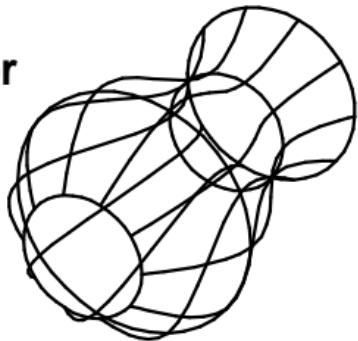


Plochy a pláty

© 2015 Jiří Sochor
FI MU Brno



<http://www.fi.muni.cz/~sochor/PB009>

Plochy v počítačové grafice

- ◆ implicitní rovnice

$$F(x, y, z) = 0$$

- ◆ explicitní rovnice

$$z = f(x, y)$$

pro $x \in < x_0, x_1 >; y \in < y_0, y_1 >$

- ◆ parametrické rovnice

$$x = X(u, v); y = Y(u, v); z = Z(u, v)$$

pro $u \in < u_0, u_1 >; v \in < v_0, v_1 >$

- ◆ vektorová rovnice

$$\vec{P} = \vec{P}(u, v)$$

Interpolační plocha

Dáno: $(m+1) \times (n+1)$ bodů \vec{P}_{ij}

$m+1$ hodnot u_i

$n+1$ hodnot v_j

$$\vec{P}(u_i, v_j) = \vec{P}_{ij}; \quad i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n$$

Interpolace vektorovým polynomem:

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{a}_{ij} u^i v^j$$

Řešení soustavy rovnic

Dáno: $\vec{P}_{ij} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{a}_{ij} u^i v^j$



$(m+1) \times (n+1)$ rovnic pro \vec{a}_{ij}



Hledaná interpolaci plocha

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{a}_{ij} u^i v^j$$

Lagrangeovy polynomy

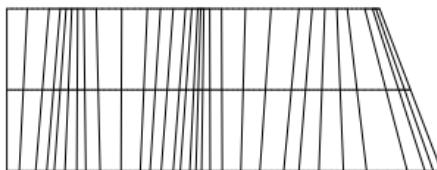
$$\stackrel{\rightarrow}{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \stackrel{\rightarrow}{P}_{ij} L_i^m(u) L_j^n(v)$$

$$L_i^m(u) = \frac{\prod_{j=0, \dots, m, j \neq i}^{(u - u_j)}}{\prod_{j=0, \dots, m, j \neq i}^{(u_i - u_j)}} ; \quad i = 0, \dots, m$$

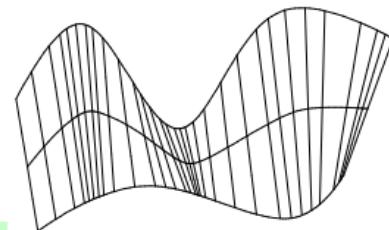
$$L_i^m(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, m$$

Přímková plocha - „ruled surface“

pohled shora



perspektiva



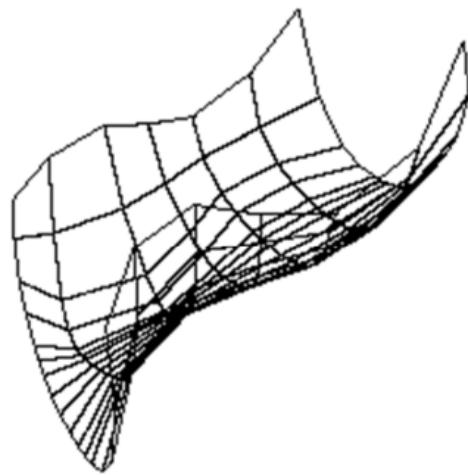
$$\vec{P}(u, v) = (1-u)\vec{P}_0(v) + u\vec{P}_1(v)$$

Zjednodušené značení v dalším textu:

$\vec{P}(u, v) \dots P(u, v)$ bod na parametrické ploše

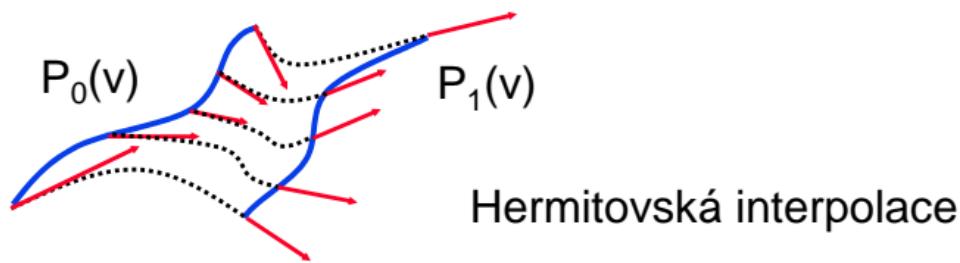
$\vec{P}(u) \dots P(u)$ bod na parametrické křivce

