16. fejezet: Lineáris függetlenség

2023. október 25.

V vektortét, $k \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_k \in V$ vektorrendszer.

Az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszert

- lineárisan függetlennek nevezzük (jel.: F), ha lineáris kombinációi közül csak a triviális eredményez nullvektort, azaz

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

- lineárisan összefüggőnek nevezzük (jel.: Ö), ha van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nemtriviális lineáris kombináció, amelyre

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0.$$

Megjegyzések, példák

- x_1, x_2 vektorrendszer Ö $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}\colon\ x_1 = \lambda x_2$.
- Ha $\exists i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$ úgy, hogy $x_i = x_j$, akkor $x_1, \ldots, x_k$ Ö.
- Ha $\exists i \in \{1, \ldots, k\}$ úgy, hogy $x_i = 0$, akkor $x_1, \ldots, x_k$ Ö.
- $\mathbb{R}^2$-ben:
  - két, nem egy egyenesen lévő vektor F,
  - két, egy egyenesen lévő vektor Ö.
- A *párhuzamos*, *egyirányú*, *ellentétes irányú* elnevezések elterjedtek tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti vektortérben.

$\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

$\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

Bizonyítás:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

$\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

Bizonyítás:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

Bizonyítás:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

Bizonyítás:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

pontosan akkor igaz, ha $\lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$, így $e_1, \ldots, e_n$ definíció szerint F rendszert alkot.

Egyértelmű előállítás

Legyen $x_1, \dots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, $x \in Span(x_1, \dots, x_k)$.

a) Ha $x_1, \dots, x_k$ F, akkor $\exists! \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, melyekkel $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$;

b) ha $x_1, \dots, x_k$ Ö, akkor x végtelen sokféleképpen előállítható az $x_1, \dots, x_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás:
Mivel $x \in Span(x_1, \dots, x_k)$, ezért biztosan van legalább egy lineáris kombináció, amivel x előállítható.

a) Tegyük fel, hogy $x_1, \dots, x_k$ F, és vegyünk két lineáris kombinációt:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \qquad x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i.$$

Megmutatjuk, hogy minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén $\lambda_i = \mu_i$, azaz nem létezhet két különböző lin. komb.

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) x_i.$$

A függetlenség miatt a jobb oldali szummában minden együtthatónak 0-nak kell lennie, azaz

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \qquad \lambda_i = \mu_i.$$

b) Vegyük egy tetszőleges előállítását az x-nek: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.

Az összefüggőség miatt: $\exists \alpha_i$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$, melyekre: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

Legyen $\beta \in \mathbb{K}$ tetszőleges konstans.

$$x = 0 + x = \beta \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\beta \alpha_i + \lambda_i) x_i$$

Az $\alpha \beta_j + \lambda_j$ együttható végtelen sokféle értéket felvehet minden olyan α_j esetén, amire $\alpha_j \neq 0$. Az összefüggőség miatt legalább egy ilyen α_j létezik, így végtelen sokféle előállítását megadtuk az x vektornak.

Kérdések, észrevételek:

1. Ö rendszerből el tudunk hagyni úgy elemet, hogy a generált altér ne változzon meg
2. F rendszerből nem tudunk
3. másképpen fogalmazva: ha F rendszerből elhagyunk egy elemet, akkor biztosan megváltozik a generált altér, sőt: kisebb lesz
4. F $<$ Ö
5. mi van, ha hozzáadunk valamilyen rendszerhez egy másik vektort? Vajon hogyan változik a generált altér?
6. Mennyit vehetünk el Ö rendszerből, hogy Ö maradjon?
7. Mennyit kell elvennünk Ö rendszerből, hogy F legyen?
8. Egy vektortérnek hány elemét kell legalább kiválasztanom úgy, hogy az általuk generált altér az eredeti vektortérrel egyezzen meg?
9. stb.

