Fonctions holomorphes

Table des matières

1 Fonctions d'une variable complexe

Définition 1.1

– *Une fonction complexe d'une variable complexe est une application d'un sous-ensemble* $S \subset \mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$. *On la note* $f : S \to \mathbb{C}$.

– $\omega = f(z)$ *est le nombre complexe image de* z *par* f.

– S *est l'ensemble de définition de* f.

En identifiant $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, on peut considérer f comme une fonction vectorielle de deux variables réelles :

$$f(z) = u(z) + iv(z), \qquad \Re(f) = u,\ \Im(f) = v$$

peut s'écrire, en posant $z = x + iy = (x, y)$

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Exemple : $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ici $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$.

2 Fonctions élémentaires

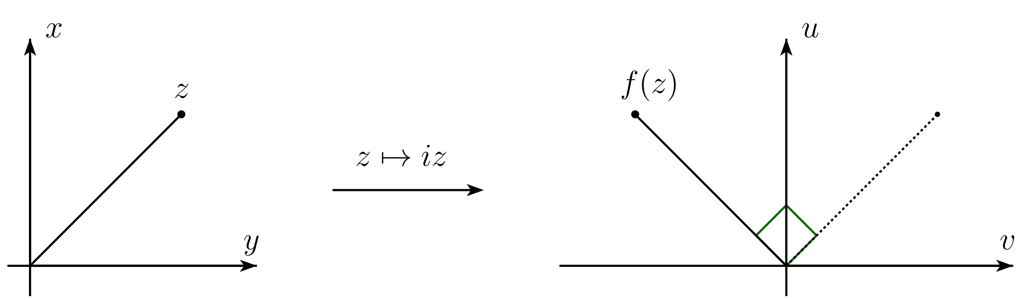
2.1 Polynômes

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \qquad (a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0)$$

f est définie dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

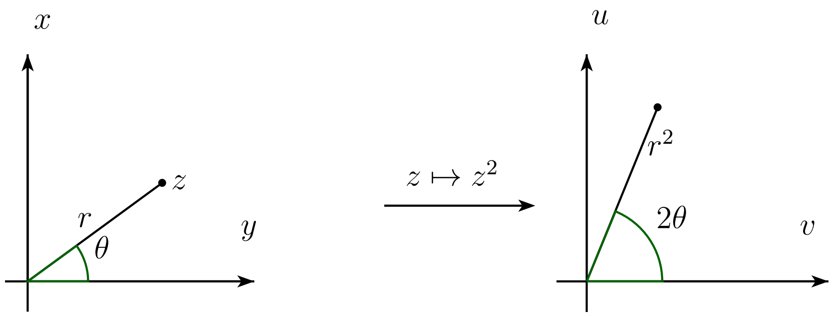
Exemple 1 : $f(z) = iz = i(x+iy) = -y+ix$. Ici $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ avec $u(x, y) = -y$ et $u(x, y) = x$.

Géométriquement, il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{C}$.



Exemple 2 : $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

Géométriquement,



En particulier,

$$\{z,\ \Re(z) \geq 0,\ \Im(z) \geq 0\} \qquad \longrightarrow \qquad \{\omega,\ \Im(\omega) \geq 0\}.$$

2.2 Fonctions rationnelles

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad p, q \text{ polynômes}$$

f est définie sur $\mathbb{C} \backslash \{z,\ q(z) \neq 0\}$.

Exemple : $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Ici, $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $v(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$.

En particulier,

$$\{z,\ 0 < |z| \leq 1\} \qquad \longrightarrow \qquad \{\omega,\ |\omega| \geq 1\}.$$

2.3 Fonction exponentielle

On pose, par définition,

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

avec e^x l'exponentielle réelle.

Exemple : $e^{i\pi} = e^0(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

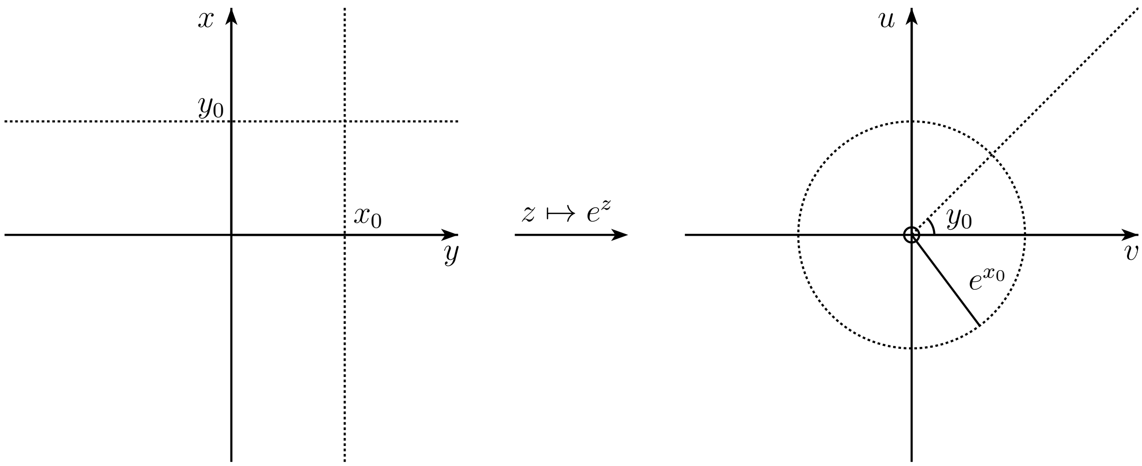
Alors, la fonction exponentielle $f(z) = e^z$ a les propriétés suivantes :
(i) Elle est définie sur $\mathbb{C}$ et se réduit à e^x lorsque $z = x \in \mathbb{R}$.
(ii) $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$
(iii) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

▷ En notant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x+1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

□

2.4 Représentation géométrique de e^z



e^z envoie les droites parallèles à l'axe des abscisses sur les demi-droites issues de l'origine. e^z envoie les droites parallèles à l'axe des ordonnées sur les cercles centrés sur l'origine.

Proposition 2.1

Toute bande de la forme

$$S_{y_0} = \{x + iy,\ y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$$

est envoyée bijectivement sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *par* e^z.

$\forall z,\ e^z \neq 0$ car $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$.

