Chapitre 5: flot d'une équation différentielle ordinaire

Philippe Chartier

23 octobre 2014

1 Définition du flot et propriétés élémentaires

Dans ce chapitre, D désigne un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$. On considère le problème de Cauchy sous forme autonome :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & f(y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. , \tag{1}$$

où f est une fonction définie sur D et (t_0, y_0) un point de $\mathbb{R} \times D$. On suppose en outre que f est continue et localement Lipschitzienne, de sorte que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times D$, le système (1) admet une solution **maximale unique** sur un intervalle ouvert $J(t_0, y_0) \subset \mathbb{R}$. Alors, l'application

$$(t, t_0, y_0) \quad \mapsto \quad y(t; t_0, y_0)$$

qui associe la valeur en t de la solution de (1) est bien définie sur l'ouvert

$$\Omega = \{(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times D; t \in J(t_0, y_0)\}.$$

On note en outre

$$\Omega_0 = \{(t, y_0) \in \mathbb{R} \times D; t \in J(0, y_0)\}$$

Définition 1.1 *On appelle flot de l'équation différentielle (1) l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \Omega_0 & \to & \mathbb{R}^d \\ (t, y_0) & \mapsto & \varphi_t(y_0) = y(t; 0, y_0) \end{array}$$

Il est clair que $\varphi_t(y_0)$ satisfait l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\varphi_t(y_0) & = & f(\varphi_t(y_0)) \\ \varphi_0(y_0) & = & y_0 \end{array} \right. , \tag{2}$$

et qu'on a en outre, pour tout $(t, t_0, y_0) \in \Omega$, $(t - t_0, y_0) \in \Omega_0$ et $y(t; t_0, y_0) = \varphi_{t-t_0}(y_0)$, ce qui justifie la définition de φ_t comme une application indépendante de t_0.

Remarque 1.2 *On peut aussi définir le flot d'un système non-autonome, mais on rappelle que tout système non-autonome peut se réécrire comme un système autonome par l'adjonction de la variable t. L'hypothèse d'autonomie ne constitue donc pas une restriction.*

Proposition 1.3 *L'application $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$ de Ω_0 dans $\mathbb{R}^d$ est continue. En particulier, pour tout $(t, y) \in \Omega_0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y tel que l'application $\varphi_t(\cdot)$ soit définie et continue sur $\mathcal{V}$.*

Proposition 1.4 *On suppose que $D = \mathbb{R}^d$ et que f est C^1 et* **globalement** *Lipschitzienne. Alors le flot est défini sur tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire que $\Omega_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$), et l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \textit{Diff}(\mathbb{R}^d) \\ t & \mapsto & \varphi_t(\cdot) \end{array}$$

est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\textit{Diff}(\mathbb{R}^d), \circ)$, où $\textit{Diff}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des difféomorphismes de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même.

Preuve. Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$, en vertu de l'unicité de la solution de (1) (Theorème de Cauchy-Lipschitz). En conséquence φ_t est une bijection, $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ et son inverse est continue. En anticipant sur le paragraphe suivant, on a en outre que φ_t est continûment différentiable d'inverse continûment différentiable. ∎

2 Différentiabilité par rapport à la condition initiale

Dans cette partie, nous nous intéressons à la dépendance de la solution en la condition initiale, et plus précisément à la *différentiabilté* du flot $\varphi_t(y)$ par rapport à la variable y. En admettant provisoirement que cette différentiabilité est assurée et que les dérivations par rapport à t et y commutent, on obtient, en dérivant l'équation différentielle satisfaite par φ_t :

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(y_0) = \frac{\partial}{\partial y_0}\left(f(\varphi_t(y_0))\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\frac{\partial}{\partial y_0}\varphi_t(y_0),$$

c'est-à-dire encore

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y_0}(y_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\frac{\partial \varphi_t}{\partial y_0}(y_0).$$

En posant $\Psi_t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y_0}(y_0)$, il apparaît que Ψ_t est solution de l'équation différentielle matricielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\Psi}_t & = & \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0)) \cdot \Psi_t \\ \Psi_0 & = & I_d \end{array} \right. , \tag{3}$$

dite *équation variationnelle* associée à (1). Il s'agit d'un système linéaire du type

$$\dot{Y}(t) = A(t, y_0)Y(t)$$

où $A(t, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))$ ne dépend pas seulement du temps t mais aussi d'un "paramètre" y_0. La résolvante exhibe donc elle-même une dépendance en y_0, mais aucune en t_0 (seul $t - t_0$ compte), et on la note pour cette raison $S(t; y_0)$. D'après la discussion précédente, on a alors

$$S(t; y_0) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y_0}(y_0).$$

Nous allons maintenant justifier rigoureusement cette égalité dans la preuve du théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}^d$ continue et localement Lipschitzienne, telle que $\frac{\partial f}{\partial y}(y)$ existe et soit continue sur D. Alors, le flot de (1) est une application continûment différentiable par rapport à y et sa dérivée $\Psi_t(y_0) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y_0}(y_0)$ vérifie l'équation variationelle associée à (1) :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\Psi}_t(y_0) & = & \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\Psi_t(y_0) \\ \dot{\Psi}_0(y_0) & = & I_d \end{array} \right. \tag{4}$$

