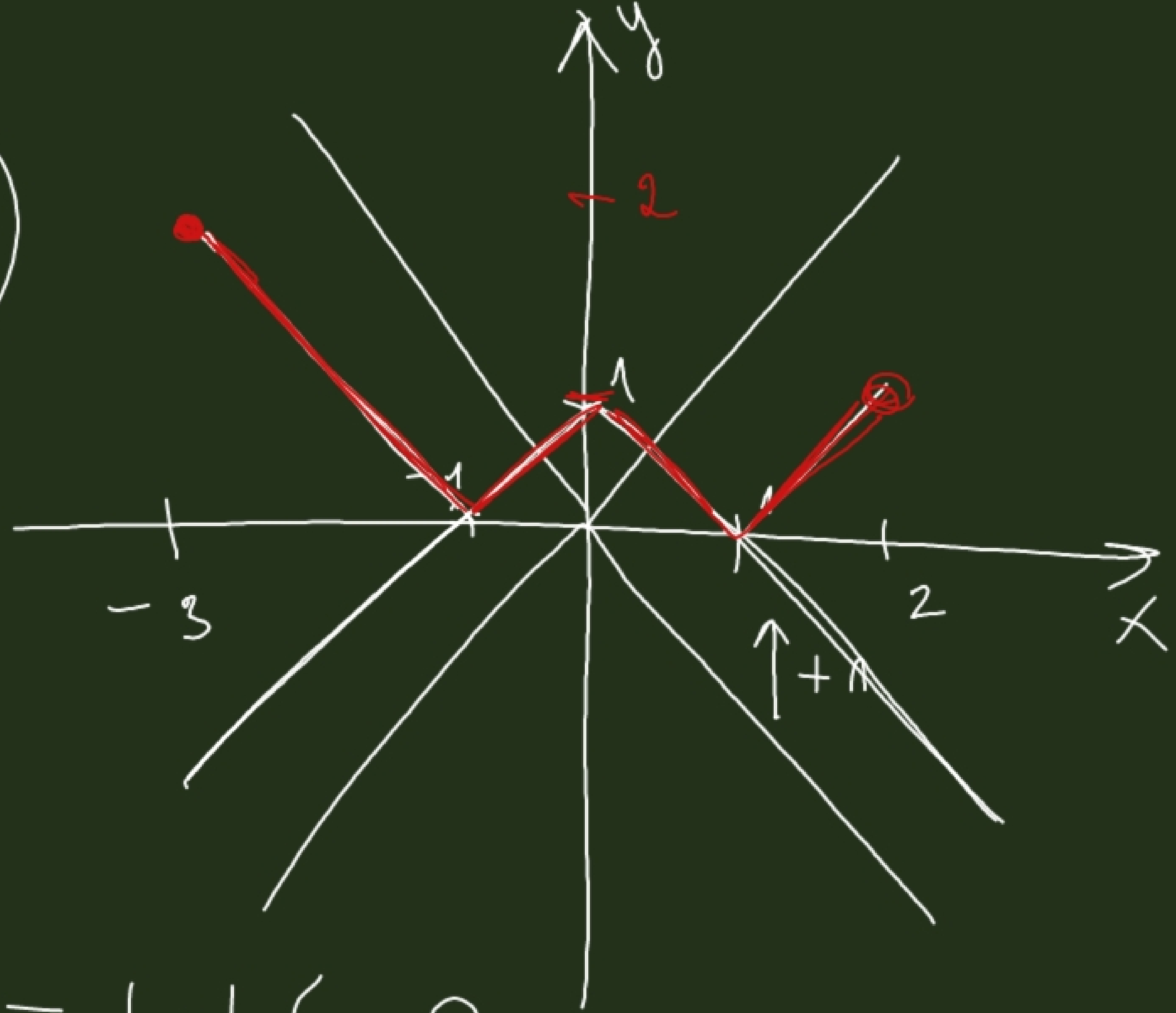
8. fejezet

3) $f(x) := \big| 1 - |x| \big| \quad (x \in \overbrace{[-3, 2)}^{D_f})$

a) $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$ Igaz

b) $\forall x \in D_f : f(x) \leq 2$ Igaz, mert:

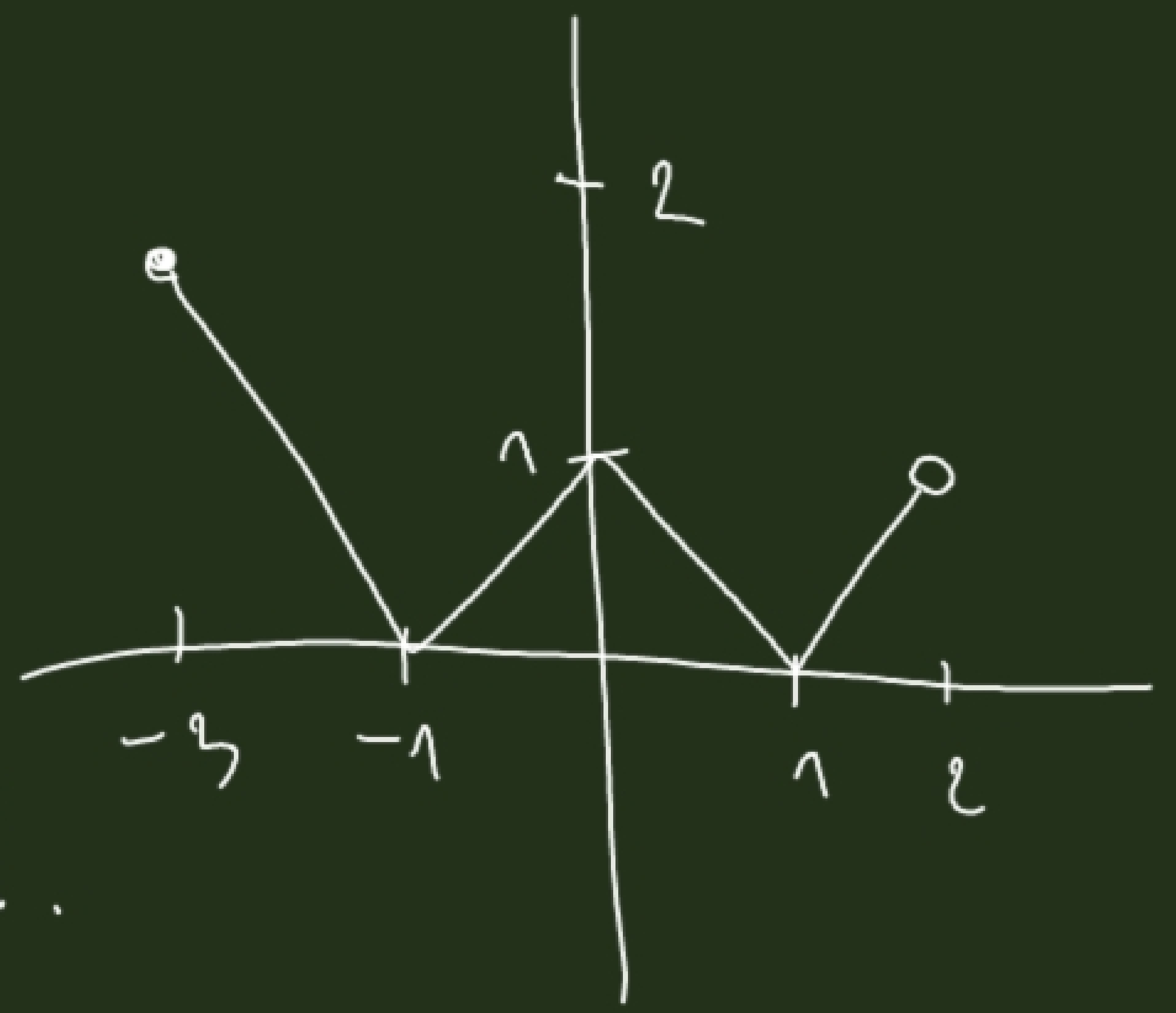
$\big| 1 - |x| \big| \leq 2$



$-3 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -|x| \leq 0$

$\Rightarrow -2 \leq 1 - |x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \big| 1 - |x| \big| \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq 2$

c) $\underbrace{\exists!}_{\text{egyértelműen létezik}} a \in D_f : \underbrace{\forall x \in D_f : f(a) \leq f(x)}_{\text{„a" minimumhely}}$ (egyetlen minimumhely)



láttuk: $f(x) \geq 0$

$f(x) = 0 \iff \big| 1 - |x| \big| = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1$

Hamis, mert van min., de nem egyértelmű.

d) $\exists a \in D_f : \forall x \in D_f : f(a) \leq f(x)$ (létezik min. hely)

Igaz, $a = \pm 1$ min. hely.

