TD ANAR - Feuille 4
L3, 2eme Semestre 2012-2013 Université Rennes I

Généralités.

Exercice 1. Soit A un anneau intègre ne contenant qu'un nombre fini d'idéaux. Montrez que A est un corps. Combien un corps a-t-il d'idéaux ? Donnez un contre-exemple si l'on omet l'hypothèse d'intégrité.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif, montrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
a) A possède un unique idéal maximal.
b) Les éléments non inversibles de A forment un idéal.
Un tel anneau est appelé *anneau local.*

Séries formelles.

Exercice 3. Soit A un anneau (non nécessairement commutatif). On appelle série formelle à coefficients dans A une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, que l'on note

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n.$$

On munit l'ensemble $A[[X]]$ des séries formelles des deux opérations :

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n,$$
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i+j=n} a_i b_j) X^n.$$

Montrez que $A[[X]]$ muni de ces deux opérations, est un anneau.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour $a = \sum_n a_n X^n \in A[[X]]$, on note $\nu(a) = \inf\{k : a_k \neq 0\}$, par convention $\nu(0) = +\infty$. Montrez que :
a) $\nu(a+b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$, avec égalité si $\nu(a) \neq \nu(b)$.
b) $\nu(ab) \geq \nu(a) + \nu(b))$, avec égalité si A est intègre.
c) $A[[X]]$ est intègre si et seulement si A est intègre.

Exercice 5. Montrez que $d(a,b) = e^{-\nu(a-b)}$ est une distance sur $A[[X]]$, puis montrez que l'espace métrique $(A[[X]], d)$ est complet. Est-il toujours localement compact ? Exemples.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif unitaire.
a) Donnez l'inverse de $1-X$, $1+X$ et $1+X^2$ dans $A[[X]]$.
b) Si $\nu(Q) \geq 1$, donnez l'inverse de $1+Q$ dans $A[[X]]$ (*On pourra se donner une série convergente pour la topologie définie précédemment, en précisant le sens de "série convergente"...*).
c) Montrez qu'une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est inversible si et seulement si a_0 est inversible.
d) On suppose que la caractéristique de A est zéro. Quel est l'inverse de $\sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!}$?

Exercice 7. Montrez que si k est un corps, $k[[X]]$ est un anneau local.

Exercice 8. Pour A un anneau, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *une série de Laurent* si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall i \leq k$, $a_i = 0$. On note cette série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$. L'ensemble des séries de Laurent est noté $A((X))$.
a) Vérifiez que $A((X))$, muni des opérations définies commes pour les séries formelles, est un anneau, contenant les séries formelles $A[[X]]$.
b) Montrez que si k est un corps, $k((X))$ est un corps.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif unitaire, et $\mathcal{M}$ un idéal maximal tel que $1+\mathcal{M} \subset U_A$. Montrez que A est un anneau local.

Exercice 10. Soit k un corps, $k(X)_0$ l'ensemble des fractions rationnelles dont un représentant P/Q satisfait $Q(0) \neq 0$.
a) Montrez que $k(X)_0$ est un sous-anneau de $k(X)$.
b) Montrez qu'il existe un unique morphisme d'anneaux de $k(X)_0$ dans $k[[X]]$ qui soit l'identité sur $k[X]$, et qu'il est injectif.
c) Montrez qu'il existe un unique morphisme d'anneaux de $k(X)$ dans $k((X))$ qui soit l'identité sur $k[X]$, et qu'il est injectif.

Exercice 11. Déterminez les coefficients de la série formelle $f = \frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)}$ a) Par produit des séries formelles de $\frac{1}{1-X^2}$ et $\frac{1}{1-X^3}$, b) Par décomposition en élément simples.
En déduire le nombre p_n de solutions entières à l'équation en entiers naturels $2a+3b=n$.