Théorie des distributions et Analyse de Fourier

Mohamed Lemou

Semestre 6 2014-2015

Table des matières

Chapitre 1

Motivations

1.1 Quelques motivations

La théorie des distributions est l'œuvre de Laurent Schwartz (1950s) pour plusieurs raisons...

1.1.1 Généralisation de la notion de fonction

Soit une charge (ou une masse) « ponctuelle », c'est-à-dire concentrée en un point. Du point de vue fonctionnel classique, la fonction distribution qui la décrit est la fonction nulle, ce qui n'est pas acceptable du point de vue physique.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact telle que

$$\int \varphi \mathrm{d}x = 1.$$

La masse ponctuelle peut être vue comme la limite de la suite

$$\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx) \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

On a :

$$\int \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$$

Cet objet limite est connu sous le nom de la fonction de Dirac, δ_0, introduite par Dirac (1920s) et utilisée largement par les physiciens depuis.

1.1.2 Généralisation de la notion de dérivée

La théorie des distribution permettra de dériver des fonctions seulement L^1_{loc} (intégrable sur tout compact) (et au-delà) indéfiniment. L'opérateur de dérivation sera continu dans l'espace des distributions alors qu'elle ne l'est pas dans un cadre classique.

Exemple : (i) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas constante. On définit

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(nx)$$

sur $\mathbb{R}$. On a

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mais

$$\varphi_n'(x) = \varphi'(nx) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(ii) Prenons $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-nx^2}$.

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{uniformément sur } \mathbb{R}$$

Mais $\varphi_n'(x) = -2x\sqrt{n}e^{-nx^2}$ et

$$\varphi_n'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -2 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1.1.3 Solutions généralisées ou faibles d'équations aux dérivées partielles

Dans les années 1930, Sobolev et Leray ont introduit la notion de solutions faibles.

Exemple 1 : On se donne une vitesse $v > 0$. Si $\rho(t,x)$ est la densité, l'équation de transport s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\rho + v\partial_x\rho = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \end{array}\right. \qquad (T)$$

La solution est

$$\rho(t,x) = \rho(0, x-vt) = \rho_0(x-vt).$$

Or ρ_0 peut ne pas être dérivable au sens classique. Il faudrait donner un sens à l'équation aux dérivées partielles (T) pour des fonctions non dérivables.

Exemple 2 : Équation des ondes

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \\ u(0,x) = f(x) + g(x) \\ \partial_t u(0,x) = f(x) - g(x) \end{array}\right.$$

La solution générale est

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

mais à priori, la physique n'impose rien sur f et g.

Soit u une fonction donnée, pas forcément dérivable. Au lieu de s'intéresser à u, on s'intéresse aux moyennes (appelées observables par les physiciens) :

$$\int u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^1$ (à support compact). L'opérateur

$$\varphi \mapsto \int u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

On veut aussi écrire l'intégration par parties :

$$\text{« } \int u'\varphi \mathrm{d}x \text{ »} = -\int u(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Pour représenter u', on utilise donc l'opérateur

$$\varphi \mapsto -\int u(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Retour à l'équation de transport :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v\partial_x \rho = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-\infty,+\infty[\times\mathbb{R})$. On intègre l'équation multipliée par φ :

$$\int_{t=0}^{+\infty}\int_{x\in\mathbb{R}} (\partial_t\rho + v\partial_x\rho)(t,x)\varphi(t,x)\mathrm{d}\mathrm{d}yt = 0$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\int_{x\in\mathbb{R}} [\rho(t,x)\varphi(t,x)]_{t=0}^{+\infty}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \rho\partial_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{+\infty}[v\rho\varphi(t,x)]_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t - \int_{t=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \rho v\partial_x\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

soit

$$\forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty, \qquad \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\partial_t\varphi + v\partial_x\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_0(x)\varphi(0,x)\mathrm{d}x = 0. \qquad (T_{\text{faible}})$$

Exercice : Vérifier que

$$\rho(t,x) = \rho_0(x - vt)$$

est bien une solution de (T_{faible}) dès que ρ_0 est continue.

1.2 Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

1.2.1 Calcul différentiel – Notations

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = (x_1, \dots, x_d) = (f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_m(x_1, \dots, x_d))$.

On note $\mathcal{C}^p(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ dont toutes les dérivées partielles d'ordres $\leq p$ existent et sont continues$\}$.

Si $m = 1$, on note $\mathcal{C}^p(\omega, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^p(\Omega)$.

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^p(\Omega)$ et un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, on note

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ est la longueur du multi-indice.

Si $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}.$$

On définit une relation d'ordre sur les multi-indices par :

$$\alpha \leq \beta \qquad \Longleftrightarrow \alpha_k \leq \beta_k,\ k = 1, \dots, d.$$

On définit la factorielle par :

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!.$$

On définit les coefficients :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!}.$$

On a :

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g. \qquad \text{(formule de Leibnitz)}$$

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta} \qquad \text{(binôme)}$$

Exemples d'opérateurs de dérivation : – Gradient : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}$$

– Divergence : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\nabla \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

– Laplacien : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x).$$

– Différentielle : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. La différentielle $\mathrm{d}f(x)$ (ou $f'(x)$) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par :

$$(f'(x).h)_k = (\mathrm{d}f(x)(h))_k = \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x) h_l \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d,\ \forall k \in [\![1, m]\!].$$

– Dérivation composée : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U \subset \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$, $g \in \mathcal{C}^1(V \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ avec $f(U) \subset V$. Alors,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

où $\cdot$ est un produit matriciel.

– Formule de Taylor avec reste intégral : Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I = [a, b])$

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\Omega \subset \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on pose $g(t) = f(a + t(b-a))$, $t \in [0, 1]$ et on écrit la formule de Taylor pour g afin d'en déduire une formule pour f.

1.2.2 Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

Définition 1.1 (*Support d'une fonction définie partout*)

Soit f une fonction définie partout sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On *appelle support de f l'ensemble :*

$$\mathit{Supp}\ f = \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}}.$$

Exemple : On considère

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ car elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et :

$$\theta^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $P_0(x) = 1$ et $P_{n+1}(x) = -x^2(P_n'(x) + P_n(x))$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on pose

$$\rho_{a,b}(x) = \theta(a - x)\theta(x - b).$$

Alors, $\rho_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et Supp $\rho_{a,b} = [a, b]$.

$$\rho_{a,b}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{b-a}{(x-a)(b-x)}\right) & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}^d$, pour $a_k \leq b_k$,

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{d} \theta(a_k - x_k)\theta(x_k - b_k),$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et a pour support $\displaystyle\prod_{k=1}^{d}[a_k, b_k]$.

Autre exemple :

$$\rho(x) = \theta(|x|^2 - 1), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et a pour support $\overline{B(0,1)}$.

1.2.3 Régularisation de fonctions L^1_{loc}

1.2.3.1 Produit de convolution

Définition 1.2

Soit f, g deux fonctions mesurables définies presque partout sur $\mathbb{R}^d$. f, g sont dites convolables si et seulement si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. On pose alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Exemple : Soient $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ (continue à support compact).

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y &= \int_{\text{Supp } g} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq \|g\|_\infty \int_{\text{Supp } g} |f(x-y)|\mathrm{d}y \\
&\leq \|g\|_\infty \int_{\{x\}-\text{Supp } g} |f(z)|\mathrm{d}z < \infty
\end{aligned}$$

car $f \in L^1_{\text{loc}}$ et $\{x\} - \text{Supp } g$ est compact. On peut donc définir $f * g(x)$.

Remarque : $f * g(x) = g * f(x)$ si f et g sont convolables.

Définition 1.3 (*Support d'une fonction définie presque partout*)

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Soit A_f l'ensemble des ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$ tel que $f = 0$ presque partout sur O. Si $A_f = \varnothing$, alors Supp $f = \mathbb{R}^d$. Si $A_f \neq \varnothing$, soit V le plus grand ouvert de A_f. On pose :

$$\text{Supp } f = \mathbb{R}^d \backslash V.$$

On définit V par :

$$V = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}^d,\ r \in \mathbb{Q}_+ \\ f_{|B(q,r)} = 0 \text{ p.p.}}} B(q,r)$$

On a $f_{|V} = 0$ presque partout sur V car la réunion est dénombrable.

Soit W un ouvert tel que $f = 0$ presque partout sur W. On pose $\widetilde{W} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}^d,\ r \in \mathbb{Q}_+ \\ B(q,r) \subset W}}$.

On a $\widetilde{W} = W$. En effet, on a clairement $\widetilde{W} \subset W$. Soit $x \in W$. Il existe $r_x > 0$

tel que $B(x, r_x) \subset W$, et on peut choisir r_x rationnel (quitte à diminuer r_x). Par densité de $\mathbb{Q}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ il existe $q \in \mathbb{Q}^d$ tel que $|q - x| < \frac{r_x}{4}$. $B(q, \frac{r_x}{2}) \subset (x, r_x) \subset W$ et $x \in B(q, \frac{r_x}{2})$ donc $x \in \widetilde{W}$.

Exemple : On considère $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$.
- f comme fonction définie partout a pour support Supp $f = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
- f comme fonction définie presque partout a pour support Supp $f = \varnothing$.

Proposition 1.4

Si f et g sont convolables alors

$$Supp(f * g) \subset \overline{Supp\ f + Supp\ g}.$$

Rappel : La somme de deux fermés n'est pas toujours un fermé. Par contre, la somme d'un fermé et d'un compact est fermée.

Proposition 1.5 (*Régularité du produit de convolution*)

Si $f \in \mathcal{C}_0^p(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors f et g sont convolables et $f * g \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Théorème 1.6

Soit $p, q, r \in [1, +\infty[$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors f et g sont convolables et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \qquad \text{(Inégalité d'Young)}$$

1.2.3.2 Densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$

Définition 1.7 (*Suites régularisantes*)

On appelle suite régularisante toute famille $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ et vérifiant :

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \rho_\varepsilon \geq 0, \quad Supp\ \rho_\varepsilon \subset \overline{B(0, r_\varepsilon)}$$

avec $r_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$.

Exemple : Posons $\theta(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\rho(x) = \dfrac{\theta(x)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\mathrm{d}y}$.

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$$

et on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On a : Supp $\rho_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$.

Proposition 1.8

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$.

Si $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ et ρ_ε une suite régularisante alors $\rho_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f$ uniformément ie.

$$\|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Proposition 1.9

$\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

Le résultat est faux pour $p = \infty$ car si une suite de fonctions continues converge uniformément vers f (*ie.* dans L^∞) vers f, alors f est forcément continue. Mais $L^\infty(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.10

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Alors,

(i) $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

(ii) $\exists f_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1.2.4 Fonctions plateaux et partitions de l'unité

Lemme 1.11 (*des fonctions plateaux (Urysohn)*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K un compact inclus dans Ω. Il existe une fonction

$\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant :*

$0 \leq \chi \leq 1$, *Supp* χ *est compact et inclus dans* Ω, *et* $\chi \equiv 1$ *sur un voisinage de* K

$\triangleright$ Soit $x \in K$ il existe $r_x > 0$ tel que $\overline{B(x, r_x)} \subset \Omega$. On pose

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F_x(y) = 2e\rho\left(\frac{y - x}{r_x}\right).$$

On considère l'ouvert $O_x = \{y \in \Omega,\ F_x(y) > 1\}$. Alors,

$$K \subset \bigcup_{x \in K} O_x.$$

K étant compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} O_{x_i}.$$

Soit $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_{x_i}$. On a $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et g est a support compact. De plus, $g(x) > 1$ pour tout $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} O_{x_i} \supset K$.

