Théorie des groupes

Feuille de TD1

11 Septembre 2017

Exercice 1. Pour chacun des couples suivants (ensemble, loi de composition), justifier s'il s'agit ou non d'un groupe.

1. $(\mathbf{Q}, *)$ avec $a * b = a + b + \alpha ab$ et $\alpha \in \mathbf{Q}$.
2. $(\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication usuelle pour les matrices et $n \geqslant 1$.
3. $(\{f : E \to \mathbf{Z}\}, +)$ où E est un ensemble.

Exercice 2. Soit $(G, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative. On suppose de plus que :

1. $*$ admet un élément neutre à droite (il existe $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, on ait $x * e = x$)
2. tout élément $x \in G$ admet un symétrique à droite (i.e pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $x * x' = e$).

Montrer que G est un groupe (on pourra commencer par montrer que l'inverse à droite est aussi un inverse à gauche).

Si on ne suppose plus $*$ associative, montrer que l'on peut vérifier 1. et 2. sans pour autant que l'inverse à droite et à gauche ne coïncident.

Exercice 3. Soient G un groupe et $g \in G$. On définit une nouvelle loi par $x * y = xg^{-1}y$. Montrer que $(G, *)$ est encore un groupe et préciser le neutre et l'inverse d'un élément de G.

Exercice 4. Soit X un ensemble de cardinal $|X| \leqslant 4$. Décrire (en fonction du cardinal de X) toutes les lois de composition sur X qui en font un groupe.

Exercice 5. Soit $(G, *)$ un groupe dont tous les éléments vérifient $g^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Donner un exemple d'un tel groupe (non réduit à un élément).
3. Montrer que si G est fini, alors le cardinal de G est une puissance de 2 (*Indication : Montrer que G est muni d'une structure de* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *espace vectoriel.*)

Exercice 6. Soit $(G, *)$ un groupe.

1. Si pour tous $g, h \in G$ on a $(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$. Montrer que G est abélien
2. Si pour tous $g, h \in G$ on a $(gh)^2 = g^2h^2$. Peut-on conclure que G est abélien ?
3. On considère le groupe $G < \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Montrer que pour tous $g \in G$ on a $g^3 = 1$ (en particulier $(gh)^3 = g^3h^3$ pour tout $(g, h) \in G^2$). Le groupe G est-il abélien ?

Exercice 7.

1. Montrer que les décimaux $D := \{\frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Q}, +)$. Que se passe-t-il si l'on remplace 10 par n'importe quel autre entier non nul ?
2. L'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$?
3. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $U_n := \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbf{N}\}$ est un sous-groupe fini de $(\mathbf{C}^\times, \cdot)$. Donner l'ordre de chaque élément de U_n. Donner un exemple de groupe infini dont chaque élément est d'ordre fini.

4. Soit p un nombre premier. Montrer que $\{a + ib\sqrt{p} \mid (a,b) \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C},+)$ et que $\{a + ib\sqrt{p} \mid (a,b) \in \mathbf{Q}^\times\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^\times,\cdot)$

Exercice 8. Soit

$$\Gamma := \{\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}^\times\}.$$

Montrer que Γ muni de la loi de multiplication pour les matrices est un groupe mais que ce n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{Gl}_2(\mathbf{R})$. Vérifier que Γ est isomorphe au groupe $(\mathbf{R}^\times,\cdot)$.

Exercice 9. Soit G un groupe. On appelle centre du groupe et l'on note $\mathcal{Z}(G) := \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe abélien de G et que si G possède un unique élément d'ordre deux, alors cet élément est dans $\mathcal{Z}(G)$.

Exercice 10. Soit H une partie non vide d'un groupe G qui est stable par la loi de groupe ($g, h \in H \Rightarrow gh \in H$). Montrer que, si H est finie, H est alors un sous-groupe de G. Donner un exemple de couple (G, H) avec H multiplicativement stable mais où H n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 11. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $K \cup H$ est un sous-groupe de G si et seulement si $K \subset H$ ou $H \subset K$.
2. Montrer qu'un groupe ne peut pas être la réunion de deux sous-groupes propres.
3. Donner un exemple où H, K sont deux sous-groupe de G mais que $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 12. En considérant les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que le produit de deux éléments d'ordres finis ne l'est pas nécessairement.

Exercice 13. On considère G un groupe fini.

1. Montrer que si $|G|$ est pair, alors G contient un élément $g \neq 1$ avec $g^2 = 1$.
2. Montrer que, si G contient un élément d'ordre 2, alors il est d'ordre $|G|$ pair

Exercice 14. Soient H et G deux groupes. Montrer que le produit cartésien $H \times G$ muni de la loi $(h, g) * (h', g') = (hh', gg')$ a une structure de groupe. Indiquer l'élément neutre et l'inverse.

Exercice 15 (Groupe des quaternions)**.**

Soit les éléments de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ suivants :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Nous notons 1 la matrice identité de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$.

1. Montrer que : $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$.
2. En déduire que $\{\mathrm{id} = 1, -\mathrm{id} = -1, I, -I, J, -J, K, -K\}$ est le groupe d'ordre 8 engendré par I, J et K. Vérifier qu'il n'est pas abélien. Ce groupe est appelé **groupe des quaternions** et on le note Q_8.
3. Donner la liste des sous-groupes de Q_8.

Exercice 16 (Groupe libre)**.** Soit X un ensemble. À tout élément x de X, on associe un symbole x^{-1}. Et l'on note X^{-1} l'ensemble des x^{-1} pour x parcourant x. On va construire un ensemble $G(X)$ de la manière suivante : un élément de $G(X)$ est un mot, c'est-à-dire une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$ne comprenant aucune séquence de deux termes consécutifs de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$ pour $x \in X$. On va ajouter une loi de composition interne sur $G(X)$. On multiplie deux éléments (ou mots) de $G(X)$ en les concaténant puis en le réduisant, c'est-à-dire en éliminant les séquences xx^{-1} ou $x^{-1}x$ que l'on rencontre. On va définir l'élément neutre de $G(X)$ comme étant le mot vide.

1. Montrer que $G(X)$ avec la loi ainsi définie est un groupe.
2. Soit $f \colon X \to G$ une application ensembliste, montrez que l'on peut définir un morphisme de groupe $\tilde{f} : G(X) \to G$ qui vérifie $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.