15. fejezet: Generált altér

2023. október 24.

Szereplők:

- V vektortér ($\mathbb{K}$ felett, két művelet: $+$, $\cdot$),
- **vektorrendszer**: $x_1, x_2, \ldots \in V$ (lehet bármennyi, akár végtelen is; ugyanazt a vektort többször is vehetjük)
- **véges vektorrendszer**: $x_1, x_2, \ldots x_k \in V$ (nem biztos, hogy különbözőek)

Az $x_1, \ldots, x_k$ véges vektorrendszer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i.$$

Elnevezések:

- Triviális lineáris kombináció: $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \lambda_i = 0$,
- Nemtriviális lin. komb.: $\exists i \in \{1, \ldots, k\} : \lambda_i \neq 0$.

Az alterek zártak a lineáris kombináció képzésre, azaz: ha W altér V-ben, $x_1, \ldots, x_k \in W$, akkor minden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ esetén $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W$.

$$W^* := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in V \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

1. W^* altér V-ben.
2. W^* lefedi az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszert, azaz

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \qquad x_i \in W^*.$$

3. Ha $Z \subseteq V$ olyan altér, amely lefedi az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszert, akkor $W^* \subseteq Z$.

Bizonyítás: 1. (W^* altér V-ben)

Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ és $b := \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in W^*$ két tetszőleges elem, és $\lambda \in \mathbb{K}$.

Bizonyítás: 1. (W^* altér V-ben)

Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ és $b := \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in W^*$ két tetszőleges elem, és $\lambda \in \mathbb{K}$.

Megmutatjuk, hogy $a + b \in W^*$ és $\lambda \cdot a \in W^*$ is teljesül.

Bizonyítás: 1. (W^* altér V-ben)

Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ és $b := \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in W^*$ két tetszőleges elem, és $\lambda \in \mathbb{K}$.

Megmutatjuk, hogy $a + b \in W^*$ és $\lambda \cdot a \in W^*$ is teljesül.

$$a + b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i x_i + \mu_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) x_i \quad \in W^*;$$

Bizonyítás: 1. (W^* altér V-ben)

Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ és $b := \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in W^*$ két tetszőleges elem, és $\lambda \in \mathbb{K}$.

Megmutatjuk, hogy $a + b \in W^*$ és $\lambda \cdot a \in W^*$ is teljesül.

$$a + b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i x_i + \mu_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) x_i \quad \in W^*;$$

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda \cdot (\lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda \cdot \lambda_i) x_i \quad \in W^*.$$

2. $(\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \quad x_i \in W^*)$

Legyen x_i a vektorrendszer egy tetszőleges eleme.

2. $(\forall i \in \{1, \ldots, k\}: \quad x_i \in W^*)$
Legyen x_i a vektorrendszer egy tetszőleges eleme.
(Kérdés: meg tudunk-e adni olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ konstansokat, melyekkel

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

igaz?)

2. $(\forall i \in \{1, \dots, k\}: \quad x_i \in W^*)$

Legyen x_i a vektorrendszer egy tetszőleges eleme.

(Kérdés: meg tudunk-e adni olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ konstansokat, melyekkel

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

igaz?)

$$x_i = 0 \cdot x_1 + \ldots 0 \cdot x_{i-1} + 1 \cdot x_i + 0 \cdot x_{i+1} + \ldots 0 \cdot x_k \in W^*$$

3. ($Z \subseteq V$ lefedi $x_1, \ldots x_k$-t $\Longrightarrow W^* \subseteq Z$)
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $x_i \in Z$.

3. ($Z \subseteq V$ lefedi $x_1, \dots x_k$-t $\Longrightarrow W^* \subseteq Z$)
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén $x_i \in Z$.

Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ egy tetszőleges W^*-beli elem.

3. $(Z \subseteq V$ lefedi $x_1, \ldots x_k$-t $\Longrightarrow W^* \subseteq Z)$
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $x_i \in Z$.

Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ egy tetszőleges W^*-beli elem.

Megmutatjuk, hogy ekkor $a \in Z$ is teljesül.

3. ($Z \subseteq V$ lefedi $x_1, \dots x_k$-t $\implies W^* \subseteq Z$)
Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén $x_i \in Z$.
Legyen $a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ egy tetszőleges W^*-beli elem.
Megmutatjuk, hogy ekkor $a \in Z$ is teljesül.
Z zárt a lineáris kombináció képzésére, hiszen altér:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_k x_k \in Z.$$

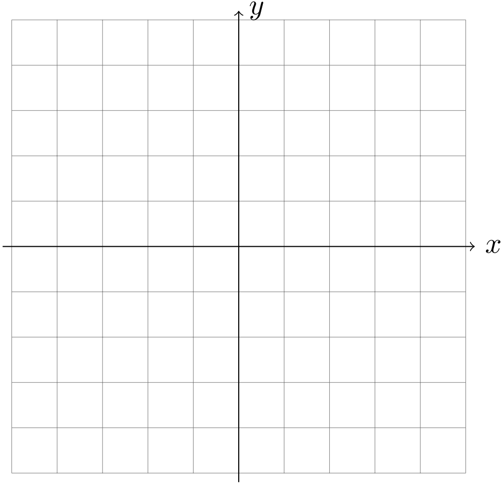
(Azaz megmutattuk, hogy a W^* minden eleme a Z-nek is elem, azaz W^* részhalmaza Z-nek.)

