3. Fonctions mesurables

3.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\liminf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ sont mesurables.
2. Montrer que si f_n converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.

3.2. Soient $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble

$$\{x\in E,\ (f_n(x))_n \text{ converge}\}$$

est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

3.3. Soient $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et f,g des applications mesurables de $(E,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On souhaite redémontrer que $f+g$ est mesurable.

1. Montrer que
$$\{f<g\}:=\{x\in E,\ f(x)<g(x)\}\in\mathcal{A}.$$
2. En déduire que $f+g$ est une fonction mesurable.

3.4. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est monotone, alors f est mesurable.
2. Montrer que si f est continue par morceaux, alors f est mesurable.

3.5. *Exemples de fonctions mesurables.* Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable.

1. Soit $A\subset E$. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A\in\mathcal{A}$.
2. Soit $\mathcal{E}$ une partition dénombrable de E qui engendre $\mathcal{A}$. Montrer qu'une fonction $f:E\to\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si f est constante sur chaque partie $X\in\mathcal{E}$.
   Indication : décrire la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.
3. L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ?

3.6. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de $(E,\mathcal{A})$ dans $(F,\mathcal{B})$.

1. Soit $(E_n)_n$ une partition dénombrable de E telle que $E_n\in\mathcal{A}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la fonction f définie par $f(x)=f_n(x)$ si $x\in E_n$ est mesurable.
2. On considère une fonction $N:(E,\mathcal{A})\to(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mesurable. Montrer que la fonction définie sur E par
$$g: x\mapsto f_{N(x)}(x)$$
est mesurable.

3.7. *Théorème de récurrence de Poincaré* Soient $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré de masse 1, et $f:E\to E$ une application mesurable qui telle que pour tout $A\in\mathcal{A},\ \mu(f^{-1}(A))=\mu(A)$.

Si $A\in\mathcal{A}$ et $x\in A$, on dit que x est A-*récurrent* s'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que la n-ième image itérée de x par f soit dans A : $f^n(x)\in A$. Notons $\hat{A}$ l'ensemble des points A-récurrents. Montrer que, pour toute partie $A\in\mathcal{A}$, $\hat{A}$ est de mesure pleine dans A, c'est-à-dire que $\mu(\hat{A})=\mu(A)$.

Indication : On pourra considérer les ensembles $B_n=\{x\in A,\ \forall k\geqslant n,\ f^k(x)\notin A\}$ et chercher une condition sur p,q entiers pour que $f^{-p}(B_n)\cap f^{-q}(B_n)=\emptyset$ où on note $f^{-k}(B_n)=\{x\in E,\ f^k(x)\in B_n\}$ pour tout entier k.

3.8. (*pour plus tard...*) Utiliser l'ensemble de Cantor pour construire un ensemble non borélien dans la tribu de Lebesgue.
