Chapitre 2: théorèmes généraux

P. Chartier et E. Faou

5 octobre 2016

1 Préliminaires

1.1 Cadre général

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, d'intérieur non vide, et $t_0 \in I$. Soit E un espace de Banach, D un ouvert connexe de E. On considère une application

$$f : D \times I \to E$$

et un point $y_0 \in D$.

Définition 1.1 On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une application $y : J \to D$ telle que y soit dérivable et satisfait pour tout $t \in J$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)), \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{1}$$

■

Remarque 1.2 La plus souvent, on considérera que $E = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. On supposera aussi que f est au moins continue. ■

Une formulation équivalente de (1) est donnée par

$$\forall\, t \in J, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s. \tag{2}$$

Définition 1.3 On donne maintenant quelques définitions :

1. Le couple (J, y) est appelé **solution locale** si $t_0 \in J \subset I$, $y \in \mathcal{C}^1(J)$, J est un voisinage de t_0 dans I, et (1) est satisfaite pour tout $t \in J$.

2. Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions locales. On dit que (J_1, y_1) **prolonge** (J_2, y_2) si
$$\begin{cases} J_2 \subset J_1, \\ y_1\big|_{J_2} = y_2. \end{cases}$$
3. Une solution locale (J, y) est appelée **solution maximale** si pour tout prolongement $(\tilde{J}, \tilde{y})$ de (J, y), on a $\tilde{J} = J$ et $\tilde{y} = y$.
4. Une solution locale (J, y) est appelée **solution globale** si $J = I$.

■

Remarque 1.4 On peut immédiatement faire les remarques suivantes :
— Toute solution globale est solution maximale.
— Soient t_i, $i = 1, \ldots, 4$ tels que $t_1 < t_0 < t_2$ et $t_3 < t_2 < t_4$, et soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions locales telles que
$$[t_1, t_2] \subset J_1, \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1'(t) &= f(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) &= y_0. \end{cases}$$
et
$$[t_3, t_4] \subset J_2, \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2'(t) &= f(t, y_2(t)), \\ y_2(t_2) &= y_1(t_2). \end{cases}$$
Alors le couple (J, y) défini par
$$J = [t_1, t_4], \quad \text{et} \quad y = \begin{cases} y_1 & \text{sur} \quad [t_1, t_2], \\ y_2 & \text{sur} \quad [t_2, t_4], \end{cases}$$
est une solution locale, prolongement de $([t_1, t_2], y_1)$ (pas forcément de (J_2, y_2) ! !).

■

Le résultat suivant est immédiat.

Lemme 1.5 *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \times D$, alors pour toute solution locale (J, y), y est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur J.*

1.2 Exemples

1. Le problème
$$\begin{cases} \dot{y} &= -2ty^2 \\ y(0) &= 1 \\ I &= \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution globale $\left(\mathbb{R}, \dfrac{1}{1+t^2}\right)$.

2. Le problème
$$\begin{cases} \dot{y} &= +2ty^2 \\ y(0) &= 1 \\ I &= \mathbb{R} \end{cases}$$
admet une unique solution maximale $\left(]-1,+1[, \dfrac{1}{1-t^2}\right)$
3. On considére le problème
$$\begin{cases} \dot{y} &= -y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$
Avec $I = \mathbb{R}_+$ le problème admet une solution globale $y(t) = \dfrac{1}{1+t}$.

Avec $I = \mathbb{R}$ le problème admet une solution maximale $\left(]-1,+\infty[, \dfrac{1}{1+t}\right)$ qui est non globale.
4. Le problème
$$\begin{cases} \dot{y} &= y^2 \\ y(0) &= 1 \\ I &= \mathbb{R} \end{cases}$$
admet une solution maximale $\left(]-\infty,1[, \dfrac{1}{1-t}\right)$
5. Attention : le temps d'existence ne dépend pas de manière sympathique du second membre : le problème
$$\begin{cases} \dot{y} &= y^2 - \varepsilon y^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$
admet une solution globale définie sur $\left(]-T_\varepsilon,+\infty[\right)$ avec $T_\varepsilon < \infty$ et même $T_\varepsilon \to \infty, \varepsilon \to 0$.
6. Attention si le second membre n'est pas “régulier”, on perd l'unicité : le problème
$$\begin{cases} \dot{y} &= 2\sqrt{|y|}(1+y) \\ y(0) &= 0 \\ I &= \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

admet (évidemment) $(\mathbb{R}_+, 0)$ pour solution globale, mais aussi toutes les solutions maximales

$$a \geq 0, \quad \left\{ \begin{array}{lcll} y_a & = & 0 & t \in [0, a] \\ y_a & = & \tan^2(t-a), & t \in [a, a+\frac{\pi}{2}]. \end{array} \right.$$

(on peut montrer qu'il n'y a pas d'autre solution maximale).

1.3 Lemme de Gronwall

Lemme 1.6 *Soit $t_0 \in I$ et $u : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et continue, et deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$ telles que*

$$\forall\, t \in I, \quad u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} u(s) g(s) \mathrm{d}s \right|.$$

Alors

$$\forall\, t \in I, \quad u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} f(s) g(s) \exp\left(\left| \int_{s}^{t} g(\sigma) \mathrm{d}\sigma \right| \right) \mathrm{d}s \right|.$$

Preuve. On considère tout d'abord le cas $\boxed{t \geq t_0}$.
On définit la fonction

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} u(s) g(s) \mathrm{d}s \geq 0.$$

