20. fejezet: Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Matematikai alapozás, 2023-2024/I.

Motiváció

Adott $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Keressünk olyan vektorokat, amelyekre

$$Ax = \lambda x$$

fennáll valamilyen $\lambda \in \mathbb{K}$ konstans esetén.
Miért jó ez?
Tegyük fel, hogy találunk k darab ilyen vektort:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad \ldots, \quad Ax_k = \lambda_k x_k.$$

Ekkor $x \in \mathrm{Span}(x_1, \ldots, x_k)$ esetén Ax kiszámítása leegyszerűsödik:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \quad \Longrightarrow \quad Ax = \sum_{i=1}^{k} Ax_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i x_i.$$

Lineáris transzformációk a $\mathbb{K}^n$ téren

Egy $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ függvényt a $\mathbb{K}^n$ tér egy lineáris transzformációjának nevezünk, ha

a) minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

b) minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

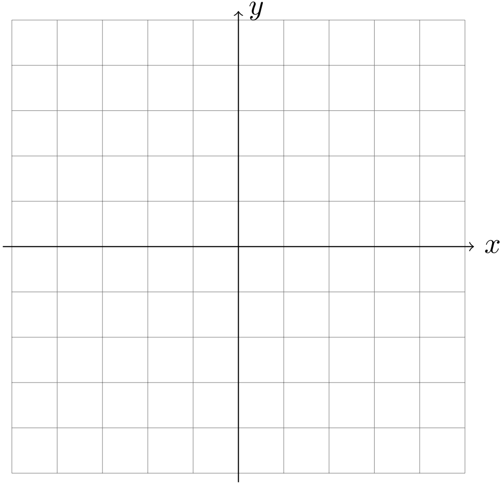
teljesül.

Igazolható:

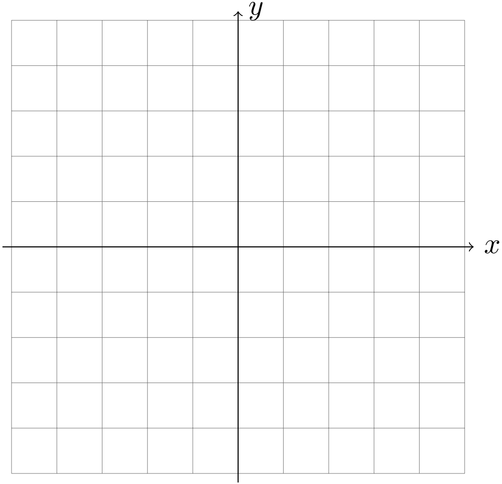
$$\forall\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \text{ lineáris transzformáció esetén } \exists! A \in \mathbb{K}^{n\times n} \ : \ \varphi(x) = Ax \ (x \in \mathbb{K}^n)$$

Példák

x-tengelyre való tengelyes tükrözés



origó körüli 90°-os elforgatás



Motiváció újra

$$Ax = \lambda x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x) = \lambda x$$

Ez milyen transzformáció?

A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha

$$\exists x \in \mathbb{K}^n,\ x \neq 0\ :\ Ax = \lambda x.$$

Az $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektort az A λ-hoz tartozó sajátvektorának nevezzük.
Az A összes sajátértékeinek halmazát az A spektrumának nevezzük:

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}\ :\ \exists x \in \mathbb{K}^n,\ x \neq 0\ :\ Ax = \lambda x\}.$$

Sajátértékek és sajátvektorok keresése:

$$Ax = \lambda x \quad \Longleftrightarrow \quad Ax - \lambda x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \text{ megoldásai:} \qquad \mathcal{M}_h = ?$$

$$(A-\lambda I)x = 0\text{-nak létezik nemnulla megoldása}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{végtelen sok megoldása van}$$
$$\Updownarrow$$
$$\det(A-\lambda I) = 0$$

Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$P_A(\lambda) := \det(A-\lambda I) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Az A mátrix sajátértékei a P_A karakterisztikus gyökei.

Bizonyítás. λ sajátérték $\iff \det(A-\lambda I) = 0 \iff P_A(\lambda) = 0$.

7

A λ gyök multiplicitását a λ sajátérték algebrai multiplicitásának nevezzük.
Jel.: $a(\lambda)$.