Přímková plocha - „ruled surface“



Příčné tečné vektory

$$T_0(v) = \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=0} \quad T_1(v) = \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=1}$$



$$P(u, v) = F_1(u).P_0(v) + F_2(u).P_1(v) + F_3(u).T_0(v) + F_4(u).T_1(v)$$

Třídy parametrických reprezentací

A. Kartézský součin

$$P(u, v) = \sum_i \sum_j \Phi_{ij}(u, v) P_{ij}$$

body

B. Loftovaný povrch

$$P(u, v) = \sum_j \Phi_j(v) P_j(u)$$

křivky

C. Transfinitní definice

$$P(u, v) = \sum_i \Phi_i(u) P_i(v) + \sum_j \Phi_j(v) P_j(u) - \sum_i \sum_j \Phi_{ij}(u, v) P_{ij}$$

Mapa plochy

1. Explicitní tvar:

$$P(u, v) = f_u \cdot M \cdot f_v$$

2. Implicitní tvar:

$$f_u \cdot N \cdot f_v = 0$$


obsahuje

f_u, f_v - funkce tvaru plochy, „blending functions“

f_u - řádkový vektor polynomů „u“

f_v - sloupcový vektor polynomů „v“

M, N - mapa plochy

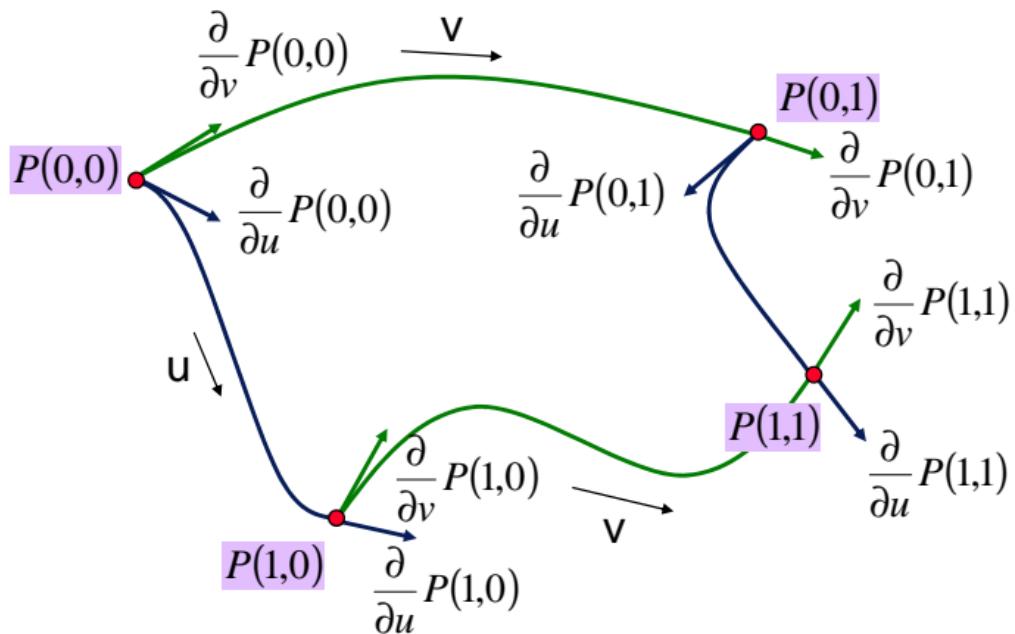
12ti vektorový plát

Hermitovská interpolace

$$P(u, v) = [F_3(u), F_1(u), F_2(u), F_4(u)] G \cdot [F_3(v), F_1(v), F_2(v), F_4(v)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial u} P(0,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(0,1) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} P(0,0) & P(0,0) & P(0,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial v} P(1,0) & P(1,0) & P(1,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(1,1) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u} P(1,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(1,1) & 0 \end{bmatrix}$$