On a $Y(t_0) = 0$, et par hypothèse

$$Y'(t) = u(t) g(t) \leq f(t) g(t) + g(t) Y(t).$$

On calcule alors

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(Y(t) e^{-\int_{t_0}^{t} g(s) \mathrm{d}s} \Big) & \leq & \big(f(t) g(t) + g(t) Y(t) - Y(t) g(t) \big) e^{-\int_{t_0}^{t} g(s) \mathrm{d}s} \\ & = & f(t) g(t) e^{-\int_{t_0}^{t} g(s) \mathrm{d}s}. \end{array}$$

En intégrant entre t_0 et t, on trouve

$$Y(t) e^{-\int_{t_0}^{t} g(s) \mathrm{d}s} \leq \int_{t_0}^{t} f(s) g(s) e^{-\int_{t_0}^{s} g(\sigma) \mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s$$

d'où

$$Y(t) \leq \int_{t_0}^{t} f(s) g(s) e^{\int_{s}^{t} g(\sigma) \mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s.$$

Mais par hypothèse, on a

$$u(t) \leq f(t) + Y(t)$$

ce qui donne le résultat.

On considére maintenant le cas $\boxed{t \leq t_0}$.
Dans cette situation, on a $Y(t) \leq 0$, et

$$Y'(t) \leq u(t)g(t) - g(t)Y(t).$$

En calculant comme précédemment, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(Y(t)e^{\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s}\Big) \leq f(t)g(t)e^{\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s}.$$

et en intégrant entre t et t_0,

$$-Y(t)e^{\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s} \leq \int_t^{t_0} f(s)g(s)e^{\int_{t_0}^s g(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s$$

d'où

$$\begin{aligned} -Y(t) &\leq \int_t^{t_0} f(s)g(s)e^{\int_t^s g(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s \\ &\leq \Big|\int_{t_0}^t f(s)g(s)e^{|\int_s^t g(\sigma)\mathrm{d}\sigma|}\mathrm{d}s\Big| \end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que l'hypothèse s'écrit dans ce cas

$$u(t) \leq f(t) - Y(t).$$

■

Corollaire 1.7 **(**$f \equiv c_1$**)** *Sous les hypothèses précédentes, si f est une fonction constante égale à $c_1 \geq 0$, on a*

$$\forall\, t \in I, \quad u(t) \leq c_1 \exp\Big(\Big|\int_{t_0}^t g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\Big|\Big).$$

Preuve. Le lemme précédent montre que

$$u(t) \leq c_1 \left(1 + \left|\int_{t_0}^t g(s) \exp\big(\big|\int_s^t g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\big|\big)\mathrm{d}s\right|\right).$$

Supposons que $t \geq t_0$, on a

$$g(s)\exp\big(\int_s^t g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\big) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp\big(\int_s^t g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\big)$$

ce qui donne directement le résultat. Le résultat pour $t \leq t_0$ se montre de manière identique. ■

Remarque 1.8 Si $f \equiv 0$ dans le corollaire précédent, le résultat montre que $u \leq 0$. ■

Corollaire 1.9 **(**$f \equiv c_1$, $g \equiv c_2$**)** *Sous les hypothèses précédentes, si f est une fonction constante égale à $c_1 \geq 0$ et g une fonction constante égale à $c_2 \geq 0$ alors on a*

$$\forall\, t \in I, \quad u(t) \leq c_1 \exp(c_2|t - t_0|).$$

2 Le cas Lipschitz

On se place toujours dans un espace de Banach E. Soit D un ouvert connexe de E, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et $f : I \times D \to E$.

Définition 2.1

1. On dit que f est (globalement) Lipschitzienne par rapport à x si il existe $L \geq 0$ telle que
$$\forall\, x_1, x_2 \in D, \quad \forall\, t \in I, \quad \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_E \leq L\|x_1 - x_2\|_E\,.$$
2. On dit que f est localement Lipschitzienne par rapport à x si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) et une constante $L(t_0, x_0) \geq 0$ tels que
$$\forall\, (t, x_1) \in \mathcal{V}, \quad \forall\, (t, x_2) \in \mathcal{V}, \quad \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_E \leq L(t_0, y_0)\|x_1 - x_2\|_E\,.$$

■

On rappelle le

Théorème 2.2 (du point fixe) *Soit X un fermé de E, et $F : X \to X$ contractante. Alors F admet un unique point fixe $y \in X$ tel que $F(y) = y$.*

2.1 Le cas global

Théorème 2.3 (Existence et unicité globale) *On suppose que $D = E$, et $f \in \mathcal{C}(I \times D)$ une fonction* **globalement lipschitzienne** *par rapport à x. Alors pour tout $y_0 \in D$, il existe une unique solution globale au problème de Cauchy* (1). *De plus toute solution locale est une restriction de celle-ci.*

Preuve. On suppose tout d'abord que l'intervalle I est fermé et borné.
On pose $\mathcal{E} = \mathcal{C}(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans E, muni de la norme
$$\|y\|_{\mathcal{E}} = \max_{t \in I} e^{-2L|t-t_0|}\|y(t)\|_E$$
où L est la constante de Lipschitz de f. Il est clair que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel normé complet (car I est compact).
On définit la transformation $\mathcal{T} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par la formule
$$\forall\, t \in I, \quad (\mathcal{T}y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$
Il est clair que $\mathcal{T}$ envoie bien $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Supposons que $t \geq t_0$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}y_1(t) - \mathcal{T}y_2(t)\|_E &\leq \int_{t_0}^t L\|y_1(s) - y_2(s)\|_E \, \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_0}^t L e^{2L|s-t_0|}\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{E}} \, \mathrm{d}s \\
&\leq \tfrac{1}{2} e^{2L|t-t_0|}\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

la même inégalité étant valable pour $t \leq t_0$. On trouve donc que pour tout y_1 et y_2 dans $\mathcal{E}$, on a

$$\|\mathcal{T}y_1 - \mathcal{T}y_2\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{E}}.$$

L'application $\mathcal{T}$ est donc contractante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et le théorème du point fixe montre l'existence d'une unique solution.

