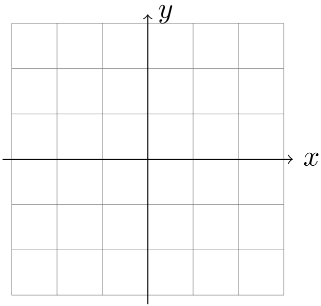
14. fejezet: Vektorterok, vektorterek

2023. október 18.

Középiskolában

Helyvektorok a derékszögű koordinátarendszerben.
Műveletek:

1. összeadás (két vektor összege is vektor, kommutatív, asszociatív, nullvektor, ellentett)
2. skalárral (valós számmal való) szorzás (skalárszoros is vektor, asszociatív, disztributív, egységelem)



Általánosítás: vektortér

Vektortér

Legyen $V \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy V vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha értelmezve van egy összeadás $(+)$ és egy skalárral való szorzás $(\cdot)$ művelet, melyekre teljesülnek az alábbi tulajdonságok (vektortér axiómák):

1. 1.1 $\forall x, y \in V\colon\ x + y \in V$,
   1.2 $\forall x, y \in V\colon\ x + y = y + x$,
   1.3 $\forall x, y, z \in V\colon\ (x + y) + z = x + (y + z)$,
   1.4 $\exists 0_V \in V\colon\ \forall x \in V\colon\ 0_V + x = x$,
   1.5 $\forall x \in V\colon\ \exists - x \in V\colon\ x + (-x) = 0_V$,
2. 2.1 $\forall x \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\colon\ \lambda x \in V$,
   2.2 $\forall x \in V\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\colon\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
   2.3 $\forall x \in V\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\colon\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
   2.4 $\forall x, y \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\colon\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
   2.5 $\forall x \in V\colon\ 1x = x$.

Megjegyzés: ha a szövegkörnyezetből egyértelmű, akkor a skalártartományt és a műveleteket nem mindig tüntetjük fel, de ezek is ugyanolyan fontos elemei a vektortérnek, mint maga a V halmaz.

Példák:

- helyvektorok a szokásos műveletekkel vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett,
- ugyanez térben,
- $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{C}$ felett,
- rögzített m, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathbb{K}^{n\times m}$ vektortér $\mathbb{K}$ felett.

Tulajdonságok

A továbbiakban V mindig egy $\mathbb{K}$ feletti vektorteret jelöl.

Legyen $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor:

- $0 \cdot x = 0_V$,
- $\lambda \cdot 0_V = 0_V$,
- $(-1) \cdot x = -x$,
- $\lambda \cdot x = 0 \iff \lambda = 0$ vagy $x = 0_V$.

Adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}$ elemeiből alkotott n-tagú sorozat (másképpen: rendezett szám n-es) tulajdonképpen nem más, mint az

$$x : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$$

függvény. (Hasonlóan, ahogyan a mátrixoknál már láttuk.)
$x_i := x(i)$ jelöli az i. komponenst, azaz

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ezek halmaza:

$$\boxed{\mathbb{K}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}.}$$

Műveletek: összeadás és skalárral való szorzás

$$(x_1,\, x_2, \ldots, x_n) + (y_1,\, y_2, \ldots, y_n) = (y_1 + x_1,\, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n),$$

$$\lambda \cdot (x_1,\, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1,\, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$\mathbb{K}^n$ vektortér $\mathbb{K}$ felett a fenti két művelettel.

Megjegyzés:

- nullelem: $(0, 0, \ldots, 0)$,
- ellentett: $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Példák: $\mathbb{R}^2$ (pontjai), $\mathbb{R}^3$ (pontjai), ezen terek azonosíthatók a megfelelő helyvektorok terével, $\mathbb{K}^n$ azonosítható a $\mathbb{K}^{1\times n}$ és a $\mathbb{K}^{n\times 1}$ terekkel.

Mátrix-vektor szorzat

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Ekkor

$$A \cdot x \in \mathbb{K}^m, \qquad (A \cdot x)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1, . m).$$

Altér

Legyen $\emptyset \neq W \subset V$. Azt mondjuk, hogy W altér V-ben (W altere V-nek), ha W vektortér a V-beli műveletekre nézve.

Példák:

- triviális alterek: $W = V$ és $W = \{0_V\}$,
- origón átmenő egyenesek $\mathbb{R}^2$-ben,
- origón átmenő egyenesek $\mathbb{R}^3$-ban,
- origón átmenő síkok $\mathbb{R}^3$-ban.

Altér szükséges és elégséges feltétele

Legyen $\emptyset \neq W \subset V$. W akkor és csak akkor altér V-ben, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $\forall x, y \in W$: $x + y \in W$,
2. $\forall x \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot x \in W$.

Bizonyítás:

Szükségesség: $(\Longrightarrow)$ ha nem teljesül az 1. és 2. tulajdonság, akkor W-re nem igazak a vektortér axiómák, így ő biztosan nem vektortér.

Bizonyítás:

Szükségesség: ($\Longrightarrow$) ha nem teljesül az 1. és 2. tulajdonság, akkor W-re nem igazak a vektortér axiómák, így ő biztosan nem vektortér.