Preuve. Dans un premier temps, nous allons montrer que $\frac{\partial \varphi_t}{\partial y_0}(y_0)$ existe pour tout $(t, y_0) \in \Omega_0$: pour ce faire, il suffit d'établir, pour (t, y_0) fixé, qu'il existe une fonction $\epsilon(\cdot)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et un rayon $r > 0$ tels que

$$\forall \Delta y_0 \in B_r(0), \|\varphi_t(y_0 + \Delta y_0) - \varphi_t(y_0) - S(t; y_0)\Delta y_0\| = \|\Delta y_0\|\epsilon(\|\Delta y_0\|) \tag{5}$$

avec

$$\lim_{\|\Delta y_0\| \to 0} \epsilon(\|\Delta y_0\|) = 0.$$

Pour $s \in [0, t]$, on définit donc $z(s) = \varphi_s(y_0) + S(s; y_0)\Delta y_0$: $z(\cdot)$ n'est pas solution du système différentiel (1), mais peut-être vue comme une solution "approchée"

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}(s) & = & f(z(s)) - \delta(s) \\ z(0) & = & y_0 + \Delta y_0 \end{array} \right. ,$$

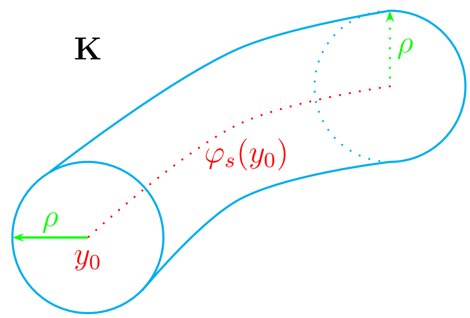
avec

$$\delta(s) = f\Big(\varphi_s(y_0) + S(s; y_0)\Delta y_0\Big) - f(\varphi_s(y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y_0))S(s; y_0)\Delta y_0.$$

La résolvante $S(s; y_0)$ étant continue en la variable $s \in [0, t]$, elle est bornée par une constante $M > 0$, de sorte que si $r \leq \rho/M$, la fonction $z(s)$ ne sort pas du cylindre **compact**

$$K = \{y \in \mathbb{R}^d; \exists s \in [0, t], \|y - \varphi_s(y_0)\| \leq \rho\}$$

qui est lui-même contenu dans Ω_0 pour ρ suffisamment petit (l'intervalle $[0, t]$ est en effet compact).



L'idée principale de la preuve est d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$G(\Delta z) = f(z + \Delta z) - f(z) - f'(z)\Delta z$$

c'est-à-dire

$$\|G(\Delta z) - G(0)\| \leq \sup_{0 \leq \mu \leq 1} \|G'(\mu \Delta z)\| \|\Delta z\|$$

puis d'utiliser l'uniforme continuité de $f'(z)$ sur le compact K. Il vient alors

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \mu \leq 1} \|G'(\mu \Delta z)\| &= \sup_{0 \leq \mu \leq 1} \|f'(z + \mu \Delta z) - f'(z)\| \\ &= \beta(\|\Delta z\|) \end{aligned}$$

où $\beta(\|\Delta z\|)$ est une fonction qui peut être choisie monotone en escalier, indépendante de z, et qui tend vers 0 lorsque $\|\Delta z\|$ tend vers 0. Finalement, f étant Lipschitzienne (au moins localement et donc sur K) de constante de Lipschitz L, on a d'après le lemme de Gronwall :

$$\|z(s) - \varphi_s(y_0 + \Delta y_0)\| \leq \beta\Big(M\|\Delta y_0\|\Big) M \|\Delta y_0\| \frac{e^{Lt} - 1}{L}$$

ce qui prouve la validité de (5) avec $\epsilon(x) = \beta(Mx) M \frac{e^{Lt}-1}{L}$.

Il reste alors à montrer que $S(t; y_0)$ est continue par rapport à (t, y_0) [1]. Pour $(t, y_0) \in \Omega_0$, soit $\mathcal{D}$ un voisinage compact de y_0 tel que $[0, t] \times \mathcal{D} \subset \Omega_0$. On définit

$$\mathcal{L} = \sup_{s \in [0,t], y \in \mathcal{D}} \|f'(\varphi_s(y))\|.$$

Alors, pour tout $\tilde{y}_0 \in \mathcal{D}$, on a

$$\dot{S}(s; \tilde{y}_0) - \dot{S}(s; y_0) = f'(\varphi_s(\tilde{y}_0)) \cdot \Big(S(s; \tilde{y}_0) - S(s; y_0)\Big) + \Delta(s)$$

où

$$\Delta(s) = \Big(f'(\varphi_s(y_0)) - f'(\varphi_s(\tilde{y}_0))\Big) \cdot S(s; y_0)$$

1. On ne peut pas conclure directement car y_0 n'est pas une valeur initiale pour $S(s; y_0)$ mais un paramètre : le second membre du système obtenu par l'adjonction de l'équation $\dot{y} = f(y)$ à l'équation variationnelle n'est donc pas Lipschitzien, sauf à supposer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

de sorte que si $\sup_{s\in[0,t]} \|\Delta(s)\| \leq \delta$, alors (d'après le théorème de Gronwall)

$$\sup_{s\in[0,t]} \left\| S(s;\tilde{y}_0) - S(s;y_0) \right\| \leq \frac{\delta(e^{t\mathcal{L}}-1)}{\mathcal{L}}.$$