Si maintenant I n'est pas fermé et borné. Alors on peut toujours écrire

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n, \quad \text{avec pour tout } n, \quad I_n \subset I_{n+1} \quad \text{et} \quad I_n \quad \text{fermé et borné.}$$

Soit y_n la soluton sur I_n. Par unicité, on a

$$y_{n+1}\big|_{I_n} = y_n.$$

On définit alors y par la formule $y = y_n$ sur I_n, ce qui donne l'existence et l'unicité de la solution.

Soit maintenant $(\tilde{y}, \tilde{I})$, $\tilde{I} \subset I$, une autre solution. On décompose $\tilde{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{I}_n$ avec $\tilde{I}_n = \tilde{I} \cap I_n$ borné. Par unicité, on a $\tilde{y}\big|_{\tilde{I}_n} = y\big|_{\tilde{I}_n}$, ce qui montre que $\tilde{y} = y\big|_{\tilde{I}}$. ∎

Proposition 2.4 *Dans le cadre du théoréme précédent, soit y_1 et y_2 deux solutions. Alors*

$$\forall\, t \in I, \quad \|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leq e^{L|t-t_0|}\|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E.$$

2.2 Existence locale

On considère toujours I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, et D un ouvert connexe d'un espace de Banach E. Pour $y_0 \in D$ et $r > 0$, on définit la boule

$$B_r(y_0) = \{y \in E, \mid \|y - y_0\|_E \leq r\}.$$

Théorème 2.5 (Existence locale) *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times D, E)$. Soient η, r, M et L des constantes telles que*

$$[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B_r(y_0) \subset I \times D$$

$$\forall\, (t, y) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B_r(y_0), \quad \|f(t, y)\|_E \leq M$$

$$\forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B_r(y_0), \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_E \leq L\|y_1 - y_2\|_E$$

Alors il existe (J, y) *une solution locale de* (1)*, avec*

$$J = [t_0 - \tilde{\eta}, t_0 + \tilde{\eta}], \quad \textit{où} \quad \tilde{\eta} = \min\big(\eta, \frac{r}{2M}\big).$$

Remarque 2.6 Si f est **localement Lipschitzienne**, alors il est clair qu'elle vérifie les hypothèses précédentes. ■

Preuve. Soit $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ une fonction telle que

$$\begin{array}{rcll} \theta(x) & = & 1 & x \leq 1/2 \\ \theta(x) & = & 0 & x \geq 1 \\ |\theta(x)| & \leq & 1 & x \in [1/2, 1] \end{array}$$

On pose

$$F(t,y) = \begin{cases} \theta\Big(\dfrac{\|y - y_0\|_E}{r}\Big) f(t,y) & (t,y) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B_r(y_0), \\ 0 & (t,y) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times E \backslash B_r(y_0) \end{cases}$$

On montre facilement que $F(t,y)$ est globalement lipschitzienne sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times E$. De plus, on a $\|F(t,y)\|_E \leq M$. Par le théoréme précédent, on en déduit qu'il existe une unique solution globale au problème

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0. \end{cases}$$

De plus, en utilisant l'équation intégrale, on voit facilement que

$$\|y(t) - y(t_0)\|_E \leq M|t - t_0|.$$

Maintenant, par définition de $\tilde{\eta}$ on a

$$|t - t_0| \leq \tilde{\eta} \Longrightarrow |t - t_0| \leq \frac{r}{2M}$$

et donc

$$\|y(t) - y(t_0)\|_E \leq \frac{r}{2}.$$

Or pour t et y tels que $|t - t_0| \leq \tilde{\eta}$ et $y \in B_r(y_0)$ on a $F(t,y) = f(t,y)$, et donc y est solution de (1) sur l'intervalle annoncé. ■

2.3 Unicité locale

Lemme 2.7 *Soit* f *une fonction localement lipschitzienne par rapport à* x*, et soient* $J \subset I$ *un compact de* I *et* $K \subset D$ *un compact de* D*. Alors* f *est uniformément lipschitizienne par rapport à* x *sur* $J \times K$*.*

Preuve. Soit $M = \max_{(t,y)\in J\times K} \|f(t,y)\|_E$. Par hypothèse, pour tout $(t,y) \in J \times K$, il existe $L(t,y)$ et un voisinage $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_x$ de (t,y) dans $I \times D$ tels que

$$\forall\,(s,y_1),(s,y_2) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_x, \quad \|f(s,y_1) - f(s,y_2)\|_E \leq L(t,y)\|y_1 - y_2\|_E\,.$$

On peut toujours supposer que $\mathcal{V}_y = B_{r(y)}(y)$ pour un certain $r(y) > 0$. Puisque $J \times K$ est compact, il existe $(t_i, y_i) \in J \times K$, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$J \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{t_i} \times B_{r(y_i)/2}(y_i).$$

On pose alors

$$L = \max_{i=1,\ldots,n} L(t_i, y_i) \quad \text{et} \quad r = \min_{i=1,\ldots,n} r(y_i).$$

Soient (t,y_1) et (t,y_2) des élements de $J \times K$. Il existe un indice i_0 tel que

$$(t,y_1) \in \mathcal{U}_{t_{i_0}} \times B_{r(y_{i_0})/2}(y_{i_0}).$$

On distingue alors deux cas :

Cas 1 : $\|y_1 - y_2\|_E \leq r/2$. Dans ce cas on a $y_2 \in B_r(y_{i_0})$ et donc par hypothèse

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\|_E \leq L\|y_1 - y_2\|_E\,.$$

Cas 2 : $\|y_1 - y_2\|_E > r/2$. On a alors

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\|_E \leq 2M \leq \frac{4M}{r}\|y_1 - y_2\|_E\,.$$

On conclut en prenant la constante de Lipschitz $L_0 := \max\left(\frac{4M}{r}, L\right)$.