12ti vektorový plát



16ti vektorový plát se zkruty

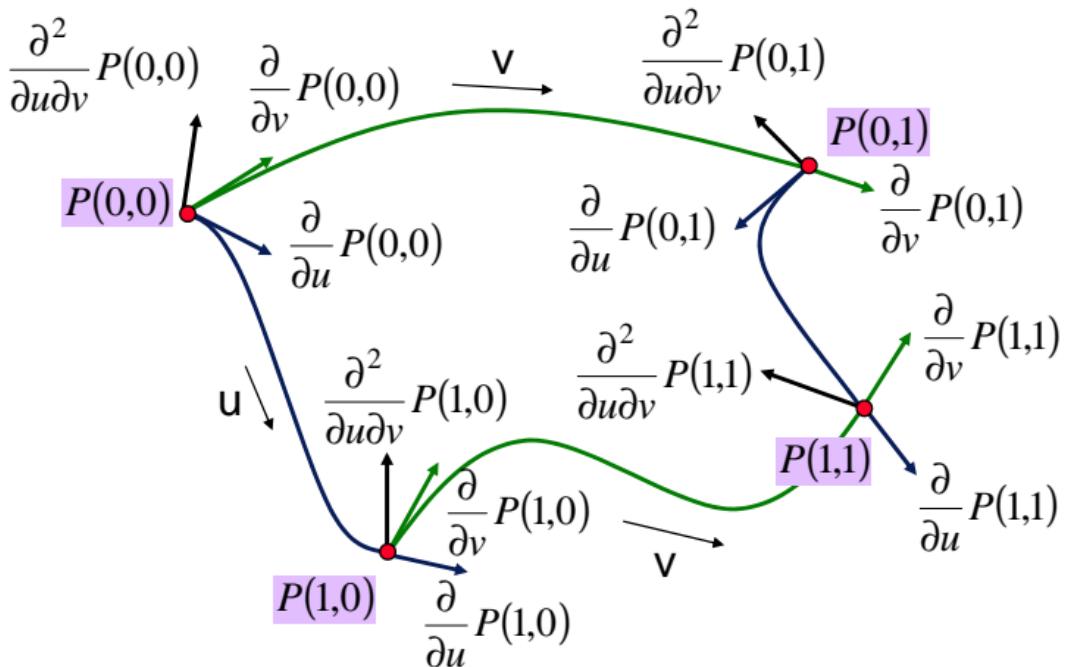
B.Barsky (Hermitovská interpolace)

$$P(u, v) = [F_3(u), F_1(u), F_2(u), F_4(u)] G [F_3(v), F_1(v), F_2(v), F_4(v)]^T$$

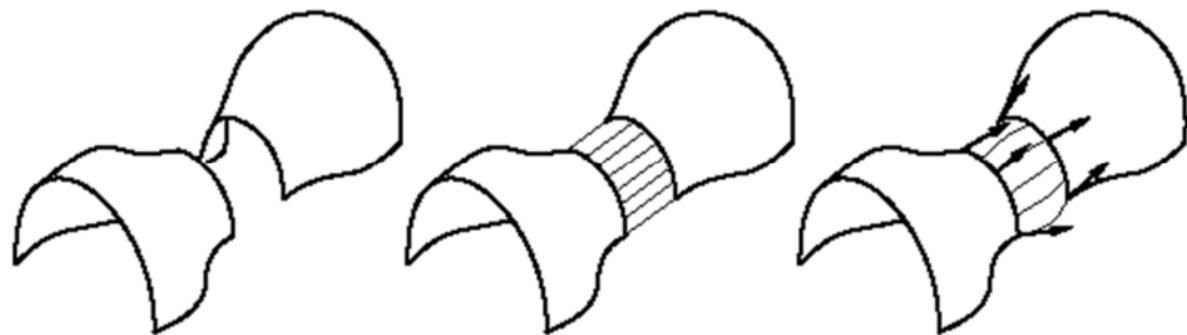
$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(0,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(0,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(0,1) & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial v} P(0,0) & P(0,0) & P(0,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial v} P(1,0) & P(1,0) & P(1,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(1,1) \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(1,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(1,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(1,1) & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(1,1) \end{bmatrix}$$