2.5 Fonction logarithme

On veut définir $\log(z)$ comme réciproque de e^z :

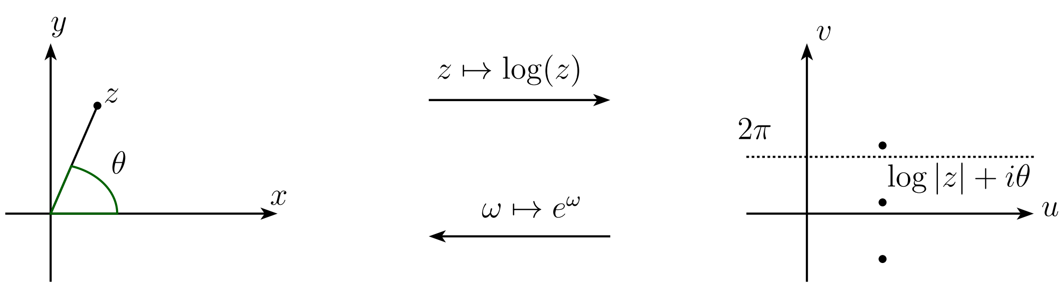
$$e^{\log(z)} = z.$$

(i) $\log(z)$ n'est pas défini pour $z = 0$ car $e^z \neq 0$ $\forall z$.
(ii) Pour $z \neq 0$, on pose

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi)$$

où $\log|z|$ est le logarithme réel.
Alors,

$$e^{\log(z)} = e^{\log|z| + i(\theta+2k\pi)} = e^{\log|z|}e^{i(\theta+2k\pi)} = |z|e^{i\theta} = z.$$



Puisque $\arg(z)$ est défini à 2π près, $\log(z)$ est multiforme (possédant plusieurs déterminations)

Exemples :

$$\log(1) = \log|1| + i\arg(1) = 2ik\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\log(i) = \log(|i|) + i\arg(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(iii) Afin d'obtenir une fonction uniforme, on restreint $\arg(z)$ à un intervalle de largeur 2π, en général $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ où $-\pi \leq \arg(z) < \pi$.

Définition 2.2

La détermination principale de $\log(z)$ *est*

$$\mathrm{Log}(z) = \log(z) + i\,\mathrm{Arg}(z), \qquad -\pi \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi$$

(iv) Afin d'obtenir $\log(z)$ continue, il faut restreindre le domaine de définition de log.

Exemple : Ainsi définie, Log n'est pas continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En effet, le cercle unité (compact) a pour image $i[-\pi, \pi[$ qui ne l'est pas. On considère donc comme ensemble de définition $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_-$ est appelé coupure, 0 est appelé point de branchement). Sur cet ensemble, Log est continue et a pour image $i]-\pi, \pi[$.

Propriétés de $\log(z)$ *(i)* $\mathrm{Log}(z)$ prolonge le logarithme réel

$$\mathrm{Log}(z) = \log(x) \qquad \text{lorsque } z = x + i0,\ x > 0.$$

(ii) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$\triangleright$ $\log(z_1 z_2) = \log|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) = \log|z_1| + i\arg(z_1) + \log|z_2| + i\arg(z_2) = \log z_1 + \log z_2$ $\square$

Exemple : $\mathrm{Log}(-2i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$ et $\log(-2i) = \log 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

2.6 Puissances complexes

Soient $z, c \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. On pose

$$z^c = e^{c \log z}$$

Remarques : 1. Lorsque $c = n \in \mathbb{Z}$, on obtient $z^n = e^{n\log z}$ donc $z^n = e^{n(\log|z| + i\arg(z))} = e^{n\log|z|}e^{in\arg(z)} = |z|^n e^{in\arg(z)}$ ce qui est indépendant du choix d'argument.

2. Lorsque $c \notin \mathbb{Z}$, z^c est multiforme.

Exemple : Pour $c = \frac{1}{n}$, $n \neq 1$,

$$z^{1/n} = e^{\log(z)/n} = e^{(\log|z| + i\arg(z))/n} = |z|^{1/n} e^{i\arg(z)/n} = |z|^{1/n} e^{i(\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi)/n}$$

Définition 2.3

La détermination principale de z^c *est* $e^{c\,\mathrm{Log}(z)}$.

Exemples : 1. $i^i = e^{i\log i} = e^{i(\log 1 + i\arg(i))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$. La détermination principale de i^i est donc $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2. $(-1)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{-\pi+2k\pi}{n}}$

3 Dérivation dans le plan complexe

3.1 Notions préliminaires

3.1.1 Régions de $\mathbb{C}$

Définition 3.1

(i) Un disque de rayon ε centré en z_0 est l'ensemble

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathcal{C},\ |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

(ii) Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert si pour chaque point $z_0 \in \Omega$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$.

(iii) Une région est un ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{C}$.

Exemple : (i) $\{z,\ \Re(z) = 0\}$

(ii) $\mathbb{C} \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$

3.1.2 Limite et continuité

Soit f définie sur $D_\varepsilon(z_0)$ (sauf peut-être en z_0).

Définition 3.2

On dit que $f(z)$ admet A comme limite lorsque z tend vers z_0, et on note

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \qquad \text{ou} \qquad f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} A$$

si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \qquad 0 < |z - z_0| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Proposition 3.3

Si $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ et $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$ alors

(i) $\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = A + B$

(ii) $\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = AB$

(iii) $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$.

Définition 3.4

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(i) f est continue en $z_0 \in \Omega$ si et seulement si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
(ii) f est continue sur Ω si elle est continue en chaque point de Ω.

Remarque : $f = u + iv$ est continue si et seulement si u et v sont continues.

Proposition 3.5

(i) Si f et g sont continues en z_0 alors il en est de même pour $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$ si $g(z_0) \neq 0$.
(ii) Si f est continue en z_0 et g est continue en $\omega = f(z_0)$ alors $g \circ f$ est continue en z_0.

Exemples : (i) $f(z) = e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.
(ii) $g(z) = \frac{1}{z}$ est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
(iii) $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$ est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

3.2 Dérivation dans $\mathbb{C}$

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Définition 3.6

(i) La fonction f est dérivable en $z \in \Omega$ si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe. On la note $f'(z)$.
(ii) Si $f'(z)$ existe en tout point $z \in \Omega$ on dit que f est holomorphe sur Ω.
(iii) On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Remarque : La définition (i) est équivalente à l'assertion (i') : f est dérivable en $z \in \Omega$ si et seulement si

$$f(z+h) = f(z) + ah + h\varphi(h)$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $\varphi(h) \in \mathbb{C}$ une fonction définie pour h au voisinage de 0 et vérifiant $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$. Alors, $f'(z) = a$.

Proposition 3.7

Si f est dérivable en z_0 alors f est continue en z_0.

$\triangleright$ $\lim_{h \to 0} f(z_0+h) - f(z_0) = \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \times h = f'(z) \times 0 = 0.$ $\square$

Les propriétés principales de la dérivation sont les suivantes.

Théorème 3.8

Si f et g sont dérivables en z, alors
(i) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
(ii) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$ si $g(z) \neq 0$.

(iv) Si f est dérivable en z et g est dérivable en $\omega = f(z)$ alors

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Exemples : (i) Polynômes : Si $f(z) = z^n$ alors $f'(z) = nz^n$ (par le point (ii) et une récurrence) donc

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(z) = na_n z^{n-1} + \ldots a_1.$$

Les polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

(ii) Fonctions rationnelles : si $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ où p, q sont des polynômes alors

$$f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2}$$

sur $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C},\ q(z) \neq 0\}$ par le point (iii).

3.3 Les équations de Cauchy-Riemann

Considérons $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que l'on écrit comme

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

On formule une condition de dérivabilité de f en terme de u et v :

Théorème 3.9

(i) Si f est holomorphe dans Ω, alors

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \textit{équations de Cauchy-Riemann.}$$

(ii) Si les dérivées partielles de u et v (dans $\mathbb{R}$) sont continues (u et v sont de classes $\mathcal{C}^1$) et vérifient les équations de Cauchy-Riemann alors f est holomorphe dans Ω.

