23. fejezet: Valós euklideszi terek II.

Matematikai alapozás, 2023-2024/I.

Fourier: $x \in \mathrm{Span}(\overbrace{e_1, \dots, e_n}^{\text{ONR}})$

$\hookrightarrow$ $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$

Felbontási tétel

(V: valós euklideszi tér, $e_1, \ldots, e_n \in V$ vektorrendszer)

Motiváció: $x \in \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ esetén: $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

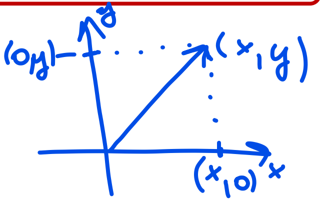
$\boxed{x \in V \setminus \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)}$ esetén?

OR?

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ ONR, $W := \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$. Ekkor minden $x \in V$ egyértelműen felbontható $\boxed{x = x_1 + x_2}$ alakban, ahol $x_1 \in W$, $x_2 \perp W$, nevezetesen:

$$\boxed{x_1 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,} \qquad \boxed{x_2 = x - x_1.}$$

Fourier.
kif.



Bizonyítás: *1. lépés:* Megmutatjuk, hogy a megadott felbontás a tételnek megfelelő:

- $x_1 := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in W$, hiszen W altér V-ben, így zárt a lineáris kombináció képzésre ✓

$$x_2 \perp \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$x_2 \perp e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

- $x_1 + x_2 = x_1 + x - x_1 = x$ ✓
- $x_2 \perp W$ hiszen tetszőleges e_j esetén:

x_2

$$\begin{aligned}
\langle x_2, e_j \rangle &= \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \\
&= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot \langle e_i, e_j \rangle = \\
&= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0} - \langle x, e_j \rangle \cdot \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = \\
&= \langle x, e_j \rangle - \cancel{\sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} \langle x, e_i \rangle \cdot 0} - \langle x, e_j \rangle \cdot 1 = 0. \quad ✓
\end{aligned}$$

$$\langle c_1 e_1 + c_2 e_2, e_2 \rangle = c_1 \cdot \langle e_1, e_2 \rangle + c_2 \cdot \langle e_2, e_2 \rangle$$

2. lépés: Egyértelműség: megmutatjuk, hogy rögzített $x \in V$ esetén más felbontás nem létezik (csak a tételben megadott).
Tegyük fel, hogy valamely $x_1, x_1' \in W$ és $x_2, x_2' \perp W$ vektorok esetén

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{és} \qquad x = x_1' + x_2'$$

teljesül. A két egyenlőséget kivonva egymásból:

$$0 = x_1 - x_1' - (x_2' - x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 - x_1' = x_2' - x_2$$

következik. Szorozzuk be skalárisan mindkét oldalt $x_1 - x_1'$-gyel:

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_1', x_1 - x_1' \rangle &= \langle x_1 - x_1', x_2' - x_2 \rangle = \\ &= \langle x_1, x_2' \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_1', x_2' \rangle + \langle x_1', x_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

A skaláris szorzat 5. axiómájából adódik, hogy ez csak úgy lehet, ha $x_1 - x_1' = 0$, azaz ha $x_1 = x_1'$.
Hasonlóan az $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$ egyenletet $x_2' - x_2$-vel megszorozva azt kapjuk, hogy $x_2 = x_2'$ is igaz. Ezzel beláttuk, hogy csak egyféle felbontás létezik, azaz a felbontás egyértelmű.

Elnevezések, megjegyzések:

- x_1: az x W-vel párhuzamos komponense, jel.: $P(x)$, (W-re eső merőleges vetület)
- x_2: az x W-re merőleges komponense, jel.: $Q(x)$.
- eddig ONR rendszerrel dolgoztunk, de ha csak $u_1, \ldots, u_n$ OR van megadva, akkor sem ijedünk meg!

$$\longrightarrow e_i := \frac{u_i}{\|u_i\|} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow e_1, \ldots, e_n \text{ ONR}$$

Vetület hosszának becslése

Minden $x \in V$ esetén $\boxed{\|P(x)\| \leq \|x\|,}$ és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x \in W$.

Bizonyítás: $P(x) \perp Q(x)$, alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$\|x\|^2 = \|P(x) + Q(x)\|^2 = \|P(x)\|^2 + \underbrace{\|Q(x)\|^2}_{\geq 0} \geq \|P(x)\|^2$$

így $\|x\| \geq \|P(x)\|$. Az utolsó becslésben pontosan akkor van egyenlőség, ha $Q(x) = 0$ azaz $x \in W$. □

$x = P(x) \in W$

Hasonlóan igazolható: $\|x\| \geq \|Q(x)\|$ és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x \perp W$.

$W =$ „x-tengely"

Gram-Schmidt-féle ortogonalizásiós eljárás

Adott: $b_1, \ldots, b_n \in V$ (F) rendszer

Készítünk ebből: $u_1, \ldots, u_n \in V \setminus \{0\}$ OR rendszert úgy, hogy:

ekv.: $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mathrm{Span}(b_1, \ldots, b_k) = \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_k)$

Megjegyzés: $u_1, \ldots, u_n$-ből ONR is készíthető normálással.

