Corrigé : Contrôle continu 3

Exercice 1

a) Il faut supposer que f est surjectif. Il est clair que l'idéal J engendré par $\ker f$ et les x_i est contenu dans $f^{-1}(J)$. Réciproquement, soit x un élément de $f^{-1}(I)$. Donc il existe $b_1, \ldots, b_k \in B$ tels que $f(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i y_i$. Pour $1 \leq i \leq k$, on fixe un antécédent a_i de b_i. On a alors $f(x - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i) = 0$, donc $x - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in \ker f$. Cela montre que $x \in J$.

b) On considère le morphisme $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ construit comme la composée $\pi \circ \mathrm{ev}_1$ de l'évaluation en 1 et de la réduction modulo 7. Son noyau est constitué de l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(1) \equiv 0 \pmod 7$. Un tel polynôme s'écrit $P = P(1) + a_1(X-1) + \cdots + a_n(X-1)^n$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$. On a donc $P = 7a + (X-1)Q$, avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $a \in \mathbb{Z}$, et par conséquent $P \in (7, X-1)$. Réciproquement, tout élément de cet idéal est dans le noyau du morphisme considéré. Par ailleurs, ce morphisme est clairement surjectif, on a donc l'isomorphisme annoncé.

Exercice 2

1) Il est de notoriété publique qu'une différence et un produit de fonction continues sont continus, et que les fonctions constantes sont continues. En particulier, la fonction nulle et la fonction constante égale à 1 sont dans $C^0(X)$, qui est stable par différence et par produit : c'est un sous-anneau de l'anneau des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

2) L'application de restriction à Y un morphisme car $R_Y(0) = 0$, $R_Y(1) = 1$, $R_Y(f+g) = f+g$ et $R_Y(fg) = fg$ pour tous $f, g \in C^0(X)$. Son noyau est l'ensemble des fonctions nulles sur Y, c'est-à-dire $\mathcal{I}(Y)$, qui est donc un idéal de $C^0(X)$.

3) Comme Y est fermé dans X, il est compact, et le morphisme de restriction à Y est surjectif d'après le lemme de Tietze-Urysohn. On a déjà vu que son noyau était $\mathcal{I}(Y)$. Ainsi, $C^0(X)/\mathcal{I}(Y) \simeq C^0(Y)$.

4) Supposons que $X = \{a, b\}$. On considère les fonctions f_a et f_b, indicatrices respectives de $\{a\}$ et $\{b\}$. Ces fonctions sont continues sur X (muni de la topologie discrète), non nulles, et leur produit est nul. L'anneau $C^0(X)$ n'est donc pas intègre.

5) Supposons que X soit réduit à un point a, alors l'évaluation en a est un morphisme $C^0(X) \to \mathbb{R}$, qui est clairement surjective et dont le noyau est réduit à la fonction nulle. Ainsi, $C^0(X)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, qui est intègre ; c'est même un corps. Réciproquement, si X est constitué d'au moins deux points, soient $a, b \in X$ distincts. Comme X est séparé, il existe des ouverts U_a et U_b et X contenant respectivement a et b, tels que $U_a \cap U_b = \emptyset$. Notons A le fermé $U_A^c \cup \{a\}$ et $B = U_b^c \cup \{b\}$. Les fonctions f_A valant 0 sur U_a^c et 1 en a, et f_B valant 0 sur U_b^c et 1 en b, se prolongent en des fonctions continues sur X par le lemme de Tietze-Urysohn. Ces deux fonctions sont non nulles, et leur produit est nul car $U_a^c \cup U_b^c = X$. Donc $C^0(X)$ n'est pas intègre, ce qui achève la démonstration.

6) Soit $Y \subset X$ un fermé. Alors $C^0(Y)$ est un anneau intègre si et seulement si Y est réduit à un point. Cette condition est vérifiée si et seulement si le quotient $C^0(X)/\mathcal{I}(Y)$ est intègre, c'est-à-dire $\mathcal{I}(Y)$ est premier. D'après 5), elle est aussi vérifiée si et seulement si $C^0(X)/\mathcal{I}(Y)$ est un corps, c'est-à-dire $\mathcal{I}(Y)$ est maximal.

7) L'ensemble $\mathcal{V}(I)$ est une intersection de fermés (image réciproque de 0 par une application continue) dans le compact X, c'est donc un fermé dans un compact, et

donc un compact. Soit $f \in I$, alors pour tout $x \in \mathcal{V}(I)$, $f(x) = 0$, donc $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$, d'où l'inclusion annoncée.
8) Soit $Y \subset X$ fermé. Soit $y \in Y$, alors pour tout $f \in \mathcal{I}(Y)$, $f(y) = 0$, donc $y \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y))$, et $Y \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y))$. Réciproquement, soit $x \in X$ tel que $x \notin Y$. Alors il existe un voisinage ouvert U de x dans X contenu dans l'ouvert Y^c. La fonction définie sur le fermé $U^c \cup \{x\}$ par $f(U^c) = 0$ et $f(x) = 1$ est continue, et se prolonge donc en une fonction $g \in C^0(X)$. On a alors $g \in \mathcal{I}(Y)$ et $g(x) \neq 0$: cela montre que $x \notin \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y))$.
9) a) Soit $x \in X$. Par hypothèse, il existe une fonction $f \in I$ ne s'annulant pas en x. Pour une telle fonction f, on a $x \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = U$, qui est ouvert car f est continue et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert. De plus, par définition, f ne s'annule pas sur U.
b) Par passage au complémentaire dans l'égalité $\cap_{f \in I} f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, on a :