▷ (i) Si f est dérivable en z alors

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

D'abord, prenons $h = t$ réel.

$$\frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i\frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t}$$

d'où, lorsque $t \to 0$, on obtient

$$(i) \qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Ensuite, prenons h imaginaire pur : $h = it$.

$$\frac{f(z+it)-f(z)}{it} = \frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{it} + i\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{it}$$

d'où, lorsque $t \to 0$, on obtient

$$(ii) \qquad f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y).$$

Ainsi, (i) et (ii) imposent

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(ii) Puisque $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ est $\mathcal{C}^1$ par hypothèse,

$$f(x+k,y+l)-f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} + \|h\|\, r(h)$$

où $h = (k,l)$ et $r(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Avec les équations de Cauchy-Riemann, on obtient

$$f(x+k,y+l)-f(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}k - \frac{\partial v}{\partial x}l, \frac{\partial v}{\partial x}k + \frac{\partial u}{\partial x}l\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(k+il)$$

en identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Alors,

$$f(z+h)-f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)h + \|h\|\, r(h)$$

donc

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

par la définition (i') plus haut. $\square$

Exemple : (i) $f(z) = z^2$, $f \in H(\mathbb{C})$.

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Ainsi $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$ sont $\mathcal{C}^1$. De plus,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

donc u, v vérifient les équations de Cauchy-Riemann et

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z.$$

(ii) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. On a $u(x,y) = x^2 + y^2$ et $v(x,y) = 0$ sont $\mathcal{C}^1$ mais les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées. Ainsi $|.|^2$ n'est pas dérivable dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et n'est pas holomorphe.

Théorème 3.10

Soit $f \in H(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe. Si f vérifie une des conditions suivantes sur Ω, alors f est constante sur Ω.

(i) $f \equiv 0$
(ii) $\Re(f)$ =*constante*
(iii) $\Im(f)$ =*constante*
(iv) $|f|$ =*constante*
(v) $\overline{f} \in H(\Omega)$

▷ (ii) Supposons que $\Re(f)$ est constante. Alors $u(x,y) = c$. Par les équations de Cauchy-Riemann, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ et v est constante. Ainsi, f est constante. □

3.4 Fonction exponentielle

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Proposition 3.11

$\exp \in H(\mathbb{C})$ *et* $(e^z)' = e^z$.

▷ $u = e^x \cos y$ et $v = e^x \sin y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Ainsi, exp est dérivable sur $\mathbb{C}$ et

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

□

Exemple : $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ est dérivable dan $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et

$$f'(z) = e^{\frac{1}{z}}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{-e^{\frac{1}{z}}}{z^2}.$$

3.5 Logarithme

Rappel : $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \{\omega \in \mathbb{C},\ -\pi < \Im\omega < \pi\}$

Proposition 3.12

Log *est holomorphe dans* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ *et* $\frac{d}{dz}\,\mathrm{Log}(z) = \dfrac{1}{z}$.

▷ Pour z tel que $\Re(z) > 0$,

$$\mathrm{Log}(z) = \underbrace{\log(\sqrt{x^2+y^2})}_{u(x,y)} + i\underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{v(x,y)}.$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Ainsi, Log est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Log}(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

□

3.6 Puissances

Soient $a, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Rappel : $a^c = e^{c\log a}$.

Définition 3.13

(i) $a^z = e^{z\log a}$

(ii) $z^c = e^{c\log z}$

Proposition 3.14

$z \mapsto a^z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$.

▷ $f : z \mapsto a^z = e^{z\log a}$ est la composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{C}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{C}$ et

$$f'(z) = e^{z\log a} = e^{z\log a}\log(a) = a^z\log(a).$$

□

Proposition 3.15

Pour toute détermination de $\log(z)$, la fonction $f : z \mapsto z^c$ est dérivable dans la région de la détermination choisie et

$$f'(z) = cz^{c-1}.$$

▷ f est holomorphe comme composée de fonctions holomorphes et

$$f'(z) = \frac{c}{z}e^{c\log z} = cz^{c-1}.$$

□

Remarque : 1. On choisit la détermination principale $\operatorname{Log}(z)$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

2. Lorsque $c = \frac{1}{n}$, on a $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et

$$f'(z) = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemples : Soit $\mathrm{Log}(z)$ la détermination principale de $\log(z)$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Trouver les régions Ω sur lesquelles les fonctions suivantes sont holomorphes, ainsi que $f(\Omega)$.

1. $f : z \mapsto \sqrt{z}$. $f(z) = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)}$ est composée de fonctions holomorphes.

$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \xrightarrow{z\mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)} \left\{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\} \xrightarrow{z\mapsto e^z} \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$$

2. $f : z \mapsto \sqrt{z+1}$. $f(z) = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z+1)}$ est composée de fonctions holomorphes.

$$\mathbb{C}]-1, +\infty[\xrightarrow{z\mapsto\sqrt{z+1}} \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$$

3. $f : z \mapsto \sqrt{z^2+1}$. $f(z) = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2+1)}$ est composée de fonctions holomorphes.

$$\mathbb{C}\backslash\{iy,\ y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\} \xrightarrow{z\mapsto\sqrt{z^2+1}} \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$$

4 Intégration dans le domaine complexe

4.1 Définition et premières propriétés

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On écrit

$$f(t) = u(t) + iv(t).$$

Définition 4.1

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Exemple : $f(t) = t^2 + it^3$.

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t + i\int_0^1 t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{i}{4}.$$

Définition 4.2

Un chemin (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) est une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ avec $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on parle de chemin fermé ou lacet.

On note $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

Définition 4.3

Soit γ un chemin et f une fonction continue sur γ^*. On pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right).$$

Exemples : – Calculer l'intégrale de $f(z) = x^2 + ixy$ sur le chemin $\gamma(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \big(t^2 + it^3)(1 + 2it\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2 - 2t^4)\mathrm{d}t + i\int_0^1 3t^3\mathrm{d}t = \frac{-1}{15} + \frac{3}{4}\,i$$

– $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it}e^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2i\pi.$$

Propriétés de l'intégrale sur un chemin

(i) $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}z$

(ii) Invariance par changement de paramètre : Un chemin $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$ est obtenu à partir de γ par changement de paramètre s'il existe une application bijective $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$ telle que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\varphi(t))$. Alors,

$$\int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f\mathrm{d}z.$$

(théorème de changement de variables)

(iii) Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin on définit

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$$

et on a

$$\int_{\overline{\gamma}} f\mathrm{d}t = -\int_\gamma f\mathrm{d}t.$$

(iv) On a

$$\left|\int_\gamma f\mathrm{d}z\right| \leq ML$$

où $M = \sup\limits_{z\in\gamma^*} |f(z)|$, et $L = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$: longueur de γ.