■

Théorème 2.8 (Unicité locale) *Soit $f : I \times D \to E$ une fonction continue,* **localement lipschitzienne** *par rapport à x. Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions locales du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y(t)) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Alors

$$y_1\big|_{J_1\cap J_2} = y_2\big|_{J_1\cap J_2}\,.$$

Preuve. Soit $I \subset J_1 \cap J_2$ un intervalle compact, et soit $K = y_1(I) \cup y_2(I)$ qui est donc compact. Le lemme précédent implique que f est globalement lipschitzienne sur $J \times K$. On en déduit (voir la Proposition 2.4) que $y_1\big|_I = y_2\big|_I$. Le fait que I soit un compact arbitraire de $J_1 \cap J_2$ montre le résultat. ■

Corollaire 2.9 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si deux solutions de l'équation $y'(t) = f(t,y(t))$ coïncident en un point, elle coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

2.4 Solution maximale

Corollaire 2.10 (Existence d'une unique solution maximale) *Sous les hypothèses du théorème 2.8, il existe une unique solution maximale (J, y) au problème (1). De plus, J est ouvert dans I.*

Preuve. On pose

$$t^+ = \sup \left\{ \tilde{t} \mid \text{il existe une solution sur } [t_0, \tilde{t}] \right\}.$$

et

$$t^- = \inf \left\{ \tilde{t} \mid \text{il existe une solution sur } [\tilde{t}, t_0] \right\}.$$

On définit une solution sur $]t^-, t^+[$ en "recollant les morceaux" de la façon suivante : si $t \in]t^-, t^+[$ avec $t > t_0$, alors il existe $\tilde{t} > t$ tel que $([t_0, \tilde{t}], \tilde{y})$ soit solution. On pose alors $y(t) = \tilde{y}(t)$. Par unicité locale, ceci définit bien une solution.
Supposons maintenant que t^+ soit dans l'intérieur (relatif) de I. Alors on peut résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{y}'(t) & = & f(t, \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t^+) & = & y(t^+) \end{array} \right.$$

ce qui fournit une solution sur $[t^+, t^+ + \varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Ceci est impossible. Le même raisonnement montre que t^+ et t^- ne sont pas dans l'intérieur de I. ∎

3 Le cas continu en dimension finie

3.1 Le théoréme d'Ascoli

Définition 3.1 *Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I and E. On dit que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue si*

$$\forall t \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t' \in I, |t - t'| < \delta \Longrightarrow \|g_n(t') - g_n(t)| < \varepsilon$$

Théorème 3.2 *Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I, intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, dans E, équicontinue et de plus uniformément bornée par $M \in \mathbb{R}_+$, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n\|_\infty := \sup_{t \in I} \|g_n(t)\|_E \leq M.$$

On peut extraire une sous-suite $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur I vers une fonction g continue sur I.

La preuve ne fait pas partie du programme de ce cours.

3.2 Solutions approchées

On suppose ici que $E = \mathbb{R}^d$ est de dimension finie. I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$ un ouvert connexe. On considère à nouveau le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t, x(t)), \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

avec $f : I \times D \to E$ **continue**.

Définition 3.3 *Soit $\varepsilon > 0$, $J \subset I$ et $x : J \to D$. On dit que (J, x) est une ε-solution approchée si*

- *J est d'intérieur non vide et $t_0 \in J$,*
- *$x \in \mathcal{C}(J; D)$,*
- *$x(t_0) = x_0$,*
- *pour tout $t \in J$,*

$$\left\| x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon.$$

Lemme 3.4 *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times D; E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times D$. Soient $\eta, r > 0$ tels que $I_\eta = [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset I$ et $\overline{B_r(x_0)} \subset D$. On pose*

$$C_{\eta,r} = I_\eta \times \overline{B_r(x_0)}, \quad M = \max_{(t,x) \in C_{\eta,r}} \|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^d} \quad \textit{et} \quad \tilde{\eta} = \min(\eta, \frac{r}{M}).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-solution approchée $x_\varepsilon \in \mathcal{C}(I_{\tilde{\eta}}, \overline{B_r(x_0)})$. De plus,

$$\forall\, (t, s) \in I_{\tilde{\eta}}^2, \quad \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^d} \leq M|t - s|.$$

Preuve. L'ensemble $C_{\eta,r}$ étant compact, la fonction $f\big|_{C_{\eta,r}}$ est uniformément continue (hypothèse de dimension finie). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$\max(\|x - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^d}, |t - \bar{t}|) < \delta \Longrightarrow \|f(t,x) - f(\bar{t}, \bar{x})\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\varepsilon}{\tilde{\eta}}. \tag{3}$$

Considérons alors des points t_j, $j = -n, \ldots, n$, tels que

$$t_0 - \tilde{\eta} = t_{-n} < t_{-n+1} < \cdots < t_0 < \cdots < t_n = t_0 + \tilde{\eta}$$

et tels que

$$\max_{j=-n,\ldots,n-1} |t_{i+1} - t_i| \leq \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}.\right)$$

On définit alors

$$x_\varepsilon(t) = \left\{ \begin{array}{lll} x_\varepsilon(t_i) + (t - t_i) f(t_i, x_\varepsilon(t_i)) & \text{pour} & t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \geq 0, \\ x_\varepsilon(t_{i+1}) + (t - t_{i+1}) f(t_{i+1}, x_\varepsilon(t_{i+1})) & \text{pour} & t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \leq -1. \end{array} \right.$$