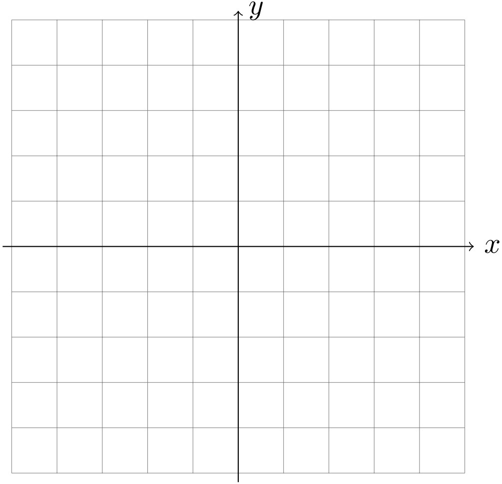
W^* neve: **generált altér**, jelölés: $W^* = Span(x_1, \ldots, x_k)$

Legyen W a V vt. egy altere. Azt mondjuk, hogy W-nek van véges generátorrendszere, ha

$$\exists k \in \mathbb{N}^+ \; \exists x_1, \ldots, x_k \in V \; : \; W = Span(x_1, \ldots, x_k)$$

Példák





Az $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ vektorokat kanonikus egységvektoroknak nevezzük.

$\mathbb{K}^n$ generátorrendszere

$$\mathbb{K}^n = Span(e_1, \ldots, e_n).$$

Bizonyítás: Két lépés:

- $\supseteq$ $\mathbb{K}^n \supseteq Span(e_1, \ldots, e_n)$, azaz a kanonikus egységvektorok minden lineáris kombinációja $\mathbb{K}^n$-ben van;
- $\subseteq$ $\mathbb{K}^n \subseteq Span(e_1, \ldots, e_n)$, azaz minden $x \in \mathbb{K}^n$-hez léteznek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ konstansok úgy, hogy $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$\supseteq$ Triviális. ($Span(e_1, \ldots, e_n)$ altér $\mathbb{K}^n$-ben, így zárt a lineáris kombináció képzésére.)

- $\supseteq$ Triviális. ($Span(e_1, \ldots, e_n)$ altér $\mathbb{K}^n$-ben, így zárt a lineáris kombináció képzésére.)
- $\subseteq$ Legyen $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$ egy tetszőleges vektor.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \quad \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \quad \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \quad \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \quad \cdot e_1 + \quad \cdot e_2 + \ldots + \quad \cdot e_n
\end{aligned}
$$

- $\supseteq$ Triviális. ($Span(e_1, \ldots, e_n)$ altér $\mathbb{K}^n$-ben, így zárt a lineáris kombináció képzésére.)
- $\subseteq$ Legyen $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$ egy tetszőleges vektor.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n \in Span(e_1, \ldots, e_n).
\end{aligned}$$

Altértartó átalakítások

A $Span(x_1, \ldots, x_k)$ **generált altér nem változik** az alábbi átalakítások hatására:

Altértartó átalakítások

A $Span(x_1, \ldots, x_k)$ **generált altér nem változik** az alábbi átalakítások hatására:

1. a vektorrendszer egyik elemét megszorzom egy tetszőleges nemnulla számmal:

$$Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

Altértartó átalakítások

A $Span(x_1, \dots, x_k)$ **generált altér nem változik** az alábbi átalakítások hatására:

1. a vektorrendszer egyik elemét megszorzom egy tetszőleges nemnulla számmal:

$$Span(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) = Span(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

2. tetszőleges elemhez hozzáadom bármelyik másik elem bármilyen skalárszorosát

$$Span(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) = Span(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

Altértartó átalakítások

A $Span(x_1, \ldots, x_k)$ **generált altér nem változik** az alábbi átalakítások hatására:

1. a vektorrendszer egyik elemét megszorzom egy tetszőleges nemnulla számmal:
$$Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$
2. tetszőleges elemhez hozzáadom bármelyik másik elem bármilyen skalárszorosát
$$Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$
3. legalább kételemű rendszer esetén a nullvektorokat kiveszem:
$$Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k) = Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

A V vektorteret

- **véges dimenziós**nak nevezzük, ha van véges generátorrendszere, azaz

$$\exists k \in \mathbb{N}^+,\ \exists x_1, \dots, x_k \in V \ :\ V = Span(x_1, \dots, x_k),$$

jelölés: $\dim V < \infty$;

- **végtelen dimenziós**nak nevezzük, ha nincs véges generátorrendszere, azaz

$$\forall k \in \mathbb{N}^+,\ \forall x_1, \dots, x_k \in V \ :\ V \neq Span(x_1, \dots, x_k),$$

jelölés: $\dim V = \infty$;

Példák:

- síkvektorok tere
- térvektorok tere
- $\mathbb{K}^n$
- végtelen dimenziós példa: jegyzet Függelékében