$ telle que $N \subset B'$ et $\mu(B') = 0$.

$A \subset A \cup B' \in \mathcal{A}$ et $\mu((A \cup B') \setminus A) \leq \mu(B') = 0$, alors $A \cup N \in \mathcal{B}$. Soit $A \in \mathcal{B}$, soient B, B' définies comme dans l'énoncé.

$A = B \cup (A \setminus B)$ or $B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \subset B' \setminus B \in \mathcal{A}$, et $A \in \bar{\mathcal{A}}$. \square

Définition 39 (mesure complétée de μ).

On appelle mesure complétée de μ la mesure $\bar{\mu}$ sur $(E, \bar{\mathcal{A}})$ définie par :

$$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} \mu(A) & \text{si } A \in \mathcal{A} \\ \mu(B) & \text{si } B \subset A \subset B' \text{ avec } B, B' \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(B' \setminus B) = 0 \end{cases}.$$

NB : $\bar{\mu}(A)$ ne dépend pas du choix de B, B' , si B_1, B'_1 et B_2, B'_2 contiennent alors :

$$\mu(B_1) \leq \mu(B'_2)$$

$$\mu(B_2) \leq \mu(B'_1)$$

or $\mu(B_1) = \mu(B'_1)$ et $\mu(B_2) = \mu(B'_2)$

Proposition 42.

$\bar{\mu}$ est une mesure qui prolonge μ . $(E, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ est complet.

Démonstration.

$\bar{\mu}$ est une mesure :

— $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

— Si $A_n \in \bar{\mathcal{A}}$ 2 à 2 disjoints, soient $B_n, B'_n \in \mathcal{A}$ telle que :

$$B_n \subset A_n \subset B'_n$$

$$\mu(B'_n \setminus B_n) = 0$$

alors $\underbrace{\bigsqcup_n B_n}_{\in \mathcal{A}} \subset \bigsqcup_n A_n \subset \bigsqcup_n B'_n \in \mathcal{A}$ Or

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n B'_n \setminus \bigcup_n B_n\right) &\leq \mu\left(\bigcup_n B'_n \setminus B_n\right) \\ &\leq \sum_n \mu(B'_n \setminus B_n) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\bar{\mu}\left(\bigsqcup_n A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_n B_n\right) \\ &= \sum_n \mu(B_n) \\ &= \sum_n \bar{\mu}(A_n)\end{aligned}$$

$\bar{\mu}$ est complète, i.e $\mathcal{M}_{\bar{\mu}} \subset \bar{\mathcal{A}}$.

Si $N \in \mathcal{N}_{\bar{\mu}}$ i.e $N \subset A \in \bar{\mathcal{A}}$, avec $\bar{\mu}(A) = 0$.

Soient $B, B' \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A \subset B'$ et $\mu(B' \setminus B) = 0$. donc

$$\mu(B') = \mu(B)$$

$$\emptyset \subset N \subset B', \mu(B' \setminus \emptyset) = \mu(B') = 0$$

□

8.3.2 Complétion de $BBB(\mathbb{R}^d)$

Définition 40.

On appelle tribu de Lebesgue la tribu $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ complétée par la mesure λ . On la note $\alpha(\mathbb{R})$. On appelle encore mesure de Lebesgue la mesure complétée $\bar{\lambda}$. On la note aussi souvent λ

Proposition 43.

- La tribu \mathcal{M}_{λ^*} des parties λ^* mesurable coïncide avec $\alpha(\mathbb{R})$.
- $\lambda^* = \bar{\lambda}$ sur $\mathcal{M}_{\lambda^*} = \alpha(\mathbb{R})$.

Démonstration en exercice.

Théorème 31.

- $\text{Card } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \text{Card } (\mathbb{R})$
- $\text{Card } \alpha(\mathbb{R}) = \text{Card } \mathbb{P}(\mathbb{R})$ et $\alpha(\mathbb{R}) \neq \mathbb{P}(\mathbb{R})$ (axiome du choix)

Démonstration.