A priori, cette fonction est définie sur un intervalle du type $[t_{-\tilde{K}}, t_K]$ avec $\tilde{K}, K \leq n$ où K est défini comme le plus petit indice pour lequel il existe $t \in [t_{K-1}, t_K]$ tel que $x_\varepsilon(t_i) + (t - t_i)f(t_i, x_\varepsilon(t_i))$ ne soit pas dans $\overline{B_r(x_0)}$ ($\tilde{K}$ est défini similairement).
Pour $t \in [t_0, t_K]$ on a

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t_0)\|_{\mathbb{R}^d} &\leq \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t_{K-1})\|_{\mathbb{R}^d} + \sum_{\ell=1}^{K-1} \|x_\varepsilon(t_\ell) - x_\varepsilon(t_{\ell-1})\|_{\mathbb{R}^d} \\
&\leq (t - t_{K-1})\|f(t_{K-1}, x_\varepsilon(t_{K-1}))\|_{\mathbb{R}^d} \\
&\qquad + \textstyle\sum_{\ell=1}^{K-1}(t_\ell - t_{\ell-1})\|f(t_{\ell-1}, x_\varepsilon(t_{\ell-1}))\|_{\mathbb{R}^d} \\
&\leq M(t - t_0) \\
&\leq M\tilde{\eta} \leq r.
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que x_ε ne sort pas de $\overline{B_r(x_0)}$ et ceci montre que $K = n$. Le même raisonnement montre que $\tilde{K} = n$, et de plus pour t et s dans $I_{\tilde{\eta}}$ on a

$$\|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^d} \leq M|t - s|. \tag{4}$$

Enfin, pour $0 \leq \ell < n$ et $t \in [t_0, t_{\ell+1}]$, on a

$$\begin{aligned}
&x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leq (t - t_\ell)f(t_\ell, x_\varepsilon(t_\ell)) + \sum_{i=0}^{\ell-1}(t_{i+1} - t_i)f(t_i, x_\varepsilon(t_i)) - \int_{t_0}^t f(s, x_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_{t_l}^t f(t_\ell, x_\varepsilon(t_\ell)) - f(s, x_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{\ell-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t_i, x_\varepsilon(t_i)) - f(s, x_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Notons que pour un i fixé et $s \in [t_i, t_{i+1}]$, on a évidemment $|s - t_i| < \delta$ et

$$\|x_\varepsilon(t_i) - x_\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^d} \leq M|t_i - s| \leq M\frac{\delta}{M} = \delta.$$

L'inégalité (3) peut donc s'appliquer, et on obtient

$$\|x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\varepsilon}{\tilde{\eta}}(t - t_0) \leq \varepsilon.$$

Le même raisonnement pour $t \leq t_0$ montre le résultat. ∎

Théorème 3.5 (Cauchy Peano) *Avec les notations et les hypothèses utilisées dans le lemme précédent, il existe au moins une solution locale définie sur $I_{\tilde{\eta}}$. De plus $x \in \mathcal{C}^1(I_{\tilde{\eta}}, \overline{B_r(x_0)})$.*

Preuve. On utilise le lemme précédent, avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On note $x_n \in \mathcal{C}(I_{\tilde{\eta}}, \overline{B_r(x_0)})$ la

$\frac{1}{n}$-solution approchée. Le point important ici est que $\tilde{\eta}$ et M ne dépendent pas de n dans l'estimation (4).
On utilise le théorème d'Ascoli pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En vertu de l'estimation (4), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$est équicontinue (il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$). De plus, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I_{\tilde{\eta}}, \|x_n(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq r$$

et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée. On en déduit donc qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in \mathcal{C}(I_{\tilde{\eta}}, \overline{B_r(x_0)})$. Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| x_{n_k}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n_k}(s))\, \mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{n_k},$$

ce qui montre que l'expression du membre de gauche tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.
Mais on a vu que x_{n_k} tend vers x uniformément sur $I_{\tilde{\eta}}$. Ceci implique en particulier que

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n_k}(s))\, \mathrm{d}s \longrightarrow \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s, \quad \text{pour} \quad k \to +\infty.$$

On en déduit donc que

$$\forall\, t \in I_{\tilde{\eta}}, \quad x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s = 0,$$

ce qui montre le résultat. ■

Remarque 3.6 En dimension infinie, le théorème est faux. Il faut faire une hypothèse du type que l'image $f(I_{\tilde{\eta}}, \overline{B_r(y_0)})$ est compacte. ■

Théorème 3.7 *Sous les hypothèses précédentes, il existe une solution maximale définie sur un intervalle J ouvert dans I.*

Remarque 3.8 En fait pour toute solution locale, il existe une solution maximale qui la prolonge. ■

4 Dépendance continue

On considère cette fois $f : I \times E \to E$ une fonction globalement Lipschitzienne par rapport à y. On note $t \to y(t, y_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

La proposition suivante montre la continuité de la solution par rapport à la condtion initiale y_0.

Proposition 4.1 *Avec les notations précédentes, pour tout intervalle J compact inclus dans I, l'application*

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathcal{C}(J,E) \\ y_0 & \mapsto & y_0(t,y_0) \end{array}$$

est continue, et de plus pour tout y_0 et $\tilde{y}_0$ dans E, on a l'estimation

$$\forall\, t \in J, \quad \|y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0)\|_E \leq e^{L|t-t_0|}\|y_0 - \tilde{y}_0\|_E$$

Preuve. On a par définition pour tout $J \subset I$ compact,

$$\forall\, t \in J, \quad y(t,y_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s,y_0))\mathrm{d}s.$$

d'où

$$y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0) = y_0 - \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s,y_0)) - f(s,y(s,\tilde{y}_0))\,\mathrm{d}s,$$

ce qui donne la majoration

$$\forall\, t \in J, \quad \|y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0)\|_E \leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|_E + L\int_{t_0}^{t} \|y(s,y_0)) - y(s,\tilde{y}_0)\|_E\,\mathrm{d}s.$$

Le lemme de Gronwall donne alors immédiatement le résultat. ■

On vérifiera en exercice qu'en fait l'application

$$\begin{array}{rcl} J \times E & \to & E \\ (t,y_0) & \mapsto & y(t,y_0) \end{array}$$

est continue.

