2. Tribus et mesures

Tribus

2.1. On considère un ensemble à trois éléments $E = \{a, b, c\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, puis toutes les tribus de E.

2.2. Soient E, F deux ensembles, et f une fonction de E dans F.

1. Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur F, montrer que $\{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E. On l'appelle tribu image réciproque de f.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E, $\{f(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas en général une tribu sur F. On peut cependant définir une notion de tribu image :

2. montrer que $\{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur F. On l'appelle tribu image de f.

2.3. Soit E un ensemble.

1. Expliciter la tribu $\mathcal{S}$ engendrée par les singletons de E (c'est-à-dire $\sigma(\{\{x\},\ x \in E\})$). Quelle est la tribu engendrée par les parties finies de E ?
2. Supposons que E ait au moins 2 éléments. Quelle est la tribu engendrée par les paires de E (c'est-à-dire $\sigma(\{\{x, y\},\ x, y \in E,\ x \neq y\})$) ?
3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Les classes $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sont-elles des tribus sur E ?

2.4. On considère la suite de tribus $\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}\}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Expliciter la tribu $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, et montrer que $\bigcup_n \mathcal{A}_n$ n'est pas une tribu.

Mesures

2.5. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{A}$ croissante pour l'inclusion, alors $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
2. Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{A}$ décroissante pour l'inclusion vérifiant :

$$(i)\ \text{ il existe } n_0 \text{ tel que } \mu(A_{n_0}) < \infty,$$

alors $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Justifier l'importance de la condition (i).

2.6. Soient E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de E. Décrire les éléments des ensembles suivants :

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\geqslant 0} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_n A_n := \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

1. Soient μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ et $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geqslant 0$. Montrer que

$$\mu(\liminf_n A_n) \ \leqslant\ \liminf_n \mu(A_n),$$

et que

$$\mu(\cup_{n\geqslant 0} A_n) < \infty \ \Rightarrow\ \mu(\limsup_n A_n) \ \geqslant\ \limsup_n \mu(A_n).$$

2. Montrer le *Lemme de Borel-Cantelli* :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \ \Rightarrow\ \mu(\limsup_n A_n) = 0.$$

3. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels. Que peut-on dire de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n|x_n - x|}$ converge ?

2.7. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Montrer qu'une application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion, $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$,

est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

2.8. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) μ est une mesure de Dirac,

(ii) $\mu(\mathcal{A}) = \{0, 1\}$ et $\bigcap\{A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 1\} \neq \emptyset$.

2.9. Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle est vide. Soit $\varepsilon > 0$, donner un exemple d'ouvert dense dans $\mathbb{R}$ dont la mesure est inférieure à ε.

2.10. Montrer qu'un borélien $A \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \setminus A) = 0$ est dense dans $[0, 1]$.

2.11. Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ est invariante par translation, c'est-à-dire que pour tous $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, $B + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, où $B + a$ désigne l'ensemble $\{x + a,\ x \in B\}$.

2.12. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. Soit μ une mesure sur la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$ telle que

– $\mu([0, 1]) = 1$,
– $\mu(B + a) = \mu(B)$ pour tous $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Montrer que pour tous réels a, b tels que $a < b$, $\mu(]a, b[) = b - a$.
3. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, que vaut $\mu(I)$?

2.13. *Existence d'ensembles non mesurables.* On cherche à montrer, en utilisant l'axiome du choix, qu'il n'existe pas de mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ invariante par translation, telle que $\lambda([0, 1]) = 1$. On suppose par contradiction qu'une telle mesure λ existe.
On introduit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ notée $\sim$, définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. En utilisant l'axiome de choix, construire un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui contient exactement un point dans chaque classe d'équivalence.

   On rappelle l'axiome du choix : pour tout ensemble non vide E, il existe une application $f : \mathcal{P}(E) \to E$ dite "fonction choix", telle que pour tout $A \subset E$ non vide, $f(A) \in A$.
2. Si $r, q \in \mathbb{Q}$ et $r \neq q$, déterminer $(A + r) \cap (A + q)$, où $A + x := \{y + x,\ y \in A\}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $[0, 1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(A + r) \subset [-1, 2]$ et conclure.

2.14. *Ensemble de Cantor.* Soit $C_0 = [0, 1]$. On définit la suite $(C_n)_n$ de la manière suivante : à partir C_n qui est une union finie d'intervalles fermés disjoints, on obtient C_{n+1} en retirant à chaque intervalle de C_n son tiers médian (on appelle tiers médian d'un intervalle I le sous-intervalle ouvert centré au centre de I, ayant pour longueur le tiers de celle de I).
On pose ensuite $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

1. Calculer $\lambda(C)$.
2. Montrer que C est un compact non dénombrable, d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
3. Montrer que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n},\ \alpha_n \in \{0, 2\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$