# 1. Opérations sur les ensembles - Cardinal

---

## Opérations sur les ensembles

**1.1.** Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[0,\frac{1}{n}\right[,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right],\ \bigcup_{k\in\mathbb{N}^\star}\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[k-\frac{1}{n},k+\frac{1}{n}\right].$$

**1.2.** Soient $f$ et $f_n,\ n\in\mathbb{N}$ des applications d'un ensemble $E$ dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}\bigcup_{k\in\mathbb{N}^\star}\bigcap_{i\geqslant k}\left\{x\in E,\ |f_i(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

**1.3.** Donner un exemple de suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles fermés non vides de $\mathbb{R}$, décroissante pour l'inclusion, telle que $\bigcap_n A_n=\emptyset$.

**1.4.** Soient $E,F$ deux ensembles, et $f$ une application de $E$ dans $F$.

- Montrer que pour toute partie $B\subset F$, $f^{-1}(B^c)=f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $f$
  - $(i)$ pour avoir $f(A^c)\subset f(A)^c$ pour tout $A\subset E$ ;
  - $(ii)$ pour avoir $f(A)^c\subset f(A^c)$ pour tout $A\subset E$.

  Donner un exemple d'application $f$ et d'ensemble $A\subset E$ tels qu'aucune des deux inclusions ci-dessus n'est satisfaite.
- Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles de parties respectivement de $E$ et de $F$. Montrer que :

  $f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right)=\bigcup_i f^{-1}(B_i),\ \ f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right)=\bigcap_i f^{-1}(B_i),\ \ f\left(\bigcup_i A_i\right)=\bigcup_i f(A_i),\ \ f\left(\bigcap_i A_i\right)\subset\bigcap_i f(A_i).$

  Montrer que la dernière inclusion est en général stricte et qu'il y a égalité si $f$ est injective.

---

## Cardinal - dénombrabilité

**1.5.** Soit $E$ un ensemble infini dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des parties finies de $E$ est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des parties infinies de $E$ n'est pas dénombrable.

**1.6.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que $f$ admet des limites finies à gauche et à droite en tout point.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de $f$ est dénombrable.

**1.7.**
1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est union dénombrable de pavés ouverts.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.

**1.8.**
1. Quel est le cardinal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ? De $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ?
2. Quel est le cardinal des ouverts de $\mathbb{R}$ ?
3. Quel est le cardinal des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?

---