On se place maintenant dans le cas localement Lipschitz décrit plus haut.

Proposition 4.2 *Avec les notations habituelles, soit $f : I \times D \to E$ une fonction localementl lipschitizienne. Alors pour tout y_0 dans D, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y_0 et $\eta > 0$ tel que pour tout $\tilde{y}_0$ dans $\mathcal{V}$, il existe une unique solution sur l'intervalle $I_\eta = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$. De plus l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V} & \to & \mathcal{C}(I_\eta, D) \\ \tilde{y}_0 & \mapsto & y(\,\cdot\,,\tilde{y}_0) \end{array}$$

est continue.

Preuve. On reprend la construction du théorème 2.5 (Existence d'une unique solution). Partant de l'hypothèse f continue et localement lipschitzienne sur $[t_0-\eta, t_0+\eta] \times B_r(y_0)$, on a obtenu l'existence d'une solution unique sur l'intervalle $[t_0 - \tilde{\eta}, t_0 + \tilde{\eta}]$ avec $\tilde{\eta} = \min(\eta, r/(2M))$. De plus, la solution obtenue satisfait

$$\|y(t,y_0) - y_0\|_E \leq \frac{r}{2},$$

de sorte que $y(t, y_0))$ ne “sort” pas de la boule de centre y_0 et de rayon $r/2$. Considérons maintenant $\tilde{y}_0 \in B_{r/4}(y_0)$. On peut à nouveau construire une solution sur un intervalle $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ en prenant cette fois $\mu = \min(\eta, r/(4M))$, de sorte que

$$\|y(t, \tilde{y}_0) - \tilde{y}_0\|_E \leq \frac{r}{4}.$$

Ainsi, on a :

$$\|y(t, \tilde{y}_0) - y_0\|_E \leq \|y(t, \tilde{y}_0) - \tilde{y}_0\|_E + \|\tilde{y}_0 - y_0\|_E \leq \frac{r}{2},$$

c’est-à-dire que $y(t, \tilde{y}_0)$ ne sort pas de la boule $B_{r/2}(y_0)$ sur l’intervalle

$$[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \subset [t_0 - \eta, t_0 + \eta].$$

Donc les deux solutions $y(t, y_0)$ et $y(t, \tilde{y}_0)$ sont bien définies sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ et restent dans $B_{r/2}(y_0)$. Elles coincident donc avec les solutions de

$$\dot{y} = F(t, y)$$

avec conditions initiales $y(t_0, y_0) = y_0$ et $y(t, \tilde{y}_0) = \tilde{y}_0$. Comme F est globalement lipschitzienne, on a la dépendance continue.

■

On se place ci-dessous dans le cas $D = E = \mathbb{R}^d$.

Proposition 4.3 *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à y, et soient $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in \mathbb{R}$, et (J, y) la solution maximale du problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

Alors on peut écrire J sous la forme $J =]T^-(y_0), T^+(y_0)[$ et de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $R_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, \tilde{y}_0 \in B_{R_\varepsilon}(y_0), \quad \left\{ \begin{array}{l} T^+(\tilde{y}_0) \geq T^+(y_0) - \varepsilon \quad (\textit{resp.} \quad \dfrac{1}{\varepsilon} \quad \textit{si} \quad T^+(y_0) = +\infty) \\[2ex] T^-(\tilde{y}_0) \leq T^-(y_0) + \varepsilon \quad (\textit{resp.} \quad -\dfrac{1}{\varepsilon} \quad \textit{si} \quad T^-(y_0) = -\infty) \end{array} \right.$$

En outre, l’application (respectivement la même application où les bornes de l’intervalle de définition sont modifiées en $\pm 1/\varepsilon$ selon la valeur de $T^\pm(y_0)$)

$$\begin{array}{rcl} B_{R_\varepsilon}(y_0) & \to & \mathcal{C}([T^-(y_0) + \varepsilon, T^+(y_0) - \varepsilon], \mathbb{R}^d) \\ \tilde{y}_0 & \mapsto & y(\,\cdot\,, \tilde{y}_0) \end{array} \tag{5}$$

est Lipschitz.

Preuve. On pose

$$T_\varepsilon^+ = \min\Big(\frac{1}{\varepsilon}, T^+(y_0) - \varepsilon\Big) \quad \text{et} \quad T_\varepsilon^- = \max\Big(-\frac{1}{\varepsilon}, T^-(y_0) + \varepsilon\Big),$$

et

$$M_\varepsilon = \sup_{t\in[T_\varepsilon^-,T_\varepsilon^+]} \|y(t,y_0)\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Soit $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ une fonction satisfaisant

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ \in [0,1] & \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

On pose

$$F_\varepsilon(t,y) = \theta\Big(\frac{\|y\|_{\mathbb{R}^d}}{2M}\Big) f(t,y).$$

Il est clair que $y\Big|_{[T_\varepsilon^-,T_\varepsilon^+]}$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & F_\varepsilon(t,y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{6}$$

Pour tout $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^d$, on note $y_\varepsilon(\,\cdot\,,\tilde{y}_0)$ la solution globale (car F_ε est globalement lipschitzienne par rapport à y) correspondant au système (6) ayant pour valeur initiale $\tilde{y}_0$ en t_0. On a alors (grâce au lemme de Gronwall) que pour tout $t \in [T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+]$,

$$\|y_\varepsilon(t,\tilde{y}_0) - y_\varepsilon(t,y_0)\|_{\mathbb{R}^d} \leq e^{L_\varepsilon|t-t_0||}\|y_0 - \tilde{y}_0\|_{\mathbb{R}^d}$$