Par composition, $f'(\varphi_s(y_0))$ est continue en y_0 et on peut donc conclure à la continuité de $S(t;y_0)$ par rapport à y_0, puis par rapport à (t,y_0). ■

Théorème 2.2 *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D, alors $(t,y) \mapsto \varphi_t(y)$ est également de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω_0.*

Preuve. Par récurrence. ■

3 Propriétés géométriques du flot

Dans cette partie, nous énonçons quelques propriétés géométriques du flot : il s'agit de résultats de conservation de quantités dont l'interprétation physique est pertinente dans de nombreuses applications.

3.1 Conservation du volume

Suposons que f, de classe $\mathcal{C}^1$, soit de divergence nulle, c'est-à-dire que

$$\forall y \in D, \text{div }(f)(y) = \text{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y)\right) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(y) = 0$$

Considérons alors un ensemble mesurable A de $\mathbb{R}^d$ pour la mesure dy et

$$\text{Vol}(A) = \int_A dy$$

son **volume**. Le flot $\varphi_t(\cdot)$ considéré comme application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ envoie chaque point y de A sur un point $\varphi_t(y)$ de $\varphi_t(A)$ et il est naturel de considérer le volume de l'ensemble image $\varphi_t(A)$, à savoir :

$$\int_{\varphi_t(A)} dy$$

On a alors :

Théorème 3.1 *Pour un système différentiel de la forme $\dot{y} = f(y)$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D telle que div$f \equiv 0$, alors*

$$\textit{Vol}(\varphi_t(A)) = \textit{Vol}(A)$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$.

Preuve. Soit $\Psi_t(y) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(y)$. Ψ_t est solution de l'équation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\Psi}_t(y) & = & \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y))\Psi_t(y), \\ \Psi_0(y) & = & I_{\mathbb{R}^d} \end{array} \right.$$

Pour une matrice $M \in GL_d(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall\, H \,\in\, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ (d_M \det)H = (\det M)Tr(M^{-1}H)$$

En effet :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\det(M+tH)-\det(M)}{t} & = & t^{-1}\det(M)\,\left(t^d\det(\dfrac{1}{t}I_{\mathbb{R}^d}+M^{-1}H)-1\right) \\ & = & t^{-1}\det(M)\,(1+t\,Tr(M^{-1}H)+\ldots+t^d\det(M^{-1}H)-1) \\ & = & \det(M)\,Tr(M^{-1}H)+\mathcal{O}(t) \end{array}$$

Il vient donc [2] :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\det(\Psi_t(y)) & = & (d_{\Psi_t}\det)\dfrac{d}{dt}\Psi_t = \det(\Psi_t)\,Tr(\Psi_t^{-1}\dfrac{d}{dt}\Psi_t), \\ & = & \det(\Psi_t)\,Tr(\Psi_t^{-1}\,(\partial_y f(\varphi_t(y)))\,\Psi_t), \\ & = & \det(\Psi_t)\,Tr(\partial_y f(\varphi_t(y))) = 0. \end{array}$$

Ainsi, $\det(\Psi_t(y)) = \det(\Psi_0(y)) = \det(I_{\mathbb{R}^d}) = 1$, et

$$\int_{\varphi_t(A)} dz = \int_A \left|\det\left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y}(y)\right)\right| dy = \int_A dy.$$

■

2. On peut aussi faire un calcul direct. Soient $\Psi_1,\ldots,\Psi_d$ les vecteurs colonnes de Ψ_t et $\alpha_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq d$, les coefficients de la matrice $\Theta = \Psi_t^{-1}\partial_y f(\varphi_t(y))\Psi_t$. On a bien sûr pour tout $j = 1,\ldots,n$

$$\frac{d}{dt}\Psi_j = (\partial_y f(\varphi_t(y)))\Psi_j = \sum_{i=1}^d \alpha_{i,j}\Psi_i.$$

Le déterminant étant une n-forme antisymétrique ω^d, on a :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\det(\Psi_t) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^d \omega^d(\Psi_1,\ldots,\Psi_{j-1},\dot{\Psi}_j,\Psi_{j+1},\ldots,\Psi_d) = \sum_{i,j=1}^d \omega^d(\Psi_1,\ldots,\Psi_{j-1},\alpha_{i,j}\Psi_i,\Psi_{j+1},\ldots,\Psi_d), \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^d \alpha_{j,j}\,\omega^d(\Psi_1,\ldots,\Psi_{j-1},\Psi_j,\Psi_{j+1},\ldots,\Psi_d) = Tr(\Theta)\det(\Psi_t) = \det(\Psi_t)Tr(\partial_y f(\varphi_t(y))) = 0. \end{array}$$

3.2 Conservation de l'énergie

Dans cette sous-section et la suivante, on suppose que le système différentiel (1) est **Hamiltonien**, c'est-à-dire qu'il peut d'écrire sous la forme

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla_y H(y),$$

où $H(\cdot)$ est une fonction de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}$ et où J est la matrice de $\mathcal{M}_{2d}(\mathbb{R})$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$$

