19. fejezet: Kapcsolat az inverz mátrixszal

Matematikai alapozás, 2023-2024/I.

Négyzetes mátrixú LER

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és $b \in \mathbb{K}^n$.

a) Ha $\operatorname{rang}(A) = n$, akkor az $Ax = b$ LER-nek egyértelműen létezik megoldása.

b) Ha $\operatorname{rang}(A) < n$, akkor az $Ax = b$ LER-nek vagy végtelen sok megoldása létezik, vagy nem létezik megoldása.

Bizonyítás.

a) $\operatorname{rang}(A) = n$. Ekkor igaz az alábbi implikáció-lánc:

$$\operatorname{rang}(A) = n \Longrightarrow A \text{ oszlopai } \text{F} \Longrightarrow O(A) = \mathbb{K}^n \Longrightarrow b \in O(A).$$

Tanultuk, hogy $Ax = b$ pontosan akkor konzisztens, ha $b \in O(A)$. Így $Ax = b$-nek biztosan van megoldása.

2 Másrészt: a szabadsági fok $n - \operatorname{rang}(A) = 0$, így a megoldás egyértelmű.

b) $(\mathrm{rang}(A) < n)$

- Ha $b \notin O(A)$, akkor $Ax = b$-nek nincs megoldása.
- Ha $b \in O(A)$, akkor $Ax = b$-nek van megoldása, és mivel

$$\mathrm{rang}(A) < n = \dim(\mathbb{K}^n),$$

így egy korábbi tételből következik, hogy végtelen sok megoldás létezik (a szabadsági fok > 1).

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

a) Ha $\operatorname{rang}(A) = n$, akkor A reguláris.

b) Ha $\operatorname{rang}(A) < n$, akkor A szinguláris.

Bizonyítás. A reguláris $\iff$ létezik A^{-1}, azaz létezik $I \in \mathbb{K}^{n \times n}$ úgy, hogy

$$AX = I.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$$

ahol e_i az i. kanonikus egységvektor, $x_i \in \mathbb{K}^n$ az X i. oszlopa $(i \in \{1, \dots, n\})$.

$$AX = I \qquad \iff \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} Ax_1 & = & e_1 \\ Ax_2 & = & e_2 \\ & \vdots & \\ Ax_n & = & e_n \end{array} \right.$$

Kérdés: Van-e az összes egyenlet(rendszer)nek megoldása?

a) ($\mathrm{rang}(A) = n$) Ekkor $O(A) = \mathbb{K}^n$, így

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \qquad e_i \in O(A),$$

azaz $Ax_i = e_i$ LER-nek egyértelműen létezik megoldása. X definíciója miatt $A^{-1} = X$, azaz létezik az A-nak inverze.

b) ($\mathrm{rang}(A) < n$) Ekkor $O(A) \neq \mathbb{K}^n$ (azaz $O(A)$ valódi altér), így

$$\exists j \in \{1, \dots, n\} : \qquad e_j \notin O(A).$$

Az előző tételből következik, hogy $Ax_j = e_j$-nek nem létezik megoldása, így az X mátrix sem állítható össze, azaz A-nak nincs inverze, azaz A szinguláris.

Regularitás/szingularitás ekvivalens jellemzései

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ reguláris

$$\Updownarrow$$

$$\exists A^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rang}(A) = n$$

$$\Updownarrow$$

A oszlopai F

$$\Updownarrow$$

A sorai F

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ szinguláris

$$\Updownarrow$$

$$\nexists A^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\det(A) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rang}(A) < n$$

$$\Updownarrow$$

A oszlopai Ö

$$\Updownarrow$$

A sorai Ö

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots, \quad Ax_n = e_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A \,|\, e_1\, e_2\, e_3\, \ldots\, e_n}$$

ismeretlenek koordinátái					jobb oldali vektorok				
$(x_i)_1$	$(x_i)_2$	$(x_i)_3$	$\ldots$	$(x_i)_n$	e_1	e_2	e_3	$\ldots$	e_n
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	0	$\ldots$	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	0	$\ldots$	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\ldots$	a_{3n}	0	0	1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\ldots$	a_{nn}	0	0	0	$\ldots$	1

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots, \quad Ax_n = e_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A \,|\, e_1\, e_2\, e_3\, \ldots\, e_n}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{ismeretlenek koordinátái}} & \multicolumn{5}{c}{\text{jobb oldali vektorok}} \\
(x_i)_1 & (x_i)_2 & (x_i)_3 & \ldots & (x_i)_n & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}$$

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A \,|\, e_1\, e_2\, e_3\, \dots\, e_n}$$

ismeretlenek koordinátái					jobb oldali vektorok				
$(x_i)_1$	$(x_i)_2$	$(x_i)_3$	$\dots$	$(x_i)_n$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_n
0	1	0	$\dots$	0	b^n_{11}	b^n_{12}	b^n_{13}	$\dots$	b^n_{1n}
1	0	0	$\dots$	0	b^n_{21}	b^n_{22}	b^n_{23}	$\dots$	b^n_{2n}
0	0	1	$\dots$	0	b^n_{31}	b^n_{32}	b^n_{33}	$\dots$	b^n_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
0	0	0	$\dots$	1	b^n_{n1}	b^n_{n2}	b^n_{n3}	$\dots$	b^n_{nn}

