Chapitre 4: stabilité des systèmes non-linéaires

Philippe Chartier

19 novembre 2013

1 Introduction

On considère ici une équation différentielle ordinaire *autonome*

$$\dot{y} = f(y)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{R}^d$ de classe C^1, et on s'intéresse à son étude qualitative, c'est-à-dire à l'étude de l'ensemble de ses solutions pour différentes valeurs initiales $y(0) = y_0$ d'un point de vue géométrique. Pour une condition initiale donnée y_0, on note $y(t; 0, y_0) = y(t; y_0)$ la valeur de la solution à l'instant t passant par y_0 à l'instant 0 et J_{y_0} l'intervalle de définition de la solution maximale associée à y_0.

Définition 1.1 *(Portrait de phase) Le portrait de phase de l'équation* $\dot{y} = f(y)$, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ *est la représentation graphique des trajectoires* $\{y(t; 0, y_0); y_0 \in \mathbb{R}^d, t \in J_{y_0}\}$.

Exemple 1.2 *(Dimension 1) Pour* $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = y(y^2 - 1)$. *On a trois points d'équilibre,* $y = 0$ *et* $y = \pm 1$. *Le premier est stable, alors que les deux autres sont instables.*

Exemple 1.3 *(Dimension 2) Soit le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & 2y_1 \\ \dot{y}_2 & = & -y_2 \end{array} \right.$$

La solution correspondant à la valeur initiale (y_0^1, y_0^2) *s'écrit*

$$y_1(t) = e^{2t} y_0^1, \quad y_2(t) = e^{-t} y_0^2$$

de sorte que les trajectoires sont les courbes paramètrées telles que

$$(y_2(t))^2 y_1(t) = \mathit{const}$$

Exemple 1.4 *(Pendule sans frottement) L'équation différentielle d'ordre* 2

$$\ddot{\theta} + a\sin(\theta) = 0, \quad a > 0$$

se réécrit sous la forme d'une système d'ordre 1 *en posant* $y_1 = \theta$ *et* $y_2 = \dot{\theta}$ *:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & y_2 \\ \dot{y}_2 & = & -a\sin(y_1) \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que l'énergie du système

$$H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 - a\cos(y_1)$$

est conservée le long de toute solution. En effet on a :

$$\frac{d}{dt}H(y_1, y_2) = y_2\dot{y}_2 - a(-\sin(y_1))\dot{y}_1 = 0.$$

Les trajectoires s'inscrivent donc sur les courbes d'équation $H(y_1, y_2) = $ *const.*

Définition 1.5 *Un système hamiltonien est un système d'équations différentielles du type*

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla_y H(y)$$

où $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *est une fonction scalaire de classe* C^2 *et où* J *est la matrice canonique*

$$J = \left(\begin{array}{cc} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{array} \right)$$

On a, comme déjà vu dans les chapitres précédents, conservation de l'hamiltonien (l'énergie dans de nombreux systèmes physiques) :

$$\frac{d}{dt}H(y) = (\nabla_y H(y))^T \, \dot{y} = (\nabla_y H(y))^T \, J^{-1}\nabla_y H(y) = 0$$

où l'on a utilisé l'anti-symétrie de la matrice J.

2 Différentes notions de stabilité

2.1 Théorème de Grobmann-Hartman

Définition 2.1 *(Linéarisé) Soit l'équation différentielle* $\dot{y} = f(y)$*,* $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}^d$*. Le système linéarisé en* y_0 *est le système d'équations différentielles suivant :*

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\,(y - y_0) + f(y_0)$$

C'est le système obtenu en remplaçant $f(y)$ *par son développement de Taylor à l'ordre* 1 *en* y_0*.*

L'objectif du théorème suivant est d'établir un lien entre le comportement qualitatif de la solution d'un système d'équations différentielles et celui de son linéarisé au voisinage d'un point. En raison de la difficulté de la preuve, nous nous contenterons d'énoncer ce théorème sans démonstration et détaillerons par contre quelques résultats plus faibles dans les paragraphes suivants.