$\triangleright$ Si $\displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}z = 0$ alors l'inégalité est vraie. Sinon, on peut écrire sous forme polaire :

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = re^{i\theta}.$$

Alors,

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Mais, $r \in \mathbb{R}$ donc

$$r = \Re\left(\int_a^b e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \Re(e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t))\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\mathrm{d}t.$$

De plus, $r > 0$ donc
$$r = |r| = \left| e^{-i\theta} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \right|.$$
Ainsi,
$$\left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\mathrm{d}t \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

□

Soit Ω un ouvert connexe.

Théorème 4.4

Soit f une fonction continue sur Ω. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists F \in H(\Omega),\ F' = f$;

(ii) $\displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}z = 0$ *pour tout chemin fermé dans* Ω.

(iii) $\displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}z$ *ne dépend que des extrémités de* γ *pour tout chemin* γ *dans* Ω.

▷ $(i) \Rightarrow (ii)$ ON a
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\right)\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soient γ_0 et γ_1 deux avec ayant les mêmes extrémités. Alors $\gamma = \gamma_0 + \overline{\gamma_1}$ est un chemin fermé et
$$0 = \int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f\mathrm{d}z + \int_{\overline{\gamma_1}} f\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f\mathrm{d}z.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ On fixe $z_0 \in \Omega$ et on pose
$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

F est bien définie car indépendante du γ choisi. Montrons que $F'(z) = f(z)$.
$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - hf(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\mathrm{d}\zeta \right|$$

donc, par continuité de f,
$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \times |h| \underbrace{\sup_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}.$$

□

Remarque : – On voit que $\mathrm{Log}(z)$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi \neq 0.$$

– On aura besoin de considérer $\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z$ où $\mathcal{C}$ est un chemin géométrique orienté (cercle, segment, etc.). Alors on choisit un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma'(t) \neq 0$ tel que $\gamma^* = \mathcal{C}$ et γ est bijective. On pose $\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z$. Cette intégrale est bien définie car $\gamma_1^* = \mathcal{C} = \gamma_2^* \Rightarrow \gamma_1, \gamma_2$ diffèrent d'un changement de paramètre d'où $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$.

4.2 Théorème de Cauchy

Définition 4.5

Un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est simple si $\gamma_{|[a,b[}$ est injective.

D'après le lemme de Jordan, si γ est simple et fermé alors $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ a deux composantes connexes :
– une composante bornée : l'intérieur de γ^*,
– une composante non bornée : l'extérieur de γ^*.

Donc γ^* est le bord d'un compact $\mathcal{R} = \mathring{\gamma^*} \cup \gamma^*$. On oriente γ^* dans le sens direct.

Théorème 4.6 (*Cauchy*)

Si f est holomorphe et f' est continue sur un compact $\mathcal{R} \subset \Omega$ alors

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = 0.$$

$\triangleright$ (i) Rappel : théorème de Green-Riemann pour les intégrales curvilignes : avec $\gamma, \mathcal{R}$ comme ci-dessus et $P(x,y), Q(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\Omega \supset \mathcal{R}$ on a

$$\int_{\gamma^*} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

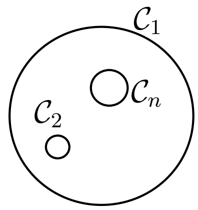
(ii) On écrit $f = u + iv$ et $f = u + iv$ et $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ d'où

$$\int_{\gamma^*} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma^*} u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_{\gamma^*} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

grâce aux équations de Cauchy-Riemann. $\square$

Remarque : (i) Cette démonstration est celle de Cauchy. On avait besoin de u, v de classe $\mathcal{C}^1$.

(ii) Gorsat a donné une démonstration du théorème de Cauchy sans l'hypothèse de la continuité des dérivées partielles de u, v.

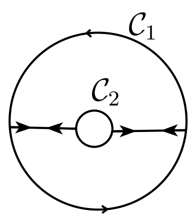


De façon plus générale : soient $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ des chemins simples fermés tels que les $\mathcal{C}_i$ forment le bord d'un compact $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$, $\partial R = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$. On oriente les $\mathcal{C}_i$ dans le sens direct.

Théorème 4.7 (*Cauchy*)

Si f est holomorphe sur $\mathbb{R} \subset \Omega$ alors

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\mathcal{C}_n} f(z)dz$$



$\triangleright$ On fait la preuve dans le cas $n = 2$. On ajoute deux segments de liant $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$. On sépare donc $\mathcal{R}$ en deux compacts $\mathcal{R}_i$ et on orient le bord comme sur le schéma. Alors,

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

par le théorème de Cauchy. $\square$

4.3 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 4.8

Soit $\mathcal{C}$ un chemin simple fermé. Supposons que f est holomorphe sur l'intérieur de $\mathcal{C}$ et en tout point de $\mathcal{C}$. Soit $z_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Alors,

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Remarque : Ce théorème dit que f (holomorphe) est complètement déterminée dans $\overline{\circ}\mathcal{C}$ par ses valeurs sur $\mathcal{C}$! !

Exemples : Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour calculer les intégrales suivantes.

(*i*) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0}\mathrm{d}z = 2i\pi e^0 = 2i\pi.$

(*ii*) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{(z^2-9)(z-i)}\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-i}\mathrm{d}z$ où $f(z) = \dfrac{z}{z^2-9}$. Donc

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{(z^2-9)(z-i)}\mathrm{d}z = 2i\pi f(i) = \frac{\pi}{5}.$$

▷ (i) On a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On considère le cercle $\mathcal{C}_\varepsilon$ centré en z_0 de rayon ε. Par le théorème de Cauchy,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\mathrm{d}t = 2i\pi f(z_0)$$

(iii) Par ailleurs, le théorème de Cauchy assure que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

donc, par continuité de f,

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \leq \underbrace{\sup_{t\in[0,2\pi]} \left|f(z_0+\varepsilon e^{it})-f(z_0)\right|}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0} \times 2\pi$$

donc $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 0$ et donc

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2i\pi f(z_0).$$

□

En général, avec les hypothèses du théorème, si $z \in \mathring{\mathcal{C}}$ alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

(représentation intégrale de $f(z)$.)

4.4 Dérivées des fonctions holomorphes

On montre, à l'aide de la formule intégrale de Cauchy, que si f est holomorphe dans Ω alors toutes ses dérivées $f^{(n)}$ existent dans Ω. Étant donné

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

on dérive sous le signe intégral afin d'obtenir

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

Théorème 4.9

Soient $\mathcal{C}$ un chemin simple fermé et f une fonction holomorphe sur $\mathring{\mathcal{C}}$ ainsi que sur $\mathcal{C}$. Si $z \in \mathring{\mathcal{C}}$

alors

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

▷ Cas $n = 1$. Écrivons f à l'aide de la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+h)}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{h}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

Donc

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{|h|ML}{2\pi(d-|h|)d^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

où $d = d(z, \mathcal{C})$ L est la longueur de $\mathcal{C}$ et M majore $|f(\zeta)|$ sur $\mathcal{C}$. □

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 4.10

Si $f \in H(\Omega)$ alors $\forall n \geq 0,\ f^{(n)} \in H(\Omega)$.

On a « la réciproque » suivante du théorème de Cauchy.

Théorème 4.11 (*Morera*)

Si f est continue dans Ω et $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout chemin fermé dans Ω alors $f \in H(\Omega)$.