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A \,|\, e_1\, e_2\, e_3\, \dots\, e_n}$$

ismeretlenek koordinátái					jobb oldali vektorok					
$(x_i)_1$	$(x_i)_2$	$(x_i)_3$	$\dots$	$(x_i)_n$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_n	
0	1	0	$\dots$	0	b^n_{11}	b^n_{12}	b^n_{13}	$\dots$	b^n_{1n}	a mo-k 2. koordinátái
1	0	0	$\dots$	0	b^n_{21}	b^n_{22}	b^n_{23}	$\dots$	b^n_{2n}	a mo-k 1. koordinátái
0	0	1	$\dots$	0	b^n_{31}	b^n_{32}	b^n_{33}	$\dots$	b^n_{3n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
0	0	0	$\dots$	1	b^n_{n1}	b^n_{n2}	b^n_{n3}	$\dots$	b^n_{nn}	

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A \mid e_1\, e_2\, e_3\, \dots\, e_n}$$

ismeretlenek koordinátái						
$(x_j)_1$	$(x_j)_2$	$(x_j)_3$	$\dots$	$(x_j)_n$	b_j	
0	1	0	$\dots$	0	b^n_{1j}	a mo-k 2. koordinátái
1	0	0	$\dots$	0	b^n_{2j}	a mo-k 1. koordinátái
0	0	1	$\dots$	0	b^n_{3j}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	0	0	$\dots$	1	b^n_{nj}	

Megoldás:

$$\begin{aligned} (x_j)_2 &= b^n_{1j} \\ (x_j)_1 &= b^n_{2j} \\ (x_j)_3 &= b^n_{3j} \\ &\vdots \\ (x_j)_n &= b^n_{nj} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x_j = \begin{bmatrix} b^n_{2j} \\ b^n_{1j} \\ b^n_{3j} \\ \vdots \\ b^n_{nj} \end{bmatrix}$$

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots, \quad Ax_n = e_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A \,|\, e_1\, e_2\, e_3\, \ldots\, e_n}$$

ismeretlenek koordinátái						
$(x_j)_1$	$(x_j)_2$	$(x_j)_3$	$\ldots$	$(x_j)_n$	b_j	
1	0	0	$\ldots$	0	b^n_{2j}	a mo-k 1. koordinátái
0	1	0	$\ldots$	0	b^n_{1j}	a mo-k 2. koordinátái
0	0	1	$\ldots$	0	b^n_{3j}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	0	0	$\ldots$	1	b^n_{nj}	

Megoldás:

$$\begin{aligned} (x_j)_1 &= b^n_{2j} \\ (x_j)_2 &= b^n_{1j} \\ (x_j)_3 &= b^n_{3j} \\ &\vdots \\ (x_j)_n &= b^n_{nj} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x_j = \begin{bmatrix} b^n_{2j} \\ b^n_{1j} \\ b^n_{3j} \\ \vdots \\ b^n_{nj} \end{bmatrix}$$

Inverz számolása a GJ eljárással

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A \,|\, e_1\, e_2\, e_3\, \dots\, e_n}$$

ismeretlenek koordinátái					jobb oldali vektorok					
$(x_i)_1$	$(x_i)_2$	$(x_i)_3$	$\dots$	$(x_i)_n$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_n	
1	0	0	$\dots$	0	b^n_{21}	b^n_{22}	b^n_{23}	$\dots$	b^n_{2n}	a mo-k 1. koordinátái
0	1	0	$\dots$	0	b^n_{11}	b^n_{12}	b^n_{13}	$\dots$	b^n_{1n}	a mo-k 2. koordinátái
0	0	1	$\dots$	0	b^n_{31}	b^n_{32}	b^n_{33}	$\dots$	b^n_{3n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
0	0	0	$\dots$	1	b^n_{n1}	b^n_{n2}	b^n_{n3}	$\dots$	b^n_{nn}	

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^n_{21} & b^n_{22} & b^n_{23} & \dots & b^n_{2n} \\ b^n_{11} & b^n_{12} & b^n_{13} & \dots & b^n_{1n} \\ b^n_{31} & b^n_{32} & b^n_{33} & \dots & b^n_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n_{n1} & b^n_{n2} & b^n_{n3} & \dots & b^n_{nn} \end{bmatrix}$$