- Admise (difficile)
- soit C l'ensemble de Cantor. $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(C) = 0$ (exercice), donc comme $\text{Card } C = \text{Card } \mathbb{R}$, $\text{Card } \mathbb{P}(C) = \text{card } \mathbb{P}(\mathbb{R})$.
 $\mathbb{P}(C) \subset \mathcal{N}_\lambda \subset \alpha(\mathbb{R}) \mathbb{P}(\mathbb{R})$ donc :

$$\text{Card } \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \text{Card } \mathbb{P}(C) \leq \text{Card } \alpha(\mathbb{R}) \leq \text{Card } \text{Card } \mathbb{P}(\mathbb{R})$$

$$\text{Card } \alpha(\mathbb{R}) = \text{Card } \mathbb{P}(\mathbb{R})$$

et $\alpha(\mathbb{R}) \neq \mathbb{P}(\mathbb{R})$

□

Chapitre 9

Mesures produits

9.1 Tribu produit

9.1.1 Définitions

Définition 41.

Soient $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de \mathcal{A} et \mathcal{B} la tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur $E \times F$ définie par :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Proposition 44.

On définit les projections :

$$\pi_E : \begin{array}{ccc} E \times F & \mapsto & E \\ (x, y) & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\pi_F : \begin{array}{ccc} E \times F & \mapsto & F \\ (x, y) & \rightarrow & y \end{array}$$

— π_E, π_F sont respectivement $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{A})$ -mesurable et $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B})$ -mesurable.

Démonstration.

Soit $A \in \mathcal{A}$, on a : $\pi_E^{-1}(A) = A \times F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et π_E est $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{A})$ -mesurable. idem pour le reste. \square

On généralise au cas des k espaces mesurables, $(E_1, \mathcal{A}_1), \dots, (E_k, \mathcal{A}_k)$ en posant :

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_k, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \in \mathcal{A}_i\}).$$

Proposition 45.

$(E_1, \mathcal{A}_1), (E_2, \mathcal{A}_2), (E_3, \mathcal{A}_3)$ trois espaces mesurables. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3) &= (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 \\ &= \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \end{aligned}$$

Démonstration.

$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \sigma(\{C \times A_3, C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, A_3 \in \mathcal{A}_3\})$, donc

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 \supset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$$

Montrons que $\forall A_3 \in \mathcal{A}_3, \forall C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, C \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$.

$$\tau_{A_3} \stackrel{\text{def}}{=} \{C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, C \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3\}$$

τ_{A_3} contient $\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ et est une tribu :

- $\emptyset \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$.
- Si $C \in \tau_{A_3}$, $C^c \times A_3 = \underbrace{E_1 \times E_2 \times A_3}_{\in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3} \setminus \underbrace{C \times A_3}_{\in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3}$ et $C^c \in \tau_{A_3}$.
- Si $C_n \in \tau_{A_n}$, alors $C_n \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$.

$$\left(\bigcup_n C_n \right) \times A_3 = \left(\bigcup_n C_n \times A_3 \right) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$$

Alors $\tau_{A_3} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et on a l'inclusion $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \dots$ \square

Cas de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: a-t-on $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Proposition 46.

On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\pi_1 : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{matrix}, \pi_2 : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y \end{matrix}$ sont continues, d'où le résultat. \square

9.1.2 Sections

Définition 42.

Si $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on appelle section de C :

$$\forall x \in E : C_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in F, (x, y) \in C\}$$

$$\forall y \in F : C_y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E, (x, y) \in C\}.$$

Proposition 47.

Si $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, alors :

$$\forall x \in E, C_x \in \mathcal{B}$$

$$\forall y \in F, C_y \in \mathcal{A}.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$, montrons que $\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, C_x \in \mathcal{B}$. Soit $\mathcal{T}_x \stackrel{\text{def}}{=} \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, C_x \in \mathcal{B}\}$.

$$\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{T}_x$$

Si $C = A \times B$, $C_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A \\ B & \text{si } x \in A \end{cases}$ donc $C_x \in \mathcal{B}$. \mathcal{T}_x est une tribu :

$$— \emptyset_x = \emptyset \in \mathcal{B}$$

$$— \text{Si } C \in \mathcal{T}_x, (C^c)_x = (C_x)^c \in \mathcal{B}$$

$$— \text{Si } \forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{T}_x :$$

$$\left(\bigcup_n C_n \right)_x = \bigcup_n (C_n)_x \in \mathcal{B}$$

donc $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{T}_x$ et finalement $\mathcal{T}_x = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Raisonnement similaire pour C_y .