Sur $\mathbb{R}$, on prend

$$\rho_{0,1}(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x(1-x)}\right) & \text{pour } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\theta(x) = \int_0^x \rho_{0,1}(y)\mathrm{d}y, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{0,1}(y)\mathrm{d}y = 1.$$

Alors, $\theta(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\theta(x) = \displaystyle\int_0^1 \rho_{0,1}(x)\mathrm{d}x = 1$ pour $x \geq 1$.

On pose alors

$$\chi(x) = \theta(g(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

$\square$

Application : Densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.
$\triangleright$ Soit $f \in L^p(\Omega)$. Soit g définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $G \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|g - G\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$, mais on n'a pas forcément Supp $G \subset \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$K_n = \{x \in \Omega,\ d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n},\ \|x\| \leq n\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n est un compact inclus dans Ω. En effet, K_n est borné et si $x_p \in K_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} x \in \overline{K_n} \subset \overline{\Omega}$ alors comme $|x_p - y| \geq d(x_p, \partial\Omega) = \frac{1}{n}$, en passant à la limite, $|x-y| \geq \frac{1}{n}$. Ainsi, $d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}$ donc $x \in \Omega$ (car $x \in \overline{\Omega}$). De plus, comme $\|x_p\| \leq n$, $\|x\| \leq n$ et donc $x \in K_n$. D'après le lemme d'Urysohn, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\chi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \chi_n \leq 1$ et $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de K_n. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \chi_n G \in \mathcal{C}_0^\infty$ à support inclus dans Ω.

Or

$$\chi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{sur } \Omega$$

et

$$|G - G_n| = |1 - \chi_n||G| \leq |G| \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\|G - G_n\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et enfin,

$$\|g - G_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g - G\|_{L^p(\Omega)} + \|G - G_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

pour n assez grand. $\square$

Théorème 1.12 (*Partition de l'unité*)

Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$, et $O_1, \dots, O_n$ ($O_i \cap K \neq \varnothing\ \forall i$) une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\bigcup_{i=1}^n O_i \supset K.$$

Il existe une famille $f_1, \dots, f_n$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq f_k \leq 1, \quad \textit{Supp } f_k \subset O_k$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = 1 \textit{ sur un voisinage de } K.$$

▷ *Étape 1 :* Recouvrir K par une union fini de compacts :

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_j \supset K, \qquad K_j \subset O_j$$

Soit $x \in O_j$. Il existe $r_x > 0$ tel que $\overline{B(x, r_x)} \subset O_j$. Alors,

$$\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{x \in O_j} B(x, r_x) \supset K$$

De ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini du compact K :

$$\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{x_i \in F_j} B(x_i, r_{x_i}) \supset K$$

où $F_j \subset O_j$ est un ensemble fini. On pose

$$K_j = \bigcup_{x_j \in F_j} \overline{B(x_j, r_{x_j})}$$

et alors

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_j \supset K.$$

D'après le lemme d'Urysohn, il existe $\chi_j \in \mathcal{C}_0^\infty$ $(1 \leq j \leq n)$ à support compact tels que

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq \chi_j \leq 1, \quad \text{Supp } \chi_j \subset O_j, \quad \chi_j \equiv 1 \text{ sur un voisinage } V_j \text{ de } K$$

Soit $V = \bigcup_{j=1} nV_j \supset \bigcup_{j=1}^{n} K_j \supset K$. Il existe donc $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ à support compact telle que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \text{Supp } \chi \subset V, \quad \chi \equiv 1 \text{ sur un voisinage de } K.$$

On pose alors, pour $1 \leq j \leq n$,

$$f_j(x) = \frac{\chi_j(x)}{1 - \chi(x) + \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x)}.$$

f_j est bien définie car, si $x \in V$, $1-\chi(x)+\sum_{k=1}^{n}\chi_k(x) \leq \sum_{k=1}^{n}\chi_k(x) > 0$ et si $x \notin V$, $\chi(x)=0$ donc $1-\chi(x)+\sum_{k=1}^{n}\chi_k(x) > 0$. De plus, f_j est $\mathcal{C}^\infty$, Supp $f_j \subset$ Supp $\chi_j \subset O_j$ et

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = 1 \quad \text{sur un voisinage de } \mathbb{K}$$

car $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de K. On a également $0 \leq f_j \leq 1$. $\square$

Chapitre 2

Distributions : définitions, exemples et opérations

L'idée générale est d'utiliser la dualité.

– En dimension finie $E \sim E^*$.

– Si E est un espace de Hilbert : $E \sim E'$ (théorème de Riesz).

– Si $E = L^p(]0,1[)$, $E' = L^{p'}(]0,1[)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $2 < p < \infty$, alors $1 < p' < 2$ et $L^p \subsetneq L^{p'}$. Si $p < q$ alors $L^q(]0,1[) \subset L^p(]0,1[)$. En effet,

$$\int_0^1 |f|^p \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \times |f|^p \mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 1^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |f|^p r' \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}}$$

et on obtient le résultat avec $r' = \frac{q}{p}$, $\frac{1}{r} = 1 - \frac{p}{q}$.

Pour obtenir la notion de « fonction » la plus étendue possible, il suffirait de prendre le dual de l'espace fonctionnel le « plus petit » possible.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact inclus dans Ω.

2.1 Notion de distribution – Exemples

2.1.1 Définition et quelques exemples

Définition 2.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). Une distribution sur Ω est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui a la propriété de continuité suivante : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support *inclus dans K on a :*

$$|T(\varphi)| = |\langle T, \varphi\rangle| \le c_K \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le p_K}} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty = c_K \sup_{|\alpha|\le p_K} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

On dit que T est d'ordre inférieur ou égal à p si pour tout compact K il existe un tel $p_K \le p$. Le plus petit p tel que T est d'ordre inférieur ou égal à p est appelé l'ordre de la distribution T.

L'espace des distributions sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple : $L^1_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On définit la forme linéaire T_f sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x.$$

T_f est bien définie car

$$\int_\Omega |f\varphi|\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Supp}\ \varphi} |f\varphi|\mathrm{d}x \le \|\varphi\|_\infty \int_{\mathrm{Supp}\ \varphi} |f|\mathrm{d}x \le c_{f,\mathrm{Supp}\ \varphi} \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Soit K un compact. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que Supp $\varphi \subset K$ alors

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \le c_{K,f} \|\varphi\|_\infty$$

avec $c_{K,f} = \int_K |f|\mathrm{d}x$. Ainsi, T_f est une distribution d'ordre 0.

On veut identifier $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour cela, on montre que $f \mapsto T_f$ est injective.

Proposition 2.2

Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est telle que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega f\varphi dx = 0$$

alors $f = 0$ presque partout sur Ω.

$\triangleright$ *Étape 1 :* Montrons que $f = 0$ presque partout sur certaines boules de Ω : si $r > 0$ et $x_0 \in \Omega$ sont tels que $B(x_0, r) \subset \Omega$ alors $f = 0$ presque partout sur $B(x_0, r)$. On pose $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B(x_0, 2r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Soit ρ_ε une suite régularisante ($\rho_\varepsilon \ge 0,\ \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d),$ Supp $\rho_\varepsilon \subset B(0, r_\varepsilon),\ r_\varepsilon \to 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon \mathrm{d}x = 1$). On sait que

$\rho_\varepsilon * g \to g$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $x \in B(x_0, r)$.

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{B(x_0,2r)} \rho_\varepsilon(x-y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{|x-y|<r_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

car $|x-y| < r_\varepsilon \quad \Rightarrow |y-x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| \leq r_\varepsilon + r \leq 2r$ pour ε suffisamment petit. Or pour x fixé dans $B(x_0, r)$, la fonction $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Alors, $\forall x \in B(x_0, r),\ \rho_\varepsilon * g(x) = 0$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $g(x) = 0$ pour presque tout $x \in B(x_0, r)$ *ie.* $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in B(x_0, r)$.

Étape 2 : Extension à tout Ω. On introduit la suite de compacts (K_n) définie par

$$K_n = \left\{ x \in \Omega,\ d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n},\ |x| \leq n \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$K_n \subset \bigcup_{x \in K_n} B\left(x, \frac{1}{2n}\right).$$

On peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini :

$$K_n \subset \bigcup_{j=1}^{p} B\left(x_j, \frac{1}{2n}\right).$$

Comme $d(x_j, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}$, on a $B\left(x_j, \frac{1}{n}\right) \subset \Omega$. En, effet, sinon on aurait $y \in B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)$ tel que $y \notin \Omega$. En considérant $z(t) = x_j + t(y - x_j)$ et $t_0 = \inf\{t \in [0,1],\ z(t) \notin \Omega\}$ (ensemble non vide car contient 1), on a une suite $t_p \in [0,1] \xrightarrow[p \to +\infty]{} t_0$ telle que $z(t_p) \notin \Omega$ et $z(t_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} z(t_0) \notin \Omega$ (car Ω^c est fermé). Donc $t_0 > 0$ et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $z(t_0 - \varepsilon) \in \Omega$ et en passant à la limite $z(t_0) \in \overline{\Omega}$. Alors, $z(t_0) \in \partial\Omega$. Or $\|x_j - z(t_0)\| = t\,\|y - x_j\| < \frac{1}{n}$. Or $d(x_j, z(t_0)) \leq \frac{1}{n}$ absurde.

D'après l'étape 1, $f = 0$ presque partout sur $B(x_j, \frac{1}{2n})$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On en déduit que $f = 0$ presque partout sur K_n car K_n est une union finie de

$B(x_j, \frac{1}{2n})$. Or $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$. En effet, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \subset \Omega$ et si $x \in \Omega$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \Omega$. Montrons que $d(x, \partial\Omega) \geq r_x$. Soit $y \in \partial\Omega$. Alors $y \notin B(x, r_x)$ et donc $\|x - y\| > r_x$ d'où le résultat. Ainsi, en prenant n tel que $r_x \geq \frac{1}{n}$ on a le résultat. Comme l'union est dénombrable on a $f = 0$ presque partout sur Ω. □

Exemple : Masse de Dirac. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $x_0 \in \Omega$. On définit δ_{x_0} par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

Montrons que $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. δ_{x_0} est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit K un compact inclus dans Ω. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ de support inclus dans K. Alors

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_\infty$$

donc δ_{x_0} est une distribution d'ordre 0. Montrons qu'il n'existe pas de $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que $\delta_{x_0} = T_f$. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction. Alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x.$$

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta(0) = 1$ et Supp $\theta \subset [-1, 1]$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \theta(n(x - x_0))$. On a $\varphi_n(x_0) = 1$ donc

$$1 = \varphi_n(x_0) = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\theta(n(x-x_0))\mathrm{d}x = \int_{\Omega\cap B(x_0,\frac{1}{n})} f(x)\theta(n(x-x_0))\mathrm{d}x$$

d'où

$$1 = |\varphi_n(x_0)| \leq \left(\int_{\Omega\cap B(x_0,\frac{1}{n})} |f|\mathrm{d}x \right) \|\theta\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

absurde.