En partitionnant y en $y = (p^T, q^T)^T$ où p et q sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$ (en physique, q désigne le vecteur position et p le vecteur quantité de mouvement), on peut aussi écrire le système sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{p} & = & -\nabla_q H(p,q) \\ \dot{q} & = & \nabla_p H(p,q) \end{array} \right.$$

Notons que pour un système Hamiltonien, on a

$$\text{div} f = \text{Tr}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \text{Tr}(J^{-1}\nabla^2 H) = \text{Tr}(\nabla^2 H J^{-T}) = -\text{Tr}(J^{-1}\nabla^2 H) = -\text{div} f = 0$$

de sorte que le flot d'un système Hamiltonien préserve le volume. On a en outre :

Théorème 3.2 *Soit φ_t le flot associé à un système Hamiltonien. Alors, pour tout $(t,y) \in \Omega_0$, $H(\varphi_t(y)) = H(y)$.*

Preuve. Le long de toute trajectoire exacte, il vient

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt} H(\varphi_t(y)) & = & \frac{\partial H}{\partial y}\dot{\varphi}_t(y) \\ & = & (\nabla H(\varphi_t(y)))^T J^{-1} \nabla H(\varphi_t(y)) \\ & = & 0 \end{array}$$

car la matrice J est antisymétrique, i.e. $J^T = -J$. ■

3.3 Symplecticité et flot Hamiltonien

3.3.1 Quelques éléments de géométrie

On considére le parallélogramme P de $\mathbb{R}^{2d}$ engendré par les vecteurs

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^p \\ \xi^q \end{bmatrix} \text{ et } \eta = \begin{bmatrix} \eta^p \\ \eta^q \end{bmatrix}$$

dans l'espace des"phases" (p,q) :

$$P = \{t\xi + s\eta \,|\, 0 \le t, s \le 1\}$$

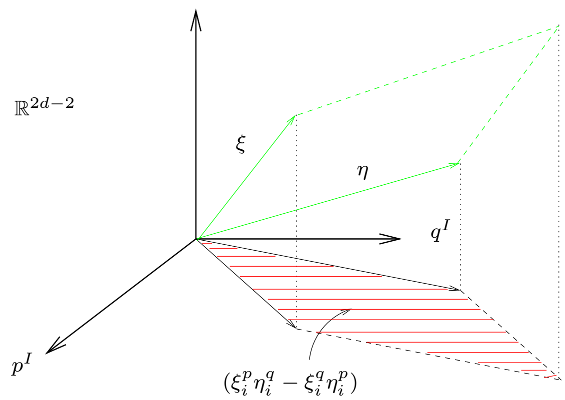


FIGURE 1 – Application ω

En dimension 1, l'aire *orientée* de P s'écrit :

$$\text{aire.orientée}(P) = \begin{vmatrix} \xi^p & \eta^p \\ \xi^q & \eta^q \end{vmatrix} = \xi^p\eta^q - \xi^q\eta^p.$$

En dimension $d > 1$, on remplace cette expression par la somme $\omega(\xi, \eta)$ des aires orientées des *projections* sur les plans (p_i, q_i) de P :

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} \begin{vmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{d} (\xi_i^p\eta_i^q - \xi_i^q\eta_i^p).$$

ω définit ainsi une *forme bilinéaire antisymétrique*, que l'on peut encore écrire :

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^T J\eta,$$

où J est la matrice définie précédemment.

3.3.2 Transformations symplectiques

Définition 3.3 *Une application linéaire $A : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ (confondue une fois encore avec sa représentation matricielle de $GL_{2d}(\mathbb{R})$) est dite symplectique si :*

$$A^T JA = J,$$

c'est-à-dire de manière équivalente, si :

$$\forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d},\ \omega(A\xi, A\eta) = \omega(\xi, \eta).$$

En dimension $d = 1$, la symplecticité de A ne traduit rien d'autre que la conservation des aires. En dimension $d > 1$, elle traduit la conservation de la somme des aires orientées des projections sur les plans (p_i, q_i).

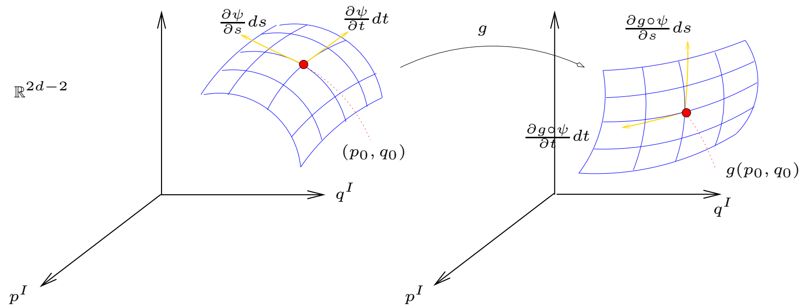


FIGURE 2 – Image de M par g

Définition 3.4 *Une application g de U ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}^{2d}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, est dite symplectique si sa matrice jacobienne $g'(y)$ est symplectique pour tout y de U, c'est-à-dire si :*

$$\forall y \in U,\ (g'(y))^T Jg'(y) = J,$$

ou de manière équivalente si :

$$\forall y \in U,\ \forall(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d},\ \omega(g'(y)\xi, g'(y)\eta) = \omega(\xi,\eta).$$