▷ Si $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout $\mathcal{C}$ alors il existe $F \in H(\Omega)$ tel que $F' = f$ donc $f \in H(\Omega)$. □

4.5 Conséquences de la formule intégrale de Cauchy

Théorème 4.12 (*Inégalités de Cauchy*)

Si $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, $f \in H(\Omega)$ et $|f(z)| \leq M$ sur $\partial\overline{D(z_0, r)}$ alors

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n}M.$$

▷ $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial\overline{D(z_0,r)}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$ donc

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \times \frac{M}{r^{n+1}} \times 2\pi r = \frac{n!}{r^n}M.$$

□

Théorème 4.13 (*Liouville*)

Si $f \in H(\mathbb{C})$ et f est bornée alors f est constante.

▷ Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère $\overline{D(z, r)} \in \mathbb{C}$. D'après les inégalités de Cauchy, $|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ donc $f'(z) = 0$. Comme $f'(z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C}$, f est constante. □

5 Séries entières

5.1 Séries entières et rayon de convergence

Définition 5.1

Une série entière est une série du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Exemple : La série géométrique $\sum z^n$ converge (vers $\frac{1}{1-z}$) si et seulement si $|z|<1$.

Théorème 5.2

Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ *une série entière. Alors il existe* $R \in [0,+\infty]$, *appelé rayon de convergence, tel que la série converge uniformément et absolument dans* $D(z_0,R)$ *(et diverge à l'extérieur). On l'obtient par la formule :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty}(|a_n|^{\frac{1}{n}}).$$

Proposition 5.3

On peut également calculer R *grâce :*

- *au critère de Cauchy :* $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}(|a_n|^{\frac{1}{n}})$ *(si cette limite existe) ;*
- *au critère de d'Alembert :* $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *(si cette limite existe).*

Exemples : – $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergen $R=+\infty$.

– $\sum n!z^n$ a pour rayon de convergence $R=0$.

Théorème 5.4

Les séries entières sont holomorphes dans leur disque ouvert de convergence.

Si $f : z \mapsto \sum a_n(z-z_0)^n$ *est une série entière (de rayon* R*), alors sa dérivée est* $f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n+1}$ *(et elle a même rayon de convergence).*

Corollaire 5.5

Une série entière admet des dérivées de tout ordre dans son disque ouvert de convergence.

5.2 Fonctions analytiques et théorème de Cauchy-Taylor

Définition 5.6

On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est analytique si* $\forall D(z_0,r) \subset \Omega$, *il existe une série* $\sum a_n(z-z_0)^n$

convergente dans $D(z_0, r)$ et telle que

$$f(z) = \forall z \in D(z_0, r), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Remarque : 1. Si f est analytique alors $f \in H(\Omega)$.

2. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ dans $D(z_0, r)$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

d'où

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \qquad \text{série de Taylor.}$$

En effet, $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \Rightarrow f(z_0) = a_0, \; f'(z_0) = a_1, \; f''(z_0) = 2a_2, \ldots$

Théorème 5.7 (*Cauchy-Taylor*)

Soit $f \in H(\Omega)$. Alors pour tout disque $D(z_0, r) \subset \Omega$,

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$\triangleright$ On note $\mathcal{C} = \partial \overline{D(z_0, r)}$. Par la formule intégrale de Cauchy, on a :

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{N-1} + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta + \frac{z - z_0}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \mathrm{d}\zeta + \cdots + \frac{(z - z_0)^{N-1}}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^N} \mathrm{d}\zeta + \rho_N(z) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} (z - z_0)^{N-1} + \rho_N(z) \end{aligned}$$

avec

$$\rho_N(z) = \frac{(z-z_0)^N}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^N (\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta$$

Donc cette série converge vers $f(z)$ si et seulement si $\lim\limits_{N \to +\infty} \rho_N(z) = 0$. Mais

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{|z-z_0|^N}{2\pi} \times \frac{M}{r^N d} \times 2\pi r$$

avec $M = \sup\limits_{\zeta \in \mathcal{C}} |f(\zeta)|$ et $d = \inf\limits_{\zeta \in \mathcal{C}} |\zeta - z|$. Donc

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{Mr}{d} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

car $\dfrac{|z-z_0|}{r} < 1$. □

Corollaire 5.8

f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est analytique sur Ω.

Exemples : 1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,\ z \in \mathbb{C}$. $f(z) = e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ d'où $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(0) = e^0 = 1$

2. $Log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n + \dots,\ |z| < 1$.

3. On définit $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots,\ z \in \mathbb{C}$ et $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots,\ z \in \mathbb{C}$.

5.3 Application : Principe de prolongement analytique

Théorème 5.9

Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ dans $D(z_0, r)$ avec $f(z_0) = 0$, alors

- *soit $f(z) = {}^\circ$ pour tout $z \in D(z_0, r)$*
- *soit il existe $\varepsilon \leq r$ tel que f n'a pas de zéro dans $D'(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.*

▷ On suppose $f \neq 0$ dans $D(z_0, r)$. Par changement de variable, on suppose $z_0 = 0$ donc $f(0) = 0$. Alors $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$ avec $a_m \neq 0$, $m \geq 1$. Un tel $a_m \neq 0$ existe car $f \neq 0$ dans $D(z_0, r)$. Donc $f(z) = z^m (a_m + a_{m+1} z + \dots) = z^m (a_m + h(z))$ avec $h(z) = a_{m+1} z + \dots$ analytique et $h(0) = 0$. Par continuité de h, il existe $\varepsilon \leq r$ tel que $|h(z)| < |a_m|$ dans $D(0, \varepsilon)$ donc $f(z) = z^m (a_m + h(z)) \neq 0$ dans $D'(0, \varepsilon)$. □

Définition 5.10

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On pose $Z(f) = \{z \in \Omega,\ f(z) = 0\}$ (zéros de f).

Théorème 5.11 (*zéros isolés*)

Si $f \in H(\Omega)$, Ω connexe, alors

– *soit* $Z(f) = \Omega$,
– *soit* $Z(f)$ *n'a pas de point d'accumulation dans* Ω.

▷ Découle du théorème précédent (exercice) □

Corollaire 5.12 (*Principe de prolongement analytique*)

Si f *et* g *sont holomorphes dans* Ω *connexe et* $f = g$ *sur un ensemble de points ayant un point d'accumulation dans* Ω, *alors* $f = g$ *dans* Ω.

▷ Théorème des zéros isolés à $f - g$. □

6 Singularités

6.1 Singularités isolées

Définition 6.1

La fonction f *admet une singularité isolée en* z_0 *si* f *est holomorphe dans un disque épointé* $D'(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < r\}$.

Exemples : 1. $\frac{z^2+1}{z-1}$ a un singularité isolée en $z = 1$.
2. $\frac{1}{z^2(z-1)}$ a des singularités isolées en $z = 0$ et $z = 1$.
3. $e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité isolée en $z = 0$.
4. Mais $Log(z)$ a une singularité non isolée en $z = 0$.

6.2 Séries de Laurent

On considère la couronne $A = \{z \in \mathbb{C},\ r_1 < |z - z_0| < r_2\},\ 0 \leq r_1 < r_2$.