2.1.2 Espace des distributions comme dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si

(i) il existe K compact inclus dans Ω tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, Supp $\varphi_n \subset K$

(i) et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\|\partial^\alpha\varphi_n - \partial^\alpha\varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 2.4

$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall (\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}, \quad \varphi_n \to \varphi$ *dans* $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

$\triangleright$ Supposons que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. On a Supp $\varphi_n \subset K$. En particulier, Supp $\varphi \subset K$. Alors,

$$|\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq c_K \sup_{|\alpha| \leq p_K} \|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Réciproquement, soit T continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Supposons que $T \notin \mathcal{D}'(\Omega)$: il existe un compact K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_{n,p} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que Supp $\varphi_{n,p} \subset K$ et

$$|\langle T, \varphi_{n,p} \rangle| > n \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi_{n,p}\|_\infty .$$

Comme $\langle T, \varphi_{n,p} \rangle \neq 0$, quitte à diviser par cette quantité, on supposer $\langle T, \varphi_{n,p} \rangle = 1$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\psi_n = \varphi_{n,n}$. Alors

$$\sup_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \psi_n\|_\infty < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\psi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais $\langle T, \psi_n \rangle = 1$ ce qui contredit la continuité de T $\square$

2.1.3 Autre exemple

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ mais il existe un objet appelé $VP(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui représente cette fonction.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x.$$

$VP(\frac{1}{x})$ est bien définie car

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{\substack{|x| \geq \varepsilon \\ x \in \text{Supp } \varphi}} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x < \infty$$

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x &= \int_{x > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{x < -\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x \\ &= \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x - \int_{x > \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x \\ &= \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

donc par le théorème de convergence dominée ($x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ est continue)

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Montrons que $VP(\frac{1}{x})$ est une distribution. Soit K un compact. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que Supp $\varphi \subset K \subset [-R, R]$.

$$\left|\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| = \left|2\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x}\mathrm{d}x\right| \leq 2R\left\|\varphi'\right\|_\infty$$

par l'inégalité des accroissements finis. Ainsi, $VP\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}(\Omega)$ et est d'ordre inférieur ou égal à 1. Montrons que l'ordre est 1. Sinon, on aurait

$$\left|\int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x\right| \leq C\left\|\varphi\right\|_\infty, \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$$

Soit φ_n tel que $\varphi_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, $n \geq 3$. Supp $\varphi_n \subset]0,1[$ et $0 \leq \varphi_n \leq 1$. Alors

$$\int_0^1 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \sim \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

mais $\left\|\varphi\right\|_\infty = 1$. absurde.

2.1.4 Convergence d'une suite de distributions

Définition 2.5

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et (T_n) une suite de distributions sur Ω. On dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle.$$

Exemples : 1. Soit $f_n \to f$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *ie.* pour tout compact K, $\int_K |f_n - f|\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$$|\langle T_{f_n} - T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^d}(f_n - f)\varphi\mathrm{d}x\right| \leq \left\|\varphi\right\|_\infty \int_{\text{Supp }\varphi} |f_n - f|\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. On considère la suite $f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},+\infty[}(|x|)$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que $T_{f_n} \to VP(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_{|x|\geq \frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d} = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

donc

$$\left|\left\langle T_{f_n} - VP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(-x)|}{x}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En fait, on a le théorème suivant (admis) :

Théorème 2.6

Si $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une suite telle que $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge vers $T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors l'application $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une distribution sur Ω.

2.1.5 Distributions positives

Définition 2.7

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive si et seulement si

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \varphi \geq 0 \quad\Rightarrow\quad \langle T, \varphi\rangle \geq 0.$$

Exemples : $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $f \geq 0$, masse de Dirac,...

Théorème 2.8

Toute distribution positive est d'ordre 0.

▷ Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution positive. Soit K un compact inclus dans Ω. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec Supp $\varphi \subset K$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de K et $\chi \geq 0$.

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$$

Or, comme T est positive, $\langle T, (\|\varphi\|_\infty - \varphi)\chi \rangle \geq 0$ et donc

$$\langle T, \varphi \rangle \leq \langle T, \chi \rangle \|\varphi\|_\infty .$$

De même $\langle T, (\|\varphi\|_\infty + \varphi)\chi \rangle \geq 0$ donc

$$\langle T, \varphi \rangle \geq -\langle T, \chi \rangle \|\varphi\|_\infty$$

d'où

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \langle T, \chi \rangle \|\varphi\|_\infty$$

et T est d'ordre 0. □

2.2 Opérations sur les distributions

2.2.1 Dérivation d'une distribution

Définition 2.9

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on définit la distribution $\partial_{x_j}T$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \partial_{x_j}T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_{x_j}\varphi \rangle.$$

Cette notion généralise bien sûr la notion classique de dérivabilité de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω au sens suivant.

Théorème 2.10

Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$,

$$\partial_{x_j}T_f = T_{\partial_{x_j}f}.$$

▷ – *Étape 1 :* Cas simple où $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$. Montrons que $T_f' = T_{f'}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$.

$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \underbrace{-\left[f(x)\varphi(x)\right]_a^b}_{=0} + \int_a^b f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle T_{f'}, \varphi \rangle.$$

– *Étape 2 :* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ quelconque. Soit K un compact inclus dans Ω et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset K$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega$. Il existe $C(x, r_x) = \prod_{j=1}^{d}]x_j - r_x, x_j + r_x[\subset \Omega$. On a

$$K \subset \bigcup_{x \in K} C(x, r_x).$$

Par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{p=1}^{n} C_p.$$

D'après le théorème de partition de l'unité, il existe $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que pour tout $1 \leq p \leq n$, $\mathrm{Supp}\,\chi_p \subset C_p$, $\chi_p \geq 0$ et $\sum_{p=1}^{n} \chi_p = 1$ sur un voisinage de K. Alors,

$$\langle \partial_{x_j} T_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \partial_{x_j} \varphi \rangle = -\int_{\omega} f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Or

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{n} \chi_p(x) \varphi(x)$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{x_j} T_f, \varphi \rangle &= -\int_{\Omega} f(x) \sum_{p=1}^{n} \partial_{x_j}(\chi_p(x)\varphi(x)) \mathrm{d}x = -\sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j}(\chi_p(x)\varphi(x)) \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{p=1}^{n} \int_{C_p} f(x) \partial_{x_j}(\chi_p(x)\varphi(x)) \mathrm{d}x = \sum_{p=1}^{n} \int_{C_p} (\partial_{x_j} f(x)) \chi_p(x) \varphi(x) \mathrm{d}x + 0 \\
&= \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega} (\partial_{x_j} f)(x) \chi_p(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\Omega} (\partial_{x_j} f)(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \langle T_{\partial_{x_j} f}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

Exemples : 1. Dérivation de la fonction de Heaviside. $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ donc $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Ainsi, $H' = \delta_0$.

2. $f : x \mapsto \ln|x|$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle \ln(|x|)', \varphi\rangle &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \ln(-x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{+\infty} \ln(x)(\varphi'(x)+\varphi'(-x))\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{+\infty} \ln(x)(\varphi(x)-\varphi(-x))\mathrm{d}x \\
&= -\underbrace{[(\ln(x))(\varphi(x)-\varphi(-x))]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Définition 2.11

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On définit $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle.$$

Proposition 2.12

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. On suppose que $T' = 0$. Alors T est une constante au sens où il existe une constante C telle que $T = T_C$.

$\triangleright$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad 0 = \langle T', \varphi\rangle = \langle T, \varphi'\rangle$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ où $I =]a, b[$. On pose

$$\psi(x) = \int_a^x \left(\varphi(t) - \chi(t)\int_a^b \varphi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

où l'on va choisir $\chi \in \mathcal{D}(I)$. Quand $x \to b$,

$$\psi(x) \xrightarrow[x\to b]{} \int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t - \left(\int_a^b \chi(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \varphi(s)\mathrm{d}s\right)$$

donc on choisit χ telle que $\displaystyle\int_a^b \chi(t)\mathrm{d}t = 1$.

Ainsi définie, $\psi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ et $\langle T, \psi' \rangle = 0$. Donc

$$\left\langle T, \varphi - \chi \int_a^b \varphi(s)\mathrm{d}s \right\rangle = 0$$

d'où

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \rangle \int_a^b \varphi(s)\mathrm{d}s$$

ie. $T = T_{\langle T,\chi \rangle}$. □

Exemple : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \varphi^{(p)}(x_0).$$

$\delta_{x_0}^{(p)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est d'ordre p. En effet,

$$|\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi \rangle| \leq \left\| \varphi^{(p)} \right\|_\infty$$

donc $\delta_{x_0}^{(p)}$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à p. Montrons qu'elle est d'ordre p. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$. Soit $\chi(x) = x^p \theta(x)$, Supp $\chi = [-R, R]$. On a $\chi^{(p)}(0) = p!$. Considérons la suite (φ_n) définie par $\varphi_n(x) = \chi(n(x - x_0))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et Supp $\varphi_n \subset [x_0 - \frac{R}{n}, x_0 + \frac{R}{n}]$. Alors,

$$\varphi_n^{(p)}(x_0) = n^p \chi^{(p)}(0) = n^p p!.$$

Si $\delta_{x_0}^{(p)}$ était d'ordre inférieur ou égal à $p-1$, alors

$$|\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi_n \rangle| \leq C_R \sup_{0 \leq k \leq p-1} \left\| \varphi_n^{(k)} \right\|_\infty.$$

Mais $\varphi_n^{(k)}(x) = n^k \chi^{(k)}(n(x - x_0))$ donc $\left\| \varphi_n^{(k)} \right\|_\infty \leq n^k \left\| \chi^{(k)} \right\|_\infty$ donc

$$n^p p! \leq C_R \times C' \times n^{p-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui est absurde.

Proposition 2.13

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega) \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On a $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

▷ On a

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \to (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle.$$

□

Remarque : On a $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall 1 \leq i,j \leq d, \quad \partial_{x_i}(\partial_{x_j}T) = \partial_{x_j}(\partial_{x_i}T)$.
Contre-exemple pour les fonctions : On considère $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Alors $\partial_x\partial_y f(0,0) = 1$ mais $\partial_y\partial_x f(0,0) = -1$.

2.2.2 Multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition 2.14

Soient $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit la distribution aT par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle aT, \varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle.$$

▷ exercice. □

Exemple : Soit $a \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$. On a $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$. En effet,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle a\delta_{x_0}, \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, a\varphi\rangle = a(x_0)\varphi(x_0) = a(x_0)\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle.$$

Proposition 2.15

Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $aT_n \to aT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

▷ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle aT_n, \varphi\rangle = \langle T_n, a\varphi\rangle \to \langle T, a\varphi\rangle = \langle aT, \varphi\rangle.$ □

Proposition 2.16

Soient $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a :

$$\partial_{x_j}(aT) = (\partial_{x_j}a)T + a\partial_{x_j}T.$$

et plus généralement (formule de Leibniz)

$$\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}a\partial^\beta T.$$

▷ (i) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \partial_{x_j}(aT), \varphi\rangle = -\langle aT, \partial_{x_j}\varphi\rangle = -\langle T, a\partial_{x_j}\varphi\rangle = -\langle T, \partial_{x_j}(a\varphi) - (\partial_{x_j}a)\varphi\rangle = -\langle T, \partial_{x_j}(a\varphi)\rangle + \langle T, (\partial_{x_j}a)\varphi\rangle = \langle \partial_{x_j}T, a\varphi\rangle + \langle (\partial_{x_j}a)T, \varphi\rangle = \langle a\partial_{x_j}T, \varphi\rangle + \langle (\partial_{x_j}a)T, \varphi\rangle$.

