Függvények

Matematikai alapozás, 2023-2024/I.

$A, B \subset \mathbb{R}$, függvény: $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$.

Halmazok képe, ősképe

1. Pont
   1.1 $x \in A$ képe: $f(x)$
   1.2 $y \in B$ ősképe: az az $x \in A$ pont, melyre $f(x) = y$ (jelölés: $f^{-1}(y) = x$).

Halmazok képe, ősképe

1. Pont
   1.1 $x \in A$ képe: $f(x)$
   1.2 $y \in B$ ősképe: az az $x \in A$ pont, melyre $f(x) = y$ (jelölés: $f^{-1}(y) = x$).
2. Intervallum
   2.1 $[a, b] \subseteq A$ képe: $f([a, b]) := \{f(x) \in B \ : \ x \in [a, b]\}$
   2.2 $[c, d] \subseteq B$ ősképe: $f^{-1}([c, d]) := \{x \in A \ : \ f(x) \in [c, d]\}$

Halmazok képe, ősképe

1. Pont
   1.1 $x \in A$ képe: $f(x)$
   1.2 $y \in B$ ősképe: az az $x \in A$ pont, melyre $f(x) = y$ (jelölés: $f^{-1}(y) = x$).
2. Intervallum
   2.1 $[a, b] \subseteq A$ képe: $f([a, b]) := \{f(x) \in B \ : \ x \in [a, b]\}$
   2.2 $[c, d] \subseteq B$ ősképe: $f^{-1}([c, d]) := \{x \in A \ : \ f(x) \in [c, d]\}$
3. Halmaz
   3.1 $A_1 \subseteq A$ képe: $f(A_1) := \{f(x) \in B \ : \ x \in A_1\}$
   3.2 $B_1 \subseteq B$ ősképe: $f^{-1}(B_1) := \{x \in A \ : \ f(x) \in B_1\}$

Halmazok képe, ősképe

1. Pont
   1.1 $x \in A$ képe: $f(x)$
   1.2 $y \in B$ ősképe: az az $x \in A$ pont, melyre $f(x) = y$ (jelölés: $f^{-1}(y) = x$).
2. Intervallum
   2.1 $[a, b] \subseteq A$ képe: $f([a, b]) := \{f(x) \in B \ : \ x \in [a, b]\}$
   2.2 $[c, d] \subseteq B$ ősképe: $f^{-1}([c, d]) := \{x \in A \ : \ f(x) \in [c, d]\}$
3. Halmaz
   3.1 $A_1 \subseteq A$ képe: $f(A_1) := \{f(x) \in B \ : \ x \in A_1\}$
   3.2 $B_1 \subseteq B$ ősképe: $f^{-1}(B_1) := \{x \in A \ : \ f(x) \in B_1\}$
4. Értelmezési tartomány, értékkészlet
   4.1 $D_f := \{x \in A \ : \ \exists y \in B : \ f(x) = y\}$
   4.2 $R_f := \{y \in B \ : \ \exists x \in D_f : \ f(x) = y\}$
   4.3 Megjegyzés: $f(D_f) = R_f$, $f^{-1}(R_f) = D_f$

Inverz: az f függvény ”fordítottja”

$$x \xmapsto{f} y \qquad \iff \qquad y \xmapsto{f^{-1}} x$$

Inverz: az f függvény "fordítottja"

$$x \xmapsto{f} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \xmapsto{f^{-1}} x$$

Mikor definiál ez a leképezés egy függvényt?

Inverz: az f függvény "fordítottja"

$$x \xmapsto{f} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \xmapsto{f^{-1}} x$$

Mikor definiál ez a leképezés egy függvényt?

Ha minden $y \in B$ esetén legfeljebb egy olyan x létezik, amire $f(x) = y$, azaz az $f^{-1}(y)$ halmaz legfeljebb egyelemű. (R_f-et és D_f-et úgy fogjuk megadni, hogy pontosan egyelemű legyen.)

Az előző gondolat képletekkel kifejezve:

$$\forall x, t \in D_f \ : \ f(x) = f(t) \quad \Rightarrow \quad x = t$$

ami nem más, mint az injektivitás definíciója.

(Ezzel ekvivalens az alábbi: $\forall x, t \in D_f \ : \ x = t \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(t)$.)

Tétel: Egy $f : A \to B$ függvény pontosan akkor invertálható, ha injektív. Az inverzfüggvény jelölése: f^{-1}.

Definíció: $D_{f^{-1}} := R_f$, $y \in D_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(y) := x$, ha $f(x) = y$.

$+\infty$-ben vett határérték

Bevezető gondolat: körülbelül mivel lesz egyenlő $f(x)$, ha x elég nagy?

Feltesszük: $\exists a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $(a, +\infty) \subset D_f$, azaz f értelmezve van elég nagy x értékek esetén. (Ez a feltétel precízebb lesz Analízis I-en, a torlódási pont definiálásával.)

Jelölés: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

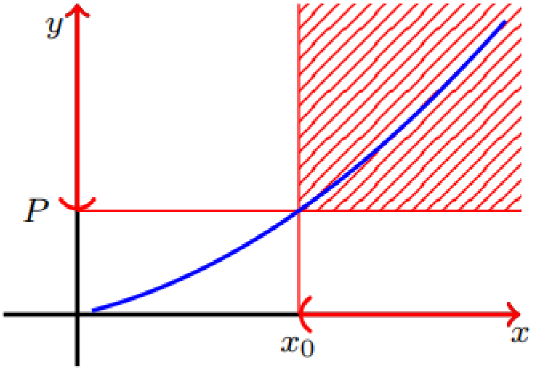
A határérték bármilyen $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemet felvehet, így 3 kategóriát veszünk figyelembe:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$,
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Definíció: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tegyük fel, hogy $+\infty$ a D_f halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ha

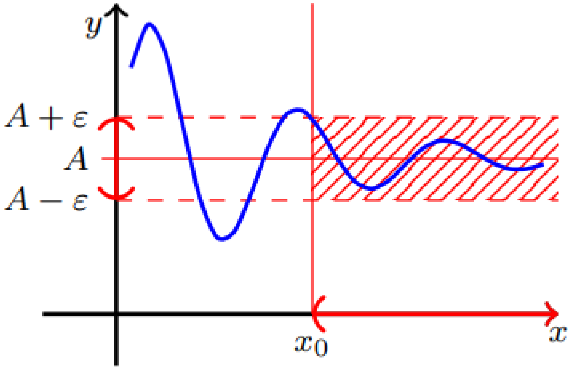
$$\forall P > 0 \ : \ \exists K > 0 \ : \ \forall x \in D_f, x > K \ : \ f(x) \geq P.$$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

Definíció: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tegyük fel, hogy $+\infty$ a D_f halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; : \; \exists K > 0 \; : \; \forall x \in D_f, x > K \; : \; |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Definíció: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tegyük fel, hogy $+\infty$ a D_f halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ha

$$\forall p < 0 \ : \ \exists K > 0 \ : \ \forall x \in D_f, x > K \ : \ f(x) \le p.$$

Hf.: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) = \qquad .$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Definíció: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tegyük fel, hogy $+\infty$ a D_f halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ha

$$\forall p < 0 \ : \ \exists K > 0 \ : \ \forall x \in D_f, x > K \ : \ f(x) \leq p.$$

Hf.: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} -f(x) = -\infty.$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Definíció: Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tegyük fel, hogy $+\infty$ a D_f halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ha

$$\forall p<0\ :\ \exists K>0\ :\ \forall x\in D_f, x>K\ :\ f(x)\le p.$$

Hf.: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} -f(x) = -\infty.$