Elégségesség: ($\Longleftarrow$) tegyük fel, hogy teljesül az 1. és 2. tulajdonság.

Bizonyítás:

Szükségesség: ($\Longrightarrow$) ha nem teljesül az 1. és 2. tulajdonság, akkor W-re nem igazak a vektortér axiómák, így ő biztosan nem vektortér.

Elégségesség: ($\Longleftarrow$) tegyük fel, hogy teljesül az 1. és 2. tulajdonság. Megmutatjuk, hogy ekkor W-re fennáll mind a 10 vektortér axióma.

Bizonyítás:
Szükségesség: ($\Longrightarrow$) ha nem teljesül az 1. és 2. tulajdonság, akkor W-re nem igazak a vektortér axiómák, így ő biztosan nem vektortér.
Elégségesség: ($\Longleftarrow$) tegyük fel, hogy teljesül az 1. és 2. tulajdonság.
Megmutatjuk, hogy ekkor W-re fennáll mind a 10 vektortér axióma.
1.1 és 2.1 következik az 1. és a 2. tulajdonságokból.

Bizonyítás:

Szükségesség: ($\Longrightarrow$) ha nem teljesül az 1. és 2. tulajdonság, akkor W-re nem igazak a vektortér axiómák, így ő biztosan nem vektortér.

Elégségesség: ($\Longleftarrow$) tegyük fel, hogy teljesül az 1. és 2. tulajdonság. Megmutatjuk, hogy ekkor W-re fennáll mind a 10 vektortér axióma.

1.1 és 2.1 következik az 1. és a 2. tulajdonságokból.

1.2, 1.3, 2.2, 2.3, 2.4 és 2.5 igaz lesz W-ben is, mivel V vektortér és $W \subset V$.

Bizonyítás:

Szükségesség: ($\Longrightarrow$) ha nem teljesül az 1. és 2. tulajdonság, akkor W-re nem igazak a vektortér axiómák, így ő biztosan nem vektortér.

Elégségesség: ($\Longleftarrow$) tegyük fel, hogy teljesül az 1. és 2. tulajdonság.

Megmutatjuk, hogy ekkor W-re fennáll mind a 10 vektortér axióma.

1.1 és 2.1 következik az 1. és a 2. tulajdonságokból.

1.2, 1.3, 2.2, 2.3, 2.4 és 2.5 igaz lesz W-ben is, mivel V vektortér és $W \subset V$.

Az 1.4 és 1.5 axiómákat kell igazolni.

1.4: $\exists 0_W \in W \colon \forall x \in W \colon 0_W + x = x.$

1.4: $\exists 0_W \in W\colon \forall x \in W\colon 0_W + x = x$.

Mivel V vektortér, ebben létezik nullelem, jelöljük ezt 0_V-vel.

1.4: $\exists 0_W \in W\colon \forall x \in W\colon 0_W + x = x$.
Mivel V vektortér, ebben létezik nullelem, jelöljük ezt 0_V-vel.

$$\boxed{0_W := 0_V}$$

Mivel V vektortér, ebben létezik nullelem, jelöljük ezt 0_V-vel.

$$\boxed{0_W := 0_V}$$

Ekkor:

- $0_W = 0_V = 0 \cdot x \in W$ a 2. feltétel miatt,
- $0_W + x \in W$ minden $x \in W$ esetén az 1. feltétel miatt, így

$$\forall x \in W \ : \ 0_W + x = 0_V + x = x,$$

mivel 0_V a V nulleleme.

1.5: $\forall x \in W\colon \exists (-x) \in W\colon x + (-x) = 0_W$.

1.5: $\forall x \in W\colon\ \exists(-x) \in W\colon\ x + (-x) = 0_W$.
Mivel V vektortér, minden $x \in W \subset V$ elemnek létezik V-beli ellentettje, jelöljük ezt $(-x)_V$-vel.

1.5: $\forall x \in W\colon \exists(-x) \in W\colon x + (-x) = 0_W$.
Mivel V vektortér, minden $x \in W \subset V$ elemnek létezik V-beli ellentettje, jelöljük ezt $(-x)_V$-vel.
Az $x \in W$ vektor W-beli ellentettjét az alábbi módon definiáljuk:

$$\boxed{(-x)_W := (-x)_V}$$

1.5: $\forall x \in W\colon \exists(-x) \in W\colon x + (-x) = 0_W$.
Mivel V vektortér, minden $x \in W \subset V$ elemnek létezik V-beli ellentettje, jelöljük ezt $(-x)_V$-vel.
Az $x \in W$ vektor W-beli ellentettjét az alábbi módon definiáljuk:

$$\boxed{(-x)_W := (-x)_V}$$

Ekkor:

- $(-x)_W = (-x)_V = (-1) \cdot x \in W$ a 2. feltétel miatt,
- $(-x)_W + x \in W$ minden $x \in W$ esetén az 1. feltétel miatt, így

$$\forall x \in W \ : \ (-x)_W + x = (-x)_V + x = 0_V = 0_W .$$