(ii) On procède par récurrence sur la longueur de α. On suppose que la formule de Leibniz est vraie pour tout α tel que $|\alpha| \leq p$ (le cas $p = 1$ étant traité en (i)). Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = p+1$. On a $\partial^\alpha(aT) = \partial_{x_1}(\partial^{\alpha-e_1}(aT))$, avec $e = (1, 0, \ldots 0)$ (il y a au moins une dérivation, quitte à réordonner, on suppose qu'on dérive au moins une fois selon x_1). Alors, par hypothèse de récurrence ($|\alpha - e| \leq p$)

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(aT) &= \partial_{x_1}\left(\sum_{\beta\leq\alpha-e}\binom{\alpha-e}{\beta}\partial^{\alpha-\beta-e}a\partial^\beta T\right)\\
&= \sum_{\beta\leq\alpha-e}\binom{\alpha-e}{\beta}(\partial^{\alpha-\beta}a)\partial^\beta T + \sum_{\beta\leq\alpha-e}\binom{\alpha-e}{\beta}(\partial^{\alpha-\beta-e}a)\partial^{\beta+e}T\\
&= \sum_{\beta\leq\alpha-e}\binom{\alpha-e}{\beta}(\partial^{\alpha-\beta}a)\partial^\beta T + \sum_{e\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha-e}{\beta-e}\partial^{\alpha-\beta}a\partial^\beta T
\end{aligned}$$

En utilisant $\binom{\alpha-e}{\beta} + \binom{\alpha-e}{\beta-e} = \binom{\alpha}{\beta}$, on obtient le résultat. □

2.2.3 Restriction et prolongement de distributions

Même si les valeurs ponctuelles d'une distribution n'ont pas de sens, on peut définir sa restriction à un sous-ouvert.

Définition 2.17

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\omega \subset \Omega$ un sous-ouvert. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $T_{|\omega} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\omega),\ \langle T_{|\omega}, \varphi\rangle = \langle T, \widetilde{\varphi}\rangle$$

où $\widetilde{\varphi}$ est le prolongement par 0 de φ à Ω.

Proposition 2.18 (*Recollement de distributions*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ telle que $\bigcup_{i\in I}\omega_i \subset \Omega$. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de distributions sur les ω_i telle que

$$\forall i,j \in I, \qquad \omega_i\cap\omega_j \neq \varnothing \quad\Rightarrow\quad T_{i\,|\omega_i\cap\omega_j} = T_{j\,|\omega_i\cap\omega_j}.$$

Alors il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad T_{|\omega_i} = T_i.$$

▷ – Unicité : Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $\forall i \in I$, $(T-S)_{|\omega_i} = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $K =$Supp φ (compact). La famille $(\omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de K par des ouverts donc

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \omega_{i_k}.$$

Alors, d'après le théorème de partition de l'unité, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe $\chi_{i_k} \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que Supp $(\chi_{i_k}) \subset \omega_{i_k}$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \chi_{i_k} = 1$ au voisinage de K. On a :

$$\langle T - S, \varphi \rangle = \langle T - S, \sum_{k=1}^{p} \chi_{i_k} \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle T - S, \chi_{i_k} \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle (T - S)_{|\omega_{i_k}}, \chi_{i_k} \varphi \rangle = 0.$$

– Existence : Soit K un compact inclus dans Ω. On a :

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \omega_{i_k}.$$

On définit comme dans le point précédent une partition $(\chi_{i_k})_{1 \leq k \leq p}$ de l'unité. On définit T_K par :

$$\langle T_K, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle T_{i_k}, \chi_{i_k} \varphi \rangle$$

pour tout φ à support inclus dans K. T_K est indépendante du sous-recouvrement choisi. En effet, soient $(\omega_{j_k})_{1 \leq k \leq q}$ un recouvrement de K et $(\widetilde{\chi}_{j_k})$ une partition de l'unité associée. Pour φ a support inclus dans K, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \langle T_{i_k}, \chi_{i_k} \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^{p} \langle T_{i_k}, \chi_{i_k} \sum_{l=1}^{q} \widetilde{\chi}_{j_l} \varphi \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \langle T_{i_k}, \chi_{i_k} \widetilde{\chi}_{j_l} \varphi \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \langle T_{i_k \, |\omega_{i_k} \cap \omega_{j_l}}, \chi_{i_k} \widetilde{\chi}_{j_l} \varphi \rangle
\end{aligned}$$

car $\chi_{i_k} \widetilde{\chi}_{j_l}$ est à support inclus dans $\omega_{i_k} \cap \omega_{j_l}$. Donc par hypothèse,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \langle T_{i_k}, \chi_{i_k} \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \langle T_{j_l \, |\omega_{i_k} \cap \omega_{j_l}}, \chi_{i_k} \widetilde{\chi}_{j_l} \varphi \rangle \\
&= \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \langle T_{j_l}, \chi_{i_k} \widetilde{\chi}_{j_l} \varphi \rangle \\
&= \sum_{l=1}^{q} \langle T_{j_l}, \widetilde{\chi}_{j_l} \sum_{k=1}^{p} \chi_{i_k} \varphi \rangle
\end{aligned}$$

soit
$$\sum_{k=1}^{p}\langle T_{i_k},\chi_{i_k}\varphi\rangle=\sum_{l=1}^{q}\langle T_{j_l},\widetilde{\chi}_{i_l}\varphi\rangle.$$
Soient désormais un compact K' contenant K et $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ avec Supp $\varphi\subset K$, alors
$$\langle T_K,\varphi\rangle=\langle T_{K'},\varphi\rangle$$
car tout recouvrement de K' est un recouvrement de K et l'expression de T_K est indépendante du recouvrement. On définit T par :
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\qquad \langle T,\varphi\rangle=\langle T_{\mathrm{Supp}\ \varphi},\varphi\rangle.$$

T est linéaire :
$$\langle T,\varphi_1+\varphi_2\rangle=\langle T_{\mathrm{Supp}(\varphi_1+\varphi_2)},\varphi_1+\varphi_2\rangle=\langle T_{\mathrm{Supp}(\varphi_1)\cup\mathrm{Supp}(\varphi_2)},\varphi_1+\varphi_2$$
car Supp$(\varphi_1+\varphi_2)$ $\subset$Supp$(\varphi_1)\cup$Supp(φ_2). Et la linéarité découle de la définition de $T_{\mathrm{Supp}(\varphi_1)\cup\mathrm{Supp}(\varphi_2)}$.

Vérifions que $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que Supp $\varphi\subset K$. Avec les notations précédentes,
$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{k=1}^{p}\langle T_{i_k},\chi_{i_k}\varphi\rangle.$$
Or, comme T_{i_k} est une distribution, (et qu'il y a un nombre fini de i_k, sinon on a seulement $C_{i_k,K},p_{i_k,K},\dots$)
$$\begin{aligned}|\langle T_{i_k},\chi_{i_k}\varphi\rangle| &\leq C_K\sup_{|\alpha|\leq p_K}\|\partial^\alpha(\chi_{i_k}\varphi)\|_\infty=C_K\sup_{|\alpha|\leq p_K}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left\|\partial^\beta\chi_{i_k}\right\|_\infty\left\|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\right\|_\infty\\ &\leq C_K\sup_{|\alpha|\leq p_K}\left(\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left\|\partial^\beta\chi_{i_k}\right\|_\infty\right)\sup_{|\alpha|\leq p_K}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty.\leq C'_K\sup_{|\alpha|\leq p_K}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty\end{aligned}$$
d'où le résultat en sommant ces inégalités pour k de 1 à p □

2.2.4 Dérivation/Intégration sous le crochet de dualité

Proposition 2.19 (***Dérivation sous le crochet de dualité***)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^d)$ à support inclus dans $K\times\mathbb{R}^d$ avec K compact inclus Ω. Alors, l'application $y\mapsto\langle T,\varphi(\cdots,y)\rangle$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\partial_y^\alpha(\langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle) = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\rangle.$$

$\triangleright$ Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $e_i \in \mathbb{R}^d$ un vecteur de la base canonique. On a :

$$\frac{\varphi(\cdot, y_0 + te_i) - \varphi(\cdot, y_0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_{y_i}\varphi(\cdot, y_0)$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\frac{\partial_x^\alpha \varphi(\cdot, y_0 + te_i) - \partial_x^\alpha \varphi(\cdot, y_0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_x^\alpha \partial_{y_i}\varphi(\cdot, y_0).$$

Ces convergences sont simples mais comme $(x, y) \in K \times (y_0 + [-1, 1]e_i)$ compact, ces convergences sont donc uniformes. Par définition d'une distribution :

$$\langle T, \frac{\varphi(\cdot, y_0 + te_i) - \varphi(\cdot, y_0)}{t}\rangle \underset{t\to}{\longrightarrow} \langle T, \partial_{y_i}\varphi(\cdot, y_0)\rangle$$

soit

$$\frac{\langle T, \varphi(\cdot, y_0 + te_i)\rangle - \langle T, \varphi(\cdot, y_0)\rangle}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \langle T, \partial_{y_i}\varphi(\cdot, y_0)\rangle$$

ie.

$$\partial_{y_i}\langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle(y_0) = \langle T, \partial_{y_i}\varphi(\cdot, y_0)\rangle.$$

$\square$

Proposition 2.20 (*Intégration sous le crochet de dualité*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle dy = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\cdot, y) dy \right\rangle.$$

$\triangleright$ On peut se ramener au cas $d = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, Supp $\varphi = K \times [-R, R]$. On pose

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(x, z) \mathrm{d}z.$$

ψ est $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ est à support inclus dans $K \times \mathbb{R}$. D'après la proposition sur la dérivation sous le signe crochet, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \partial_y\langle T, \psi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y \psi(\cdot, y)\rangle.$$

On intègre entre $-\infty$ et $+\infty$ par rapport à y :

$$\langle T, \psi(\cdot, +\infty) - \langle T, \psi(\cdot, -\infty)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle \mathrm{d}y$$

soit

$$\left\langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\cdot, y)\mathrm{d}y \right\rangle - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle \mathrm{d}y.$$

□

2.2.5 Relations de saut en dimension 1

Proposition 2.21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, n'ayant que des discontinuités de première espèce en $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ c'est-à-dire f admet une limite à gauche et à droite en chaque x_i, $1 \leq i \leq n$ et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}$. La dérivée de f au sens des distributions est donnée par :

$$f' = \widetilde{f'} + \sum_{k=1}^{n} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0))\delta_{x_k}$$

avec $\widetilde{f'}$ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f'}(x) = f'(x)\ \forall x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$.

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On note $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. Par définition,

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi\rangle &= -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (f(x_{k+1} - 0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k - 0)\varphi(x_k)) + \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k - 0)\varphi(x_k) + \sum_{k=0}^{n} f(x_k + 0)\varphi(x_k) + \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{k=1}^{n} f(x_k - 0)\varphi(x_k) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k + 0)\varphi(x_k) + \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f'}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0))\langle \delta_{x_k}, \varphi\rangle + \langle \widetilde{f'}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Support et convolution des distributions

3.1 Support d'une distribution et distribution à support compact

Définition 3.1 (*et théorème*)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe un plus grand ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $T_{|\omega}$ (on convient que $T_{|\varnothing} = 0$). Le support de T est défini comme le complémentaire dans Ω de cet ouvert :

$$\text{Supp } T = \Omega \backslash \omega.$$

De façon équivalente, le support de T est le plus petit fermé F de Ω tel que $T_{|\Omega \backslash F} = 0$. En d'autres termes, si $\mathcal{O}(T) = \{\omega \text{ ouvert } \subset \Omega,\ T_{|\omega} = 0\}$ et $\mathcal{F}(T) = \{F \text{ fermé de } \Omega,\ T_{|\Omega\backslash F} = 0\}$ alors

$$\text{Supp } T = \Omega \backslash \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \omega \right) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(T)} F.$$

$\triangleright$ On pose $\omega_0 = \bigcup_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \omega$. Montrons que $T_{|\omega_0} = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_0)$, Supp $\varphi \subset \omega_0 = \bigcup_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \omega$. Comme Supp φ est compact,

$$\text{Supp } \varphi \subset \bigcup_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Il existe, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\chi_k \in \mathcal{D}(\omega_k)$ tel que $0 \leq \chi_k \leq 1$, tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_k = 1$ sur un voisinage de Supp φ. Ainsi,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle T, \chi_k \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle T_{\,|\omega_k}, \chi_k \varphi \rangle = 0.$$

Ainsi, $T_{\,|\omega_0} = 0$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(T) & \to & \mathcal{F}(T) \\ \omega & \mapsto & \Omega \backslash \omega \end{array}$ est bien définie et bijective donc

$$\Omega \backslash \bigcup_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \omega = \bigcap_{\omega \in \mathcal{O}(T)} (\Omega \backslash \omega) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(T)} F.$$

$\square$

Exemples : 1. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ alors Supp T_f=Supp f.

