08/08/14 Procesos Estocásticos, Otoño 2014

José Vidal Alcalá Burgos vidal@cimat.mx

Logística:

- Programación en R, RStudio, Sweave, GitHub

Modelos de probabilidad

Ω : espacio muestral (sample space)
$\omega \in \Omega$: muestra (sample, outcome)
$A \subset \Omega$: evento (event)

Ejemplo Tirar dos monedas en orden

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

A = el evento de tener la misma cara en los dos lanzamientos
$= \{(H,H), (T,T)\}$

~~Podemos pensa~~
Observación Podemos pensar que un evento A es una pregunta ~~cuya respuesta es SI cuand~~ sobre la muestra ω, cuya respuesta es "SI" cuando $\omega \in A$ y NO de otra forma

$\mathcal{F}$: σ-álgebra. conjunto de eventos que satisface

i) $\Omega \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$

~~iii) si $A \in \mathcal{F}$~~

iii) si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y $A \cup B \in \mathcal{F}$

iv) si $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ es una secuencia de elementos de $\mathcal{F}$ entonces

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

Observación Podemos pensar que $\mathcal{F}$ es el conjunto de preguntas que tienen respuesta en el modelo

Ejemplos $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{(H,H), (H,T)\}, \{(T,H), (T,T)\}\}$

es muestra — no es muestra — primer tiro es H — primer tiro es T

$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{(H,H), (T,T)\}, \{(H,T), (T,H)\}\}$

tiros iguales — tiros diferentes

Ejemplo 2 lanzamientos de moneda

$$\mathcal{F}_1 = \{ \{HH\}, \{HT, TH\}, \{TT\}, \cancel{HH}\ \{HH, HT, TH\}, \{HH, TT\}, \{HT, TH, TT\}, \{HH, HT, TH, TT\}, \phi \}$$

Partición: Cada σ-álgebra $\mathcal{F}$ genera una partición de Ω de acuerdo a la ~~regla~~ relación de equivalencia

$\omega_1 \sim \omega_2$ si para todo $A \in \mathcal{F}$ $\omega_1 \in A \Leftrightarrow \omega_2 \in A$

$\boxed{\text{Ejercicio 1}}$

En el ejemplo anterior la partición es

$$P_1 = \{ \{H, H\}, \{HT, TH\}, \{TT\} \}$$

~~Preguntas~~ ¿Qué preguntas tienen respuesta ~~en~~ con la información de $\mathcal{F}_1$?

Q1- ¿Es el primer lanzamiento H?

Q2- ¿Es algún lanzamiento H?

Q3- ¿Son ~~tod~~ los dos lanzamientos H?

$P: \mathcal{F} \to [0,1]$: función de probabilidad. satisface

v) $P(\Omega) = \underline{1}$

vi) si $E_1, E_2, \ldots$, es una ~~serie~~ secuencia de elementos de $\mathcal{F}$ y $E_n \cap E_m = \phi$ para $n \neq m$ entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Notación $P(E)$ es la probabilidad del evento E.

Ejemplo $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$

$$P(\{(H,H),(H,T)\}) = 1/2$$

$$P(\{(T,H),(T,T)\}) = 1/2$$

Ejercicio Prueba que si $A, B, C, D \in \mathcal{F}$ entonces

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(2) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

(3) $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$

(4) If: $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Probabilidad condicional e independencia

$A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$

$P(A|B)$: Probabilidad de A dado B

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo • $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

• $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (Todos los subconjuntos de Ω)

Hay 16

• $P(H,H) = P(H,T) = P(T,H) = P(T,T) = 1/4$

~~• $A = \{(H,H)\}$, $B = \{$~~

• $A = \{(H,H), (T,T)\}$ $B = \{(H,H), (H,T), (T,H)\}$

$\downarrow$ ambos tiros iguales $\downarrow$ un tiro es H

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(H,H)\})}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

sombreros Tres personas arrojan sombreros al centro y recogen de manera aleatorra. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga el sombrero que lanzo?

$E_i =$ ~~El~~ La i-ésima persona tiene el sombrero que lanzó

i) $P(E_i) = 1/3$

ii) $P(E_i | E_J) = 1/2$

$$\frac{P(E_i \cap E_J)}{P(E_J)} = \frac{P(E_i \cap E_J)}{1/3}$$

$\Rightarrow P(E_i \cap E_J) = 1/6$

iii) $P(E_i | E_J \cap E_K) = 1$

$$\frac{P(E_i \cap E_J \cap E_K)}{P(E_J \cap E_K)} = \frac{P(E_i \cap E_J \cap E_K)}{1/6}$$

$\Rightarrow P(E_i \cap E_J \cap E_K) = 1/6$

i + ii + iii

$\Rightarrow P(E_i \cup E_J \cup E_K) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$= \frac{2}{6}$

$\therefore P(\text{ninguno tenga su sombrero}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = 2/3$

Decimos que dos eventos $A, B \in \mathcal{F}$ son <u>independientes</u>

si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; o de manera equivalente

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B).$$

Ejemplo ~~Ej~~ Tiramos dos dados y definimos

F = el primer tiro es 4
E_1 = la suma de los tiros es 6
E_2 = " es 7

F y E_1 <u>no</u> son independientes:

$$P(E_1 \cap F) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(E_1) = P(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}) = 5/36$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(E_1)P(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36} = P(E_1 \cap F)$$

F y E_2 <u>sí</u> son independientes:

$$P(E_2 \cap F) = 1/36$$

$$P(E_2) = 6/36 = 1/6$$

$$\therefore P(E_2)P(F) = 1/36$$

Final 08/08/14