zkrutové vektory

16ti vektorový plát se zkruty



Aplikace – spojování plátů



Bezierovy pláty

bikubický Bezierův plát

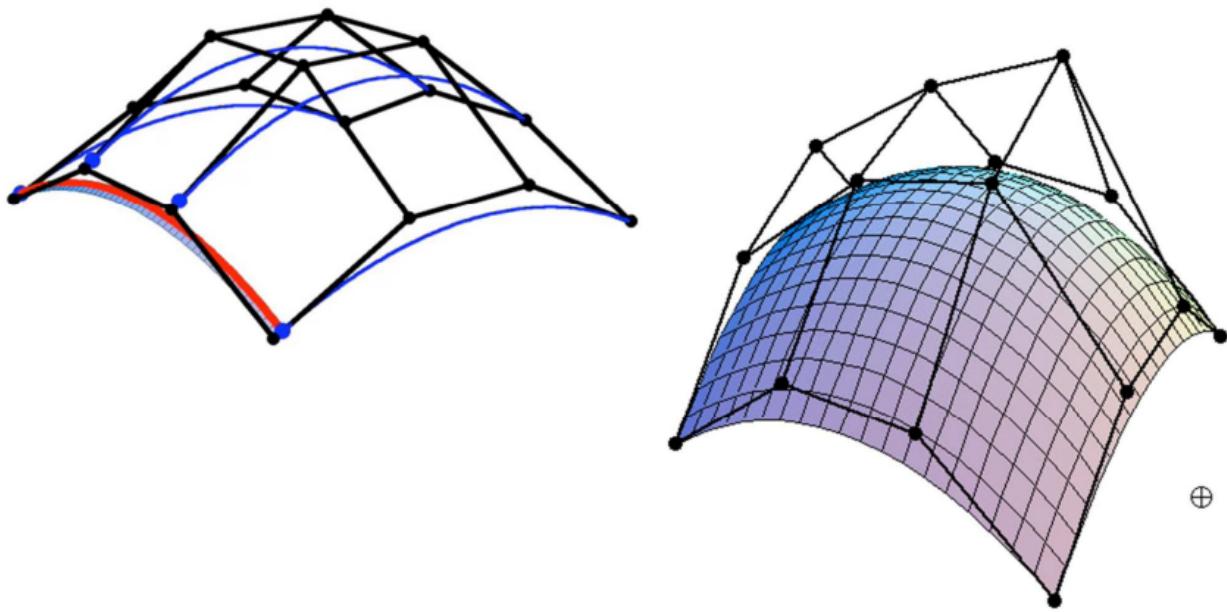
$$P(u, v) =$$

$$[B_1(u), B_2(u), B_3(u), B_4(u)].B.[B_1(v), B_2(v), B_3(v), B_4(v)]^T$$

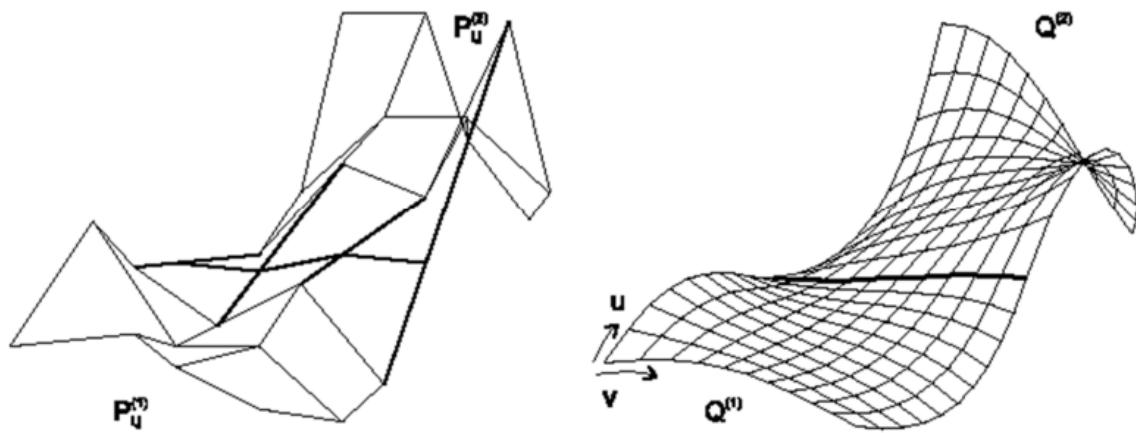
$$B = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