Théorème 2.2 *(Grobman-Hartman 1967). Soit $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ un système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^d$. Supposons que $f(0) = 0$ et que la matrice $A = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle. Alors il existe des voisinages U et V de l'origine 0 dans $\mathbb{R}^d$, et un homéomorphisme (bijection bi-continue) $h : U \to V$ qui envoie les trajectoires de $\dot{y} = f(y)$ sur les trajectoires de $\dot{y} = Ay$ en préservant le sens du temps. Plus précisément, si $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est une valeur initiale et si $y(t; y_0) \in U$, alors $e^{tA}h(y_0) \in V$ et on a :*

$$y(t; y_0) = (h^{-1} \circ e^{tA} \circ h)(y_0).$$

Ainsi, au voisinage d'un point $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(y_0) = 0$, les solutions du système $\dot{y} = f(y)$ se comportent comme celles de

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0)$$

pour peu que le spectre de $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ n'intersecte pas l'axe des imaginaires.

Remarque 2.3 *Le théorème est énoncé dans le cas $y_0 = 0$. Si $y_0 \neq 0$ avec $f(y_0) = 0$, alors en posant*

$$\tilde{y} = y - y_0, \qquad \tilde{f}(\tilde{y}) = f(\tilde{y} + y_0),$$

on a

$$\frac{d}{dt}\tilde{y} = \dot{y} = f(y) = f(\tilde{y} + y_0) = \tilde{f}(\tilde{y})$$

avec $\tilde{f}(0) = f(y_0) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$.

2.2 Notions de stabilité

Définition 2.4 *(Equilibre) Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On dit que y_0 est un équilibre si la fonction constante $t \mapsto y_0$ est solution pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que $f(y_0) = 0$.*

Définition 2.5 *(Stabilité) Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre. On dit que :*

1. *y_0 est une équilibre stable si, pour tout voisinage U de y_0, il existe un voisinage V de y_0 tel que :*

$$\forall \tilde{y}_0 \in V, \qquad \begin{array}{l} (i)\ y(t, \tilde{y}_0) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+, \\ (ii)\ y(t, \tilde{y}_0) \in U \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \end{array}$$

2. *y_0 est un équilibre asymptotiquement stable si c'est un équilibre stable, et s'il existe un voisinage W de y_0 tel que :*

$$\forall \tilde{y}_0 \in W, \qquad \begin{array}{l} (i)\ y(t,\tilde{y}_0) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+, \\ (ii)\ \lim_{t\to\infty} y(t,\tilde{y}_0) = y_0 \end{array}$$

Exemple 2.6 *Soit le système linéaire $\dot{y} = Ay$. L'origine 0 est équilibre. Il est asymptotiquement stable si et seulement si :*

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \quad \Re(\lambda) < 0.$$

Il est stable si et seulement si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \quad \Re(\lambda) \le 0 \text{ et } \Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \text{ non défective}$$

Théorème 2.7 (Stabilité en première approximation) *Soit l'équation différentielle $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre. Si y_0 est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé $\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0)$, alors c'est un équilibre asymptotiquement stable du système $\dot{y} = f(y)$.*

Théorème 2.8 (Non-stabilité en première approximation) *Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors y_0 n'est pas un équilibre stable de $\dot{y} = f(y)$.*

Remarque 2.9 *On ne peut rien dire dans le cas où $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ a une valeur propre de partie réelle nulle, comme le montre l'exemple suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 &=& y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2) y_1 \\ \dot{y}_2 &=& -y_1 \pm (y_1^2 + y_2^2) y_2 \end{array} \right.$$

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = J^{-1}$$

dont les valeurs propres sont $\pm i$. Maintenant, en passant en coordonnées polaires $y_1 = r(\theta)\cos(\theta)$, $y_2 = r(\theta)\sin(\theta)$, il vient :

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}_1 &=& \dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta) = r\sin(\theta) \pm r^3\cos(\theta) \\ \dot{y}_2 &=& \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta) = -r\cos(\theta) \pm r^3\sin(\theta) \end{array}$$

d'où $\dot{\theta} = \mp 1$ et $\dot{r} = \pm r^3$. L'équilibre est alors stable ou instable suivant le signe choisi $\mp$.

