21. fejezet: Mátrixok diagonalizálhatósága

Matematikai alapozás, 2023-2024/I.

Mátrixok hasonlósága

Legyen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy B hasonló az A-hez (jel.: $A \sim B$), ha

$$\exists\, C \in \mathbb{K}^{n\times n} \quad : \quad \det(C) \neq 0,\; B = C^{-1}AC$$

Megjegyzés: A hasonlóság szimmetrikus tulajdonság: $A \sim B \iff B \sim A$.

Ha $A \sim B$, akkor $P_A \equiv P_B$.

Megjegyzés: Ha $A \sim B$, akkor ugyanazok a sajátértékeik.

Bizonyítás. Hasonlóság $\Longrightarrow B = C^{-1}AC$. Így:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(C^{-1}AC - \lambda I) \\ &= \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) \\ &= \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) \\ &= \det(C) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(C) \\ &= \det(C) \cdot \det(C^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I) \\ &= P_A(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

Diagonalizálhatóság

Azt mondjuk, hogy egy $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható $\mathbb{K}$ felett, ha

$$\exists C \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad : \quad \det(C) \neq 0,\ C^{-1}AC \text{ diagonális.}$$

A $D := C^{-1}AC$ mátrixot az A diagonális alakjának nevezzük, a C mátrixot pedig a diagonalizáló mátrixnak.

Kérdés: Hol vannak az A diagonalizálható mátrix sajátértékei?

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. A pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{K}$ felett, ha létezik sajátbázisa $\mathbb{K}^n$-ben.

Bizonyítás: ($\Longrightarrow$) Tfh. A diagonalizálható: $\exists\ C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertálható és $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonális mátrix úgy, hogy

$$C^{-1}AC = D$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Megmutatjuk, hogy $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}^n$ SB $\mathbb{K}^n$-ben.

$$\det(C) \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1, \dots, c_n \text{ F} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1, \dots, c_n \text{ B}$$

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D$$

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D$$

$$AC = CD$$

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D \\ AC &= CD \\ A\begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D$$

$$AC = CD$$

$$A \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Ac_1 & \ldots & Ac_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 c_1 & \ldots & \lambda_n c_n \end{bmatrix}$$

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D \\ AC &= CD \\ A\begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Ac_1 & \ldots & Ac_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 c_1 & \ldots & \lambda_n c_n \end{bmatrix} \\ Ac_j &= \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ az A sajátértékei.

$$\begin{aligned}
C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D \\
AC &= CD \\
A\begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Ac_1 & \dots & Ac_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 c_1 & \dots & \lambda_n c_n \end{bmatrix} \\
Ac_j &= \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \dots, n)
\end{aligned}$$

azaz: $c_1, \dots, c_n$ az A sajátvektorai.

$(\Longleftarrow)$ Tfh. $c_1, \ldots, c_n$ sajátbázis $\mathbb{K}^n$-ben.

$$C := \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

Ekkor $\det(C) \neq 0$, mivel $c_1, \ldots, c_n$ F rendszer $\mathbb{K}^n$-ben.

$$Ac_j = \lambda_j c_j \quad \Longrightarrow \quad A \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 c_1 & \ldots & \lambda_n c_n \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad AC = CD$$

ahol

$$D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Végül C^{-1}-zel beszorozva:

$$AC = CD \quad \Longrightarrow \quad C^{-1}AC = D,$$

azaz A diagonalizálható.