16 řídících
bodů

Bezierovy pláty

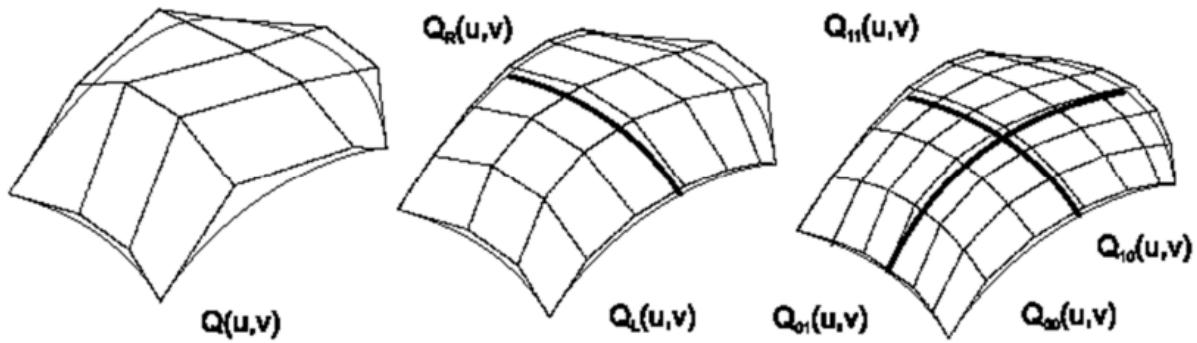


Napojování kubických Bez.plátů



spojitost G^1

Dělení Bezierových plátů

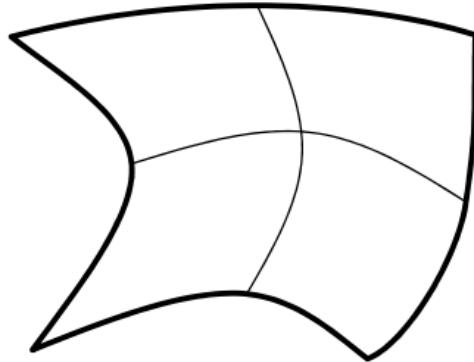
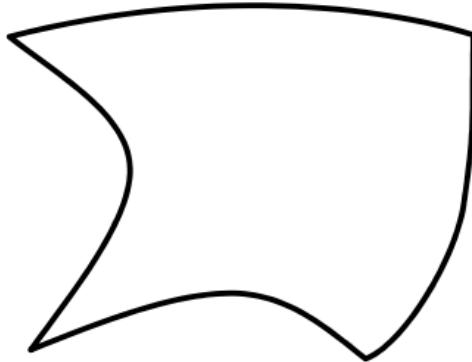


