Vectores Aleatorios:

Supongamos que tenemos dos variables aleatorias $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Decimos que el vector (X,Y) tiene <u>función de densidad conjunta</u> $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

si

$$P\Big((X,Y) \in A \Big) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

para $A \subset \mathbb{R}$ medible.

Una condición equivalente es

$$P\Big(a < X < b,\ c < Y < d \Big) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

En el caso discreto usamos la <u>función de probabilidad conjunta</u>. $p_{X,Y}(x,y)$

$$p_{X,Y}(x,y) = P\Big(X = x,\ Y = y \Big)$$

Densidades Marginales

Podemos recuperar las densidades marginales f_X, f_Y usando ~~que~~

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

~~Vefi*~~ Verificamos *

$\cancel{P(a < X < b)}$

$$\int_a^b f_X(x)\,dx = P(a < x < b) = P(a < x < b, -\infty < Y < +\infty)$$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$\therefore f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

En el caso discreto tenemos

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x)$$

Distribución Condicional

Supongamos que X es v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\Sigma \subset \mathcal{F}$. Cuando Ω es discreto definimos

$$E[X|\Sigma](\omega) = E[X|B_i] \quad \text{para } \omega \in B_i \qquad (1)$$

donde $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_N\}$ es la partición inducida por Σ.

Es ~~fác~~ inmediato comprobar que

$$\forall A \in \Sigma \quad E\left[E[X|\Sigma] \cdot 1_A\right] = E\left[X \cdot 1_A\right] \qquad (2)$$

De hecho, $E[X|\Sigma]$ es la única v.a. en (Ω, Σ, P) que satisface

$$\forall A \in \Sigma \quad E\left[g \cdot 1_A\right] = E\left[X \cdot 1_A\right] \qquad (3).$$

En el caso continuo, usaremos (3) como la definición de $E[X|\Sigma]$.

Supongamos que queremos calcular

$$P(Y \in B \mid \Sigma_X)$$

↳ σ-álgebra generada por X

<u>Lema</u> $$P(Y \in B \mid \Sigma_X) = \int_B \frac{f(X,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(X,z)\,dz}\,dy$$

Observación Ambos lados son funciones de la v.a. X.

<u>Prueba</u>: $$P(Y \in B \mid \Sigma_X) = E\left[\mathbb{1}_{Y \in B} \mid \Sigma_X\right]$$

Por lo tanto debemos verificar la condición (3):

$\forall A \subset \mathbb{R}$

$$E\left[\int_B \frac{f(X,y)\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(X,z)\,dz} \cdot \mathbb{1}_A(X)\right] = E\left[\mathbb{1}_{Y \in B} \cdot \mathbb{1}_{X \in A}\right]$$

Calculamos:

$$E\left[\int_B \frac{f(X,y)\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(X,z)\,dz}\,\mathbb{1}_{X \in A}\right]$$

$$= \iint_{-\infty,\ x \in A}^{\infty} f(x,b) \int_B \frac{f(x,y)\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\,dz}\,dx\,db$$

$$= \int_{x\in A} \int_B \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\,dz}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,b)\,db\,dx$$

$$\cancel{= \int_{x\in B} \int_{x\in A} f(x,y)\,d}$$

$$= \int_A \int_B f(x,y)\,dy\,dx = E\left[1_{Y\in B}\, 1_{X\in A}\right]$$

El lema anterior es la justificación de la formula

$$f(y\mid x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\,dz} = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$