Théorème 6.2

Si f *est holomorphe dans* A, *alors*

$$\forall z \in A, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Les deux séries convergent absolument dans A *et uniformément dans tout compact* $K \subset A$. *Les coefficients* a_n, b_n *sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} f(\zeta)(z - z_0)^{n-1} d\zeta$$

pour $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = r\}$ *avec* $r_1 < r < r_2$.

Remarque : 1. Ce développement est appelé série de Laurent de f dans la couronne A.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est la partie analytique et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ est la partie principale.

$\triangleright$ On pose $z_0 = 0$ sans perte de généralité. Soit $z \in A$. On choisit s_1, s_2 tels que $r_1 < s_1 < |z| < s_2 < r_2$ et on note $\mathcal{C}_i$ le cercle de rayon s_i centré en $z_0 = 0$. Soit $\gamma = \partial \overline{D(z, \varepsilon)}$ dans l'intérieur de la couronne délimitée apr $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

(i) $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$. En effet, par le théorème de Cauchy, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_2} \frac{\zeta}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta}_{\substack{=f(z)\\ \text{(formule intégrale de Cauchy)}}}$$

(ii) $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} = \frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 + \dots\right)$. Cette série converge uniformément pour tout $\zeta \in \mathcal{C}_2$. Donc on peut intégrer terme à terme :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)}_{a_n} z^n$$

(iii) De même, $-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{z}\frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\zeta)\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$ pour $\zeta \in \mathcal{C}_1$ et

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta)\zeta^n\mathrm{d}\zeta\right)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{z^n}$$

avec $b_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta)z^{n-1}\mathrm{d}\zeta$.

(iv) Convergence uniforme sur tout compact $K \subset A$ et unicité de la série de Laurent : exercice.

$\square$

Exemples : Trouver la série de Laurent en $z_0 = 0$ des fonctions suivantes.

1. $\frac{\sin z}{z}$. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$ donc

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \qquad \text{partie analytique}$$

2. $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\left(\frac{-1}{1-z}\right) = \frac{1}{z}(-1 - z - z^2 - \dots) = \underbrace{-\frac{1}{z}}_{\text{partie principale}} \underbrace{-1 - z - z^2 - \dots}_{\text{partie analytique}}$

3. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$.

6.3 Singularités isolées et séries de Laurent

On suppose que f admet une singularité isolée en z_0 et que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dans $D'(z_0, r)$.

Définition 6.3

1. z_0 *est une singularité effaçable si* $b_n = 0$ *pour tout* n.

2. z_0 *est un pôle d'ordre* m *si* $b_m \neq 0$ *et* $b_k = 0$ *pour tout* $k > m$. *Si* $m = 1$, *alors* z_0 *est appelé un pôle simple.*

3. z_0 *est une singularité essentielle si* $b_n \neq 0$ *pour un nombre infini de* n.

Théorème 6.4

Si f *admet une singularité isolée en* z_0, *alors :*

(i) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- z_0 *est effaçable*
- f *peut être prolongé en une fonction holomorphe dans* $D(z_0, r)$.
- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe.*
- f *est bornée dans* $D'(z_0, r)$.
- $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

(ii) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- z_0 *est un pôle d'ordre* m.
- $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \neq 0$
- $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, g *holomorphe sur un voisinage de* z_0 *et* $g(z_0) \neq 0$.

▷ Exercice. □

Théorème 6.5 (*Casorati-Weierstrass*)

Soit z_0 *une singularité essentielle de* f. *Alors l'image par* f *de tout disque épointé* $D'(z_0, \varepsilon)$ *est dense dans* $\mathbb{C}$.

▷ Supposons le contraire. Alors il existe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$ tels que $|f(z) - \omega| > \delta$ pour tout $z \in D'(z_0, \varepsilon)$. Ceci implique $\left| \frac{1}{f(z)-\omega} \right| < \delta^{-1}$ d'où $g(z) = \frac{1}{f(z)-\omega}$ est analytique et bornée dans $D'(z_0, \varepsilon)$. Donc elle peut être prolongée en une fonction analytique dans $D(z_0, \varepsilon)$ (également notée g). Comme g n'est pas constante dans $D(z_0, \varepsilon)$ (sinon f le serait également et z_0 ne serait pas une singularité essentielle), on a :

– soit $g(z_0) \neq 0$ d'où $f(z) = \omega + \frac{1}{g(z)}$ est analytique en z_0 : contradiction.

– soit g admet un zéro d'ordre k en z_0 et alors $f(z) = \omega + \frac{1}{g(z)}$ a un pôle d'ordre k en z_0 : contradiction. □

6.4 Théorème des résidus

Soit $f \in H(\Omega \backslash \{z_0\})$ avec série de Laurent dans $D'(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Définition 6.6

Le résidu de f *en* z_0 *est le coefficient* b_1 *dans la série de Laurent. On le note* Res(f, z_0).

Proposition 6.7

Soit $f \in H(D'(z_0, r))$ et $\mathcal{C} \subset D'(z_0, r)$ un cercle centré en z_0. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_0)$$

$\triangleright$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ dans $D'(z_0, r)$. Puisque les séries convergent uniformément sur $\mathcal{C}$, on a :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} (z-z_0)^n \mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = 2i\pi b_1 = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_0)$$

car $\int_{\mathcal{C}} (z-z_0)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$. $\square$

Théorème 6.8 (*des résidus de Cauchy*)

Soient $\mathcal{C}$ un chemin fermé simple, f analytique sur $\mathcal{C}$ et dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ sauf pour des singularités isolées $z_1, \dots, z_m$ dans l'intérieur de $\mathcal{C}$ (il y en a un nombre fini dans un compact). Alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

$\triangleright$ Soit c_k un cercle de rayon ε autour de z_k, $k = 1, \dots, m$. (On prend ε assez petit pour que $\mathcal{C}_k \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $\overline{D(z_i, \varepsilon)} \cap \overline{D(z_j, \varepsilon)} = \varnothing$ si $i \neq j$). Alors, par le théorème de Cauchy,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\mathrm{d}z + \dots + \int_{\mathcal{C}_k} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_1) + \dots + 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_k)$$

par la proposition précédente. $\square$

6.5 Calcul des résidus

(i) Si f admet un pôle simple en z_0, alors :

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

d'où $b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.

Si $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ avec A, B analytiques, $A(z_0) \neq 0$, $B(z_0) = 0$, $B'(z_0) \neq 0$ alors

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{A(z)}{B(z) - B(z_0)} = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

(ii) Si f a un pôle d'ordre m en z_0,

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + \dots$$

alors

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + \cdots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \ldots$$

donc

$$b_1 = \lim_{z\to z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

(v) Si f a une singularité essentielle en z_0, il faut trouver b_1 à l'aide de la série de Laurent.

Exemples : 1. Res $\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right)$? pôle simple : $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ et

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

ou bien $\left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$.