$\triangleright$ $f = 0$ presque partout sur ω ouvert de Ω si et seulement si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\displaystyle\int_\omega f \varphi \mathrm{d}x = 0$ *ie.* $(T_f)_{|\omega} = 0$. On en déduit donc Supp f=Supp T_f. $\square$

2. Support d'une masse de Dirac. $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ alors $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ donc $\delta_{0\,|\mathbb{R}^*} = 0$. Le plus grand ouvert ω tel que $\delta_{0\,|\omega} = 0$ contient donc $\mathbb{R}^*$, donc son complémentaire est contenu dans le complémentaire de $\mathbb{R}^*$ *ie.* Supp $\delta_0 \subset \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Si Supp $\delta_0 = \varnothing$ alors $\delta_{0\,|\mathbb{R} \backslash \mathrm{Supp}\,\delta_0} = 0$ *ie.* $\delta_{0\,|\mathbb{R}} = 0$ absurde car $\langle \delta_0, \varphi \rangle = 1$ si $\varphi(0) = 1$.

3. Support de $VP\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Soit ω un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{R}^*$. Alors $T_{\,|\omega} \neq 0$ car sinon, on aurait $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\displaystyle\int_\mathbb{R} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = 0$ *ie.* $\frac{1}{x} = 0$ pour presque tout $x \in \omega$: absurde. Donc $\{\omega$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $T_{\,|\omega} = 0\} = \varnothing$. En effet, sinon on aurait $T_{\,|\omega \cap \mathbb{R}^*} = 0$ absurde. Ainsi, $\mathrm{Supp}\big(VP\left(\frac{1}{x}\right)\big) = \mathbb{R}$.

4. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

$$\mathrm{Supp}(fT) = \mathrm{Supp}\, f \cap \mathrm{Supp}\, T.$$

▷ Montrons que $\mathrm{Supp}(fT) \subset \mathrm{Supp}\, f \cap \mathrm{Supp}\, T$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\varphi = 0$ sur un voisinage de V de $\mathrm{Supp}\, f \cap \mathrm{Supp}\, T$. Alors, $f\varphi = 0$ sur $V \cup (\Omega \setminus \mathrm{Supp}\, f)$ qui est un voisinage de $\mathrm{Supp}\, T$. Donc $\langle T, f\varphi \rangle = 0$ *ie.* $\langle fT, \varphi \rangle = 0$. Ainsi $\mathrm{Supp}(fT) \subset \mathrm{Supp}\, f$.

On pose $\omega_0 = \{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}$ ouvert. Alors $\mathrm{Supp}(T_{|\omega_0}) = \mathrm{Supp}\, T \cap \omega_0$. On a aussi $\mathrm{Supp}(fT_{|\omega_0}) = \mathrm{Supp}(T_{|\omega_0}) = \mathrm{Supp}\, T \cap \omega_0$. Mais de plus, $\mathrm{Supp}(fT_{|\omega_0}) = \mathrm{Supp}((fT)_{|\omega_0}) = \mathrm{Supp}(fT) \cap \omega_0$. Donc $\mathrm{Supp}\, T \cap \Omega_0 = \mathrm{Supp}(fT) \cap \omega_0$ d'où $\mathrm{Supp}\, T \cap \overline{\omega_0} = \mathrm{Supp}(fT) \cap \omega_0$ donc $\mathrm{Supp}\, T \cap \mathrm{Supp}\, f = \mathrm{Supp}(fT) \cap \mathrm{Supp}\, f = \mathrm{Supp}(fT)$ car $\mathrm{Supp}(fT) \subset \mathrm{Supp}\, f$. □

L'ensemble des distributions à support compact est noté $\mathcal{E}'(\Omega)$. Cet espace peut-être identifié au dual de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme d'une suite de fonctions ainsi que toutes ses dérivées à tout ordre.

Théorème 3.2

Toute distribution T à support compact ($T \in \mathcal{E}'(\Omega)$) est d'ordre fini.

▷ Soit K un voisinage compact de Supp T. Il existe $p_K \in \mathbb{N}$ et $c_K > 0$ tels que $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que Supp $\psi \subset K$:

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq c_K \sup_{|\alpha| \leq p_K} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que Supp $\chi \subset K$ et $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de Supp T. $\langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$ car $(1-\chi)\varphi = 0$ sur un voisinage de Supp T. Donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$. Comme $\mathrm{Supp}(\chi\varphi) \subset K$, on a

$$|\langle T, \varphi| = |\langle T, \chi\varphi \rangle| \leq c_k \sup_{|\alpha| \leq p_K} \|\partial^\alpha (\chi\varphi)\|_\infty \leq C \sup_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

en utilisant la formule de Leibniz. Ainsi, T est d'ordre fini et l'ordre de T est inférieur p_K. En fait, l'ordre p est le plus petit des p_K quand K décrit l'ensemble des voisinages compact de Supp T. Donc il existe un voisinage compact K de Supp T tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

□

Remarque : On a vu dans la preuve que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \chi \equiv 1 \text{ sur un voisinage de Supp } T.$$

Cette identité permet de prolonger T à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \qquad T(\varphi) = \langle T, \chi\varphi \rangle \qquad \text{(indépendant de } \chi)$$

Remarque : $\langle \delta'_0, \varphi\rangle = -\varphi'(0)$. On a Supp $\delta'_0 = \{0\}$. Soit φ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \neq 0$. φ est nulle sur le support de δ'_0 mais $\langle \delta'_0, \varphi\rangle$ n'est pas nul.

Proposition 3.3

Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ d'ordre p. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq p$, $\partial^\alpha \varphi = 0$ sur Supp T, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

$\triangleright$ Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ avec ordre(T)=p. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq p$, $\partial^\alpha = 0$. Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe K voisinage compact de Supp T tel que

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T, \psi\rangle \leq c_K \sup_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

On introduit les compacts

$$K_\varepsilon = \{x \in K,\ d(x, \text{Supp } T) \leq \varepsilon\}.$$

On a Supp $T \subset K_\varepsilon \subset K$. On choisit $\psi = \chi_\varepsilon \varphi$ où χ_ε est telle que $\chi_\varepsilon = 1$ sur K_ε et Supp $\chi_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}$. On a donc

$$\begin{aligned} |\langle T, \psi\rangle| &= |\langle T, \chi_\varepsilon \varphi\rangle| \leq c_K \sup_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K_{3\varepsilon}} |\partial^\alpha (\chi_\varepsilon \varphi)(x)| \\ &\leq c \sup_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K_{3\varepsilon}} |\partial^{\alpha-\beta} \chi_\varepsilon(x)||\partial^\beta \varphi(x)| \end{aligned}$$

Soit $x \in K_{3\varepsilon}$. Il existe $x_0 \in$Supp T tel que $|x - x_0| \leq 4\varepsilon$. Par la formule de Taylor à l'ordre $p+1$ en x_0, comme $\partial^\alpha \varphi(x_0) = 0$ pour tout α tel que $|\alpha| \leq p$,

$$\varphi(x) = 0 + (\text{terme d'ordre } p+1)$$

donc

$$|\varphi(x)| \leq c\varepsilon^{p+1}.$$

De même,

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq c\varepsilon^{p+1-|\beta|}.$$

On va construire χ_ε de sorte que

$$\sup_{x\in K_{3\varepsilon}} |\partial^{\alpha-\beta} \chi_\varepsilon(x)|\varepsilon^{p+1-|\beta|} \leq c\varepsilon$$

ie. $\sup_{x\in K_{3\varepsilon}} |\partial^{\alpha-\beta} \chi_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{|\beta|-p}$. Il suffit d'avoir $\sup_{x\in K_{3\varepsilon}} |\partial^\beta \chi_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{-|\beta|}$. Soit

$$\rho^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \text{avec } \rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \rho \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1,\ \text{Supp } \varphi \subset B(0,1).$$

On pose

$$\chi_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}} * \rho^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}}(y)\rho^\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y$$

On a $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus Supp $\chi_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}$. En effet, pour x tel que $d(x$, Supp $T) > 3\varepsilon$, par l'inégalité triangulaire

$$3\varepsilon < d(y, \mathrm{Supp}\ T) \geq d(x, \mathrm{Supp}\ T) - |x-y|$$

donc nécessairement $d(y, \mathrm{Supp}\ T) > 2\varepsilon$ ou $|x-y| > \varepsilon$ *ie.* $\chi_\varepsilon(x) = 0$.
Montrons que $\chi_\varepsilon \equiv 1$ sur K_ε. Soit $x \in K_\varepsilon$ tel que $|x-y| \leq \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire $d(y, \mathrm{Supp}\ T) \leq |x-y| + d(x, \mathrm{Supp}\ T) \leq 2\varepsilon$. Donc

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\mathrm{d}y = 1.$$

Montrons que $\sup\limits_{x \in K_{3\varepsilon}} |\partial^\beta \chi_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{-|\beta|}$.

$$\left|\partial^\beta \chi_\varepsilon(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{K_{2\varepsilon}}(x)\varepsilon^{-d-|\beta|}\partial^\beta\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y\right| \leq \varepsilon^{-d-|\beta|}\left|\int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^d \partial^\beta \rho(z)\mathrm{d}z\right| \leq c\varepsilon^{-|\beta|}$$

avec $c = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\beta\rho(z)\mathrm{d}z\right|$. □

Application : Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que Supp $T = \{0\}$ est d'ordre p alors $T = \sum\limits_{|\alpha| \leq p} c_k \delta_0^{(\alpha)}$.

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(0) + r(x)$$

où r est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$. Donc, en dérivant cette expression

$$\forall \beta,\ |\beta| \leq p, \qquad \partial^\beta\varphi(0) = \partial^\beta\varphi(0) + \partial^\beta r(0)$$

d'où $\forall\beta,\ |\beta| \leq p,\ \partial^\beta r(0) = 0$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 au voisinage de 0. Alors

$$\chi\varphi = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}x^\alpha\chi(x) + \chi(x)r(x).$$

$\chi r \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\forall\beta,\ |\beta| \leq p,\ \partial^\beta(\chi r)(0) = \partial^\beta r(0) = 0$ donc $\langle T, \chi r\rangle = 0$. De plus $\langle T, \chi\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}\langle T, x^\alpha\chi\rangle + 0.$$

Avec $\lambda_\alpha = \frac{\langle T, x^\alpha \chi\rangle (-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}$, on a :

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq p} (-1)^{|\alpha|} \lambda_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) = \sum_{|\alpha|\leq p} \lambda_\alpha \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi\rangle$$

donc

$$T = \sum_{|\alpha|\leq p} \lambda_\alpha \delta^\alpha \delta_0.$$

□

3.2 Convolution de distributions

3.2.1 Convolution d'une distribution avec une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a :

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = \langle T_f, \varphi(x-\cdot)\rangle.$$

La fonction $y \mapsto \varphi(x-y)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 3.4

Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On définit $T * \varphi$ sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad (T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle.$$

Proposition 3.5

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ alors
(i) $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha(T*\varphi) = T * \partial^\alpha \varphi$
(ii) Supp$(T * \varphi) \subset$ Supp $T+$Supp φ.