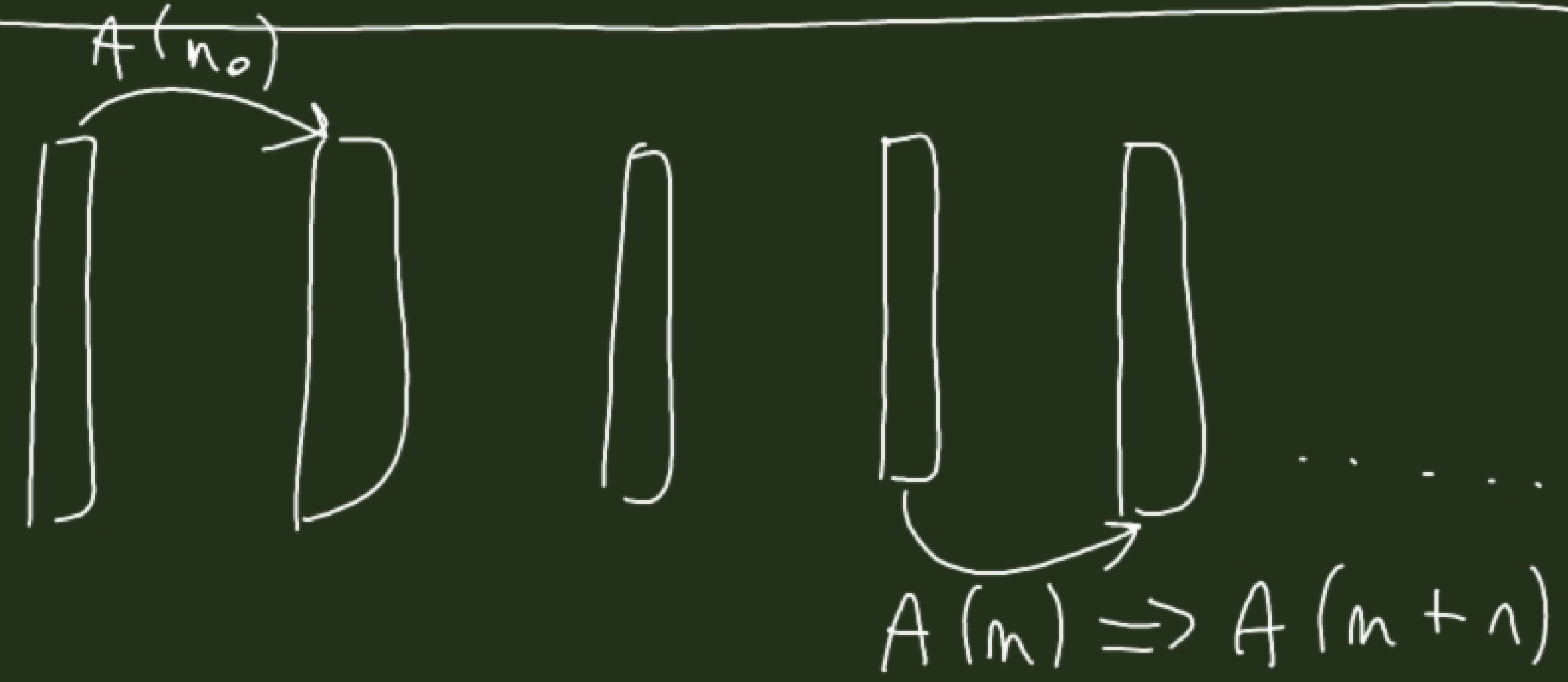
10. fejezet: Teljes indukció

Biz. be, hogy $A(n)$ igaz $\forall n \in H$ $= \mathbb{N}$

$\hookrightarrow \{n_0, n_0+1, \dots\}$

Teljes indukció:

1. $A(n_0)$ igaz
2. $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ tetszőleges.



1) a) Igazoljuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$

Telj. indukció:

① $n = 1$: $A(1)$: $\underset{\overset{\|}{1}}{\sum_{k=1}^{1} k} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ igaz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \right)$$

$a_k \in R$

② Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, belátjuk: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$.

Azaz: feltesszük, hogy $A(n)$ igaz, és megnézzük, hogy $A(n+1)$ igaz

$$A(n+1): \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k}\ = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}_{\sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{felt.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}}+n+1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n+1 \overset{\text{felt.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$$

$$= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\cdot\frac{n+2}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Longrightarrow A(n+1) \text{ igaz.}$$

$A(n)$ igaz $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

b, Bg. hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)}$.

Felj. indukció:

① $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \implies A(1)$ igaz.

$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$

② Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és tfh. $A(n)$ igaz. Belátjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz.