Összefüggő rendszer szűkítése

Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy Ö rendszer. Ekkor

$$\exists i \in \{1, \ldots, k\} : \quad Span(x_1, \ldots, x_k) = Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k).$$

Bizonyítás: Vegyük az Ö rendszer egy 0-t eredményező nemtriviális lineáris kombinációját:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = 0,$$

és legyen i egy olyan index, amire $\lambda_i \neq 0$. Definiáljuk a

$$W_1 := Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k), \qquad W_2 := Span(x_1, \ldots, x_k)$$

vektortereket.
Megmutatjuk, hogy $W_1 \subseteq W_2$ és $W_1 \supseteq W_2$ is teljesül, azaz $W_1 = W_2$.

1. lépés: $W_1 \subseteq W_2$:

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k \in Span(x_1, \ldots, x_k) = W_2,$$

így egy korábbi tételből következik, hogy

$$W_1 = Span(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \subseteq W_2.$$

2. lépés: $W_1 \supseteq W_2$:

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in Span(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = W_1,$$

így elég belátni, hogy $x_i \in W_1$ is igaz.
$\lambda_i \neq 0$ miatt:

$$\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_k x_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k = \sum_{j=1 j \neq i}^{k} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} x_j \in W_1.$$

Így egy korábbi tételből adódik, hogy $W_2 \subseteq W_1$ is igaz.

Összefüggő rendszerré bővítés

Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, $x \in V$. Ekkor:

$$x \in Span(x_1, \ldots, x_k) \implies x_1, \ldots, x_k, x \text{ Ö}.$$

Bizonyítás:

$$x \in Span(x_1, \ldots, x_k)$$

Bizonyítás:

$$x \in Span(x_1, \ldots, x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k : \quad x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$$

Bizonyítás:

$$x \in Span(x_1, \ldots, x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k : \quad x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + (-1) \cdot x = 0$$

Bizonyítás:

$$x \in Span(x_1, \ldots, x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k : \quad x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + (-1) \cdot x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_1, \ldots, x_k, x \text{ Ö}, \text{ mivel } -1 \neq 0.$$

Független rendszer bővítése

Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy (F) vektorrendszer, $x \in V$. Ekkor:

a) $x \in Span(x_1, \ldots, x_k) \Longrightarrow x_1, \ldots, x_k, x$ (Ö),

b) $x \notin Span(x_1, \ldots, x_k) \Longrightarrow x_1, \ldots, x_k, x$ (F)

Bizonyítás: a) következik az előző tételből.

b) Definíció alapján megmutatjuk, hogy $x_1, \ldots, x_k, x$ F.

b) Definíció alapján megmutatjuk, hogy $x_1, \ldots, x_k, x$ F.
Vegyünk egy tetszőleges lin. kombinációt, ami 0-t ad:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda x = 0,$$

megmutatjuk, hogy minden együtthatónak 0-nak kell lennie.

b) Definíció alapján megmutatjuk, hogy $x_1, \ldots, x_k, x$ F.
Vegyünk egy tetszőleges lin. kombinációt, ami 0-t ad:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda x = 0,$$

megmutatjuk, hogy minden együtthatónak 0-nak kell lennie.
Indirekt tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Ekkor

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k,$$

ami nem lehetséges, hiszen $x \notin Span(x_1, \ldots, x_k)$. Azaz $\lambda = 0$ lehetséges csak.

b) Definíció alapján megmutatjuk, hogy $x_1, \ldots, x_k, x$ F.
Vegyünk egy tetszőleges lin. kombinációt, ami 0-t ad:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda x = 0,$$

megmutatjuk, hogy minden együtthatónak 0-nak kell lennie.
Indirekt tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Ekkor

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k,$$

ami nem lehetséges, hiszen $x \notin Span(x_1, \ldots, x_k)$. Azaz $\lambda = 0$ lehetséges csak.
Behelyettesítve az egyenletbe:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0,$$

amiből az $x_1, \ldots, x_k$ függetlensége miatt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ következik.