17. fejezet: Bázis, dimenzió

2023. november 6.

(Továbbra is: V vektortér, $x_1, \dots, x_k$ V-beli vektorrendszer.)

Bázis

Az $x_1, \dots, x_k$ V-beli vektorrendszert a V bázisának nevezzük (jel.: B), ha F és G.

Megjegyzés:

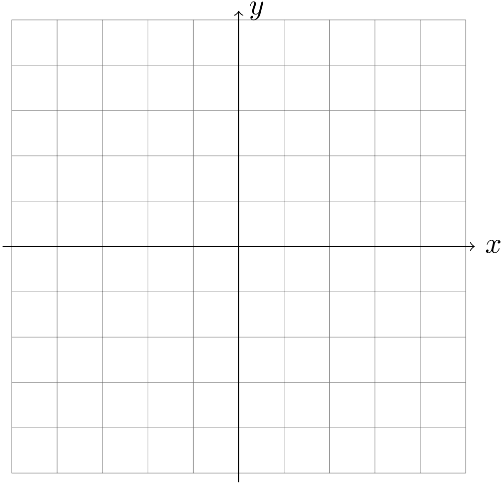
G $\implies V = Span(x_1, \dots, x_k)$, azaz $\forall x \in V$ esetén $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$,

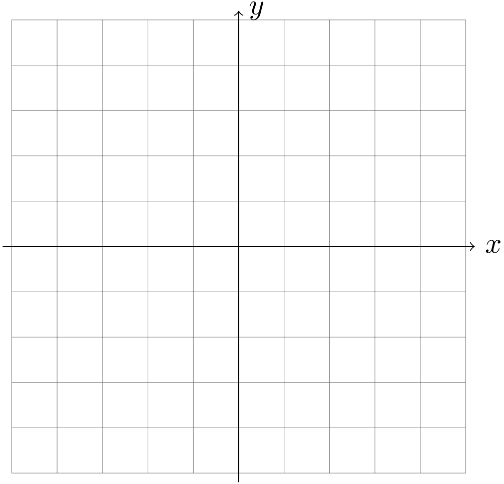
F $\implies$ ez a felírás egyértelmű

A fenti lineáris kombináció együtthatóit a vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Példák: szokásos :) ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}^n$).

Minden nézőpont kérdése!





Mindig van bázis?

Legyen $V \neq \{0\}$ véges dimenziós vektortér. Ekkor v-ben létezik bázis.

Bizonyítás:
Legyen $y_1, \ldots, y_m \in V$ G V-ben.

- Ha ez a vektorrendszer F, akkor B.
- Ha ez a vektorrendszer Ö, akkor $\exists j \in \{1, \ldots, m\}$ úgy, hogy $\{y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots y_m\}$ G V-ben.

Ezt a két lépést addig ismételjük, amíg F rendszert nem kapunk, ami legkésőbb $m-1$ lépés után biztosan bekövetkezik. Hiszen ekkor egy 1 darab elemből álló vektorrendszert kapunk, és mivel $V \neq \{0\}$, ezért ez az elem nem a nullelem. Így ez a vektorrendszer biztosan F.

Megjegyzés: Az iménti bizonyításban tulajdonképpen egy **algoritmust** is láttunk, amivel G-ből ki lehet választani egy B-t.

Kicserélési tétel

Legyen $x_1, \dots, x_k \in V$ F és $y_1, \dots, y_m \in V$ G. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, k\}$-hoz létezik $j \in \{1, \dots, m\}$ úgy, hogy

$$x_1, \dots, x_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \dots, x_k \qquad \text{F}.$$

Bizonytás: WLOG feltehető, hogy $i = 1$.
Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden $j \in \{1, \ldots, m\}$ esetén

$$y_j, x_2, \ldots, x_k \quad \text{Ö}.$$

Ebből következik, hogy $y_j \in Span(x_2, \ldots, x_k)$ minden $j \in \{1, \ldots, m\}$ esetén, azaz

$$V = Span(y_1, \ldots, y_m) \subseteq Span(x_2, \ldots, x_k) \subseteq V,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $x_2, \ldots, x_k$ G V-ben.
Így azonban $x_1 \in V = Span(x_2, \ldots, x_k)$, ami ellentmond az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszer függetlenségének.

A kicserélési tétel következménye

Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ F és $y_1, \ldots, y_m \in V$ G. Ekkor $k \leq m$.

A tétel állítása szavakkal megfogalmazva: bármely F rendszer (tagjainak száma) nem lehet nagyobb egyetlen G rendszernél (tagjainak számánál) sem.

Bizonyítás: ($x_1, \ldots, x_k \in V$ F és $y_1, \ldots, y_m \in V$ G)

Kicserélési tétel $\Longrightarrow \exists j_1 \in \{1, \ldots, m\}$: $y_{j_1}, x_2, \ldots, x_k$ F.

Kicserélési tétel $\Longrightarrow \exists j_2 \in \{1, \ldots, m\}$: $y_{j_1}, y_{j_2}, x_3, \ldots, x_k$ F.

$\vdots$

Kicserélési tétel $\Longrightarrow \exists j_k \in \{1, \ldots, m\}$: $y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}$ F.

Így a generátorrendszerben létezik legalább k darab különböző elem, azaz a generátorrendszer elemszáma legalább k, azaz $m \geq k$.

Legyen $V \neq \{0\}$ véges dimenziós vektortér. Ekkor V bármely két bázisa azonos elemszámú.

Bizonyítás: Válasszunk két tetszőleges bázist:

$$e_1, \dots e_k \quad \text{B}, \qquad f_1, \dots, f_m \quad \text{encircleB}.$$

- $e_1, \dots e_k$ F, $f_1, \dots, f_m$ G, így $k \leq m$,
- $e_1, \dots e_k$ G, $f_1, \dots, f_m$ F, így $k \geq m$

Ez csak úgy lehet, ha $k = m$, azaz a két bázis azonos elemszámú.

A V véges dimenziós vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. Megállapodunk továbbá abban, hogy $\dim\{0\} := 0$.

Példák:

-
-
-
-

Legyen $1 \leq \dim(V) = n < \infty$. Ekkor

1. ha $x_1, \ldots, x_k \in V$ F, akkor $k \leq n$;
2. ha $x_1, \ldots, x_k \in V$ G, akkor $k \geq n$;
3. ha $x_1, \ldots, x_n \in V$ F, akkor G is (azaz B);
4. ha $x_1, \ldots, x_n \in V$ G, akkor F is (azaz B);