Soit M une variété bidimensionnelle de U, telle qu'il existe une "carte globale" :

$$M = \psi(K),$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\psi(s,t)$ un difféomorphisme de K dans M. M peut être vue comme la limite de l'union de "petits parallélogrammes" engendrés par les vecteurs

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}ds \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial t}dt.$$

Alors, la somme des aires orientées des projections sur les plans (p_i, q_i) de tous ces parallélogrammes s'écrit :

$$\Omega(M) = \iint_K \omega(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t))dsdt.$$

Théorème 3.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$ et g une application de U dans $\mathbb{R}^{2d}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Si g est symplectique sur U, alors elle préserve $\Omega(M)$, c'est-à-dire :*

$$\Omega(g(M)) = \Omega(M)$$

Preuve. La sous-variété $g(M)$ peut être paramétrée par $g \circ \psi$ sur K. On a donc :

$$\begin{aligned}
\Omega(g(M)) &= \iint_K \omega(\frac{\partial g \circ \psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial g \circ \psi}{\partial t}(s,t))dsdt \\
&= \iint_K \omega(g'(\psi(s,t))\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t), g'(\psi(s,t))\frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t))dsdt \\
&= \iint_K \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t)\right)^T \underbrace{(g'(\psi(s,t)))^T Jg'(\psi(s,t))}_{=J} \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t)dsdt \\
&= \Omega(M)
\end{aligned}$$

■

3.3.3 Symplecticité du flot d'un système Hamiltonien

On considère toujours une fonction $f(y) = J^{-1}\nabla_y H(y)$ et le système différentiel Hamiltonian associé.

Théorème 3.6 (Poincaré 1899) *Soit $H(\cdot)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert D de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}$ (telle que $\nabla_y H(\cdot)$ soit localement Lipschitzienne). Alors pour tout $(t,y) \in \Omega_0$, φ_t est une transformation symplectique.*

Preuve. La matrice $\Psi_t(y) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}$ est solution de l'équation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\Psi}_t(y) &=& J^{-1}\nabla^2 H(\varphi_t(y))\Psi_t(y) \\ \Psi_0(y) &=& I_{2d} \end{array} \right.$$

Or $\nabla^2 H(\varphi_t(y))$ est symétrique, i.e. $((\nabla^2 H(\varphi_t(y)))^T = \nabla^2 H(\varphi_t(y))$. D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\Psi_t^T(y)J\Psi_t(y)\right) &= \dot{\Psi}_t^T(y)J\Psi_t(y) + \Psi_t^T(y)J\dot{\Psi}_t(y), \\
&= \Psi_t^T(y)(\nabla^2 H)^T \underbrace{J^{-T}J}_{=-J^{-1}J=-I} \Psi_t^T(y) + \Psi_t^T(y)\underbrace{J^{-1}J}_{=I}(\nabla^2 H)\Psi_t(y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En outre, pour $t = 0$ on a

$$\Psi_0^T(y)J\Psi_0(y) = I^T JI = J$$

ce qui permet de conclure. ■

Théorème 3.7 *Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{2d}$ et f une fonction $\mathcal{C}^1$ de D dans $\mathbb{R}^{2d}$. On suppose qu'il existe un $t > 0$ et un ouvert U simplement connexe ou étoilé tels que $[0,t] \times U \subset \Omega_0$ et que pour tout $0 \leq s \leq t$ et tout $y \in U$, $\varphi_s(y)$ est symplectique. Alors, $\dot{y} = f(y)$ est un système Hamiltonien sur U, c'est-à-dire qu'il existe une fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telle que*

$$\forall y \in U,\ f(y) = J^{-1}\nabla_y H(y).$$

Preuve. Pour tout $(s, y) \in [0, t] \times U$, $\Psi_s(y) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial y}$ est solution de l'équation variationnelle :

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_s(y) & = & f'(\varphi_s(y))\Psi_s(y) \\ \Psi_0(y) & = & I_{2d} \end{cases}$$

En différentiant, il vient :

$$\frac{d}{ds}\left(\Psi_s^T(y) J \Psi_s(y)\right) = \Psi_s^T(y)\Big((f'(\varphi_s(y)))^T J + J f'(\varphi_s(y))\Big)\Psi_s(y)$$

En écrivant l'égalité pour $s = 0$ et en tenant compte de $J^T = -J$, on voit que $Jf'(y)$ doit être symétrique pour tout $y \in U$. Donc $Jf'(y) = \nabla_y H(y)$ d'après le lemme d'intégrabilité détaillé ci-après. ■