□

Proposition 48.

Si $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \mapsto (G, \mathcal{D})$ est mesurable, où (G, \mathcal{D}) est un espace mesurable, alors :

$$— \forall x \in E, f_x : y \mapsto f(x, y) \text{ est } (\mathcal{B}, \mathcal{D}) \text{ mesurable.}$$

$$— \forall y \in F, f^y : x \mapsto f(x, y) \text{ est } (\mathcal{A}, \mathcal{D}) \text{ mesurable.}$$

Démonstration. Soit $D \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} f_x^{-1}(D) &= \{y \in F, f(x, y) \in D\} \\ &= \{y \in F, (x, y) \in f^{-1}(D)\} \\ &= \underbrace{f^{-1}(D)}_{\in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

donc f_x est mesurable, on obtient le même raisonnement pour f^y . \square

9.2 Mesure produit

Définition 43.

Une mesure μ sur un espace mesurable (E, \mathcal{A}) est dite σ -finie s'il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante d'éléments de \mathcal{A} telle que :

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < \infty$

Exemple 16.

La mesure de Lebesgue de \mathbb{R} est σ -finie. :

$E_n = [-n, n]$, $\lambda(E_n) = 2n < \infty$ La mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas σ -finie.

Théorème 32.

Soit μ mesure σ -finie sur (E, \mathcal{A}) , ν mesure σ -finie sur (F, \mathcal{B}) . Il existe une unique mesure $\mu \otimes \nu$ sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ vérifiant :

- $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}, (\mu \otimes \nu)(A \times B) = (\mu)(A)(\nu)(B)$

La mesure de $\mu \otimes \nu$ est σ -finie et vérifie, $\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu(C) &= \int_E \nu(C_x) d\mu_x \\ &= \int_F \mu(C^y) d\nu(y) \end{aligned}$$

Démonstration. — Unicité : Si m, m' sont deux mesures qui coïncident : alors m, m' coïncident sur $\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ qui contient $E \times F$

et qui est stable par intersections finies.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Soit $(E_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ croissante, telle que : $\bigcup_n E_n = E$, $\mu(E) < \infty$.

Soit $(F_n)_n \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ croissante, telle que : $\bigcup_n F_n = F$, $\nu(F) < \infty$.

Alors $E \times F = \bigcup_n E_n \times F_n$, $E_n \times F_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, et $m(E_n \times F_n) = m'(E_n \times F_n) = \mu(E_n) \nu(F_n) < \infty$. Par le théorème d'unicité des mesures, on a donc $m = m'$.

— Posons, pour $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$\mu \otimes \nu(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E \nu(C_x) d\mu(x)$$

— $\mu \otimes \nu$ est bien définie : $\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $x \mapsto \nu(C_x)$ Soit $\mathcal{M} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, x \mapsto \nu(C_x) \text{ est mesurable}\}$

$$\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{M}$$

Si $C = A \times B$, $\nu(C_x) = \mathbb{1}_A(x) \nu(B)$ donc $x \mapsto \nu(C_x)$ est mesurable. On pourra montrer en exercice que si ν est finie, avec \mathcal{M} est une classe monotone. Donc

$$m(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) \subset \mathcal{M}$$

Donc par le lemme des classes monotones :

$$\sigma(\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Donc $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

— Si ν n'est pas finie : On définit la mesure ν_n par :

$$\nu_n(B) = \nu(B \cap E_n)$$

on a

$$\nu_n(B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu(B)$$

$(B \cap E_n)$ est croissante, donc $\nu(B \cap E_n) \mapsto \nu(\bigcup_n (B \cap E_n)) = \nu(B)$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \nu_n(C_x)$ mesurable. donc $x \mapsto \nu(C_x)$ mesurable, comme limite de fonctions mesurables.

