Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c)}$$

Ley de Probabilidad Total

Si $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ es una partición de Ω y $B_i \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}$ entonces

$$P(A) = \sum_{n=1}^{N} P(A|B_n)\,P(B_n)$$

Examen Médico: $\oplus$ = Resultado del examen es positivo

$\ominus$ = " " negativo

E = Paciente tiene la enfermedad

S = Paciente esta sano.

Supongamos que

- $P(\oplus \mid E) = 0.99$
- $P(\ominus \mid S) = 0.99$
- $P(E) = \frac{1}{10{,}000} = 10^{-4}$

Calcula $P(E \mid \oplus)$.

Solución:

$$P(E \mid \oplus) = \frac{P(E \cap \oplus)}{P(\oplus)} = \frac{P(\oplus \cap E)}{P(E)} \cdot \frac{P(E)}{P(\oplus)}$$

$$= P(\oplus \mid E) \cdot \frac{P(E)}{\left[P(\oplus \cap E) + P(\oplus \cap S)\right]}$$

$$= \frac{P(\oplus \mid E) \cdot P(E)}{P(\oplus \mid E)\, P(E) + P(\oplus \mid S)\, P(S)}$$

$$= \frac{(0.99)\ 10^{-4}}{0.99\ 10^{-4} + (0.01)\ (1 - 10^{-4})}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{0.01}{0.99} \frac{(1 - 10^{-4})}{10^{-4}}} \simeq 0.0098$$

Variables Aleatorias

Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ ~~para~~ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Cuando Ω es discreto, la condición anterior es equivalente a pedir

$$X^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F} \text{ para cada } a \in \operatorname{Img} X$$

Ejemplos

- Si $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, entonces cualquier función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria
- Consideremos $\mathcal{F}_1$ definido anteriormente en el lanzamiento de dos monedas

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si algún tiro es } H \\ 0 & \text{si ningún tiro es } H \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si el primer tiro es } T \\ 0 & \text{si el primer tiro es } H \end{cases}$$

Verifica que X sí es variable aleatoria pero Y no lo es.

Lema 0: Cada σ-álgebra $\mathcal{F}$ genera una partición de Ω, denotada por $\mathcal{P}$, de acuerdo a la relación de equivalencia

Ejercicio 1

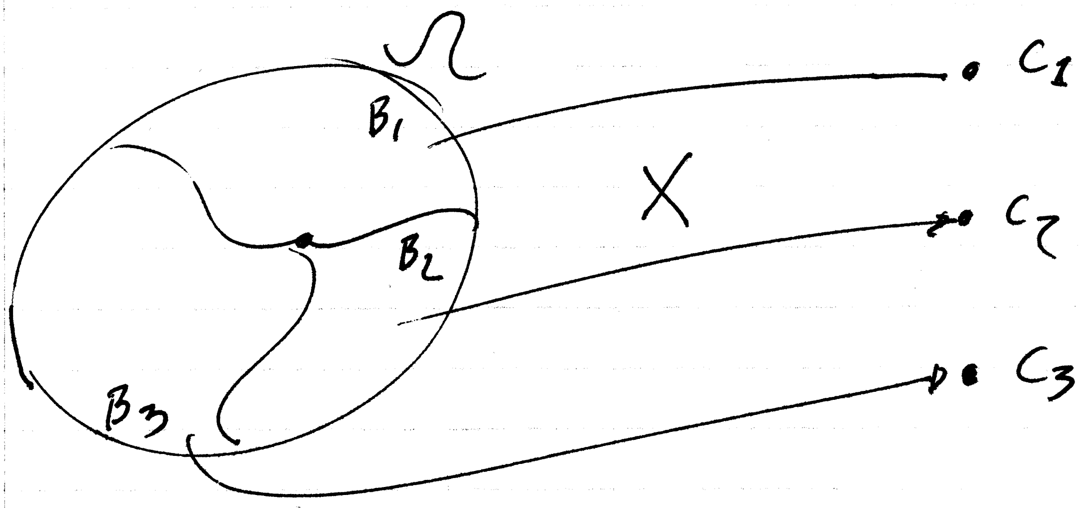
$$\omega_1 \sim \omega_2 \text{ si para todo } A \in \mathcal{F} \quad \omega_1 \in A \Leftrightarrow \omega_2 \in A$$

Ejemplo La partición asociada a $\mathcal{F}_1$ es

$$\mathcal{P}_1 = \{ \{H,H\}, \{HT,TH\}, \{TT\} \}$$

Lema 1: Una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es constante en cada conjunto de la partición $\mathcal{P}$ que ~~implica~~ genera $\mathcal{F}$.

Ejercicio 2



Lema 2: Una variable aleatoria X genera una σ-álgebra $\mathcal{F}_X$ de acuerdo a la regla

$$\mathcal{F}_X = \bigcap_{\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \mid X \text{ es v.a en el espacio } (\Omega, \mathcal{G}, P)} \mathcal{G}$$

Ejemplo $X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si algún tiro es } H \\ 0 & \text{si ningún tiro es } H. \end{cases}$

entonces $\mathcal{F}_X = \{ \{HH, HT, TH\}, \{TT\}, \{HH, HT, TH, TT\}, \phi \}$

Observación $\mathcal{F}_X$ contiene <u>solamente</u> las preguntas que se pueden responder conociendo el valor de X.

~~Valor esperado:~~ $\cancel{\mathcal{F} = \{\Omega\}, \Omega \text{ discreto} : X : \Omega \to \mathbb{R}}$

$$\cancel{E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)}$$

<u>Lema 3</u> : Si Y es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}_X, P)$ entonces existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$\boxed{\text{Ejercicio 3 } \Omega \text{ discreto}}$

$$Y = g(X)$$

<u>Valor esperado</u>: $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, Ω discreto, X v.a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$ (Valor esperado de X)

- $E[X|B] = \sum_{\omega \in B} X(\omega) P(\omega|B)$ (Valor esperado de X dado B)

- Si $\mathcal{P} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ es una partición de Ω, $B_i \in \mathcal{F}$

$$E[X] = \sum_{n=1}^{N} E[X|B_n] P(B_n)$$

- Si $\mathcal{P}$ es la partición generada por la σ-álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ definimos

$$E[X|\mathcal{G}] : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = E[X|B_n] \quad \text{para } \omega \in B_n$$

<u>Lema 4</u>: i) $E[X|\mathcal{G}]$ es v.a. en $(\Omega, \mathcal{G}, P)$

ii) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$

↳ Ley de probabilidad total (Tower property).

Ejemplo $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, dos lanzamientos

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si primer lanzamiento es } H \\ 0 & \text{si} \quad \text{"} \quad \text{es } T \end{cases}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}_1$$

i) Calcula $E[Y \mid \mathcal{G}]$. ii) Calcula $E[Y]$

ω	$E[Y \mid \mathcal{G}]$
HH	1
HT	1/2
TH	1/2
TT	0

$$E[Y] = 1/2$$

iii) Calcula $E[E[Y \mid \mathcal{G}]]$

$$E[E[Y \mid \mathcal{G}]] = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1/2$$

iv) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_X$ con $X = \#H$ en ambos tiros.

encuentra g tal que ~~$E g(x)$~~

$$E[Y \mid \mathcal{G}] = g(X)$$

$$E[Y \mid \mathcal{G}] = X/2$$

v) Calcula $E[X]$ y Calula $E[Y]$ usando que

$$E[Y|G] = X/2$$

$E[X] = 1$

$$E[Y] = E[E[Y|G]] = E[X/2] = \frac{1}{2}E[X] = 1/2$$