22. fejezet: Valós euklideszi terek I.

Matematikai alapozás, 2023-2024/I.

Motiváció: skaláris szorzat általánosítása.

Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. A V vektorteret valós ($\mathbb{R}$ feletti) euklideszi térnek nevezünk, ha definiálva van benne egy harmadik $x \cdot y = \langle x, y \rangle$ művelet, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1. $\forall x, y \in V\colon \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$,
2. $\forall x, y \in V\colon \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
3. $\forall x, y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,
4. $\forall x, y, z \in V\colon \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
5. $\forall x \in V\colon \langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$.

Példák.

- $\mathbb{R}^2$: $\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\gamma)$, ahol γ az x és y által közbezárt szög,
- $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_k y_k$.

skaláris szorzat alaptulajdonságai

Legyen V egy valós euklideszi tér. Ekkor minden $x, x_i, y, y_j, z \in V$ és minden $\lambda, \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ esetén igazak az alábbiak:

1. $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$,
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
3. $\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j\rangle$,
4. $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.

Legyen V valós euklideszi tér, $x \in V$. Az x vektor normája:

$$\|x\| := \langle x, x \rangle.$$

A $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ leképezést (szintén) normának hívjuk.

Példák.

- $\mathbb{R}^2$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{|x| \cdot |x| \cdot \cos(0)} = |x|,$$

- $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

- A norma pozitív definit, azaz minden $x \in V$ esetén $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ pontosan akkor igaz, ha $x = 0$.
- A norma homogén, azaz minden $x \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Bizonyítás: Az első állítás következik az 5. axiómából.
A második állítás igazolása:

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2,$$

gyököt vonva:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Megjegyzés: minden $x \in V \setminus \{0\}$ esetén $\|x\| > 0$.

Az $x \in V$ vektort egységvektornak nevezzük, ha $\|x\| = 1$.

Megjegyzés: normálás: ha $x \in V \setminus \{0\}$, akkor az

$$x^0 := \frac{x}{\|x\|}$$

vektor az x-szel párhuzamos egységvektor.

Ortogonalitás

Az $x, y \in V$ vektorokat ortogonálisnak (egymásra merőlegesnek) nevezzük, ha $\langle x, y\rangle = 0$. Jelölés: $x \perp y$.

Legyen $\emptyset \neq H \subseteq V$, $x \in V$. Azt mondjuk, hogy az x vektor ortogonális (merőleges) a H halmazra, ha $\langle x, y\rangle = 0$ minden $y \in H$ esetén. Jelölés: $x \perp H$.

altérre való merőlegesség

Legyen $e_1, \ldots, e_n \in V$ egy vektorrendszer, $W := \operatorname{Span}(e_1, \ldots e_n)$, és $x \in V$. Ekkor

$$x \perp W \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \perp e_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Bizonyítás:

$(\Longrightarrow)$ Trivi, $y := e_i$ választással.

$(\Longleftarrow)$ Legyen $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in W$ egy tetszőleges elem.

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0.$$

Legyen $x_1, \dots x_n \in V$ egy véges vektorrendszer. Az $x_1, \dots, x_n$ rendszert

- ortogonális rendszernek (OR) nevezzük, ha bármely két tagja merőleges egymásra:
$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j\ :\ \langle x_i, x_j \rangle = 0,$$
- ortonormált rendszernek (ONR) nevezzük, ha ortogonális rendszer és minden tagja egységvektor:
$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$
- ortogonális bázisnak nevezzük, ha OR és B,
- ortonormált bázisnak nevezzük, ha ONR és B.

Megjegyzés: OR-ből normálással ONR-t tudunk csinálni (ha a 0 nem tagja a vektorrendszernek).
Példák: szokásos

Legyen $x_1, \dots, x_n \in V \setminus \{0\}$ egy OR. Ekkor $x_1, \dots, x_n$ F. Minden ONR egyben F.

Bizonyítás: Legyen $j \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges, és szorozzuk be a

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

összefüggőségi egyenletet x_j-vel:

$$0 = \langle 0, x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle.$$

Mivel $x_j \neq 0$, ezért $\langle x_j, x_j \rangle \neq 0$, így $\lambda_j = 0$.
Ezzel megmutattuk, hogy az összefüggőségi egyenletben minden együttható 0.

Pitagorasz-tétel

Legyen $x_1, \ldots, x_n \in V$ egy véges OR. Ekkor

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{n} \langle x_i, x_j\rangle + \sum_{\substack{i,j=1\\ j=i}}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \\
&= \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{n} 0 + \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2
\end{aligned}$$

Fourier-együtthatók

Legyen V egy valós euklideszi tér, $e_1, \ldots, e_n \in V$ egy véges vektorrendszer, $x \in \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$.
Tudjuk, hogy x előállítható az $e_1, \ldots, e_n$ vektorok segítségével:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Kérdés:

$$\lambda_i =? \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Legyen $e_1, \dots e_n \in V$ ONR, $x \in \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_n)$. A

$$c_i := \langle x, e_i \rangle \qquad (i \in \{1, \dots, n\})$$

számokat az x Fourier-együtthatóinak, az

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

előállítást pedig az x Fourier-kifejtésének nevezzük.

Hol jön ez elő?

Mindenhol. :)