

PRINCIPALES VARIABLES ALEATORIAS.

VIDAL ALCALÁ

A continuación describiremos las distribuciones básicas junto con su simulación en el lenguaje R .

1. DISTRIBUCION BINOMIAL.

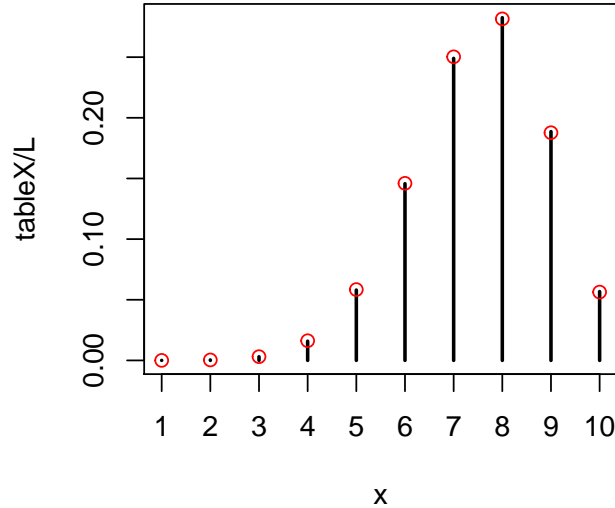
Supongamos que un experimento se repite n veces de manera independiente con probabilidad de éxito p . Sea X el número de experimentos con éxito. Entonces

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} . \quad (1)$$

Esta es la distribución binomial con parametros n y p y se denota $B(n, p)$. Las muestras se crean llamando `rbinom(L , n , p)` .

```
## parametros
L <- 1e+05
n <- 10
p <- 0.75
x <- rbinom(L, n, p)
```

```
tableX <- table(x)
f <- function(x) choose( n , x ) * p^(x)*(1-p)^(n-x)
plot(tableX/L)
xNames <- as.numeric(names(tableX))
points( xNames , f(xNames) , col = "red")
```



Podemos calcular el valor esperado y varianza utilizando la función característica y sus derivadas. El resultado es

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= (pe^{it} + 1 - p)^n \\ E[X] &= np \\ \text{Var}[X] &= np(1 - p) .\end{aligned}\tag{2}$$

2. DISTRIBUCION GEOMÉTRICA.

Supongamos que un experimento se repite de manera independiente, con probabilidad de éxito p , hasta que se obtiene el primer éxito después de X fracasos. Entonces

$$P(X = x) = p(1 - p)^x .\tag{3}$$

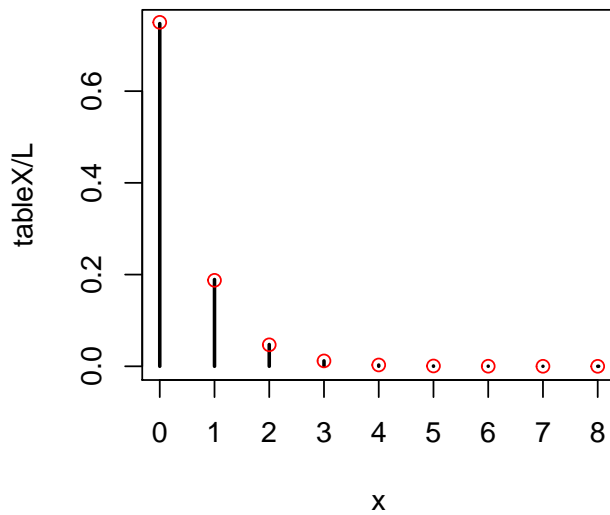
Esta es la *distribución geométrica* con parametro p y se denota $G(p)$. Las muestras se crean llamando `rgeom(L , p)`.

```
## parametros
L <- 1e+05
p <- 0.75
x <- rgeom(L, p)
```

```

tableX <- table(x)
f <- function(x) p*(1-p)^(x)
plot(tableX/L)
xNames <- as.numeric(names(tableX))
points( xNames , f(xNames) , col = "red")

```



Podemos calcular el valor esperado y varianza utilizando la función característica y sus derivadas. El resultado es

$$\begin{aligned}
 \phi_X(t) &= \frac{p}{1 - (1-p)e^{it}} \\
 E[X] &= (1-p)/p \\
 \text{Var}[X] &= (1-p)/p^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

3. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Supongamos que tenemos n personas aseguradas y que cada una de ellas tiene la misma probabilidad p de sufrir un accidente en el primer año de cobertura de manera independiente. Denotemos por X el número total de accidentes sufridos por las n personas aseguradas en el primer año y supongamos que X tiene valor esperado λ .