▷ (i) Le théorème de dérivation sous le crochet de dualité s'applique.
(ii) Soit $x \notin$ Supp $T+$Supp φ. Alors $\underbrace{\{x\} - \mathrm{Supp}\ \varphi}_{\mathrm{Supp}\,\varphi(x-\cdot)} \subset \mathbb{R}^d \backslash \mathrm{Supp}\ T$. Donc $\varphi(x-\cdot)$ est nulle sur un voisinage de Supp T, et donc $\langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle = 0$ *ie.* $T*\varphi(x) = 0$. □

Remarque : Pour que $T * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, il suffit que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Cela sera utile pour définir $T * S$ avec $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.6

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & T * \varphi \end{array}$ *est continue dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

$\triangleright$ Soit p l'ordre de T. Soit L un voisinage compact de $\operatorname{Supp} T$.

$$|\partial^\alpha(T * \varphi)(x)| = |(T * \partial^\alpha \varphi)(x)| = |\langle T, \partial^\alpha(x - \cdot)\rangle| \leq c \sup_{|\beta| \leq p} \sup_{y \in \{x\} - K} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x - y)|$$

De plus, $\operatorname{Supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} \varphi \subset K + L$. Donc

$$\sup_{x \in K+L} |\partial^\alpha(T * \varphi)(x)| \leq c \sup_{|\beta| \leq p} \left\| \partial^{\alpha+\beta} \varphi \right\|_\infty$$

Si $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, il existe un compact K tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Supp} \varphi_n \subset K$ et $\forall \gamma \in \mathbb{N}^d$, $\|\partial^\gamma \varphi_n\|_\infty \to 0$. On a $\operatorname{Supp}(T * \varphi_n) \subset K + L$ compact, et $\|\partial^\alpha(T * \varphi_n)\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. $\square$

Proposition 3.7

Soit (ρ^ε) une suite régularisante et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On a

$$T * \rho^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} T.$$

$\triangleright$ ρ^ε vérifie $\rho^\varepsilon \geq 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho^\varepsilon \mathrm{d}x = 1$, $\operatorname{Supp} \rho^\varepsilon \subset \overline{B(0, r_\varepsilon)}$ avec $r_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$, $\rho^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que si f est continue à support compact alors $\rho^\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Comme $T * \rho^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T * \rho^\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (T * \rho^\varepsilon)(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \rho^\varepsilon(x - \cdot) \varphi(x) \rangle \mathrm{d}x$$

Or, avec $\psi^\varepsilon(x, y) = \rho^\varepsilon(x - y)\varphi(x)$, on a $\psi^\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ donc le théorème d'intégration sous le crochet de dualité s'applique et

$$\langle T * \rho^\varepsilon, \varphi \rangle = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\varepsilon(x - \cdot) \varphi(x) \mathrm{d}x \right\rangle.$$

En notant, pour tout fonction f, $\widetilde{f}(x) = f(-x)$, on a

$$\langle T * \rho^\varepsilon, \varphi \rangle = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\rho^\varepsilon} * \varphi \right\rangle.$$

Or $\widetilde{\rho^\varepsilon}$ est également une suite régularisante. Donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, comme $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\left\| \widetilde{\rho^\varepsilon} * \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ *ie.* $\left\| \partial^\alpha (\widetilde{\rho^\varepsilon} * \varphi) \right\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ ou encore $\widetilde{\rho^\varepsilon} * \varphi \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Comme $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle T, \widetilde{\rho^\varepsilon} * \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ *ie.* $\langle T * \rho^\varepsilon, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$. $\square$

3.2.2 Convolution de deux distributions

Définition 3.8

Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On définit $T * S$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{S} * \varphi \rangle$$

où $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \widetilde{S}, \psi \rangle = \langle S, \widetilde{\psi} \rangle$.

Remarque : $\widetilde{S} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{Supp}(\widetilde{S} * \varphi) \subset \operatorname{Supp} \widetilde{S} + \operatorname{Supp} \varphi = \operatorname{Supp} \varphi - \operatorname{Supp} S$.

Proposition 3.9 (*Support de $T * S$*)

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\operatorname{Supp}(T * S) \subset \operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S.$$

Remarque : On note que $\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S$ est un fermé car $\operatorname{Supp} T$ est fermé et $\operatorname{Supp} S$ est compact.

$\rhd$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ s'annulant au voisinage de $\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S$. On veut montrer que $\langle T * S, \varphi \rangle = 0$ *ie.* $\langle T, \widetilde{S} * \varphi \rangle = 0$. Il suffit donc de montrer que $\widetilde{S} * \varphi$ est nulle sur un voisinage de $\operatorname{Supp} T$. On sait que $\operatorname{Supp}(\widetilde{S} * \varphi) \subset \operatorname{Supp} \varphi$ et $\operatorname{Supp} \varphi \subset \mathbb{R}^d \backslash \{\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S\}$. Donc

$$\operatorname{Supp}(\widetilde{S} * \varphi) \subset \mathbb{R}^d (\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S) - \operatorname{Supp} S \subset \mathbb{R}^d \backslash \operatorname{Supp} T.$$

Donc $\operatorname{Supp} T \subset \mathbb{R}^d \backslash \operatorname{Supp}(\widetilde{S} * \varphi)$ qui est un ouvert contenant $\operatorname{Supp} T$ et sur lequel $\widetilde{S} * \varphi = 0$ d'où le résultat. $\square$

Exemple : 1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x + x_0) \rangle$$

car $\widetilde{\delta_{x_0}} * \varphi(x) = \langle \widetilde{\delta_{x_0}}, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi(x + \cdot) \rangle = \varphi(x + x_0)$.

En particulier $T * \delta_0 = T$.

2. $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widetilde{\delta_b} * \varphi \rangle = \langle \delta_a, \varphi(\cdot + b) \rangle = \varphi(a + b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle.$$

Remarque : Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d), T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on peut définir $S * T$ de la même façon :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \widetilde{T} * \varphi \rangle.$$

Cette définition a bien un sens car $\widetilde{T} * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ peut être prolongée à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.10

(i) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors

$$T * S = S * T.$$

(ii) Soient $R, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont deux au moins sont à support compact. Alors

$$R * (S * T) = (R * S) * T.$$

Chapitre 4

Espace de Schwartz et transformée de Fourier des distributions

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

On a $\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ et donc $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$.

$\widehat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f. C'est une notion d'importance capitale en analyse et pour les applications : traitement du signal, ondes, phénomènes oscillatoires, etc..

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution associée. On aimerait définir $\widehat{T_f}$ comme étant $T_{\widehat{f}}$...

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} \varphi(\xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{-ix\xi} \right) \mathrm{d}x$$

donc $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle$. Il faudrait que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Mais ce n'est pas toujours le cas. On a $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. On se place en dimension $d = 1$. Supposons que $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ pour $\xi \geq \xi_0$.

$$\widehat{\varphi}^{(n)}(\xi) = 0,\ \forall \xi \geq \xi_0$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = 0$$

donc

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall \xi \geq \xi_0, \qquad \int_{\mathbb{R}} P() \varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = 0.$$

En prenant $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} \varphi(x)e^{ix\xi_0}$, on obtient $\varphi \equiv 0$.

La transformée de Fourier est à décroissance rapide. En effet,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_R \frac{\varphi(x)}{-i\xi}(-i\xi e^{-ix\xi})\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(x)}{i\xi}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1}{i\xi}\widehat{\varphi'}(\xi).$$

Donc

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\widehat{\varphi'}(\xi) = \frac{1}{(i\xi)^2}\widehat{\varphi''}(\xi) = \cdots = \frac{1}{(i\xi)^n}\widehat{\varphi^{(n)}}(\xi).$$

Ainsi,

$$|\xi|^n|\widehat{\varphi}(\xi)| = |\widehat{\varphi^{(n)}}(\xi) \leq \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{L^1}$$

donc

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{c_n}{|\xi|^n}.$$

$\widehat{\varphi}$ n'est pas $\mathcal{C}_0^\infty$ mais elle est à décroissance rapide. On va voir que l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide sera stable par la transformée de Fourier.

4.1 Espace de Schwartz

4.1.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 4.1

L'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad \left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_\infty < \infty$$

ce qui équivaut à

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad x^\alpha \partial^\beta \varphi \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0.$$

Exemples : 1. $\varphi(x) = P(x)e^{-\lambda\|x\|^2},\ x \in \mathbb{R}^d$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda > 0$: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. Aucune fraction rationnelle non nulle n'est dans l'espace de Schwartz.
3. $\varphi(x) = e^{\lambda x},\ x \in \mathbb{R}$ où $\lambda > 0$ n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.2 (*Topologie*)

La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie par la famille des normes N_p, $p \in \mathbb{N}$, données *par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

Autrement dit, on dira que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad N_p(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 4.3 (*Densité*)

Tout élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

▷ Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{Supp}\chi \subset B(0,2)$ et $\chi \equiv 1$ sur $B(0,1)$, $0 \leq \chi \leq 1$. On définit $\chi_n \in \mathcal{C}_0^\infty$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \varphi_n(x) = \chi_n(x)\varphi(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi(x) - \varphi_n(x) = (1-\chi_n(x))\varphi(x)$ et vaut donc 0 sur $B(0,n)$.

$$\begin{aligned} x^\alpha\partial^\beta(\varphi-\varphi_n)(x) &= x^\alpha\partial^\beta((1-\chi_n(x))\varphi(x)) \\ &= x^\alpha(1-\chi_n)\partial^\beta\varphi - \sum_{1\leq|\gamma|\leq|\beta|} x^\alpha \binom{\beta}{\gamma}(\partial^\gamma\chi_n)\partial^{\beta-\gamma}\varphi \\ &= \frac{1-\chi_n}{|x|^2}|x|^2 x^\alpha\partial^\beta\varphi(x) - \sum_{1\leq|\gamma|\leq|\beta|}\binom{\beta}{\gamma}\frac{x^\alpha}{n^{|\gamma|}}\partial^\gamma\chi\left(\frac{x}{n}\right)\partial^{\beta-\gamma}\varphi(x). \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq \frac{1-\chi_n(x)}{|x|^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc, pour $|\alpha|, |\beta| \leq p$,

$$|x^\alpha\partial^\beta(\varphi-\varphi_n)(x)| \leq \frac{1}{n^2}N_{p+2}(\varphi) + \frac{1}{n}C_{\chi,p}N_p(\varphi)$$

où $C_{\chi,p}$ est une constante faisant intervenir $\sup_{|\gamma|\leq p}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty$. On en déduit que

$$\left\|x^\alpha\partial^\beta(\varphi-\varphi_n)(x)\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}N_{p+2}(\varphi) + \frac{1}{n}C_{\chi,p}N_p(\varphi).$$

En sommant sur $|\alpha|, |\beta| \leq p$, on a :

$$N_p(\varphi - \varphi_n) \leq C\left(\frac{1}{n^2}N_{p+2}(\varphi) + \frac{1}{n}C_{\chi,p}N_p(\varphi)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\square$

Remarque : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme L^p ($\mathcal{C}_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

Définition 4.4 (*fonction à croissance polynômiale*)

Une fonction continue f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ est dite à croissance polynomiale si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(|x|^n\right).$$

Proposition 4.5

(i) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \partial^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

(iii) Pour tout $p, q \geq 1$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha|, |\beta| \leq p, \qquad \left\|x^\alpha\partial^\beta\varphi\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq CN_p(\varphi)^{1-\frac{1}{q}}N_{p+d+1}(\varphi)^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) Pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et en notant q l'ordre de S, on a :

$$S * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad N_p(S * \varphi) \leq N_{p+q}(\varphi).$$

$\triangleright$ *(i)* OK.