Dělení plátů – „dlaždičkování“

tesselate, tesselation

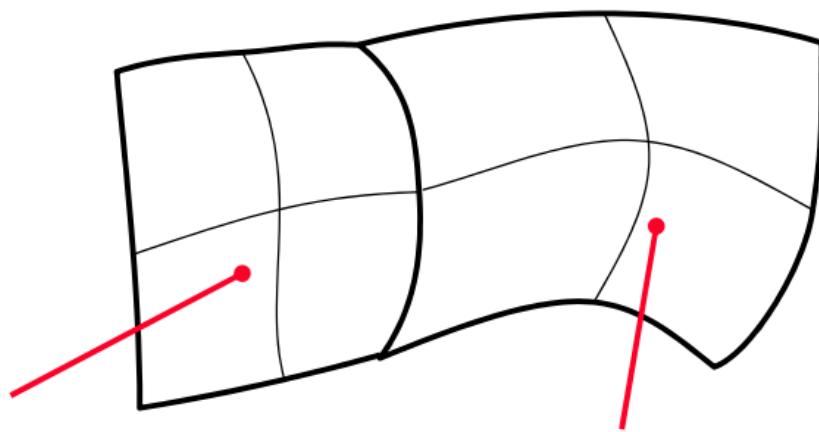
pro daný povrchový plát

- pokud je téměř plochý: vykresli
- jinak rozděl na 4 pláty



Dělení plátů – „dlaždičkování“

vytvoření trhlin

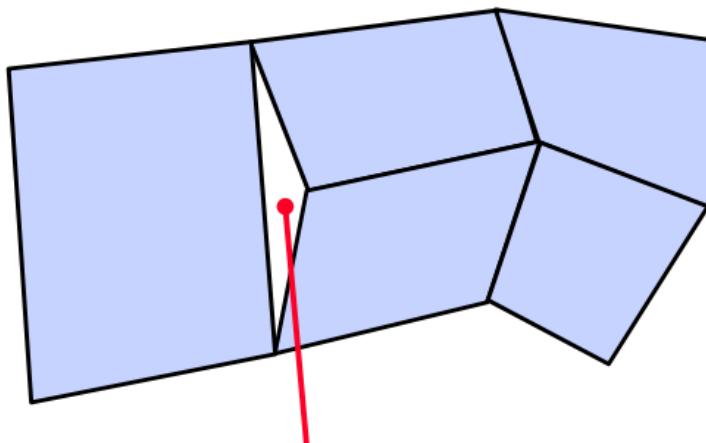


„dostatečně plochý“

není „plochý“

Dělení plátů – „dlaždičkování“

vytvoření trhlin



trhlina v povrchu

Obecný Bezierův plát

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

\nwarrow

$(m+1) \times (n+1)$ bodů

Plát je lokalizován do konvexní obálky bodů P_{ij}

$$B_i^m(u) B_j^n(v) \geq 0 \quad u, v \in <0, 1>$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = 1$$

Zvýšení stupně Bezierova plátu

Dáno: $(m+1) \times (n+1)$ bodů P_{ij} ($i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n$)

Pro zvýšení stupně plátu na $(m+1, n)$ potřebujeme nové body, v tomto případě celkem $(m+2) \times (n+1)$ bodů (obdobně viz křivky)

$$P_{i,j}^{(m+1,n)} = \frac{i}{m+1} P_{i-1,j}^{(m,n)} + \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) P_{i,j}^{(m,n)}$$

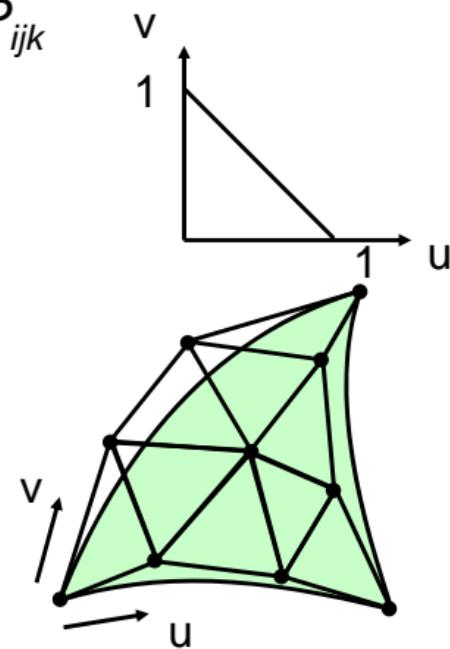
$$i = 0, \dots, m+1$$

Bezierův trojúhelníkový plát

Dáno: $(n+1).(n+2)/2$ bodů P_{ijk}
 $0 < i, j, k; \quad i+j+k=n$

$n=3$

	P_{030}		
P_{021}		P_{120}	
P_{012}	P_{111}	P_{210}	
P_{003}	P_{102}	P_{201}	P_{300}



Bezierův trojúhelníkový plát

$$P(u, v, w) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w)$$

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k$$

1. $B_{ijk}^n(u, v, w) \geq 0 ; \quad 0 \leq u, v, w ; u + v + w = 1$
2. $\sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n}} B_{ijk}^n(u, v, w) = 1$
3. $B_{ijk}^n = u.B_{i-1,j,k}^{n-1} + v.B_{i,j-1,k}^{n-1} + w.B_{i,j,k-1}^{n-1}$

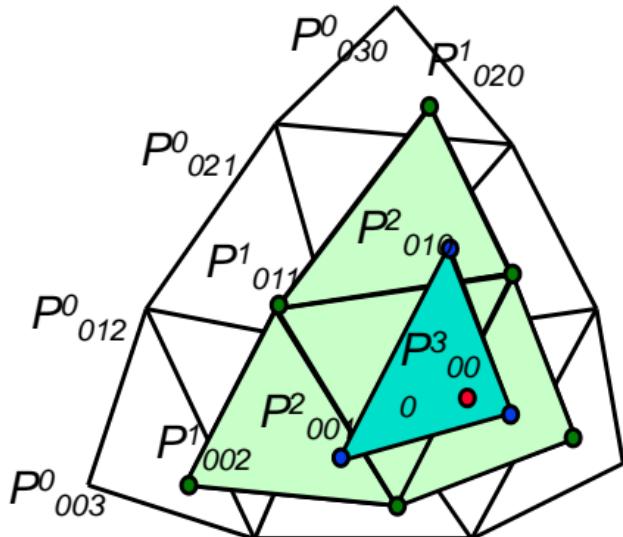
Bezier. trojúhelník - alg. De Casteljau

```

for i=0 to n do
for j=0 to n-i do
  {k=n-i-j;  $P^0_{ijk} = P_{ijk}$ };
  