2.3 Produit scalaire adapté à un endomorphisme

Théorème 2.10 (Produit scalaire adapté à un endomorphisme) *Soit $E = \mathbb{R}^d$, g un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et P son polynôme caractéristique. P se factorise en $P = P_+ \cdot P_-$ où P_- a toutes ses racines de parties réelles strictement négatives et P_+ a toutes ses racines de parties réelles positives ou nulles. On a la décomposition (lemme des noyaux) suivante :*

$$E = E_- \oplus E_+ \text{ avec } E_- = \ker(P_-(A)), \quad E_+ = \ker(P_+(A)).$$

Alors il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha > 0$ tels que $\ker(P_-(A)) \perp \ker(P_+(A))$ et

$$\forall x \in E_-, \langle g(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle,$$
$$\forall x \in E_+, \langle g(x), x \rangle \geq -\alpha \langle x, x \rangle.$$

Preuve. Soit (e_i) la base canonique de E et A la matrice de g dans cette base et soit la décomposition de Jordan de A dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, écrite sous la forme

$$A = P^{-1}(D + N)P$$

où $P \in GL_d(\mathbb{C})$, D est diagonale et N nulle en dehors des éléments sur-diagonaux qui peuvent être nuls ou égaux à 1. Soit en outre, pour $\varepsilon > 0$, la matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}(\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots, \varepsilon^{-d})$. Alors

$$A = P^{-1}\Lambda^{-1}(D + \Lambda N \Lambda^{-1})\Lambda P = \tilde{P}^{-1}(D + \tilde{N})\tilde{P}$$

où $P \in GL_d(\mathbb{C})$, et $\tilde{N}_{i,i+1} = \varepsilon$ ou $\tilde{N}_{i,i+1} = 0$. Soit (f_i) la base dans laquelle g a pour matrice $D + \tilde{N}$. On considère le produit scalaire défini sur $\mathbb{C}^d$ tel que si u et v sont de composantes X et Y dans (f_i), alors

$$(u, v) = X^* Y$$

On a

$$\Re\left(((g(u), v)\right) = \sum_{i=1}^{d} \Re(d_{i,i})|X_i|^2 + \Re\left((NX)^* X\right))$$

Donc pour $u \in \ker(P_-(A))$, il vient en notant $\mu = -\max_{\Re(d_{i,i})<0} \Re(d_{i,i})$

$$\Re\left((g(u), u)\right) \leq (-\mu + \varepsilon)(u, u)$$

et pour $u \in \ker(P_+(A))$

$$\Re\left((g(u), u)\right) \geq -\varepsilon(u, u).$$

Il suffit alors de prendre $\alpha = \varepsilon = \mu/3$ et de définir le produit scalaire sur E de la manière suivante : si u et v sont deux vecteurs de E de composantes (x_i) et (y_i) dans (e_i), on note $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ les vecteurs de composantes (x_i) et (y_i) dans la base canonique de $\mathbb{C}^d$ et

$$\langle u, v \rangle = \Re\left((\tilde{u}, \tilde{v})\right).$$

■

2.4 Preuve du théorème de stabilité en première approximation

Lemme 2.11 (Fonction de Lyapunov et stabilité) *Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On suppose que 0 est un équilibre possédant une fonction de Lyapunov stricte. Plus précisément, on suppose qu'il existe une boule ouverte B centrée en 0, une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, et un réel $\alpha > 0$ tels que :*

- *0 est un minimum strict de V sur B*
- *$\forall y \in B, dV(y)(f(y)) \leq -\alpha(V(y) - V(0))$*

Alors 0 est une équilibre asymptotiquement stable.