La v.a. X tiene distribución $N(n, p)$ y por lo tanto $\lambda = np$, es decir $p = \lambda/n$. La función de densidad de X es

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{\lambda^x (n-\lambda)^{n-x}}{n^x n^{n-x}} \\ &= \frac{n!}{(n-x)!(n-\lambda)^x x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{(n-\lambda)^x} \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned} \quad (5)$$

Se deja como ejercicio de cálculo el mostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{(n-\lambda)^x} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda}. \end{aligned} \quad (6)$$

La función de densidad límite

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (7)$$

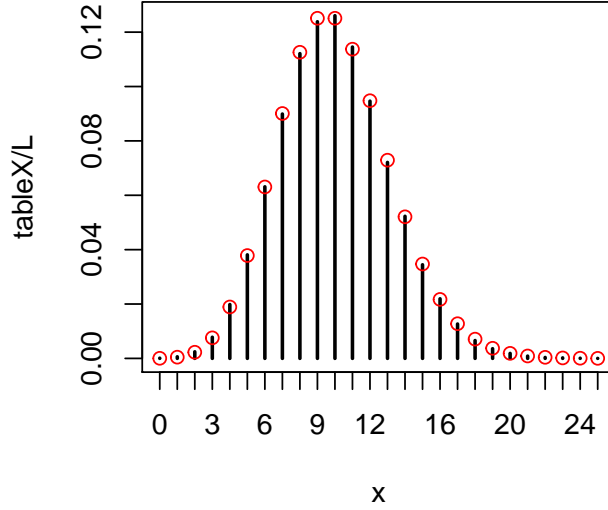
es la función de densidad de una v.a. con *distribución de Poisson con parámetro λ* . Podemos calcular el valor esperado y la varianze como sigue.

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \\ \text{Var}[X] &= \lambda \end{aligned} \quad (8)$$

Las muestras se crean llamando `rpois(L , lambda)`.

```
## parametros
L <- 1e+05
lambda <- 10
x <- rpois(L, lambda)
```

```
tableX <- table(x)
f <- function(x) exp(-lambda)*lambda^(x)/factorial(x)
plot(tableX/L)
xNames <- as.numeric(names(tableX))
points( xNames , f(xNames) , col = "red")
```



4. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La distribución exponencial con parámetro λ tiene función de densidad

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad t > 0, \quad (9)$$

y función de distribución

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Su valor esperado y varianza se pueden calcular utilizando la función característica. El resultado es

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \\ E[T] &= \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}[T] &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Esta distribución se utiliza para modelar tiempos de espera. Una propiedad deseable para la distribución de un tiempo de espera es que el tiempo de espera sea el mismo sin

importar el tiempo que se ha esperado. En notación de probabilidades condicionales esto se escribe

$$\begin{aligned} P(T \leq t | T > s) &= P(T \leq t - s) \\ \frac{P(T \leq t, T > s)}{P(T > s)} &= P(T \leq t - s) \\ \frac{\int_s^t f(x) dx}{\int_s^\infty f(x) dx} &= \int_0^{t-s} f(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Tomamos la derivada con respecto de t en la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{\int_s^\infty f(x) dx} &= f(t - s) \\ f(t) &= f(t - s) \int_s^\infty f(x) dx \end{aligned} \quad (13)$$

Finalmente tomamos la derivada con respecto de s en la ecuación anterior para obtener

$$0 = -f'(t - s) \int_s^\infty f(x) dx - f(t - s)f(s), \quad (14)$$

y evaluando en $s = 0$ la ecuación anterior se convierte en

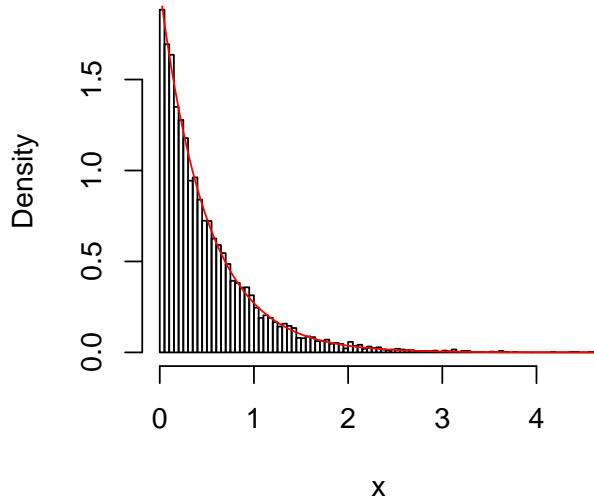
$$f'(t) = -f(0)f(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es $f(t) = C \exp(-f(0)t)$ y si denotamos $\lambda = f(0)$ obtenemos que $C = \lambda$.

```
## parametros
L <- 10000
lambda <- 2
x <- rexp(L, lambda)
```

```
xHist <- hist(x, prob = TRUE, breaks = 10*log(L))
f <- function(x) lambda*exp(-lambda *x)
curve(f, xHist$mids[1], xHist$mids[length(xHist$mids)],
      add = TRUE, col = 'red')
```