Lemme 3.8 (Lemme d'intégrabilité) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f'(y)$ soit symétrique pour tout $y \in U$. Alors, pour tout y_0 de D, il existe un voisinage $\mathcal{V}(y_0)$ et une fonction H définie sur $\mathcal{V}(y_0)$ telle que :*

$$\forall\, y \,\in\, \mathcal{V}(y_0),\;\; f(y) = \nabla_y H(y). \tag{6}$$

Preuve. Soit $B_0 \subset U$ une boule de centre y_0 contenue dans U. On définit H sur B_0 par :

$$H(y) = \int_0^1 (y - y_0)^T f(y_0 + t(y - y_0))dt.$$

Il vient alors, en utilisant la symétrie de $f'(y)$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial H}{\partial y_j}(y) & = & \displaystyle\int_0^1 f_j(y_0 + t(y - y_0)) + t(y - y_0)^T \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0 + t(y - y_0))dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 f_j(y_0 + t(y - y_0)) + t(y - y_0)^T (\nabla_y f_j)(y_0 + t(y - y_0))dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t f_j(y_0 + t(y - y_0))\right) dt \\ & = & f_j(y) \end{array}$$

■

Remarque 3.9 *Lorsque l'ouvert considéré est étoilé par rapport à l'un de ses points $y_0 \in U$, alors on peut définir H sur tout U.*

Remarque 3.10 *Dans le cas général d'un ouvert quelconque, le résultat du théorème 3.7 est faux. Considérons par exemple le système :*

$$\begin{cases} \dot{p} & = & \frac{p}{p^2+q^2} \\ \dot{q} & = & \frac{q}{p^2+q^2} \end{cases} \tag{7}$$

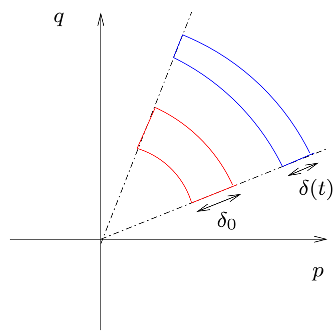


FIGURE 3 – Symplecticité du flot de (7) : conservation de l'aire

défini sur $U = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \,; (p,q) \neq (0,0)\}$*. Pour* $(p_0,q_0) \in U$*, le flot s'écrit :*

$$\varphi_t(p_0,q_0) = \alpha(t,r_0)\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix},$$

avec $\alpha(t,r_0) = \sqrt{1+2t/r_0^2}$ *et* $r_0 = \sqrt{p_0^2+q_0^2}$*. Sa dérivée* $\frac{\partial\varphi_t}{\partial(p_0,q_0)}$ *est de la forme :*

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial(p_0,q_0)} = \begin{bmatrix} (\partial_{p_0}\alpha)p_0+\alpha & (\partial_{q_0}\alpha)p_0 \\ (\partial_{p_0}\alpha)q_0 & (\partial_{q_0}\alpha)q_0+\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial_{r_0}\alpha)\frac{p_0^2}{r_0}+\alpha & (\partial_{r_0}\alpha)\frac{p_0q_0}{r_0} \\ (\partial_{r_0}\alpha)\frac{p_0q_0}{r_0} & (\partial_{r_0}\alpha)\frac{q_0^2}{r_0}+\alpha \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice symplectique si $\alpha^2+\alpha r_0(\partial_{r_0}\alpha) = 1$*, ce qui se vérifie par un simple calcul. Localement, on peut écrire le système comme un système Hamiltonien. Par exemple, dans le demi-plan* $p>0$*, on peut prendre* $H(p,q) = -\arctan\frac{q}{p}$ *et vérifier que :*

$$-\nabla_q H(p,q) = \frac{1}{p}\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}} = \frac{p}{p^2+q^2} = \dot{p} \tag{8}$$

$$\nabla_p H(p,q) = \frac{q}{p^2}\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}} = \frac{q}{p^2+q^2} = \dot{q} \tag{9}$$

A contrario, supposons qu'il existe un H *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* U*, tel que le champ de vecteur* $f(p,q) = (p^2+q^2)^{-1}[p,q]^T$ *s'écrive* $f(p,q) = J^{-1}\nabla_{p,q}H(p,q)$*. Considérons alors la forme différentielle*

$$\omega_{p,q} = f_2(p,q)dp - f_1(p,q)dq \tag{10}$$

et calculons son intégrale le long du chemin Γ *paramétré par* $(p,q) = (\cos(\theta),\sin(\theta))$ *:*

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi}\omega_{\cos(\theta),\sin(\theta)}\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\end{pmatrix}d\theta = \int_0^{2\pi}(-\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta))d\theta = -2\pi$$

Or on aurait par ailleurs $\omega_{p,q} = (\partial_p H)(p,q)dp + (\partial_q H)(p,q)dq = dH$ *dont l'intégrale sur* Γ *est nulle.* H *ne peut donc pas être défini sur tout* U*. L'hypothèse de simple connexité est essentielle pour cela.*

4 Flot et dérivées de Lie

Dans cette partie, nous nous intéressons à la composition de flots associés à des fonctions f_1 et f_2 différentes. Il est en effet naturel, dans un certain nombre de situations, de considérer les flots φ_t^1 et φ_t^2 associés à chacun des termes de la somme $f = f_1 + f_2$ de deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{R}^d$, supposées toutes deux continues et localement Lipschitziennes sur un ouvert connexe D.

