13. fejezet: Determinánsok

2023. október 16-17.

Részmátrix

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $(n \geq 2)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Töröljük az A-ból az i. sor és a j. oszlop elemeit. A megmaradó $(n-1) \times (n-1)$ méretű mátrixot az A (i, j) indexpárjához tartozó részmátrixának nevezzük.

Determináns rekurzív definíciója

1. Ha $A = [a_{11}] \in \mathbb{K}^{1\times 1}$, akkor $\det(A) := a_{11}$.
2. Ha $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(A_{1j}) =: \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot a'_{1j},$$

ahol $a'_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ előjelzett aldetermináns.

Megjegyzés: a fenti definícióban az 1. sor szerinti kifejtés látható.
Hasznos eszköz az előjelek eldöntésére: sakktábla-szabály.

2×2-es determináns

Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, ekkor $\det(A) = ad - bc$.

Bizonyítás. $\det(A) = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det([d]) + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det([c]) = ad - bc.$ ■

Megjegyzés: háromszögmátrixok esetén a determináns megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

Tulajdonságok I.

1. Bármelyik sor és bármelyik oszlop szerint ki lehet fejteni,
2. $\det(A) = \det(A^T)$,
3. ha van csupa 0 sor/oszlop, akkor a determináns 0,
4. ha két sort/oszlopot felcserélünk, akkor a determinánst -1-gyel kell szorozni,
5. ha van két azonos sor/oszlop, akkor a determináns 0,

Tulajdonságok II.

1. sor/oszlop $\cdot c$, akkor det $\cdot\, c$ ($c \in \mathbb{K}$),
2. $\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$ ($A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{K}$),
3. ha két sor/oszlop arányos, akkor a determináns 0,
4. valamely sorhoz/oszlopohoz hozzáadva egy másik sor/oszlop számszorosát a determináns nem változik,
5. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Inverz

Jobbinverz

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy a $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix jobbinverze A-nak, ha $AC = I_n$ teljesül.

Jobbinverz létezése

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$\exists \text{ jobbinverze } A\text{-nak} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Bizonyítás.
$(\Longrightarrow)$ Tfh. $\exists C$: $AC = I_n$. Ekkor:

$$1 = \det(I_n) = \det(AC) = \det(A) \cdot \det(C).$$

Így $\det(A) \neq 0$, hiszen ha $\det(A) = 0$ lenne, akkor a fenti egyenlőségből $1 = 0$ adódna, ami nem igaz.

($\Longrightarrow$) Tfh. $\det(A) \neq 0$. Definiáljuk az alábbi mátrixot:

$$C := \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}, \qquad (\tilde{A})_{ij} := a'_{ji}.$$

Megmutatjuk, hogy $AC = I_n$:

$$(AC)_{ij} = \left(A \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}\right)_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(A \cdot \tilde{A}\right)_{ij} =$$
$$\frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (\tilde{A})_{kj} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{jk}$$

A determináns definíciójából és tulajdonságaiból következik, hogy:

$\mathbf{i = j}$: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{ik} = \det(A)$ (i. sor szerinti kifejtés)

$\mathbf{i \neq j}$: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{jk} = \det(A_0)$, ahol

$$A_0 := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

így $\det(A_0) = 0$, hiszen A_0-nak van két egyenlő sora.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{jk} = \begin{cases} \det(A) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Így $AC = I_n$, hiszen

$$(AC)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Inverz létezése

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0$.

Következmény: A pontosan akkor szinguláris, ha $\det(A) = 0$.

Bizonyítás.
$(\Longrightarrow)$ Tfh. $\exists A^{-1}$. Ekkor

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}).$$

($\Longleftarrow$) Tfh $\det(A) \neq 0$. Előző tétel miatt $\exists C \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $AC = I_n$.
Megmutatjuk, hogy $CA = I_n$ is igaz.
Mivel $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$, így az előző tételt alkalmazva A^T-ra azt kapjuk, hogy $\exists D \in \mathbb{K}^{n \times n}$, melyre $A^T D = I_n$ igaz.
Ekkor:

$$A^T D = I_n \qquad \Longrightarrow \qquad (A^T D)^T = I_n^T \qquad \Longrightarrow \qquad D^T A = I_n.$$

Így igaz az alábbi egyenlőség-lánc:

$$CA = I_n(CA) = (D^T A)(CA) = D^T (AC) A = D^T I_n A = D^T A = I_n,$$

azaz $CA = I_n$ fennáll. Így a C mátrix a definíció alapján az A inverze. $\blacksquare$

Megjegyzések: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, és $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$.

2×2-es mátrix inverze

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ esetén pontosan akkor $\exists A^{-1}$, ha $ad - bc \neq 0$. Továbbá:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás.
Egyrészt $\det(A) = ad - bc$, így az előző tétel miatt pontosan akkor lesz A reguláris, ha $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Másrészt a "jobbinverz létezése" elnevezésű tétel alapján: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\tilde{A}$

$$\begin{aligned} (\tilde{A})_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \det[A_{11}) = d, \\ (\tilde{A})_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \det(A_{21}) = -b, \\ (\tilde{A})_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \det(A_{12}) = -c, \\ (\tilde{A})_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \det(A_{22}) = a \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$