Azaz: tetszőleges (F) rendszerből tudunk csinálni ONRB-t (az (F) rendszer által generált altérben)

Az algoritmus lényege:

- először arra az esetre adunk megoldást, amikor 1 elemből álló vektorrendszerből indulunk ki
- ezt bővítve adunk megoldást 2, 3, stb. elemszámú rendszer esetén
- tehát az aktuális OR rendszert egyesével bővítjük úgy, hogy ne rontsuk el a kívánt tulajdonságokat (ortogonalitás és a generált alterek egyenlősége)

1. $\boxed{u_1 := b_1}$ $\neq 0$, ekkor $\mathrm{Span}(u_1) = \mathrm{Span}(b_1)$ és u_1 OR. Ezeket a tulajdonságokat a későbbi lépésekben sem fogjuk elrontani, azaz úgy veszünk hozzá

1. $u_1 := b_1$

b_1, b_2

2. Keressünk olyan u_2-t, amivel a következők igazak: $\boxed{u_2 \perp u_1}$ és $\underline{\mathrm{Span}(b_1, b_2) = \mathrm{Span}(u_1, u_2)}$.

1. $u_1 := b_1$
2. Keressünk olyan u_2-t, amivel a következők igazak: $u_2 \perp u_1$ és
   Kell → $\mathrm{Span}(b_1, b_2) = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$.

   Ötletek:

   Tudjuk: $\mathrm{Span}(u_1) = \mathrm{Span}(b_1)$

   $$u_2 := a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1 u_1 + a_2 \cdot b_2$$

   $$c_1 b_1 + c_2 b_2 = d_1 u_1 + d_2 u_2$$

1. $u_1 := b_1$
2. Keressünk olyan u_2-t, amivel a következők igazak: $u_2 \perp u_1$ és $\mathrm{Span}(b_1, b_2) = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$.
   Ötletek:
   - $\mathrm{Span}(b_1, b_2) = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$ igaz lesz, ha u_2 az b_1 és b_2 vektorok egy lineáris kombinációja, azaz u_1 és b_2 lineáris kombinációja,
   - $u_2 \perp u_1$ igaz lesz, ha $u_2 \perp \mathrm{Span}(u_1)$,
   - Azaz: u_2 legyen a b_2 merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1)$ altérre vonatkozóan.

1. $u_1 := b_1$
2. $u_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$

1. $u_1 := b_1$
2. $u_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$
3. u_3 legyen a b_3 merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1, u_2)$ altérre vonatkozóan:

1. $u_1 := b_1$
2. $u_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} \cdot u_1$
3. u_3 legyen a b_3 merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1, u_2)$ altérre vonatkozóan:

$$u_3 = b_3 - \left(\frac{\langle b_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} + \frac{\langle b_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\right)$$

$\cdot u_1$ $\quad$ $\cdot u_2$

1. $u_1 := b_1$
2. $u_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$
3. u_3 legyen a b_3 merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1, u_2)$ altérre vonatkozóan:

   $$u_3 = b_3 - \left(\frac{\langle b_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} + \frac{\langle b_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} \right)$$

   $\cdot u_1 \qquad\qquad \cdot u_2$
4. …

1. $u_1 := b_1$
2. $u_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1$
3. u_3 legyen a b_3 merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1, u_2)$ altérre vonatkozóan:
   $$u_3 = b_3 - \left(\frac{\langle b_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 + \frac{\langle b_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} \cdot u_2 \right)$$
4. $\ldots$
5. u_n legyen a b_n merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_{n-1})$ altérre

   vonatkozóan:

1. $u_1 := b_1$
2. $u_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} \cdot u_1$
3. u_3 legyen a b_3 merőleges komponense a $\mathrm{Span}(u_1, u_2)$ altérre vonatkozóan:

   $$u_3 = b_3 - \left(\frac{\langle b_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} + \frac{\langle b_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\right)$$

   u_1 u_2
4. ...
5. $u_n = b_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} \cdot u_i$

Következmény: Minden véges dimenziós nemnulla euklideszi térben van ortonormált bázis.

Funkcionálanalízis ízelítő

Cauchy-egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in V$. Ekkor
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$
egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha x, y Ö.

Bizonyítás. Ha $y = 0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz.
Tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Bontsuk fel az x vektort a $\mathrm{Span}(y)$ altér szerinti merőleges és párhuzamos összetevőkre:

$$x = P(x) + Q(x), \qquad \text{ahol} \qquad P(x) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \cdot y,\ Q(x) = x - P(x).$$

A vetület hosszát becsülhetjük egy korábbi tétel alkalmazásával:

$$\|P(x) = \left\| \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \cdot y \right\| \leq \|x\|,$$

Átrendezve:

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \cdot y \right\| &\leq \|x\| \\
\left| \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \right| \|y\| &\leq \|x\| \\
\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2} \cdot \|y\| &\leq \|x\| \\
\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|} &\leq \|x\| \\
|\langle x, y\rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}
$$

Szintén a vetület hosszának becslésére vonatkozó tételből adódik, hogy egyenlősége akkor és csak akkor van, ha $x \in \mathrm{Span}(y)$ azaz ha x, y Ö.

Háromszög-egyenlőtlenség

Legyen $x, y \in V$. Ekkor $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \qquad \to -2 \le |-2| \\
&\le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \le \\
\text{Cauchy} \;&\le \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

gyököt vonva:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$