— $\nu \otimes \mu$ est une mesure sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$:

$$\mu \otimes \nu(\emptyset) = \int_E \nu(\emptyset_x) d\mu(x) = 0$$

— Si $C_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 2 à 2 disjoints :

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) &= \int_E \underbrace{\nu \left(\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right)_x \right)}_{= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n)_x} d\mu(x) \\ &= \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu((C_n)_x) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et par Beppo Levi : } &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E \nu((C_n)_x) d\mu(x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu \otimes \nu(C_n) \end{aligned}$$

— : Caractérisation de $\mu \otimes \nu$: Soient $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, soit $C = A \times B$:

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu(C) &= \int_E \underbrace{\nu(C_x)}_{\mathbb{1}_A(x) \nu(B)} d\mu(x) \\ &= \nu(B) \int_E \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) \\ &= \mu(A) \nu(B) \end{aligned}$$

On montre que, de même :

$$\int_F \mu(C^y) d\nu(y) = \mu(A) \nu(B)$$

Par l'unicité, on a donc : $\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$\nu \otimes \mu - \int_F \mu(C^y) d\nu(y)$$

□

9.2.1 Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

Proposition 49.

La mesure de Lebesgue : λ^d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ coïncide avec $\underbrace{\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda}_{d \text{ fois}}$

Démonstration. Idée de la démonstration : On pose $\lambda^d \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$.

On montre par récurrence sur d que elles vérifie les propriétés nécessaires. □

9.3 Théorème de Fubini

Objectif : Comparer $\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu$ et $\int_E \left(\int_F f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$ et $\int_F \left(\int_E f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$ (et il faudra justifier les écritures)

Théorème 33 (Fubini-Tonelli).

Soient μ, ν mesures σ -finies respectivement sur (E, \mathcal{A}) , et (F, \mathcal{B}) et si $f : E \times F \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$ $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ -mesurable alors :

— $x \mapsto \int_F f(x, y) \, d\nu(y)$ est mesurable.

— $y \mapsto \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$ est mesurable.

$$\begin{aligned} \int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu &= \int_E \left(\int_F f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_F \left(\int_E f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) \end{aligned}$$

Remarque 35.

L'hypothèse σ -finie est cruciale, en effet si $E = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ $F = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), m)$

Si $C = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{1}_C$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mesurable.

C est fermé, donc $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_C(x, y)}_{\mathbb{1}_{\{x\}}(y)} \, dm(y) \right)}_{m(\{x\})=1} d\lambda(x) &= \infty \\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_C(x, y)}_{\mathbb{1}_{\{y\}}(x)} d\lambda(x) \right) dm(y) &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 17.

(E, \mathcal{A}, μ) espace mesuré σ -fini. Si $f : E \mapsto \mathbb{R}^+$ mesurable. Soit $\varphi_f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu(\{f > t\})$ On a :

$$\int_E f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_f(t) \, dt$$

(φ_f décroissante donc mesurable.) Si on peut utiliser Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f > t\}) dt &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_E \mathbb{1}_{\{f > t\}}(x) d\mu(x) \right) dt \\ &= \int_E \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{\mathbb{1}_{\{f > t\}}}_{\mathbb{1}_{[0, f(x)]}(t)} dt \right)}_{=\lambda([0, f(x)] = f(x))} d\mu(x) \end{aligned}$$

Justification : μ, λ sont σ -finies. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times E & \mapsto & \mathbb{R} \\ (t, x) & \rightarrow & \mathbb{1}_{\{f > t\}}(x) = \mathbb{1}_C(t, x) \end{array}$ où

$$C = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E, f(x) > t\} = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E, f(\pi_2(t, x)) > \pi_1(t, x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A}$$

or $f \circ \pi_2$ et π_1 sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A}$ mesurables. NB :

$$C = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{[0, q]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)} \times \underbrace{\{f > q\}}_{\in \mathcal{A}}$$

Démonstration de Fubini-Tonelli.

On traite 1) et 2) ensemble : Si $F = \mathbb{1}_C$ avec $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on sait que :

- $\forall x \in E, f_x : y \rightarrow f(x, y)$ mesurable
- $\forall y \in F, f_y : x \rightarrow f(x, y)$ mesurable.