(ii) Soit f à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq p \qquad |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|^n).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} N_p(f\varphi) &\leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta (f\varphi) \right\|_\infty \\ &\leq C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \partial^\gamma f(x) x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sum_{|\gamma|\leq p} |(1+|x|^n) x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)| \end{aligned}$$

On choisit n pair : $n = n_0$. Par convexité :

$$|x|^n = |x|^{2n_0} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)^{n_0} \leq C(x_1^{2n_0} + \cdots + x_d^{2n_0})$$

Or

$$|(x_1^{2n_0} + \cdots + x_d^{2n_0}) x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d} \partial^{\beta-\alpha}\varphi(x)| \leq N_{p+2n_0}(\varphi).$$

Donc

$$N_p(f\varphi) \leq C N_{p+2n_0}(\varphi).$$

(iii) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$|\varphi(x)|^q = |\varphi(x)|^{q-1}(1+|x|^{d+1})|\varphi(x)| \frac{1}{1+|x|^{d+1}}$$

Or $\dfrac{1}{1+|x|^{d+1}}$ car $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1+|x|^d} = C \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{1+r^{d+1}} \mathrm{d}r < \infty$. Donc

$$|\varphi(x)|^q \leq N_0(\varphi)^{q-1} N_{d+1}(\varphi) \frac{1}{1+|x|^{d+1}}.$$

En intégrant sur $\mathbb{R}^d$,

$$\|\varphi\|_{L^q}^q \leq N_0(\varphi)^{q-1} N_{d+1}(\varphi) C_d$$

avec $C_d = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1+|x|^{d+1}} < \infty$. Donc

$$\|\varphi\|_{L^q} \leq C_d^{\frac{1}{q}} N_0(\varphi)^{1-\frac{1}{q}} N_{d+1}(\varphi)^{\frac{1}{q}}.$$

De même, on écrit

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|^q = |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|^{q-1}(1+|x|^{d+1})|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \frac{1}{1+|x|^{d+1}}.$$

Donc
$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|^q \leq N_p(\varphi)^{q-1} N_{p+d+1}(\varphi) \frac{1}{1+|x|^{d+1}}$$
d'où
$$\left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_{L^q}^q \leq N_p(\varphi)^{q-1} N_{p+d+1}(\varphi) C_d$$
soit
$$\left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_{L^q} \leq N_p(\varphi)^{1-\frac{1}{q}} N_{p+d+1}(\varphi)^{\frac{1}{q}} C_d^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On note q l'ordre de S. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha|, |\beta| \leq p$.
$$|x^\alpha \partial^\beta (S * \varphi)(x)| = |x^\alpha \partial^\beta \langle S, \varphi(x-\cdot)\rangle| = |x^\alpha||\langle S, \partial^\beta \varphi(x-\cdot)\rangle|.$$
Soit K un voisinage compact de $\operatorname{Supp} S$. On a
$$|\langle S, \partial^\beta \varphi(x-\cdot)\rangle| \leq C \sup_{|\gamma|\leq q} \sup_{y\in K} |\partial^{\beta+\gamma}\varphi(x-y)|.$$
Donc
$$|x^\alpha \partial^\beta (S * \varphi)(x)| \leq |x^\alpha| \sup_{|\gamma|\leq q} \sup_{y\in K} |\partial^{\beta+\gamma}\varphi(x-y)|$$
donc
$$\begin{aligned}\left\|x^\alpha \partial^\beta (S*\varphi)\right\|_\infty &\leq \sup_{|\gamma|\leq q} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{y\in K} |x^\alpha||\partial^{\beta+\gamma}\varphi(x-y)| \\ &\leq \sup_{|\gamma|\leq q} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{y\in K} |(x-y+y)^\alpha||\partial^{\beta+\gamma}\varphi(x-y)|\end{aligned}$$
Or $|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}| \leq |x|^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} = |x|^{|\alpha|}$ donc
$$|(x-y+y)^\alpha| \leq (|x-y|+|y|)^{|\alpha} \leq C(|x-y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|}).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\left\|x^\alpha \partial^\beta (S*\varphi)\right\|_\infty &\leq C \sup_{|\gamma|\leq q} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{y\in K} (|x-y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|})|\partial^{\beta+\gamma}\varphi(x-y)| \\ &\leq C \sup\nolimits_{|\gamma|\leq q} \sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^d} \sup\nolimits_{y\in K} (|x-y|^{|\alpha|} + R^{|\alpha|})|\partial^{\beta+\gamma}\varphi(x-y)| \\ &\leq C \sup_{|\gamma|\leq q} \sup_{z\in\mathbb{R}^d} (|z|^{|\alpha|} + R^{|\alpha|})|\partial^{\beta+\gamma}\varphi(z)| \\ &\leq C N_{p+q}(\varphi)\end{aligned}$$
d'où le résultat. □

4.1.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Proposition 4.6

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}(\xi)$ ou encore $(\mathcal{F}\varphi)(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, par

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et son inverse est donné par

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \overline{\mathcal{F}}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe C tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad N_p(\widehat{\varphi}) \leq C N_{p+d+1}(\varphi).$$

$\triangleright$ Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{\varphi}$ est bien défini car $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \|\varphi\|_{L^1}.$$

On veut montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad \xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0.$$

On a

$$\partial_{\xi_j} \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-ix_j)\varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = \mathcal{F}(-ix_j\varphi)$$

et de même,

$$\partial^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-ix)^\beta \varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = (-i)^{|\beta|}\mathcal{F}(x^\beta \varphi).$$

Calculons $\xi^\alpha \widehat{\varphi}(x)$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j}\varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} (i\xi_j)\varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = i\xi_j \widehat{\varphi}(\xi)$$

donc

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)(\xi) = i\xi_j \widehat{\varphi}(\xi).$$

On en déduit que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \qquad \boxed{\mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)}$$

et donc

$$\boxed{\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi} = \xi^\alpha((-i)^{|\beta|}\mathcal{F}(x^\beta \varphi)) = (-i)^{|\beta|}\frac{1}{i^{|\alpha|}}\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta \varphi))}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} |\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| & = & |\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi))(\xi)| \\ & \leq & \left\|\partial^\alpha(x^\beta \varphi)\right\|_{L^1} \\ & \leq & C \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha'|\leq|\beta| \\ |\beta'|\leq|\alpha|}} \left\|x^{\alpha'}\partial^{\beta'}\varphi\right\|_{L^1} \\ & \leq & CN_{p+d+1}(\varphi) \qquad \text{d'après la proposition 4.5} \end{array}$$

Ainsi, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a défini

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad (\overline{\mathcal{F}}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Montrons que $(2\pi)^{-d}\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$.

$$(2\pi)^{-d}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}(\overline{\mathcal{F}}\varphi)(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)e^{ix\cdot y}\mathrm{d}y\right)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x.$$

On ne peut malheureusement pas appliquer directement le théorème de Fubini. On pose, pour $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon(z) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot z}e^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} A_\varepsilon(\xi - y)\varphi(y)\mathrm{d}y & = & (2\pi)^{-d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix(\xi-y)}e^{-\varepsilon|x|^2}\varphi(y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ & \underset{\text{Fubini}}{=} & (2\pi)^{-d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ixy}\varphi(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ix\xi}\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x)\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) \end{array}$$

par le théorème de convergence dominée ($\mathcal{F}^{-1}\varphi \in L^1$). Il nous reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} A_\varepsilon(\xi - y)\varphi(y)\mathrm{d}y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(\xi).$$

On a :

$$A_\varepsilon(z) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ixz} e^{-\varepsilon|x|^2} \mathrm{d}x \underset{x'=\sqrt{\varepsilon}x}{=} (2\pi)^{-d} \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}z} e^{-|x|^2} \mathrm{d}x = \varepsilon^{-\frac{d}{2}} A_1\left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} A_\varepsilon(\xi - y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} A_1\left(\frac{\xi - y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y \underset{y'=\frac{\xi-y}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} A_1(y)\varphi(\xi - \sqrt{\varepsilon}y)\mathrm{d}y.$$

On sait que $A_1 \in L^1$ car $(2\pi)^d A_1$ est la transformée de Fourier de $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ donc

$$|A_1(y)\varphi(\xi - \sqrt{\varepsilon}y)| \leq \|\varphi\|_\infty |A_1(y)|$$

et donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}^d} A_\varepsilon(\xi - y)\varphi(y)\mathrm{d}y \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^d} A_1(y)\mathrm{d}y\right).$$

Posons $g(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ avec $a > 0$. Calculons $\widehat{g}(\xi)$.

$$\partial_{x_j} g(x) = -ax_j g(x)$$

donc

$$i\xi_j \widehat{g}(\xi) = -ai\partial_{\xi_j}\widehat{g}.$$

On obtient donc l'équation

$$\partial_{\xi_j}\widehat{g} + \frac{1}{a}\xi_j\widehat{g}(\xi) = 0$$

soit

$$\partial_{\xi_j}\left(e^{\frac{1}{2a}|\xi|^2}\widehat{g}(\xi)\right) = 0.$$

Donc

$$\widehat{g}(\xi) = Ce^{-\frac{|\xi|^2}{2a}}$$

avec $C = \widehat{g}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{a}{2}|x|^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}}$. Ainsi,

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}})(\xi) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2a}}.$$

Donc

$$A_1(y) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}(e^{-|x|^2})(y) = (2\pi)^{-d}\pi^{\frac{d}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4}}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^d} A_1(y)\mathrm{d}y = (2\pi)^{-d}\pi^{\frac{d}{2}}(4\pi)^{\frac{d}{2}} = 1$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque : Transformée de Fourier de Gaussiennes généralisées : Soit M une matrice symétrique réelle définie positive de $\mathcal{M}_n(d)$.

$$G_M(x) = \left((2\pi)^d \det M\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(M^{-1}x, x)\right).$$

On a :

$$(\mathcal{F}G_M)(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}(M\xi, \xi)\right).$$

▷ Notons $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}(M^{-1}x, x)\right)$. On a

$$\nabla((Ax, x)) = 2Ax \qquad \text{si } A^T = A$$

donc

$$\nabla g(x) = M^{-1}xg(x).$$

Alors,

$$i\xi\widehat{g}(x) = \frac{1}{i}M^{-1}\nabla_\xi\widehat{g}(\xi)$$

soit

$$\nabla_\xi\widehat{g}(\xi) + M\xi\widehat{g}(\xi) = 0$$

ie.

$$\nabla_\xi\left(\exp\left(\frac{1}{2}(M\xi, \xi)\right)\widehat{g}(\xi)\right)$$

donc $\widehat{g}(\xi) = \widehat{g}(0)\exp\left(-\frac{1}{2}(M\xi, \xi)\right)$ avec

$$\widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp^{-\frac{1}{2}(M^{-1}x,x)} \mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\widehat{g}(0)$, on passe dans une base orthonormée de diagonalisation de M^{-1}. Le changement de variables associé est de déterminant égal à 1 en valeur absolue (matrice de passage orthogonale). On peut donc supposer

$$M^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_d}\right), \qquad \lambda_i \in \mathrm{Sp}(M).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{x_j^2}{\lambda_j}\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\prod_{j=1}^{d}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_j^2}{\lambda_j}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \prod_{j=1}^{d}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_j^2}{\lambda_j}\right)\mathrm{d}x_j\right) \\
&= \textstyle\prod_{j=1}^{d}\sqrt{2\pi\lambda_j} = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\det M)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

