TD ANAR - Feuille 3
L3, 2eme Semestre 2012-2013 Université Rennes I

Idéaux.

Exercice 1. a) Déterminez tous les idéaux I de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
b) Plus généralement, décrivez les idéaux d'un anneau produit $A \times B$ en fonction des idéaux de A et de B.

Exercice 2. Soient I, J des idéaux de A ; Montrer que J/I est un idéal de A/I et que

$$(A/I)/(J/I) \cong A/J.$$

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A.
a) Montrez que l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\},$$

est un idéal de A, appelé *radical de I*.
b) Montrez que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
c) Décrire $\sqrt{\{0\}}$. Cet idéal est appelé *nilradical* . Montrez que le nilradical de $A/\sqrt{\{0\}}$ est réduit à 0.

Quelques anneaux.

Exercice 4. Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans un anneau commutatif unitaire K. On munit A de l'opération $+$ de la somme ponctuelle des fonctions, et du produit (dit de convolution)

$$(f * g)(m) = \sum_{x,y \in \mathbb{N}^*, xy=m} f(x)g(y).$$

a) Montrer que A est un anneau commutatif, unitaire.
b) On dit que $f \in A$ est multiplicative si lorsque n et m sont des entiers premiers entre eux, $f(nm) = f(n)f(m)$. Montrer que si f, g sont multiplicatives alors $f * g$ est multiplicative.
c) Soit f la fonction constante égale à 1 et μ la *fonction de Moebius*, définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1...p_k,\ p_i \text{ premiers distincts}, \\ 0 & \text{si } p^2 \text{ divise } n, p \text{ premier}. \end{cases}.$$

Calculer $\mu * f$ avec μ la fonction de Moebius.

<u>Exercice 5.</u> Soit $A = \mathbb{R}[\cos(x), \sin(x)]$ l'ensemble des fonctions polynômes en $\cos, \sin$.
a) Montrez que c'est un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelé anneau des polynômes trigonométriques.
b) Montrez que tout élément f de A s'écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{m \geq 1} a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx).$$

c) On définit le degré d'un polynôme trigonométrique $\mathrm{degtr}(f) = \max\{n : a_n \neq 0 \,\mathrm{ou}\, b_n \neq 0\}$. Montrez que

$$\mathrm{degtr}(fg) = \mathrm{degtr}(f) + \mathrm{degtr}(g).$$

d) Montrer que A est intègre.
e) Montrez que $\sin(x)$ et $1 - \cos(x)$ sont irréductibles.