Théorie des groupes

Feuille de TD3

Exercice 1. Soit p un nombre premier et $n \geqslant 1$ un entier.

1. Dénombrer (à isomorphismes près) les groupes *abéliens* de cardinal p^n et constater que ce nombre ne dépend pas de p.
2. Montrer qu'une partie H de $G := (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ est un sous-groupe de G si et seulement si c'est aussi un sous-espace vectoriel (sur le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$). En déduire le nombre de sous-groupes d'ordre p^2 de G. Nombre de sous-groupes d'ordre p^r ?

Exercice 2. Soit G un groupe tel que $\mathrm{Aut}(G)$ est cyclique.

1. Montrer que G est abélien.
2. Si G est fini, montrer que G est cyclique. On précisera alors les différentes possibilités pour l'ordre de G.

Exercice 3. On considère un sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$, que l'on fait agir de manière naturelle sur $\mathbf{Q}^n$. Nous allons montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

1. Montrer qu'un sous-groupe $H < (\mathbf{Q}^n, +)$ de type fini est libre de rang $r \leqslant n$.
2. En déduire que le sous-groupe $M := \sum_{g \in G} g \cdot (\mathbf{Z}^n)$ est libre de rang n.
3. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ telle que $PGP^{-1} < \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

Exercice 4. On considère le sous-groupe $\mathbb{S}^1 < \mathbf{C}^\times$ des nombres complexes de module 1.

1. Montrer que $\mathbb{S}^1$ est isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.
2. À quel groupe bien connu est isomorphe $\mathbf{C}^\times/\mathbb{S}^1$?

Exercice 5. Soit $k \geqslant 2$ un entier et considérons $\varphi_k : \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ donné par $\varphi_k(z) = z^k$. Rappeler pourquoi φ_k est un morphisme et donner son noyau et son image. En déduire un exemple de groupe G et d'un sous-groupe normal $N \lhd G$ tel que $G/N \simeq G$.

Exercice 6. Soient G un groupe et $H \lhd G$ d'indice fini n. Montrer que pour tout $g \in G$, $g^n \in H$. Donner un exemple de sous-groupe $H < G$ d'indice n et d'un élément $g \in G$ tel que $g^n \notin H$ (on pourra chercher un exemple dans $G = S_3$).

Exercice 7 (Sous-groupes caractéristiques)**.** Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit *caractéristique* si pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, on a $\alpha(H) = H$. Cela est noté $H \blacktriangleleft G$.

1. Montrer que $H \blacktriangleleft G$ implique $H \lhd G$. Donner un exemple de sous-groupe d'un groupe G qui est normal mais pas caractéristique.
2. Montrer que $K \blacktriangleleft H \blacktriangleleft G$ implique $K \blacktriangleleft G$.
3. Montrer que $K \blacktriangleleft H \lhd G$ implique $K \lhd G$.
4. Montrer que le centre et le groupe dérivé d'un groupe G sont caractéristiques dans G.

Exercice 8. Trouver (par exemple dans $G = D_4$) un exemple de sous-groupes $K \lhd H$ et $H \lhd G$ mais où pour autant K n'est pas normal dans G.

Exercice 9. Donner la liste des sous-groupes normaux de D_3 et D_4. Généraliser à D_n.

Exercice 10. Soit G un groupe *non abélien* d'ordre 8.

1. Montrer que G contient un élément x d'ordre 4 et que le groupe qu'il engendre est normal dans G.
2. Soit alors $y \in G \backslash \langle x \rangle$; montrer que $y^2 = 1$ ou $y^2 = x^2$.
3. Si $y^2 = 1$, montrer que $yxy = x^{-1}$ et en déduire que G est isomorphe à D_4.
4. Dans le cas restant, écrire la table de G est conclure que G est isomorphe à Q_8.
5. Donner la liste des groupes d'ordre 8 à isomorphisme près.

Exercice 11. Calculer $\mathrm{Aut}(G)$ pour $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $G = S_3$. Dans le deuxième cas, on pourra s'intéresser à l'image des deux transpositions $(1\,2)$ et $(1\,3)$.

Exercice 12. On se propose de calculer $\mathrm{Aut}(G)$ avec $G = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On note x un générateur de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et y un générateur de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Tout élément de G s'écrit donc $nx + my$ avec $0 \leqslant n \leqslant 3$ et $m = 0$ ou 1.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi(2x) = 2x$.
2. En envisageant les choix possibles pour $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, justifier que $\mathrm{Aut}(G)$ est d'ordre 8.
3. On pose $\varphi(x) = 3x + y$ et $\varphi(y) = 2x + y$. Montrer que φ s'étend en un automorphisme d'ordre 4. De même, montrer que $\psi(x) = 3x + y$ et $\psi(y) = y$ définit un automorphisme d'ordre 2.
4. Vérifier que $\psi \circ \varphi \circ \psi = \varphi^{-1}$ et en déduire que $\mathrm{Aut}(G) \simeq D_4$.

Exercice 13. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(D_4)$ est isomorphe à D_4 (on pourra étudier les choix possibles pour les images de r et s par un automorphisme). Préciser à quel sous-groupe correspond $\mathrm{Int}(D_4)$ dans cette description.