Soit $x \in E$, on a :

$$\int_F \underbrace{f(x, y)}_{\mathbb{1}_C(x, y) d\mu(y) = \mathbb{1}_{C_x}(y)} d\nu(y) = \int_F \mathbb{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x)$$

On a vu que $x \rightarrow \nu(C_x)$ est mesurable. Si $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, idem pour l'autre fonction...

$$\int_{E \times F} \mathbb{1}_C(x, y) d\mu \otimes \nu = \mu \otimes \nu(C) = \int_E \underbrace{\nu(C_x)}_{=\int_F \mathbb{1}_C(x, y) d\nu(y)} d\mu(x)$$

de même pour l'autre égalité

Si f étagée positive : ok par linéarité de l'intégrale.

Si $f : E \times F \mapsto \mathbb{R}_+$ est mesurable.

Soit f_n suite croissante de fonctions étagées de $E \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, telles que

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f.$$

$\forall x \in E, (f_n)_x : y \mapsto f_n(x, y)$ est mesurable, positive, croissante.

$\forall y \in F, (f_n)_x(y) = f_n(x, y) \mapsto f(x, y)$, donc par Beppo-Levi, G est mesurable comme limite de fonctions mesurable : $\forall x \in E$, :

$$\underbrace{\int_F f_n(x, y) \, d\nu(y)}_{\stackrel{\text{def}}{=} G_n(x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_F f(x, y) \, d\nu(y)}_{\stackrel{\text{def}}{=} G(x)}$$

Par Beppo-Levi, comme (G_n) est croissante :

$$\int_E G_n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E G \, d\mu$$

$$\begin{aligned} \int_E \int_F f_n(x, y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E \int_F f(x, y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) \\ \int_{E \times F} f_n \, d\mu \otimes d\nu &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{E \times F} f \, d\mu \otimes d\nu \end{aligned}$$

Même raisonnement pour l'autre sens. □

Théorème 34 (Fubini).

Si μ, λ, σ -finies et $f : E \times F \mapsto \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} telle que $f \in \mathcal{L}_{\mu \otimes \nu}^1(E \times F)$ alors :

- $y \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}_\nu^1(F)$ μ -pp x
 $x \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}_\mu^1(E)$ ν -pp y
- $x \mapsto \int_F f(x, y) \, d\nu(y) \in \mathcal{L}_\mu^1(E)$
 $y \mapsto \int_E f(x, y) \, d\mu(x) \in \mathcal{L}_\nu^1(F)$ les fonctions sont définies respectivement μ , et ν -pp
- $\int_{E \times F} f \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f(x, y) \, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \dots$

Démonstration.

- On veut montrer que μ -pp $x : \int_F |f(x, y)| \, d\mu(y) < \infty : |f(x, y)| = f^+(x, y) + f^-(x, y)$, on applique Fubini-Tenelli à f^+ et f^- et on a donc : $x \mapsto \int_F f^\pm(x, y) \, d\mu(y)$ mesurable et

$$\int_{E \times F} f^\pm \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f^\pm(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$$\begin{aligned}
 \int_E \int_F |f(x, y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x) &= \int_E \left(\int_F f^+(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
 &\quad + \int_E \left(\int_F f^-(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
 &= \int_{E \times F} |f(x, y)| \, d\mu \otimes \mu(x, y) < \infty
 \end{aligned}$$

Donc : $x \rightarrow \int_F |f(x, y)| \, d\nu(y)$ est intégrable. donc $\int_F |f(x, y)| \, d\nu(y) < \infty$ μ -pp x , idem pour l'autre fonctions.

- $\int_E \left| \int_F f(x, y) \, d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_E \left(\int_F |f(x, y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$
- On justifie les écritures et Fubini-Tonelli :

$$\int_{E \times F} f^\pm \, d\mu \otimes \nu = \int_E \left(\int_F f^\pm \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

On soustrait et on obtient le résultat. □

Chapitre 10

Changement de variables

10.1 Mesure image

Soient $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.

Définition 44.

Soit $\varphi : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ mesurable et μ mesure sur (E, \mathcal{A}) . On appelle mesure image de μ pour φ la mesure μ_φ sur (F, \mathcal{B}) , définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)).$$

μ_φ est une mesure sur (F, \mathcal{B}) . (voir TD)

Proposition 50 (Lemme de transfert, démonstration en TD).