Preuve. Afin de simplifier quelque peu la preuve, on se concentre ici sur la cas où $V(y) = \langle y, y \rangle$, qui est le cadre dans lequel on utilisera ce lemme. On a alors

$$dV(y)(f(y)) = 2\langle y, f(y) \rangle$$

En réduisant B si besoin est, on peut supposer que c'est une boule pour la norme $\| \cdot \|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit donc $\tilde{y}_0 \in B$ et $J_{\tilde{y}_0} =]T^-, T^+[$ l'intervalle de définition de la solution maximale $y(t; \tilde{y}_0)$ associée. On va montrer que $T^+ = +\infty$ et que pour tout $t \geq 0$, $\|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq \|\tilde{y}_0\|$. On note

$$X := \{\tau \in]0, T^+[; \forall t \in [0, \tau[, y(t; \tilde{y}_0) \in B\}.$$

L'ensemble X est non-vide, car $y(t; \tilde{y}_0)$ est continue. Soit $\varphi(t) = \langle y(t; \tilde{y}_0), y(t; \tilde{y}_0) \rangle$. Il vient pour $\tau \in X$ et $t \in [0, \tau[$:

$$\dot{\varphi}(t) = 2\langle y(t; \tilde{y}_0), \dot{y}(t; \tilde{y}_0) \rangle = 2\langle y(t; \tilde{y}_0), f(y(t; \tilde{y}_0)) \rangle \leq -\alpha \varphi(t)$$

donc $\varphi(t) \leq e^{-\alpha t} \varphi(0)$, i.e. $\|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq e^{-\frac{\alpha}{2} t} \|\tilde{y}_0\|$. Si X était strictement inclus dans $]0, T^+[$, alors on aurait $\sup X < T^+$ et pour tout $0 \leq t < \sup X$,

$$\|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq e^{-\frac{\alpha}{2} \sup X} \|\tilde{y}_0\| < \|\tilde{y}_0\|.$$

Par continuité de $y(t; \tilde{y}_0)$ il existerait donc $\varepsilon > 0$ tel pour tout $t < \sup X + \varepsilon$ on ait $\|y(t; \tilde{y}_0)\| < \|\tilde{y}_0\|$, ce qui contredit la définition de $\sup X$. Donc $\sup X = T^+$ et $y(t; \tilde{y}_0)$ est bornée sur $]0, T^+[$. Le théorème de sortie de tout compact implique alors que $T^+ = \infty$. L'inégalité

$$\forall t \geq 0, \; \|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq e^{-\frac{\alpha}{2} t} \|\tilde{y}_0\|$$

permet de conclure que 0 est un équilibre asymptotiquement stable. ∎

Preuve. [Théorème de stabilité en première approximation] Quitte à considérer la fonction $\tilde{f}(y) = f(y + y_0) - f(y_0)$, on peut supposer que $y_0 = 0$ et poser $g = df(0)$. D'après le théorème 2.10, on peut construire un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adapté à g, tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $\langle g(y), y \rangle \leq -2\alpha \langle y, y \rangle$ pour un certain $\alpha > 0$ (notons qu'ici $P_- = P$ de sorte que $\ker P_-(g) = \mathbb{R}^d$). La fonction $V(y) = \frac{1}{2}\langle y, y \rangle = \frac{1}{2}\|y\|^2$ est une fonction C^1 qui admet un minimum strict en 0. De plus, on a au voisinage de 0

$$f(y) = f(0) + df(0)y + o(y) = g(y) + o(y)$$

de sorte qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\|y\| \leq \varepsilon$, $\|f(y) - g(y)\| \leq \alpha\|y\|$. Finalement, pour y dans la boule de centre 0 et de rayon ε, on a :

$$\begin{aligned} dV(y)((f(y)) &= \langle y, f(y)\rangle \\ &= \langle y, g(y)\rangle + \langle y, f(y) - g(y)\rangle \\ &\leq -2\alpha\langle y, y\rangle + \|y\| \cdot \|f(y) - g(y)\| \text{ (par Cauchy-Schwartz)} \\ &\leq -2\alpha\|y\|^2 + \alpha\|y\|^2 = -2\alpha V(y). \end{aligned}$$

