Anneaux et Arithmétique - Contrôle continu 3
L3, semestre 2 (2012-2013)
Université Rennes I
Durée : 1h30 heure
Calculatrices et documents interdits. Justifiez toutes vos réponses, une rédaction détaillée est attendue.

Exercice 1

a) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux entre deux anneaux commutatifs A, B. Soit $I \subset B$ un idéal engendré par un ensemble fini $y_1, ..., y_k$. Soient $x_1, ...x_k$ des préimages par f des $(y_i)_{1\leq i\leq k}$. Montrez que l'idéal $f^{-1}(I)$ est l'idéal engendré par $\ker(f)$ et $x_1, ...x_k$.
b) Montrez que $\mathbb{Z}[X]/(7, X-1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Problème

Si X est un espace topologique, on note $C^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On rappelle le résultat de topologie suivant :

Lemme 1 (Tietze-Urysohn) *Soient X, Y deux espaces compacts, avec $Y \subset X$. Pour toute fonction $f \in C^0(Y)$, il existe une fonction $g \in C^0(X)$ qui prolonge f, c'est à dire $g_{|Y} = f$.*

Dans tout le problème, X est un espace topologique compact, non vide. On n'hésitera pas à supposer pour simplifier certaines réponses que X est un espace métrique, bien que cela ne soit pas nécessaire.
1) Montrez que $C^0(X)$, muni de l'addition et la multiplication ponctuelle de fonctions, est un sous-anneau de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, l'anneau des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.
2) Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble fermé de X. On considère l'application de restriction :

$$\begin{aligned} R_Y : C^0(X) &\to C^0(Y) \\ f &\mapsto f_{|Y}. \end{aligned}$$

et on note $\mathcal{I}(Y) = \{f \in C^0(X) : \forall y \in Y, f(y) = 0\}$. Montrez que R_Y est un morphisme d'anneaux, et que $\mathcal{I}(Y)$ est un idéal.
3) Montrez que $C^0(X)/\mathcal{I}(Y)$ est isomorphe à $C^0(Y)$.
4) Montrez que, si X contient exactement 2 points, $C^0(X)$ n'est pas intègre.
5) Montrez que $C^0(X)$ est intègre si et seulement si X est réduit à un point, et que dans ce cas, $C^0(X)$ est un corps.
6) Pour $Y \subset X$ un fermé, montrez que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{I}(Y)$ est maximal.

2. $\mathcal{I}(Y)$ est premier.

3. Y est un point.

7) Pour I un idéal de $C^0(X)$, on note $\mathcal{V}(I) = \cap_{f\in I} f^{-1}(0)$. Montrez que $\mathcal{V}(I)$ est compact. Montrez que $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.
8) Montrez que pour $Y \subset X$ fermé, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(Y)) = Y$.
9) Soit I un idéal tel que $\mathcal{V}(I) = \emptyset$.
a) Montrez que pour tout $x \in X$, il existe $f \in I$ et un ouvert U contenant x tels que f ne s'annule pas sur U.
b) En déduire qu'il existe une famille *finie* de fonctions $F \subset I$ telle que $\cap_{f\in F} f^{-1}(0) = \emptyset$.

10) Même hypothèses et notations que le 9), montrez, en considérant $\sum_{f \in F} f^2$, que $I = C^0(X)$.
11) En déduire que les idéaux maximaux de $C^0(X)$ sont exactement les $\mathcal{I}(\{x\})$, pour x parcourant X.
12) Dans cette question et cette question seulement, on suppose que X est l'intervalle $[0;1] \subset \mathbb{R}$. Soit I l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent sur l'intervalle $[0,\epsilon]$ pour un certain $\epsilon > 0$ dépendant de la fonction. Montrez que I est un idéal. Décrivez $\mathcal{V}(I)$, et montrez que $I \neq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.
13) Soit Y un compact de X, montrez que $\mathcal{I}(Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $C^0(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur $C^0(X)$.
14*) Soit I un idéal de $C^0(X)$. Montrez que pour tout voisinage ouvert U de $\mathcal{V}(I)$, il existe $f \in I$ telle que $f = 1$ sur le complémentaire de U, et $|f| \leq 1$. Montrez que si I est fermé pour la topologie de la convergence uniforme, alors $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. (*Nullstellensatz dans le cas des fonctions continues*)