4.2 Distributions tempérées

4.2.1 Définitions et exemples

Définition 4.7

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est dite tempérée si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C N_p(\varphi).$$

Cette définition équivaut à dire que T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ car $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemples : 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} N_0(\varphi).$$

2. Pour tout $p \geq 1$, $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soient $f \in L^p$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p} N_0(\varphi)^{\frac{1}{p}} N_{d+1}(\varphi)^{\frac{1}{p'}} \leq C N_{d+1}(\varphi)$$

car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3. Toute distribution à support compact est tempérée. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit K un voisinage compact de $\operatorname{Supp} T$, soit $p < \infty$ l'ordre de T. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq p}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi(x)| \leq C\sup_{|\alpha|\leq p}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty} \leq C N_p(\varphi).$$

4. Si, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, alors $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi(x) = 1$ sur $[-1,1]$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\operatorname{Supp}\varphi \subset [-2,2]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{x}{n})$.

$$\langle T_f, \varphi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \varphi_n(x) \mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} e^x \mathrm{d}x = e^n - e^{-n} \geq ce^n.$$

Or

$$N_p(\varphi_n) = \sum_{|\alpha| \leq p |\beta \leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi_n \right\|_\infty \leq Cn^p$$

car $|x^\alpha| \leq (2n)^p$ et $\partial^\beta \varphi_n = \frac{1}{n^\beta} \partial^\beta \varphi \left(\frac{x}{n}\right)$. Si $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$e^n - e^{-n} \leq Cn^p$$

ce qui est absurde. Donc $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est à croissance lente *ie.* il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad |f(x)| \leq C(1 + |x|^q)$$

alors $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)||\varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^q)|\varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^q)(1 + |x|^{d+1})\varphi(x) \times \frac{1}{1 + |x|^{d+1}} \mathrm{d}x \\
&\leq CN_{q+d+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1 + |x|^{d+1}} \leq CN_{q+d+1}.
\end{aligned}$$

6. $T = VP\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x$$

donc

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi \rangle| &\leq 2\left\|\varphi'\right\|_\infty + \int_1^{+\infty} \frac{x}{x} \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x} \mathrm{d}x \\
&\leq 2\left\|\varphi'\right\|_\infty + \int_1^{+\infty} \frac{2\left\|x\varphi(x)\right\|_\infty}{x^2} \mathrm{d}x \\
&\leq 4N_1(\varphi).
\end{aligned}$$

Définition 4.8

On dit que une suite (T_n) de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle.$$

Remarque : Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alors $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. La réciproque est fausse. Prenons $T_n = a_n \delta_n$. On a $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mais T_n ne tend pas toujours vers 0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On choisit $a_n = e^n$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

$$\langle T_n, \varphi \rangle = e^n \langle \delta_n, \varphi \rangle = e^{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 4.9

(i) Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(ii) S $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à croissance lente ainsi que toute ses dérivées alors pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

▷ (i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi)$$

donc

$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle| = |(-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle| \leq C N_p(\partial^\alpha \varphi) \leq C N_{p+|\alpha|}(\varphi)$$

donc $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle fT, \varphi |\rangle = |\langle T, f\varphi \rangle| \leq C N_p(f\varphi)$$

et on a vu que $N_p(f\varphi) \leq C N_{p+2n_0}(\varphi)$ d'où le résultat. □

4.2.2 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on sait que $\widehat{f}$ existe et $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \in \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x \\
&= \langle f, \widehat{\varphi} \rangle
\end{aligned}$$

par le théorème de Fubini.

Théorème 4.10 (*et définition − Transformée de Fourier*)

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $\widehat{T}$ ou $\mathcal{F}T$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

est une distribution tempérée.

▷ Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle \widehat{T}, \varphi \rangle| = |\langle T, \widehat{\varphi} \rangle| \leq CN_p(\widehat{\varphi}) \leq CN_{p+d+1}(\varphi)$$

donc $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. □

Théorème 4.11

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et son inverse est $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$ avec

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle.$$

▷ Soit $\varphi \in \mathcal{S}(R^d)$.

$$\langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \overline{FF}\mathcal{F}\varphi \rangle = (2\pi)^d \langle T, \varphi \rangle.$$

□

Théorème 4.12

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente ainsi que toute ses dérivées. De plus, on a :

$$\widehat{T}(\xi) = \langle T, e_\xi \rangle$$

avec $e_\xi(x) = e^{-ix\cdot\xi}$.

Rappel : $\langle T, e_\xi \rangle = \langle T, \chi e_\xi \rangle$ pour tout $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $\operatorname{Supp} T$.

▷ Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\rangle \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, e^{-ix\cdot\xi}\rangle\varphi(x)\mathrm{d}x$$

donc $\widehat{T}(x) = \langle T, e_x(\xi)\rangle$. Montrons que $\widehat{T}$ est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. On a

$$\widehat{\xi} = \langle T, \chi e_\xi \rangle$$

donc

$$|\partial^\alpha \widehat{T}(\xi)| = |\langle T, (-ix)^\alpha \chi(x) e^{ix\cdot\xi}\rangle| \leq C \sup_{|\beta|\leq p} \left\| \partial x^\beta (x^\alpha \chi(x) e^{-ix\xi}) \right\|_{\infty,x}$$

Dans cette expression la variable x peut être choisie bornée car $\operatorname{Supp}\chi$ est compact. Les dérivées de $e^{-ix\cdot\xi}$ par rapport à x font apparaître des puissances de ξ, d'un ordre plus petit que p, donc

$$|\partial^\alpha \widehat{T}(\xi)| \leq C_1 + C_2|\xi|^p \leq C(1 + |\xi|^p).$$

□

Exemples : 1. $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. En effet,

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle.$$

et $\mathcal{F}\delta_a(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}$.

2. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T)$$

et

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}T.$$

▷ On a

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha(\mathcal{F}T), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle \mathcal{F}T, \partial^\alpha\varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, (ix)^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}((-ix)^\alpha T), \varphi\rangle\end{aligned}$$

et

$$\langle \partial^\alpha(\mathcal{F}T), \varphi\rangle = \langle (-ix)^\alpha T, \mathcal{F}\varphi\rangle = (-i)^\alpha\langle \mathcal{F}(x^\alpha T), \varphi\rangle.$$

□

4.2.3 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Théorème 4.13

L'application $u \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}u$ est une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ d'inverse $u \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{F}\overline{F}u$. On a l'égalité de Plancherel :

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left\|\widehat{u}\right\|_{L^2} = \left\|u\right\|_{L^2}.$$

▷ *Étape 1 :* Montrons que $u \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\widehat{u}$ est une isométrie de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ pour la norme L^2. Soient $u, v \in \mathcal{S}$.

$$\langle \widehat{u}, v\rangle = \langle u, \widehat{v}\rangle$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\widehat{v}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{u}(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

On choisit $v = \overline{\widehat{u}} \in \mathcal{S}$. Or

$$\overline{\widehat{u}}(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x} = \int_{\mathbb{R}^d}\overline{u}(x)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \overline{\mathcal{F}}(\overline{u}) = (2\pi)^d\mathcal{F}^{-1}(\overline{u}).$$

Donc

$$\widehat{v} = \mathcal{F}((2\pi)^d\mathcal{F}^{-1}(\overline{u})) = (2\pi)^d\overline{u}.$$

Ainsi,

$$(2\pi)^d\left\|u\right\|_{L^2}^2 = \left\|\widehat{u}\right\|_{L^2}^2$$

d'où

$$\left\|u\right\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left\|\widehat{u}\right\|_{L^2}.$$

Étape 2 : Soit maintenant $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soient $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ dans L^2. On sait que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left\|\widehat{u_n}\right\|_{L^2}$. (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ donc $(\widehat{u_n})$ est aussi de Cauchy dans

$L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc $\widehat{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$ dans L^2. Montrons que $v = \widehat{u}$. u_n converge vers u dans L^2 donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \qquad |\langle u_n - u, \varphi\rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}$$

donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \qquad |\langle \widehat{u_n} - \widehat{u}, \varphi\rangle| = |\langle u_n - u, \widehat{\varphi}\rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^2} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}$$

ie. $\widehat{u_n}$ tend vers $\widehat{u}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Or $\widehat{u_n}$ tend vers v dans L^2 donc $\widehat{u_n}$ tend vers v dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, $v = \widehat{u}$. On peut donc passer à la limite dans l'égalité

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\widehat{u_n}\|_{L^2} = \|u_n\|_{L^2}$$

et on conclut que

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\widehat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

□

4.2.4 Quelques propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Proposition 4.14

(i) Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(u * v) = (\mathcal{F}u)(\mathcal{F}v)$.
(ii) Si $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{E}'$ alors $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T)$.

▷ (i) Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (u*v)(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(x-y)\mathrm{d}y\right)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}e^{-iy\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} v(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)u(y)e^{-iy\cdot\xi}\mathrm{d}y = \widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi).
\end{aligned}$$

(ii) Soient $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{E}'$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\langle \widehat{T * S}, \varphi\rangle = \langle T * S, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, \widetilde{S} * \widehat{\varphi}\rangle.$$

Or, pour $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \widetilde{S} * \widehat{\varphi}, \psi\rangle = \langle \widetilde{S}, \widetilde{\widehat{\varphi}} * \psi\rangle = \langle \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{S}), \widetilde{\widehat{\varphi}} * \psi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\widetilde{S}, \mathcal{F}(\widetilde{\widehat{\varphi}} * \psi)\rangle = (2\pi)^{-d}\langle \mathcal{F}S, \mathcal{F}(\widetilde{\widehat{\varphi}} * \psi)\rangle,$$

et $\widetilde{\widehat{\varphi}} = \overline{\mathcal{F}}\varphi = (2\pi)^d \mathcal{F}^{-1}\varphi$. Ainsi, $\mathcal{F}(\widetilde{\widehat{\varphi}} * \psi) = (2\pi)^d \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi) * \psi) = (2\pi)^d \varphi \mathcal{F}\psi$ d'après le point (i). Alors,

$$\langle \widetilde{S} * \widehat{\varphi}, \psi \rangle = \langle \mathcal{F}S, \varphi\widehat{\psi} \rangle = \langle \varphi\widehat{S}, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\varphi\widehat{S}}, \psi \rangle.$$

Donc

$$\widetilde{S} * \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi\widehat{S}}.$$

Ainsi,

$$\langle \widehat{T * S}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi\widehat{S}} \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi\widehat{S} \rangle = \langle \widehat{S}\widehat{T}, \varphi \rangle$$

donc

$$\widehat{T * S} = \widehat{S}\widehat{T}.$$

□

Exemple : 1. $T = VP\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$xT = 1$$

donc

$$\widehat{xT} = \widehat{1} = 2\pi\delta_0$$

soit

$$\widehat{T}' = -2i\pi\delta_0 = -2i\pi H'$$

donc

$$(\widehat{T}' + 2i\pi H)' = 0$$

donc

$$\widehat{T} = -2i\pi H + C \in L^1_{\mathrm{loc}}.$$

De plus, $\widehat{T}$ est impaire (car T est impaire au sens des distributions : $\langle T, \widetilde{\psi} \rangle = -\langle T, \psi \rangle$) donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -2i\pi H(-x) + C = 2i\pi H(x) - c$$

d'où

$$C = \frac{1}{2}\left(2i\pi H(x) + 2i\pi H(-x)\right) = i\pi.$$

Ainsi,

$$\widehat{T} = -2i\pi H(x) - i\pi = i\pi(1 - 2H(x))$$

soit

$$\widehat{T} = -i\pi \mathrm{sgn}(x).$$