4.1 Représentation exponentielle du flot

Définition 4.1 *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^d)$. L'opérateur* dérivée de Lie L_f *est défini par :*

$$L_f = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial y}\right) f,$$

au sens où, si g une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$, on a :

$$\forall\, y \,\in\, \mathbb{R}^d,\;\; L_f[g](y) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}(y)\right) f(y) = g'(y)f(y)$$

Si f et g sont supposées de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors on peut itérer l'opérateur L_f et considérer ses puissances L_f^k en définissant

$$L_f^{k+1}[g] = L_f[L_f^k[g]], k = 1, \ldots, \infty$$

On obtient par exemple :

$$\begin{aligned} L_f^2[g] &= g''(f,f) + g'f'f \\ L_f^3[g] &= g'''(f,f,f) + 3g''(f'f,f) + g'f''(f,f) + g'f'f'f \end{aligned}$$

Par ailleurs, il vient successivement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(\varphi_t(y)) &= g'(\varphi_t(y))\dot{\varphi}_t(y) = g'(\varphi_t(y))f(\varphi_t(y)) = L_f[g](\varphi_t(y)) \\ \frac{d^2}{dt^2}g(\varphi_t(y)) &= g''(\dot{\varphi}_t(y), f) + g'f'\dot{\varphi}_t(y) = L_f[\frac{d}{dt}g(\varphi_t(y))] = L_f^2[g](\varphi_t(y)) \end{aligned}$$

où l'argument $\varphi_t(y)$ de g'', f' et f a été omis dans la second ligne pour alléger les notations, et plus généralement

$$\frac{d^k}{dt^k}g(\varphi_t(y)) = (L_f^k[g])(\varphi_t(y))$$

de sorte que le développement en série de Taylor de $g(\varphi_t(y))$ en $t = 0$ s'écrit :

$$g(\varphi_t(y)) = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}(L_f^k[g])(y) = \exp(tL_f)[g](y),$$

et pour $g(y) = y$:

$$\varphi_t(y) = \exp(tL_f)[Id](y)$$

Notons que la série converge si f est analytique.

Remarque 4.2 *L'opérateur L_f fait apparaître la dérivée première de son argument g et est dit d'ordre 1 pour cette raison. Le k-ième itéré de L_f fait apparaître la dérivée k-ième de son argument g et est dit d'ordre k.*

4.2 Composition de flots et opérateur dérivée de Lie

Considérons maintenant le cas de deux fonctions f_1 et f_2 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Les dérivées de Lie associées peuvent être appliquées l'une après l'autre. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}(L_{f_1}L_{f_2})[g] &= L_{f_1}[L_{f_2}[g]] = g''(f_1, f_2) + g'f_2'f_1 \\ (L_{f_2}L_{f_1})[g] &= L_{f_2}[L_{f_1}[g]] = g''(f_2, f_1) + g'f_1'f_2\end{aligned}$$

d'où il apparaît clairement que les opérateurs L_{f_1} et L_{f_2} ne commutent pas en général. Les deux opérateurs $L_{f_1}L_{f_2}$ et $L_{f_2}L_{f_1}$ sont d'ordre 2, mais de manière remarquable,

$$L_{f_1}L_{f_2} - L_{f_2}L_{f_1} \text{ est d'ordre } 1$$

puisque le terme $g''(f_1, f_2) = g''(f_2, f_1)$ disparaît.

La composition des flots φ_s^1 et φ_t^2 peut alors s'écrire (formellement) comme :

$$(\varphi_t^2 \circ \varphi_s^1)(y) = \exp(sL_{f_1})\exp(tL_{f_2})[Id](y). \tag{11}$$

Les opérateurs apparaissent dans l'ordre inverse car (11) s'obtient en considérant $g(y) = \varphi_t^2(y)$ et en développant $g(\varphi_s^1(y))$. Les séries considérées sont des séries formelles, en général non convergentes, car les opérateurs L_{f_1} et L_{f_2} sont non bornés. Par ailleurs, si L_{f_1} et L_{f_2} ne commutent pas, alors $\exp(sL_{f_1})\exp(tL_{f_2}) \neq \exp(sL_{f_1}+tL_{f_2})$. Cependant, on peut formellement procéder à l'identification $\exp(sL_{f_1})\exp(tL_{f_2}) = \exp(L(s,t))$ avec

$$L(s,t) = sL_{f_1} + tL_{f_2} + st[L_{f_1}, L_{f_2}] + \frac{s^2t}{12}[L_{f_1}, [L_{f_1}, L_{f_2}]] + \frac{st^2}{12}[L_{f_2}, [L_{f_2}, L_{f_1}]] + \dots \tag{12}$$

où $[L_{f_1}, L_{f_2}] = L_{f_1}L_{f_2} - L_{f_2}L_{f_1}$. Cette identification devient rigoureuse si elle est interprétée comme l'identification de développements de Taylor au voisinage de $s = t = 0$. Les termes suivants du développement sont donnés par la formule Baker-Campbell-Hausdorff (BCH). La formule (12) conduit à penser que si $[L_{f_1}, L_{f_2}] = 0$, alors les flots φ_s^1 et φ_t^2 commutent. Le résultat est vrai mais ne peut être démontré à partir de (12) puisque les séries considérées ne sont pas convergentes.