Finalement, V est une fonction de Lyapunov et on peut conclure en utilisant le théorème de Lyapunov. ■

2.5 Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Théorème 2.12 (Théorème de non-stabilité de Cetaev, 1934) *Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On suppose que $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est un équilibre et qu'il existe une boule ouverte B centrée sur y_0, une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tels que :*

- $y_0 \in \partial\Omega$
- $V > 0$ *sur* Ω *et* $V = 0$ *sur* $\partial\Omega$
- $\forall y \in \Omega \cap B, dV(y)(f(y)) > 0.$

Alors y_0 n'est pas un équilibre stable.

Preuve. Supposons que y_0 soit un équilibre stable : il existe alors un voisinage ouvert U, d'adhérence compacte contenue strictement dans B, et un voisinage ouvert W, tels que pour tout $\tilde{y}_0 \in W$, la solution $y(t; \tilde{y}_0)$ issue de $\tilde{y}_0$ existe pour tout $t \geq 0$ et soit entièrement contenue dans U.

L'intersection de $\Omega \cap W$ est non-vide, car $y_0 \in \partial\Omega = \bar{\Omega}\backslash\Omega$. Soit donc $\tilde{y}_0 \in \Omega \cap W$: par continuité de $y(t; \tilde{y}_0)$, l'ensemble

$$X := \{\tau > 0; \forall t \in [0, \tau],\ y(t; \tilde{y}_0) \in \Omega\}$$

est non-vide. Par continuité encore, il est ouvert dans $[0, +\infty[$. Montrons qu'il est aussi fermé : soit $(\tau_n) \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\tau_\infty \in [0, +\infty[$. On a $y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \in \bar{\Omega}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y(\tau_n; \tilde{y}_0) \in \Omega$. En outre, pour $\tau \in X$ et $0 \leq t \leq \tau$, on a pour $\varphi(t) = V(y(t; \tilde{y}_0))$

$$\dot{\varphi}(t) = dV(y(t; \tilde{y}_0))f(y(t; \tilde{y}_0)) > 0$$

donc $\varphi(t) > \varphi(0) = V(\tilde{y}_0) > 0$. Par conséquent

$$\varphi(\tau_\infty) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\tau_n) \geq V(\tilde{y}_0) > 0.$$

Ainsi, $V(y(\tau_\infty; \tilde{y}_0)) > 0$, donc $y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \notin \partial\Omega$. Comme $y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \in \bar{\Omega}$, $y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \in \Omega$ et $\tau_\infty \in X$, qui est donc fermé. Finalement, X et à la fois ouvert et fermé dans $[0, +\infty[$ qui est connexe, donc $X = [0, +\infty[$ et la trajectoire $y(t; \tilde{y}_0)$ reste dans Ω pour tout $t \geq 0$.

Considérons maintenant

$$K = \{y \in \bar{U} \cap \bar{\Omega}; V(y) \geq V(\tilde{y}_0)\}$$

K est compact, comme intersection du compact $\bar{U}$, et du fermé $\bar{\Omega} \cap \{y \in \mathbb{R}^d; V(y) \geq V(\tilde{y}_0)\}$. De plus, $K \subset \bar{U} \subset B$ et comme V ne s'annule pas sur Ω, $K \subset \Omega \cap B$, de sorte que pour tout $y \in K$, $dV(y)(f(y)) > 0$: par compacité,