2. Res $\left(\frac{1}{(z-1)^2 z}, 1\right)$: pôle d'ordre 2.

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z-1)^2 z}, 1\right) = \frac{1}{(2-1)!}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 z}\right)\bigg|_{z=1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}\right)\bigg|_{z=1} = -\left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=1} = -1$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z-1)^2 z}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z \times \frac{1}{(z-1)^2 z} = 1.$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(2z+1)}$, $\mathcal{C}$ cercle $|z|=1$. Par le théorème des résidus

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(2z+1)} = 2i\pi\left(\text{Res}\left(\frac{1}{z^2(2z+1)}, 0\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{z^2(2z+1)}, -\frac{1}{2}\right)\right)$$

– Pôle simple en $z = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{z\to -\frac{-1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^2(2z+1)} = 2.$$

– Pôle d'ordre 2 en $z=0$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{2z+1}\right) = -2$$

donc

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(2z+1)} = 0.$$

6.6 Évaluation d'intégrales réelles par la méthode des résidus

6.6.1 Intégrales de la forme $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$

avec $P(x), Q(x)$ des polynômes, $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\deg(Q) - \deg(P) \geq 2$ (ceci implique la convergence de l'intégrale).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2i\pi \sum_k \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

où $\{z_k\}$ sont les zéros de $Q(z)$ tels que $\Im(z_k) > 0$.

$\triangleright$ Soit $\mathcal{C}_R$ le contour défini par le demi-cercle : $[-R, R] \cup \underbrace{\{z \in \mathbb{C},\ |z| = R,\ \Im(z) \geq 0\}}_{\Gamma_R}$.

(i) Par le théorème des résidus :

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_k \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

où $\{z_k\}$ sont les zéros de Q à l'intérieur de $\mathcal{C}_R$. Pour R assez grand, $\mathcal{C}_R$ contient tous les zéros de Q ayant $\Im(z_k) > 0$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{d}z.$

(iii) Lorsque R tend vers $+\infty$,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = I$$

et

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{d}z = 0$$

car pour R assez grand, comme $\deg(Q) - \deg(P) \geq 2$,

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{K}{R^2} \times \pi R \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$$

$\square$

Exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = 2i\pi \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, z_k\right)$. Les zéros de $z^4 + 1$ avec $\Im(z_k) > 0$ sont

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

On a

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z = e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = -\frac{1}{8}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}).$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = -\frac{1}{8}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = 2i\pi \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

⚠ L'intégrale d'une fonction à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ est réelle.

Vérification que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1} = 0$:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1} \right| \leq \frac{1}{R^4 - 1} \times \pi R \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$$

6.6.2 Intégrales de la forme $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathbf{d}\theta$

telles que $R(x, y)$ est une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Méthode : On pose $z = e^{i\theta}$ d'où

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{2i}$$

et

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_k \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right), z_k\right)$$

où $\{z_k\}$ sont les pôles dans $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

Exemple : On a :

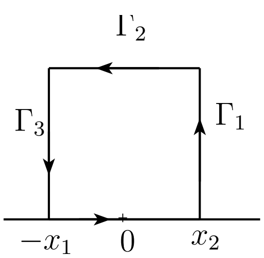
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \cos\theta} &= \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{iz\left(2 + \frac{z+z^{-1}}{2}\right)} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 4z + 1} \\ &= \frac{2}{i} \times 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 4z + 1}, \sqrt{3} - 2\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

6.6.3 Transformée de Fourier : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\mathbf{d}x$

où $a > 0$, $f(z)$ a un nombre fini de points singuliers, tous pôles, aucun sur l'axe Ox, $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|}$ pour $|z|$ grand, $\Im(z) > 0$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\mathrm{d}x = 2i\pi \sum_k \mathrm{Res}\left(e^{iaz} f(z), z_k\right)$$

où $\{z_k\}$ sont les pôles de $e^{iaz} f(z)$ avec $\Im(z_k) > 0$.



▷ En calculant la valeur de l'intégrale on montre la convergence. On pose $a = 1$. Considérons le carré de côté $T = x_1 + x_2$.

(i) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} e^{iz} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-x_1}^{x_2} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = 2i\pi \sum_k \mathrm{Res}\left(e^{iz} f(z), z_k\right)$

où $\{z_k\}$ sont les pôles dans $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

(ii) Lorsque T est grand, tous les pôles de $e^{iz} f(z)$ avec $\Im(z) > 0$ sont contenus dans $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Lorsque $x_1 \to +\infty$ et $x_2 \to +\infty$, on a :

$$\int_{\Gamma_i} e^{iz} f(z)\mathrm{d}z \longrightarrow 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = 2i\pi \sum_k \mathrm{Res}()$. En effet,

(iii) $\displaystyle\left|\int_{\Gamma_2} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z\right| = \left|-\int_{-x_1}^{x_2} f(x+iT)e^{i(x+iT)}\mathrm{d}x\right| \underbrace{\leq}_{x_1,x_2 \text{ grands}} \frac{1}{T}e^{-T}T \leq Ke^{-T} \to 0$

(iv) $\displaystyle\left|\int_{\Gamma_1} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^T f(x_2+iy)e^{i(x_2+iy)}\mathrm{d}y\right| \leq \int_0^T \frac{K}{x_2}e^{-y}\mathrm{d}y = \frac{K}{x_2}(1-e^{-T}) \to 0$

et idem pour $\displaystyle\int_{\Gamma_3}$. □

Exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{i\pi}{e}$. En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{z}{z^2+1}e^{iz}, z=i\right)$$

et

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{z^2+1}e^{iz}, i\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)z}{(z-i)(z+i)}e^{iz}\right) = \frac{1}{2e}.$$

Remarque : Avec les mêmes hypothèses sur f :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x\right)$$

car $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \Re\left(\frac{i\pi}{e}\right) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \Im\left(\frac{i\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{e}.$$

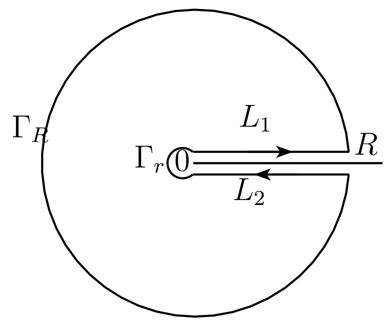
6.6.4 Intégrales de la forme $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-c}}{Q(x)}\mathrm{d}x$

avec $0 < c < 1$ et $Q(x)$ polynôme tel que $Q(x) \neq 0,\ \forall x \geq 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-c}}{Q(x)}\mathrm{d}x = \frac{2i\pi}{(1-e^{2i\pi c})}\sum_k \mathrm{Res}\left(\frac{z^{-c}}{Q(z)}, z_k\right)$$

où les $\{z_k\}$ sont les zéros de $Q(z)$.

On évalue ces intégrales en utilisant le contour suivant :



$\mathcal{C}$: contour "trou de serrure"

Exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}\mathrm{d}x$. On prend $z^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\log z}$ avec la détermination $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ où $0 < \arg(z) < 2\pi$.

(i) Sur L_1 : $z^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\log x} = x^{-\frac{1}{2}}$

(ii) Sur L_2 : $z^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}(\log x + 2i\pi)} = x^{-\frac{1}{2}}e^{-i\pi}$.