Théorème 4.3 *Soient f_1 et f_2 deux champs de vecteurs de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. La composition des flots φ_s^1 et φ_t^2 est commutative si et seulement si*

$$[L_{f_1}, L_{f_2}] = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y}f_1\right) = 0.$$

Preuve. Quitte à reparamétriser s en multipliant f_1 par une constante (ce qui ne change rien à la nullité du crochet de Lie), on peut considérer $s = t$. On remarque tout d'abord que, d'après la formule (12), pour tout y de $\mathbb{R}^d$, et pour $h > 0$ suffisament petit :

$$(\varphi_h^2 \circ \varphi_h^1 - \varphi_h^2 \circ \varphi_h^1)(y) = \mathcal{O}(h^3) \tag{13}$$

où la constante contenue dans $\mathcal{O}$ est obtenue par majoration des dérivées sur un compact contenant $(\varphi_u^2 \circ \varphi_v^1)(y)$ et $(\varphi_v^1 \circ \varphi_u^2)(y)$ pour tout $0 \leq u, v \leq t$. Prenons $h = t/N$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\varphi_t^2 \circ \varphi_t^1 &= \varphi_{t-h}^2 \circ \varphi_h^2 \circ \varphi_h^1 \circ \varphi_{t-h}^1 \\
&= \varphi_{t-h}^2 \circ \varphi_h^1 \circ \varphi_h^2 \circ \varphi_{t-h}^1 + \mathcal{O}(h^3) \\
&= \varphi_{t-h}^2 \circ \varphi_{2h}^1 \circ \varphi_h^2 \circ \varphi_{t-2h}^1 + 2\mathcal{O}(h^3) \\
&= \cdots \\
&= \varphi_{t-h}^2 \circ \varphi_{Nh}^1 \circ \varphi_h^2 + N\mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}$$

En répétant l'opération N fois, on obtient :

$$(\varphi_t^2 \circ \varphi_t^1 - \varphi_t^1 \circ \varphi_t^2) = N^2\mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(1/N) \tag{14}$$

■

Preuve. [Preuve alternative] Quitte à reparamétriser s en multipliant f_1 par une constante (ce qui ne change rien à la nullité du crochet de Lie), on peut considérer $s = t$. La loi de groupe $\varphi_t^1 \circ \varphi_s^1 = \varphi_{t+s}^1 = \varphi_s^1 \circ \varphi_t^1$ donne par dérivation par rapport à t

$$\dot{\varphi}_t^1 \circ \varphi_s^1 = \partial_y(\varphi_s^1) \circ \varphi_t^1 \cdot \dot{\varphi}_t^1$$

i.e.

$$f_1 \circ \varphi_t^1 \circ \varphi_s^1 = \partial_y(\varphi_s^1) \circ \varphi_t^1 \cdot (f_1 \circ \varphi_t^1)$$

et donc pour $t = 0$

$$f_1 \circ \varphi_s^1 = \partial_y(\varphi_s^1) \cdot f_1.$$

Montrons la relation similaire suivante

$$(\partial_y \varphi_t^1) \cdot f_2 = f_2 \circ \varphi_t^1.$$

On a par dérivation à nouveau

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big((\partial_y \varphi_t^1) \cdot f_2 - f_2 \circ \varphi_t^1\Big) &= (\partial_y \dot{\varphi}_t^1) \cdot f_2 - \partial_y f_2 \circ \varphi_t^1 \cdot \dot{\varphi}_t^1 \\
&= \partial_y f_1 \circ \varphi_t^1 \cdot \partial_y \varphi_t^1 \cdot f_2 - \partial_y f_2 \circ \varphi_t^1 \cdot f_1 \circ \varphi_t^1 \\
&= \partial_y f_1 \circ \varphi_t^1 \cdot \partial_y \varphi_t^1 \cdot f_2 - \partial_y f_1 \circ \varphi_t^1 \cdot f_2 \circ \varphi_t^1 \\
&= \partial_y f_1 \circ \varphi_t^1 \cdot \Big((\partial_y \varphi_t^1) \cdot f_2 - f_2 \circ \varphi_t^1\Big)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la nullité du crochet de Lie et remplacé $\partial_y f_2 \cdot f_1$ par $\partial_y f_1 \cdot f_2$. Donc la fonction $w(t) := (\partial_y \varphi_t^1) \cdot f_2 - f_2 \circ \varphi_t^1$ satisfait une équation différentielle linéaire avec condition initiale

$w(0) = f_2 - f_2 = 0$. Elle est donc constamment nulle. Il vient maintenant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^1 \circ \varphi_t^2) &= (\dot{\varphi}_t^1) \circ \varphi_t^2 + (\partial_y \varphi_t^1) \circ \varphi_t^2 \cdot \dot{\varphi}_t^2 \\ &= f_1 \circ \varphi_t^1 \circ \varphi_t^2 + (\partial_y \varphi_t^1) \circ \varphi_t^2 \cdot f_2 \circ \varphi_t^2 \\ &= (f_1 + f_2) \circ (\varphi_t^1 \circ \varphi_t^2) \end{aligned}$$

La même relation est satisfaite par $\varphi_t^2 \circ \varphi_t^1$. Les fonctions $\varphi_t^2 \circ \varphi_t^1$ et $\varphi_t^1 \circ \varphi_t^2$ satisfont donc la même équation différentielle avec la même condition initiale $\varphi_0^2 \circ \varphi_0^1 = \varphi_0^1 \circ \varphi_0^2 = \mathrm{id}$, donc par unicité sont égales. ■