Soit μ une mesure sur (E, \mathcal{A}) . $\varphi : E \rightarrow F$ mesurable.
Si $f : (F, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , mesurable, alors :

$$f \in \mathcal{L}_{\mu_\varphi}^1 \Leftrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{L}_\mu^1(E)$$

Et dans ce cas : $\int_F f d\mu_\varphi = \int_E f \circ \varphi d\mu$

Application : Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+a) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Démonstration. $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}^d & \mapsto & \mathbb{R}^d \\ x & \rightarrow & x + a \end{matrix}$, λ_φ : mesure image de λ par φ .
 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(B) &= \lambda(\varphi^{-1}(B)) \\ &= \lambda(B - a) \\ &= \lambda(B) \end{aligned}$$

Alors si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \circ \varphi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f \underbrace{d\lambda_\varphi}_{d\lambda}$$

D'où le résultat. □

10.2 Changement de variables

But : Calculer $\int_V f(y) \, dy$, où $\begin{cases} V \text{ ouvert de } \mathbb{R}^d \\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \end{cases}$ En transportant l'intégrale sur U ouvert de \mathbb{R}^d difféomorphisme à V .

$$\int_{V=\varphi(U)} f \, d\lambda = \int_U f \circ \varphi \, d\nu$$

Quelle mesure ν a pour image λ par φ

10.2.1 Rappels

Définition 45.

On dit que φ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U dans V si :

- φ est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- φ est bijective de U dans V
- φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur V

Théorème 35.

Soit φ une fonction de U dans \mathbb{R}^d . φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U dans $\varphi(U)$ si et seulement si :

- φ est de classe \mathcal{C}^1 sur U
- φ est injective
- $\forall x \in U$, $\mathcal{J}_\varphi(x)$ inversible (i.e $\forall x \in U$, $\mathcal{J}_\varphi(x) \neq 0$)

On rappelle que $\mathcal{J}_\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_d} \end{pmatrix}$

10.2.2 Changement de variables

Théorème 36.

Soit φ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme entre deux ouverts U et V de \mathbb{R}^d .

— Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, alors :

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f \circ \varphi(x) |\det \mathcal{J}_\varphi(x)| \, dx$$

— Si $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , alors :

f est intégrable sur $V \Leftrightarrow (f \circ \varphi |\det \mathcal{J}_\varphi(\cdot)|)$ intégrable sur U

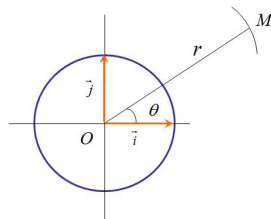
Et dans ce cas :

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f \circ \varphi(x) |\det \mathcal{J}_\varphi(x)| \, dx$$

Remarque 36. 2) se réécrit : λ est la mesure image par φ de la mesure ν définie par :

$$\nu(B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_B |\det \mathcal{J}_\varphi(x)| \, dx$$

Application : Changement de variable : Coordonnées polaires.



On note $D = \mathbb{R}_- \times \{0\}$

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[}_{=U} \mapsto \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus D}_{=V} \\ (r, \theta) \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U dans V .

— φ est \mathcal{C}^1

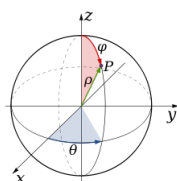
— φ est injective : Si $\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \cos \theta' \\ r' \sin \theta' \end{pmatrix}$ alors $r^2 = r'^2$ d'où $r = r'$

car les rayons sont positifs. de plus $\begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases}$, or $\theta \in]-\pi, \pi[$.

On a $\mathcal{J}_\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ $\det \mathcal{J}_\varphi(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0 \forall (r, \theta) \in U$ φ \mathcal{C}^1 difféomorphisme sur U dans $\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus D$.
Alors par le théorème de changement de variable, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda &\text{ or } \lambda(D) = 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^* \setminus D} f(\varphi(r, \theta)) r \, d\lambda(r, \theta) \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} f(\varphi(r, \theta)) r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Application 2 : Coordonnées sphériques.



$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{+r} \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} &\mapsto \mathbb{R}^3 \setminus P \\ \text{phi : } (r, \theta, \varphi) &\rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Où $P = \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $\lambda(P) = 0$ On montre que ϕ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U dans V et $\forall (r, \theta, \varphi) \in U$

$$\det \mathcal{J}_\varphi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi$$

donc $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\phi(r, \theta, \varphi)) r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$