$$\alpha := \inf_{y \in K} dV(y)(f(y)) > 0$$

et comme $y(t; \tilde{y}_0) \in K$ pour tout $t \geq 0$, on a $\dot{\varphi}(t) \geq \alpha$ pour tout $t \geq 0$, soit $\varphi(t) \geq \alpha t + \varphi(0)$ qui tend vers $+\infty$ pour $t \to +\infty$. On obtient une contradiction avec le fait que

$$\varphi(t) = V(y(t; \tilde{y}_0)) \leq \sup_{y \in K} V(y) < +\infty.$$

$\blacksquare$

Preuve. [Théorème de non-stabilité en première approximation] On se ramène au cas $y_0 = 0$, et on pose $g = df(0)$. En appliquant le théorème 2.10 à $-g$ (qui possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement négative par hypothèse), on peut affirmer l'existence d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$, de deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^d$ en somme directe, et d'une réel $\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in E,\ \langle g(y), y \rangle \geq 2\alpha \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\ \langle g(y), y \rangle \leq \alpha \|y\|^2.$$

On considère maintenant la fonction V définie par

$$\forall (y_1, y_2) \in E \times F, V(y_1 + y_2) = \|y_1\|^2 - \|y_2\|^2$$

et l'ensemble $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^d, V(y) > 0\}$, qui est ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Finalement, comme f est de classe C^1, on a

$$f(y) = g(y) + o(y)$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in B_\varepsilon(0)$, on ait $\|f(y) - g(y)\| \leq \frac{\alpha}{4}\|y\|$. Il reste à établir que $dV(y)(f(y)) > 0$ pour tout $y \in \Omega \cap B_\varepsilon(0)$. Soit $h = h_1 + h_2 \in E \oplus F$ et $y = y_1 + y_2 \in E \oplus F$. On a

$$\begin{aligned} V(y+h) - V(y) &= \langle y_1 + h_1, y_1 + h_1 \rangle - \langle y_2 + h_2, y_2 + h_2 \rangle - \langle y_1, y_1 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle \\ &= 2\langle y_1, h_1 \rangle - 2\langle y_2, h_2 \rangle + \langle h_1, h_1 \rangle - \langle h_2, h_2 \rangle \end{aligned}$$

donc

$$dV(y)(h) = 2\langle y_1, h_1 \rangle - 2\langle y_2, h_2 \rangle$$

et

$$\begin{aligned} |dV(y)(h)| &\leq 2|\langle y_1, h_1 \rangle| + 2|\langle y_2, h_2 \rangle| \\ &\leq 2\|y_1\|\|h_1\| + 2\|y_2\|\|h_2\| \\ &\leq 4\|y\|\|h\| \end{aligned}$$

car E et F étant orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a $\|y\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2$ et $\|h\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2$. En particulier, pour $y \in B_\varepsilon(0)$:

$$|dV(y)(f(y) - g(y))| \leq 4\|y\|\|f(y) - g(y)\| \leq 4\|y\|\frac{\alpha}{4}\|y\| = \alpha\|y\|^2$$

D'autre part, E et F étant stables par g, on a pour tout $y \in \Omega$:

$$dV(y)(g(y)) = 2\langle y_1, g(y_1)\rangle - 2\langle y_2, g(y_2)\rangle \geq 2(2\alpha\|y_1\|^2 - \alpha\|y_2\|^2) \geq 2\alpha\|y_1\|^2$$

où l'on a utilisé que $y \in \Omega$, donc $V(y) = \|y_1\|^2 - \|y_2\|^2 > 0$. Pour $y \in \Omega \cap B_\varepsilon(0)$, il vient finalement

$$dV(y)(f(y)) = dV(y)(g(y)) + dV(y)(f(y) - g(y)) \geq 2\alpha\|y_1\|^2 - \alpha\|y\|^2 > 0$$

car une fois encore, $y \in \Omega$ implique que $\|y\|^2 < 2\|y_1\|^2$. On conclut par le théorème de Cetaev. ■