Histogram of x



5. DISTRIBUCIÓN DE RAYLEIGH

La función de densidad es

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (16)$$

Es complicado calcular la función característica, así que solo calculamos la media y la varianza. El resultado es

$$\begin{aligned} E[X] &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ E[X^2] &= 2\sigma^2 \\ \text{Var}[X] &= \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Desafortunadamente no hay generador de muestras para esta distribución en la instalación usual de R. Sin embargo, podemos utilizar el *método de la transformada inversa* para generar las muestras. La idea es simple: si U_1 es una muestra de la distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, entonces $X_1 = F_X^{-1}(U_1)$ es una muestra de X . Dejando la justificación del método como ejercicio, nos enfocamos en los cálculos necesarios.

Usando un cambio de variable podemos integrar la función de densidad en (16) y obtener

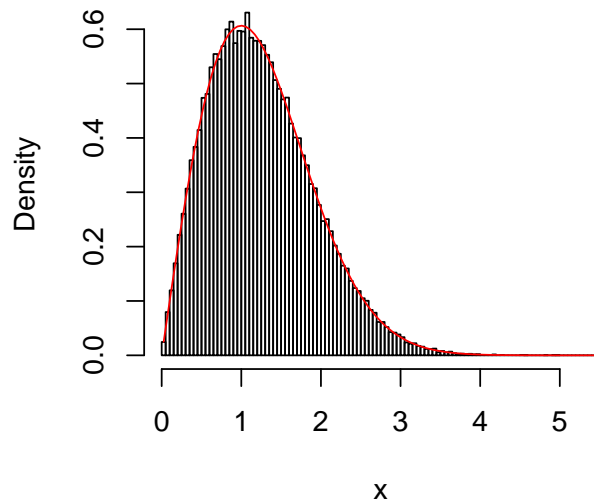
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$F_X^{-1}(u) = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - u)} .$$

```
## parametros
L <- 1e+05
sigma <- 1
u <- runif(L)
x <- sqrt(-2 * sigma * sigma * log(1 - u))

xHist <- hist(x, prob = TRUE, breaks = 10*log(L))
f <- function(x) (x/(sigma*sigma))*exp(-x*x/(2.0*sigma*sigma))
curve(f, xHist$mids[1], xHist$mids[length(xHist$mids)],
      add = TRUE, col = 'red')
```

Histogram of x



6. DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución normal es la más importante en el estudio de procesos estocásticos. Su ubicuidad se debe al teorema del límite central. Discutiremos esta relación más adelante en el curso y por lo pronto estudiaremos sus propiedades.

La variable aleatoria X tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (19)$$

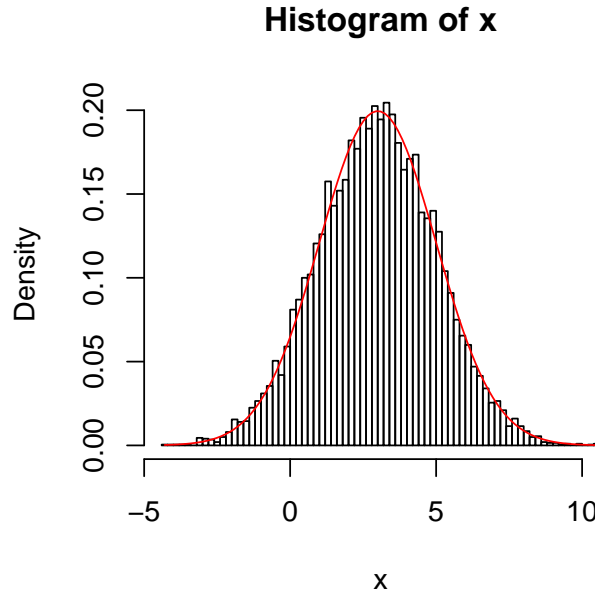
Escribiremos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para denotar que la variable aleatoria X tiene la densidad anterior. La función característica es

$$\phi(t) = \exp(i\mu t) \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \quad (20)$$