On voit donc que si

$$\|\tilde{y}_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^d} \leq R_\varepsilon := M_\varepsilon \exp\big(-L_\varepsilon \max(|T_\varepsilon^- - t_0|, |T_\varepsilon^+ - t_0|)\big)$$

on a

$$\|y_\theta(t,\tilde{y}_0) - y_\varepsilon(t,y_0)\|_{\mathbb{R}^d} \leq M_\varepsilon$$

pour $t \in [T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+]$. En particulier, pour tout $\tilde{y}_0 \in B_R(y_0)$ et tout $t \in [T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+]$, on a $\|y_\varepsilon(t,\tilde{y}_0)\| \leq 2M_\varepsilon$, et donc y_ε est en fait solution du problème avec $f(t,y)$ comme second membre, c'est-à-dire qu'on a $y_\varepsilon(t,\tilde{y}_0) = y(t,\tilde{y}_0)$. Ceci montre donc que pour tout $\tilde{y}_0 \in B_{R_\varepsilon}(y_0)$ on a $T^-(\tilde{y}_0) \leq T_\varepsilon^-$ et $T^+(\tilde{y}_0) \geq T_\varepsilon^+$. La majoration précédente montre de plus que l'application (5) est Lipschitz. ■

Remarque 4.4 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors on peut montrer (exercice) que l'application $y_0 \mapsto y(t,y_0)$ est $\mathcal{C}^1$ et que de plus l'application

$$t \mapsto Y(t) = D_{y_0} y(t,y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

est solution du problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{Y}(t) & = & D_y f(t,y(t)) \cdot Y(t) \\ Y(0) & = & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} \end{array} \right.$$

■

Remarque 4.5 On peut avoir une solution globale pour un y_0 mais pas pour un voisinage de ce même y_0. Par exemple, le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & y(t)^2 \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

admet pour solution $y(t) \equiv 0$ si $y_0 = 0$ (solution globale), mais

$$y(t) = \frac{1}{-t + \frac{1}{y_0}}$$

dès que $y_0 \neq 0$. On voit donc que $T^+(0) = +\infty$, $T^-(0) = -\infty$, mais que pour $y_0 > 0$, $T^+(y_0) = \frac{1}{y_0}$ et $T^-(y_0) = -\infty$. ■

5 Principe de majoration a priori. Solutions globales.

On considère maintenant $f : I \times D \to \mathbb{R}^d$ un fonction continue, $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 5.1 *Soit (J, y) une solution maximale du problème*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array}\right.$$

On note $J =]T^-, T^+[$. Alors

- *Soit* $T^+ = \sup I$
- *Soit* $\liminf_{t \to T^+} d(y(t), \partial D) = 0$
- *Soit $f(t, y(t))$ n'est pas borné en T^+ (et donc $y(t)$ est non borné en T^+).*

De même,

- *Soit* $T^- = \inf I$
- *Soit* $\liminf_{t \to T^-} d(y(t), \partial D) = 0$
- *Soit $f(t, y(t))$ n'est pas borné en T^- (et donc $y(t)$ est non borné en T^-).*

Si de plus f est localement lipschitzienne par rapport à y, alors l'alternative devient

- *Soit* $T^+ = \sup I$
- *Soit* $\lim_{t \to T^+} d(y(t), \partial D) = 0$
- *Soit* $\lim_{t \to T^+} \|y(t)\| = +\infty$.

et de même en T^-.

Remarque 5.2 *Dans le cas où I est fermé, par exemple $I = [0, T]$, alors soit $T^+ = T$ et $T^+ \in J$, soit J est ouvert en T^+ et alors soit $f(t, y(t))$ est non bornée en T^+, soit* $\liminf_{t \to T^+} d(y(t), \partial D) = 0$.

On va en fait démontrer un énoncé plus élémentaire du théorème précédent, dans le cas $D = E$ (E **Banach quelconque ici**) et en supposant que f est localement lipschitzienne par rapport à y. Soit (J, y) la solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

L'intervalle J est ouvert dans I donc de la forme $J =]T^-, T^+[$. Si $T^+ < \sup I$, la solution maximale "explose" au voisinage de T^+, de la manière décrite dans les théorèmes suivants :

Théorème 5.3 (Sortie de tout compact) *Soit $(]T^-, T^+[, y)$ la solution maximale du problème de Cauchy. Si $T^+ < \sup I$, alors la trajectoire $\{y(t)\}_{t \in]T^-, T^+[}$ sort de tout compact au voisinage de T^+ : quel que soit K compact de E, il existe $T_K \in]T^-, T^+[$ tel que, pour tout $t \in [T_K, T^+[$, $y(t) \in E/K$.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un compact K de E et une suite de points $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $]T^-, T^+[$ tendant vers T^+ pour n tendant vers l'infini, tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n > N, \quad y(t_n) \in K.$$

Soit alors $y^+ \in K$ une valeur d'adhérence de cette suite. Comme f est continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable, il existe η, r, L et M des réels strictement positifs tels que :

$$\begin{array}{ll} (i) & [T^+ - \eta, T^+ + \eta] \times B_r(y^+) \subset I \times D, \\ (ii) & \forall (t, y) \in [T^+ - \eta, T^+ + \eta] \times B_r(y^+), \quad \|f(t, y)\|_E \leq M, \\ (iii) & \forall (t, y_1), (t, y_2) \in [T^+ - \eta, T^+ + \eta] \times B_r(y^+), \quad \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\|_E \leq L\|y_2 - y_1\|_E. \end{array}$$

