12. fejezet: Mátrixok

2023. október 11.

Mátrix

Legyenek m, $n \in \mathbb{N}$, m, $n > 0$. Az

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$$

függvényeket $m \times n$ mátrixoknak nevezzük.
Ezek halmaza: $\mathbb{K}^{m \times n}$.
$A(i, j)$: i-dik sor j-dik eleme.

Négyzetes mátrix: $m = n$.
Jelölés:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & \ldots & (A)_{1n} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & \ldots & (A)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A)_{m1} & (A)_{m2} & \ldots & (A)_{mn} \end{bmatrix}$$

Diagonális elemek: a_{11}, a_{22}, ..., a főátlóban helyezkednek el.

Nevezetes mátrixok

- nullmátrix: $a_{ij} = 0$ minden $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ esetén,
- sormátrix (sorvektor): $m = 1$,
- oszlopmátrix (oszlopvektor): $n = 1$,
- négyzetes mátrix: $m = n$,
- alsó háromszög mátrix: $m = n$ és a diagonális felett csak 0 van,
- felső háromszög mátrix: $m = n$ és a diagonális alatt csak 0 van

Egységmátrix

Az $I \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrixot egységmátrixnak nevezzük, ha

$$(I)_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

Műveletek

Összeadás, skalárral szorzás

Legyen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Az

$$A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \qquad (A+B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

mátrixot az A és B összegének, a

$$\lambda \cdot A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \qquad (\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot (A)_{ij}$$

mátrixot az A λ-szorosának nevezzük.

Vektortér axiómák

Összeadás, skalárral szorzás

1. 1.1 $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$: $A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}$,
   1.2 $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$: $A + B = B + A$,
   1.3 $\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$: $(A + B) + C = A + (B + C)$,
   1.4 $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{K}^{m\times n} : \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : A + \mathbf{0} = A$,
   1.5 $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : \exists(-A) \in \mathbb{K}^{m\times n} : A + (-A) = \mathbf{0}$,
2. 2.1 $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : \lambda A \in \mathbb{K}^{m\times n}$,
   2.2 $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
   2.3 $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu A) = \lambda A + \mu A$,
   2.4 $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
   2.5 $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : 1A = A$.

Mátrix szorzása mátrixszal

Szorzás mátrixszal

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Az

$$AB \in \mathbb{K}^{m\times p}, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

mátrixot az A és B szorzatának nevezzük.

Tulajdonságok

1. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{K}^{n\times p}, \forall C \in \mathbb{K}^{p\times q} : (AB)C = A(BC)$,
2. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \forall B, C \in \mathbb{K}^{n\times p} : A(B + C) = AB + AC$,
3. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} : AI_n = A$ és $I_mA = A$,
4. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{K}^{n\times p}, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$
   $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Megjegyzés: kommutativitás nem mindig igaz.

Hatványozás

Ha $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor

$$A^0 := I_n, \qquad A^1 := A, \qquad A^2 := A{\cdot}A, \qquad A^3 := A{\cdot}A^2, \qquad \dots .$$

Polinomba helyettesítés

Legyen $c_i \in \mathbb{K}$ $(i \in \{0, \dots k\})$, és

$$f(x) := c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egy polinom. Ekkor $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$f(A) := c_k A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I_n \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Transzponált, adjungált

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Az

$$A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}, \qquad (A^T)_{ij} := (A)_{ji}$$

mátrisot az A transzpontáltjának, az

$$A^* \in \mathbb{K}^{n \times m}, \qquad (A^*)_{ij} := \overline{(A)_{ji}}$$

mátrixot az A adjungáltjának nevezzük.

Műveleti tulajdonságok

1. $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}: (A+B)^T = A^T + B^T$, $(A+B)^* = A^* + B^*$,
2. $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}: (\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$,
3. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\forall B \in \mathbb{K}^{n\times p}: (AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^*$,
4. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}: (A^T)^T = A$, $(A^*)^* = A$.

Inverz

Szorzás művelet inverze, a reciproknak felel meg.

Inverz

Legyen A, $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$. C-t az A inverzének nevezzük, ha

$$AC = CA = I_n$$

teljesül. Jelölés: A^{-1}.

Regularitás

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Az A mátrixot regulárisnak nevezzük, ha létezik inverze; illetve szingulárisnak nevezzük, ha nem létezik inverze.

Inverz egyértelműsége

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ reguláris mátrix, és tegyük fel, hogy $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is és $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is az A inverze, azaz $AC = CA = I_n$ és $AD = DA = I_n$ is teljesül. Ekkor $C = D$.

Bizonyítás.

$$D = DI_n = D(AC) = (DA)C = I_nC = C.$$