Ha A (alsó-, vagy felső-)háromszögmátrix, akkor

$$P_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}),$$

ahol a_{ii} $(i \in \{1, \dots, n\})$ az A diagonális elemei.

Bizonyítás. WLOG feltehető, hogy A alsó-háromszögmátrix.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}-\lambda)\cdot\det\begin{bmatrix} a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \dots = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) \end{aligned}$$

Következmény: Háromszögmátrix esetén a sajátértékek a diagonális elemek (multiplicitással számolva)

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Ekkor:

- a
$$W_\lambda := \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = \lambda x\} \subset \mathbb{K}^n$$
halmaz altér $\mathbb{K}^n$-ben;
- $\dim(W_\lambda) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda I)$;
- λ-hoz végtelen sok sajátvektor tartozik.

Bizonyítás.

$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ (A - \lambda I)x = 0\} = \mathcal{M}_h$$

Korábban már bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{M}_h$ altér, és hogy

$$\dim(\mathcal{M}_h) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda I).$$

Végül $\det(A - \lambda I) = 0$ miatt $\mathrm{rang}(A - \lambda I) < n$, így $\dim(W_\lambda) \geq 1$, amiből következik, hogy a $W_\lambda \setminus \{0\}$ halmaz, azaz a sajátvektorok halmaza végtelen elemszámú.

A W_λ alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek, W_λ dimenzióját pedig a λ geometriai multiplicitásának (jel.: $g(a)$) nevezzük.

Minden $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ esetén igaz: $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda) \leq n$.

Házi feladat: Példán szemléltetni a fenti tételt.

Sajátbázis

Tegyük fel, hogy A-nak k darab különböző sajátértéke van: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
Válasszunk ki mindegyikhez $g(\lambda_i)$ darab F vektort W_{λ_i}-ből.

Igazolható: Ezen vektorokból álló vektorrendszer is F.
Kérdések:

Sajátbázis

Tegyük fel, hogy A-nak k darab különböző sajátértéke van: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
Válasszunk ki mindegyikhez $g(\lambda_i)$ darab F vektort W_{λ_i}-ből.

Igazolható: Ezen vektorokból álló vektorrendszer is F.
Kérdések:

- Összesen legfeljebb hány darab sajátvektort tudunk kiválasztani?

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} g(\lambda) \leq n$$

Sajátbázis

Tegyük fel, hogy A-nak k darab különböző sajátértéke van: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
Válasszunk ki mindegyikhez $g(\lambda_i)$ darab F vektort W_{λ_i}-ből.

Igazolható: Ezen vektorokból álló vektorrendszer is F.
Kérdések:

- Összesen legfeljebb hány darab sajátvektort tudunk kiválasztani?

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} g(\lambda) \leq n$$

- Milyen feltétel mellett igaz, hogy ez a vektorrendszer B $\mathbb{K}^n$-ben?

Sajátbázis

Tegyük fel, hogy A-nak k darab különböző sajátértéke van: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
Válasszunk ki mindegyikhez $g(\lambda_i)$ darab F vektort W_{λ_i}-ből.

Igazolható: Ezen vektorokból álló vektorrendszer is F.

Kérdések:

- Összesen legfeljebb hány darab sajátvektort tudunk kiválasztani?

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} g(\lambda) \leq n$$

- Milyen feltétel mellett igaz, hogy ez a vektorrendszer B $\mathbb{K}^n$-ben?

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} g(\lambda) = n$$

Sajátbázis

Tegyük fel, hogy A-nak k darab különböző sajátértéke van: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
Válasszunk ki mindegyikhez $g(\lambda_i)$ darab F vektort W_{λ_i}-ből.

Igazolható: Ezen vektorokból álló vektorrendszer is F.
Kérdések:

- Összesen legfeljebb hány darab sajátvektort tudunk kiválasztani?

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} g(\lambda) \leq n$$

- Milyen feltétel mellett igaz, hogy ez a vektorrendszer B $\mathbb{K}^n$-ben?

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} g(\lambda) = n$$

12

$$\exists \mathrm{SB} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} a(\lambda) = n \text{ és } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \ : \ a(\lambda) = g(\lambda).$$