1 | C $\boxed{AF}$

$$A(n+1):\quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\| A(n)} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\cancel{(n+1)}\cdot\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right)$$

$$\overbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2} \overset{?}{=} \frac{\cancel{(n+1)}(n+2)(2n+3)}{6} \qquad \Big/ : (n+1),\ \cdot 6$$

$$n(2n+1) + 6(n+1) \overset{?}{=} (n+2)(2n+3)$$

$$2n^2 + 7n + 6 \overset{?}{=} 2n^2 + 7n + 6 \ \checkmark \ \Rightarrow A(n+1) \text{ igaz.}$$

$$\Rightarrow A(n) \text{ igaz } \forall n \in \mathbb{N}^+\text{-ra.}$$

4) a, Igy. hogy: $2\sqrt{n+1} - 2 < \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\cdot\sqrt{n} - 1}_{A(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

Telj. indukció:

jobb oldal:

1. $n=1$: $A(1)$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{?}{\leq} 2\cdot\sqrt{1} - 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \overset{?}{\leq} 1 \quad \checkmark$$

2. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, felt. hogy $A(n)$ igaz. Belátjuk, hogy $A(n+1)$ igaz.

$A(n+1):\ \boxed{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\cdot\sqrt{n+1} - 1}$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\underset{A(n)}{\leq} 2\cdot\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{A(n)}{\leq} 2\cdot\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Elég igazolni:

$$2\sqrt{n} \cancel{-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\leq} 2\cdot\sqrt{n+1} \cancel{-1}$$

$$2\sqrt{n} \leq \underbrace{2\cdot\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\geq 0}$$

$\nearrow (\cdot)^2$

$$4n \overset{?}{\leq} 4(n+\cancel{1}) \cancel{-4} + \frac{1}{n+1}$$

$$4n \overset{?}{\leq} 4n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 0} \quad A(n+1) \text{ igaz.}$$

$A(n)$ igaz $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

B. Mg. hogy $\underbrace{(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2}_{A(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

Telj. indukció:

① $n=1$: $A(1)$ $2! \overset{?}{<} 2^2 \cdot (1!)^2 \Leftrightarrow 2 \overset{?}{<} 4$ ✓

$$\Big(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$(2n)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{n!} \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n$$

$$(n!)^2 = (n!) \cdot (n!) = [1 \cdot \ldots \cdot n] \cdot [1 \cdot \ldots \cdot n] = 1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot n^2 \Big)$$

② Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, feltesszük, hogy $A(n)$ igaz.
Belátjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz.

$$A(n+1):\ \boxed{(2(n+1))! \overset{?}{<} 2^{2(n+1)} \cdot ((n+1)!)^2}$$

$$(2n+2)!$$

$$\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot (2n)}_{=(2n)! \underset{A(n)}{<} 2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot (2n+1)(2n+2) < \underbrace{2^{2n} \cdot (n!)^2}_{A(n)} \cdot (2n+1)(2n+2)$$

$$\text{elég: } \cancel{2^{2n}} \cdot \cancel{(n!)^2} \cdot (2n+1)(2n+2) \overset{?}{<} \underbrace{\cancel{2^{2n+2}}}_{4} \cdot \underbrace{\cancel{((n+1)!)^2}}_{(n+1)^2}$$

$$(2n+1)\underbrace{(2n+2)}_{\cancel{2}\cancel{(n+1)}} \overset{?}{<} \cancel{4}_{2} (n+1)^{\cancel{2}}$$

$$2n+1 \overset{?}{<} 2(n+1) = 2n+2 \ \checkmark \quad A(n+1) \text{ igaz.}$$

$A(n)$ igaz $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

c) Ig. hogy: $\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}}_{A(n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ HF ! $(2 \leq n \in \mathbb{N})$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n, \quad n! = \prod_{k=1}^{n} k \right)$$

Tel. ind. bal oldal:

1. $n=2$: $A(2)$: $\frac{1}{2\sqrt{2}} \overset{?}{<} \prod_{k=1}^{2} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{?}{<} \frac{3}{4} \qquad /(\cdot)^2$$

$$\frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16} \overset{?}{<} \frac{9}{16} \checkmark$$

② $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$

$$A(n+1):\ \frac{1}{2\cdot\sqrt{n+1}} < \prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k} = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)}_{> \frac{1}{2\sqrt{n}}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$\text{j.o.}:\ \prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k} \overset{A(n)}{>} \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$\text{elég}:\ \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} \frac{1}{\cancel{2}\cdot\sqrt{n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \qquad /\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(2n+2)$$

$$\sqrt{n}\cdot\underbrace{(2n+2)}_{2(n+1)} \overset{?}{<} \sqrt{n+1}\cdot(2n+1) \qquad /\ (\cdot)^2 \ \ldots\ \text{HF}$$

$$/ :\sqrt{n+1}\ ,\ (\cdot)^2$$

$$2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} \overset{?}{<} 2n+1$$

$$\left(2\sqrt{n^2+n} < 2\cdot\sqrt{n^2+2n+1} = 2\cdot\sqrt{(n+1)^2}\right)?$$