On pose alors $\hat{\eta} = \min(\eta, \frac{r}{2M})$ et on se donne n tel que

$$|T^+ - t_n| < \frac{\hat{\eta}}{3} \text{ et } \|y(t_n) - y^+\| < \frac{r}{2}.$$

Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont encore vraies sur $[t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B_{r/2}(y(t_n))$. D'après le théorème d'existence locale, il existe une solution sur un intervalle $[t_n - \alpha, t_n + \alpha]$ avec $\alpha = \min(\eta/2, r/(4M)) = \hat{\eta}/2$. Or, on a :

$$t_n + \alpha > T^+ - \hat{\eta}/3 + \hat{\eta}/2 > T^+.$$

On peut donc définir un prolongement strict de la solution, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité de la solution. ■

Corollaire 5.4 (Explosion en temps fini) *On suppose que E est de dimension finie. Soit $(]T^-, T^+[, y)$ la solution maximale du problème de Cauchy. Si $T^+ < \sup I$, alors*

$$\lim_{t \to T^+} \|y(t)\|_E = +\infty.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $K = B_R(0)$ et $R > 0$ aussi grand que l'on souhaite. Ainsi, pour tout $R > 0$, il existe $T_R \in]T^-, T^+[$ tel que pour tout $t \in [T_R, T^+[$, $\|y(t)\|_E > R$. C'est très exactement dire que $\lim_{t\to T^+} \|y(t)\|_E = +\infty$. ■

Remarque 5.5 Si E est de dimension finie, il suffit de montrer qu'une solution maximale est bornée pour qu'elle soit globale ! ■

Exemple 5.6 Soit I un intervalle ouvert. Considérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

où $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue et satisfait

$$\forall\, t \in I, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|f(t,y)\|_E \leq \alpha(t)\|y\|_E + \beta(t)$$

où α et β sont deux fonctions positives appartenant à $L^1_{loc}(I)$ (c'est-à-dire que pour tout compact $J \subset I$, on a $\int_J \alpha < +\infty$). Alors on a pour tout intervalle J compact de I et tout $t \in J$,

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \left| \int_{t_0}^t \alpha(s)\|y(s)\| \,\mathrm{d}s \right| + \left| \int_{t_0}^t \beta(s)\,\mathrm{d}s \right|$$

et donc

$$\|y(t)\| \leq \exp\left(\left| \int_{t_0}^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s \right| \right) \left(\|y_0\| + \left| \int_{t_0}^t \beta(s)\,\mathrm{d}s \right| \right).$$

Donc y est borné sur J, et donc puisque J est arbitraire, la solution existe sur I tout entier.

Notons le cas particulier où f est Lipschitz par rapport à y, continue, et où il existe $L(t) \geq 0$ appartenant à $L^1_{loc}(I)$ telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \left\|f(t,x) - f(t,y)\right\|_E \leq L(t)\left\|x - y\right\|_E.$$

Alors on a

$$\left\|f(t,y)\right\|_E \leq L(t)\left\|y\right\|_E + \left\|f(t,0)\right\|_E$$

qui vérifie bien les hypothèses (un fonction continue sur I est bien $L^1_{loc}(I)$).

Un autre cas particulier est celui où

$$f(t,y) = A(t)y + b(t)$$

où

$$A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$$

est une matrice dépendant du temps, et $b(t) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$ un vecteur. On étudiera plus amplement les systèmes linéaires dans le chapitre suivant. ■

Exemple 5.7 On considère maintenant $I = \mathbb{R}_+$, $t_0 \geq 0$, et

$$f(t,y) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k y^k,$$

avec $a_{2p-1} < 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \left(y^2\right)' &= 2\sum_{k=0}^{2p-1} a_k y^{k+1} \\ &= 2a_{2p-1}y^{2p} + Q(y) \end{aligned}$$

où $Q(y)$ est un polynôme de degré plus petit que $2p$. Il existe β une constante positive, telles que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad 2a_{2p-1}y^{2p} + Q(y) \leq \beta.$$

On en déduit donc que

$$y^2(t) \leq y(t_0)^2 + \beta(t - t_0).$$

Attention au fait que la solution n'est pas globale sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$\blacksquare$

Exemple 5.8 (Fonction de Lyapunov). On considère maintenant un fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \nabla V(y), f(y)\rangle \leq 0,$$

et

$$\forall\, M \geq 0, \quad \{\, y \,|\, V(y) \leq M \,\} \quad \text{est borné.}$$

Alors on a le long de tout solution

$$\frac{\mathrm{d}V(y(t))}{\mathrm{d}t} = \langle \nabla V(y(t)), \dot{y}(t)\rangle = \langle \nabla V(y(t)), f(y(t))\rangle \leq 0,$$

donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad V(y(t)) \leq V(y(t_0))$$

ce qui montre l'existence globale sur $\mathbb{R}_+$.

Un cas particulier de tels systèmes concerne les systèmes gradient du type

$$\dot{y}(t) = -\nabla V(y(t)).$$

Une autre grande classe de systèmes possédant une fonction de Lyapunov est donnée par les systèmes Hamiltonien du type

$$\ddot{q} = -\nabla U(q)$$

qui s'écrivent encore

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{p} & = & -\nabla_q H(p,q), \\ \\ \dot{q} & = & +\nabla_p H(p,q) \end{array} \right.$$

où $p, q \in \mathbb{R}^d$ et où $H(p,q) = \frac{1}{2}p^T p + U(q)$ est une quantité conservée le long du système. De même, le système de Lotka-Volterra étudié en introduction est un système avec une énergie conservée, ce qui donne l'existence globale (il s'agit en fait d'un système Hamiltonien à condition de faire un changement de variable). ■