$$\bigcup_{f \in I} f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = X.$$

De ce recouvrement ouvert du compact X, on peut extraire un recouvrement fini : il existe donc un sous-ensemble fini $F \subset I$ tel que :

$$\bigcup_{f \in F} f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = X.$$

Par passage au complémentaire, on a alors $\cap_{f \in F} f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.
10) Considérons la fonction $g = \sum_{f \in F} f^2$. Comme $F \subset I$ et que I est un idéal, on a $g \in I$. En outre, g est positive et s'annule en $x \in X$ si et seulement si on a pour tout $f \in F$, $f(x) = 0$. Par hypothèse, g ne s'annule donc jamais sur X. En particulier, la fonction $h = 1/g$ est bien définie, et $1 = hg \in I$, donc $I = C^0(X)$.
11) On a déjà vu qu'un idéal de la forme $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(\{x\})$ est maximal, puisque dans ce cas $C^0(X)/\mathfrak{m} \simeq C^0(\{x\})$ est un corps (cf. question 6). Réciproquement, si l'idéal $\mathfrak{m}$ est maximal, alors comme $\mathfrak{m} \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m}))$, on a $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$ ou $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m})) = C^0(X)$. Dans le deuxième cas, toutes les fonctions continues sur X sont nulles sur $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$, donc $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \emptyset$ (sinon, n'importe quelle constante non nulle fournirait une fonction ne s'annulant pas sur $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$). D'après la question précédente, $\mathfrak{m} = C^0(X)$, ce qui est absurde. C'est donc que $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m}))$. Puisque $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{m})))$ est maximal, alors d'après la question 6), $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$ est réduit à un point x, et $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(x)$.
12) Soit $I \subset C^0(X)$ l'ensemble des fonctions s'annulant sur un intervalles $[0, \varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Il est clair que I est absorbant pour la multiplication. En outre, la fonction nulle est dans I la différence de deux éléments de I s'annule sur tout intervalle où ces deux éléments s'annulent simultanément. En particulier, elle s'annule sur un intervalle non trivial contenant 0, donc I est un sous-groupe de $C^0([0, 1])$. Soit $a > 0$, alors la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $0 \leq x \leq a/2$ et $f(x) = x - a/2$ pour $x \geq a/2$ est clairement continue sur $[0, 1]$, nulle sur $[0, a/2]$ et prend la valeur $a/2$ en a. En particulier, $f \in I$ et ne s'annule pas en a, donc $a \notin \mathcal{V}(I)$. Par ailleurs, on voit par définition de I que $0 \in \mathcal{V}(I)$, ce qui montre que $\mathcal{V}(I) = \{0\}$. Ainsi, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(\{0\})$ est l'idéal des fonctions qui s'annulent en 0, qui contient strictement I (par exemple, $x \mapsto x$ est dans cet idéal, mais pas dans I).
13) Puisque $\mathcal{I}(Y)$ est un sous-groupe additif qui est stable par multiplication par les scalaires (qui s'identifient aux fonctions constantes), c'est bien un sous-espace vectoriel de $C^0(X)$. Supposons de plus $Y \subset X$ compact. Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une

suite d'éléments de $\mathcal{I}(Y)$ qui converge uniformément vers $f \in C^0(X)$. En particulier, f_n converge ponctuellement vers f. Soit $y \in Y$, on a $f(y) = \lim_{n \to +\infty} f_n(y) = 0$. Donc $f(y) = 0$. Ainsi, f s'annule sur Y, donc $f \in \mathcal{I}(Y)$ qui est par conséquent fermé.
14) Supposons I fermé pour la convergence uniforme. On se donne $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)))$, et on va montrer qu'il existe $h \in I$ telle que $\|g - h\|_\infty < \varepsilon$. Cela suffit à démontrer le résultat, puisque g est alors dans l'adhérence de I pour la topologie de la convergence uniforme, c'est-à-dire dans I. Soit $U = g^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$. Comme g s'annule sur $\mathcal{V}(I)$ et que g est continue, U est un voisinage ouvert de $\mathcal{V}(I)$. En outre, U^c est fermé dans X donc compact. Comme U^c est disjoint de $\mathcal{V}(I)$, on a $\cup_{f \in I}(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap U^c) = U^c$, donc par compacité, il existe une famille finie F d'éléments de I ne s'annulant pas sur U^c. On pose $f_0 = \sum_{f \in F} f^2$: c'est un élément de I ne s'annulant pas sur U^c. Par prolongement, il existe une fonction (notée f_1) dans $C^0(X)$ prolongeant à X l'inverse de la restriction de f_0 à U^c. On a alors $f_2 = f_0 f_1 \in I$, et f_2 vaut 1 sur U^c. Il reste à montrer qu'on peut choisir une telle fonction de valeur absolue ≤ 1. Soit $K = \{x \in X \mid f_1(x) \geq 1\}$. Alors K est compact, on peut donc prolonger à X l'inverse de la restriction de f_2 à K en une fonction f_3, qui prend donc des valeurs ≤ 1 sur K. On pose alors $f = f_2 \min(f_3, 1)$, qui est encore continue, dans I, et est ≤ 1.
Pour conclure, remarquons alors que $fg \in I$, que fg et g coïncident sur U^c et sur $\mathcal{V}(I)$, et donc que

$$\|fg - g\|_\infty = \sup_{x \in U \setminus \mathcal{V}(I)} |fg(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Cela achève la démonstration.