Determináns számolása a GJ eljárással

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}
\implies
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} & \frac{b_i}{a_{ij}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}
$$

$$A \mid b \implies A^1 \mid b^1$$

Determináns számolása a GJ eljárással

$$\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}
\implies
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} & \frac{b_i}{a_{ij}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}$$

$$A \mid b \implies A^1 \mid b^1$$

$$\boxed{\det(A^1) = \det(A) \cdot \frac{1}{a_{ij}}}$$

Determináns számolása a GJ eljárással

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11}^{l-1} & a_{12}^{l-1} & \dots & a_{1j}^{l-1} & \dots & a_{1n}^{l-1} & b_1^{l-1} \\
a_{21}^{l-1} & a_{22}^{l-1} & \dots & a_{2j}^{l-1} & \dots & a_{2n}^{l-1} & b_2^{l-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i1}^{l-1} & a_{i2}^{l-1} & \dots & a_{ij}^{l-1} & \dots & a_{in}^{l-1} & b_i^{l-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{l-1} & a_{n2}^{l-1} & \dots & a_{nj}^{l-1} & \dots & a_{nn}^{l-1} & b_n^{l-1}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11}^{l-1} & a_{12}^{l-1} & \dots & a_{1j}^{l-1} & \dots & a_{1n}^{l-1} & b_1^{l} \\
a_{21}^{l-1} & a_{22}^{l-1} & \dots & a_{2j}^{l-1} & \dots & a_{2n}^{l-1} & b_2^{l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{a_{i1}^{l-1}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} & \frac{a_{i2}^{l-1}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{in}^{l-1}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} & \frac{b_i^{l}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{l-1} & a_{n2}^{l-1} & \dots & a_{nj}^{l-1} & \dots & a_{nn}^{l-1} & b_n^{l}
\end{array}
$$

$$A^{l-1} \mid b^{l-1} \Longrightarrow A^{l} \mid b^{l}$$

Determináns számolása a GJ eljárással

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11}^{l-1} & a_{12}^{l-1} & \dots & a_{1j}^{l-1} & \dots & a_{1n}^{l-1} & b_1^{l-1} \\
a_{21}^{l-1} & a_{22}^{l-1} & \dots & a_{2j}^{l-1} & \dots & a_{2n}^{l-1} & b_2^{l-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i1}^{l-1} & a_{i2}^{l-1} & \dots & a_{ij}^{l-1} & \dots & a_{in}^{l-1} & b_i^{l-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{l-1} & a_{n2}^{l-1} & \dots & a_{nj}^{l-1} & \dots & a_{nn}^{l-1} & b_n^{l-1}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\hline
a_{11}^{l-1} & a_{12}^{l-1} & \dots & a_{1j}^{l-1} & \dots & a_{1n}^{l-1} & b_1^{l} \\
a_{21}^{l-1} & a_{22}^{l-1} & \dots & a_{2j}^{l-1} & \dots & a_{2n}^{l-1} & b_2^{l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{a_{i1}^{l-1}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} & \frac{a_{i2}^{l-1}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{in}^{l-1}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} & \frac{b_i^{l}}{a_{i_l j_l}^{l-1}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{l-1} & a_{n2}^{l-1} & \dots & a_{nj}^{l-1} & \dots & a_{nn}^{l-1} & b_n^{l}
\end{array}
$$

$$A^{l-1} \mid b^{l-1} \qquad \Longrightarrow \qquad A^{l} \mid b^{l}$$

$$\boxed{\det(A^l) = \det(A^{l-1}) \cdot \frac{1}{a_{i_l j_l}^{l-1}}}$$

Ha nem tudunk minden sorból generáló elemet kiválasztani, akkor $\det(A) = 0$, hiszen A szinguláris.
Ha n darab ciklust tudunk végigszámolni az algoritmus során, akkor teljes indukcióval igazolható:

$$
\begin{aligned}
\det(A^1) &= \frac{1}{a_{i_1 j_1}} \cdot \det(A) \\
\det(A^2) &= \frac{1}{a^1_{i_2 j_2}} \cdot \det(A^1) \\
&\vdots \\
\det(A^n) &= \frac{1}{a^{n-1}_{i_n j_n}} \cdot \det(A^{n-1})
\end{aligned}
$$

Ha nem tudunk minden sorból generáló elemet kiválasztani, akkor $\det(A) = 0$, hiszen A szinguláris.
Ha n darab ciklust tudunk végigszámolni az algoritmus során, akkor teljes indukcióval igazolható:

$$\begin{aligned}
a_{i_1 j_1} \cdot \det(A^1) &= \det(A) \\
a^1_{i_2 j_2} \cdot \det(A^2) &= \det(A^1) \\
&\vdots \\
a^{n-1}_{i_n j_n} \cdot \det(A^n) &= \det(A^{n-1})
\end{aligned}$$

Ha nem tudunk minden sorból generáló elemet kiválasztani, akkor $\det(A) = 0$, hiszen A szinguláris.
Ha n darab ciklust tudunk végigszámolni az algoritmus során, akkor teljes indukcióval igazolható:

$$\left.\begin{aligned} a_{i_1 j_1} \cdot \det(A^1) &= \det(A) \\ a^1_{i_2 j_2} \cdot \det(A^2) &= \det(A^1) \\ &\vdots \\ a^{n-1}_{i_n j_n} \cdot \det(A^n) &= \det(A^{n-1}) \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = a_{i_1 j_1} \cdot a^1_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot a^{n-1}_{i_1 j_n}$$

$\det(A) =$ a generáló elemek szorzatával