(iii) Lorsque $r \to 0$ et $R \to +\infty$:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{1+z}\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}$$

quelques cours, dont sur papier

7 Sphère de Riemann et transformations conformes

7.1 Sphère de Riemann

On peut compactifier $\mathbb{C}$ en ajoutant un "point à l'infini", ∞. Une base de voisinages de ∞ est donnée par :

$$U_\varepsilon = \left(\left\{z,\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \infty\right).$$

On identifie $\overline{C} = \mathbb{C} \cup \infty$ avec $S^2 = \{(x,y,z),\, x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ par projection stéréographique. On note $N = (0,0,1)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & S^2 \backslash \{N\} \\ z & \mapsto & \left(\dfrac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \dfrac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right). \end{array}$$

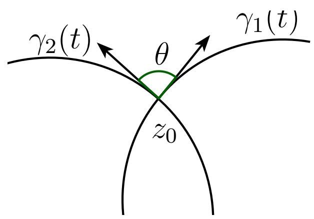
Dessin : le plan équatorial de la sphère de Riemann est identifié à $\mathbb{C}$. Un point $z \in \mathbb{C}$ est envoyé sur l'intersection du segment $[N,z]$ et de la sphère unité.

Définition 7.1

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ est la sphère de Riemann.

8 Transformations conformes

On considère $z_0 \in \Omega$, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ une courbe $\mathcal{C}^1$ simple (donc $\gamma'(t) \neq 0$) tels que $\gamma(t_0) = z_0$.



Définition 8.1

L'angle entre des courbes γ_1, γ_2 en un point d'intersection z_0 est l'angle entre $\gamma_1'(t)$ et $\gamma_2'(t)$ en z_0 mesuré dans le sens direct.

Théorème 8.2

Si $f \in H(\mathbb{C})$ et $f'(z_0) \neq 0$ alors l'angle entre γ_1 et γ_2 en z_0 est égal à l'angle entre $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(z_0)$.

$\triangleright$ On considère $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = f'(z_0)\gamma'(t_0)$. Donc

$$\arg f(\gamma(t))'_{t=t_0} = \arg(f'(z_0)\gamma'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0)).$$

Alors le vecteur tangent de $\gamma(t)$ en z_0 subit une rotation par $\arg(f'(z_0))$, d'où le résultat. $\square$

Remarque : On dit que $f \in H(\mathbb{C})$ est conforme (préserve les angles) en chaque point z_0 où $f'(z_0) \neq 0$.

Exemple : $f(z) = e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $f'(z) = e^z \neq 0$ est donc conforme.

Définition 8.3

Deux ouverts Ω_1 et Ω_2 sont biholomorphes (ou isomorphes) s'il existe $f \in H(\Omega_1)$ tel que $f(\Omega_1) = \Omega_2$ et f est injective (ou $f^{-1} \in H(\Omega_2)$)

(bicontinus par le théorème de l'application ouverte)

Théorème 8.4 (*Riemann mapping theorem*)

Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est homéomorphe à $D(0,1)$ et distinct de $\mathbb{C}$ est isomorphe à $D(0,1)$.

Remarque : $\mathbb{C}$ ne peut pas être isomorphe à $D(0,1)$ car si $H \in H(\mathbb{C})$, $f : \mathbb{C} \to D(0,1)$ serait entière et bornée donc constante par le théorème de Liouville.

8.1 Transformations homographiques de la sphère de Riemann

Considérons les transformations homographiques (ou transformations de Möbius)

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0.$$

Si on multiplie les constantes a, b, c, d par un même nombre complexe non nul, on obtient la même transformation. Donc on considère que les coefficients sont définis à un facteur constant près.

(i) $F : \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ est un isomorphisme (biholomorphe) car

$$F'(z) = \frac{(cz+d)a - (az+b)c}{(xz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

et $F^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ est son inverse.

(ii) On peut considérer F comme une application de $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ avec $F\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $F(\infty) = \frac{a}{c}$.

(iii) Toute transformation homographique est la composition des homographies simples suivantes :

- translation $z \mapsto z + b$
- rotation : $z \mapsto az$, $|a| = 1$
- homothétie : $z \mapsto rz$, $r > 0$
- inversion : $z \mapsto \frac{1}{z}$.

En effe,t si $c = 0$,

$$F(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Si $c \neq 0$,

$$F(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}.$$

$F = F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1$ avec

$$z_1 = F_1(z) = z + \frac{d}{c}$$

$$z_2 = F_2(z_1) = \frac{1}{z_1}$$

$$z_3 = F_3(z_2) = \frac{bc-ad}{c^2} z_2$$

$$z_4 = F_4(z_3) = z_3 + \frac{a}{c}.$$

Maintenant, on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des cercles et droites dans $\mathbb{C}$.

Théorème 8.5

$\mathcal{F}$ est invariant par toute transformation homographique.

▷ Il est clair que translations, rotations et homothétie transforment cercles en cercles et droites en droites. Il reste à vérifier que $\mathcal{F}$ est invariant par inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ (exercice). □

Donc une transformation homographique transforme cercles en cercles ou droites et droites en droites ou cercles.

Lemme 8.6

Si une homographie fixe 3 points alors c'est l'identité.

▷ $F(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow az + b = cz^2 + dz \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Cette équation a au plus deux racines sauf si $b = c = 0$ et $a = d$ auquel cas $F(z) = z$. □

Théorème 8.7

Soient z_1, z_2, z_3 trois points distincts dans $\overline{\mathbb{C}}$ et $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois points points distincts dans $\overline{C}$. Alors il existe une unique transformation homographique F telle que $F(z_i) = \omega_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

▷ – Unicité : Si F et G vérifient les conditions du théorème alors $G^{-1} \circ F(z_i) = z_i$ pour $i = 1, 2, 3$ donc $G^{-1} \circ F = \mathrm{Id}$ soit $G = F$.

– Soit $\{a, b, c\}$ un triplet de points distincts. Alors

$$F(z) = \frac{b-c}{b-a}\frac{z-a}{z-c}$$

est une homographie et $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, $F(c) = \infty$. Donc si $F(\{z_1, z_2, z_3\}) = \{0, 1, \infty\}$ et $G(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \{0, 1, \infty\}$ alors $G^{-1} \circ F(\{z_1, z_2, z_3\}) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. $\square$

Corollaire 8.8

(i) Soit $\gamma, \delta \in \mathcal{F}$. Alors il existe un homographie F telle que $F(\gamma) = \delta$.

(ii) Tout disque ouvert est isomorphe à tout demi-plan ouvert par une transformation homographique.

8.2 Exemples

(i) Soit $D = \{z, |z| > 1\}$ et $\mathbb{H} = \{z, \ \Im(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur. Alors

$$F(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

est un isomorphisme entre $\mathbb{H}$ et D.
En effet, $F(\{0, 1, +\infty\}) = \{-1, -i, 1\}$ donc $F(\mathbb{R} \cup \infty) = \{z, \ |z| = 1\}$ et $F(i) = 0$.

(ii) $F(z) = \frac{1+z}{1-z}$ envoie le demi-cercle supérieur sur le quart de plan supérieur droit.