El siguiente código genera 10,000 muestras $N(3, 4)$ y dibuja el histograma. Nótese que en el lenguaje R el parámetro que se usa es la desviación estándar σ .

```
## parametros
L <- 10000
mu <- 3
sigma <- 2
x <- rnorm(L, mu, sigma)
```

```
xHist <- hist(x, prob = TRUE, breaks = 10*log(L))
f <- function(x) exp(-((x-mu)^2)/(2*sigma^2))/sqrt(2*pi*sigma^2)
curve(f, xHist$mids[1], xHist$mids[length(xHist$mids)],
      add = TRUE, col = 'red')
```



7. VECTORES ALEATORIOS GAUSSIANOS

La distribución normal tiene una extensión natural para el caso de variables aleatorias correlacionadas. Supongamos que Z_1, Z_2 son variables aleatorias normales estándar independientes. Acomodamos las v.a. en un vector columna $Z = (Z_1, Z_2)^T$ y definimos un vector aleatorio X mediante una transformación lineal $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir $X = \sigma Z$. En términos de las coordenadas del vector X tenemos

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_{11}Z_1 + \sigma_{12}Z_2 \\ X_2 &= \sigma_{21}Z_1 + \sigma_{22}Z_2 \end{aligned} \tag{21}$$

Las entradas de X no son independientes porque en las sumas que las definen hay elementos repetidos. Podemos calcular la covarianza entre las entradas como sigue.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= \text{Cov}(\sigma_{11}Z_1 + \sigma_{12}Z_2, \sigma_{21}Z_1 + \sigma_{22}Z_2) \\ &= \sum_{k,l} \sigma_{1k}\sigma_{2l}\text{Cov}(Z_k, Z_l) \end{aligned}$$

Usando que las v.a. Z_i son independientes y tienen varianza 1 obtenemos que

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \sum_k \sigma_{1k}\sigma_{2k} \tag{22}$$

La suma que aparece al final de la última ecuación es igual a la entrada $(1, 2)$ de la matriz $\sigma\sigma^T$. Cálculos similares llevan a la conclusión de que la *matriz de covarianza* de X es $\Sigma = \sigma\sigma^T$. En otras palabras

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_k \sigma_{ik}\sigma_{jk} = (\sigma\sigma^T)_{ij}. \quad (23)$$

También podemos calcular la función de densidad del vector X de la siguiente forma.

1. Escribir la función de densidad de Z en *notación diferencial*.

$$\begin{aligned} f_Z(z)|dz| &= \frac{e^{-z_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-z_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} |dz_1 dz_2| \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}z^T z}}{\sqrt{2\pi}} |dz_1 dz_2|. \end{aligned} \quad (24)$$

2. Sustituir z_i y dz_i en la ecuación anterior usando la relación $x = \sigma z$. Despejando z obtenemos

$$z = \sigma^{-1}x, \quad (25)$$

Calculando el diferencial obtenemos

$$\begin{aligned} dx_1 &= \sigma_{11}dz_1 + \sigma_{12}dz_2 \\ dx_2 &= \sigma_{21}dz_1 + \sigma_{22}dz_2. \end{aligned}$$

Usando que $dz_1 dz_1 = 0$, $dz_2 dz_2 = 0$ y $dz_1 dz_2 = -dz_2 dz_1$ calculamos

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22}dz_1 dz_2 + \sigma_{12}\sigma_{21}dz_2 dz_1 \\ &= (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21})dz_1 dz_2 \\ &= \det(\sigma)dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (26)$$

Finalmente sustituimos (25) y (26) en la ecuación (24) para obtener

$$f_Z(z)|dz| = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^T(\sigma\sigma^T)^{-1}x}}{(\sqrt{2\pi})^2} \frac{1}{|\det \sigma|} |dx_1 dx_2|. \quad (27)$$

3. El factor enfrente de $|dx_1 dx_2|$ es la función de densidad de la variable aleatoria X , en otras palabras

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^T(\sigma\sigma^T)^{-1}x}}{(\sqrt{2\pi})^2} \frac{1}{|\det \sigma|}. \quad (28)$$

Usando propiedades básicas del determinante de una matriz podemos calcular

$$\begin{aligned}\det(\sigma\sigma^T) &= \det(\sigma)\det(\sigma^T) \\ &= \det(\sigma)\det(\sigma) \\ &= \det(\sigma)^2.\end{aligned}$$

En términos de la matriz Σ hemos obtenido que

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x}}{(\sqrt{2\pi})^2} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}}.$$

En el caso multivariado donde $X \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la ecuación anterior se convierte en

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x}}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{\det \Sigma}}. \quad (29)$$

En este caso decimos que las entradas X_i tienen una *distribución normal conjunta* con media cero y covarianza Σ . Si queremos que $E[X_i] = \mu_i$ la función de densidad debe ser

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{\det \Sigma}}. \quad (30)$$