```

```

for l=1 to n do
for i=0 to n-l do
for j=0 to n-l-i do
  { k=n-l-i-j;
     $P^l_{ijk} = u \cdot P^{l-1}_{i+1,j,k} + v \cdot P^{l-1}_{i,j+1,k} + (1-u-v) \cdot P^{l-1}_{i,j,k+1}$ 
  }
 $P(u,v) = P^n_{0,0,0}$ 
  
```



Bilineární Coonsova plocha

Dáno: 4 okrajové křivky $P_{0v}, P_{1v}, P_{u0}, P_{u1}$
 Konstruujeme plát $P(u,v)$

$$C = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{0v} & P_{01} \\ P_{u0} & P(u,v) & P_{u1} \\ P_{10} & P_{1v} & P_{11} \end{bmatrix}$$

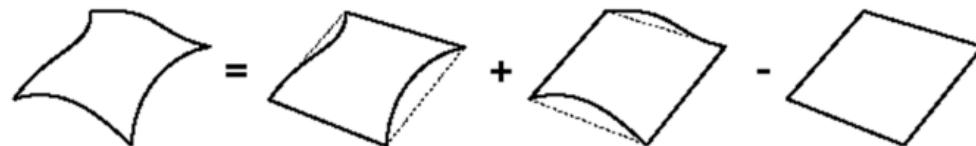
Implicitní rovnice:

$$[1-u, -1, u].C.[1-v, -1, v]^T = 0$$

Bilineární Coonsova plocha

Explicitní rovnice (řešení implicitní rovnice):

$$\begin{aligned}
 P(u, v) = & [1-u, u] \begin{bmatrix} P_{0v} \\ P_{1v} \end{bmatrix} + [P_{u0}, P_{u1}] \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\
 & - [1-u, u] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

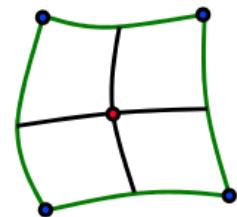


Bikubická Coonsova plocha

Implicitní rovnice:

$$[F_1(u), -1, F_2(u)] \cdot C \cdot [F_1(v), -1, F_2(v)]^T = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{0v} & P_{01} \\ P_{u0} & P(u,v) & P_{u1} \\ P_{10} & P_{1v} & P_{11} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} F_1(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ F_2(t) &= -2t^3 + 3t^2 \end{aligned}$$



Explicitní rovnice:

$$\begin{aligned} P(u,v) &= [F_1(u), F_2(u)] \begin{bmatrix} P_{0v} \\ P_{1v} \end{bmatrix} + [P_{u0}, P_{u1}] \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \end{bmatrix} \\ &\quad - [F_1(u), F_2(u)] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obecná bikubická plocha

$$[F_3(u), F_1(u), -1, F_2(u), F_4(u)] C [F_3(v), F_1(v), -1, F_2(v), F_4(v)]^T = 0$$

Hermitovské polynomy

$$C = \begin{bmatrix} T_{00} & P_{00}^u & P_{0v}^u & P_{01}^u & T_{01} \\ P_{00}^v & P_{00} & P_{0v} & P_{01} & P_{01}^v \\ P_{u0}^v & P_{u0} & P(u, v) & P_{u1} & P_{u1}^v \\ P_{10}^v & P_{10} & P_{1v} & P_{11} & P_{11}^v \\ T_{10} & P_{10}^u & P_{1v}^u & P_{11}^u & T_{11} \end{bmatrix}$$

$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$
 $F_2(t) = -2t^3 + 3t^2$
 $F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t$
 $F_4(t) = t^3 - t^2$

Bikubická B-spline plocha

$$P(u, v) =$$

$$\frac{1}{36} [C_1(u), C_2(u), C_3(u), C_4(u)] M [C_1(v), C_2(v), C_3(v), C_4(v)]^T$$

$$C_1(t) = (1-t)^3$$

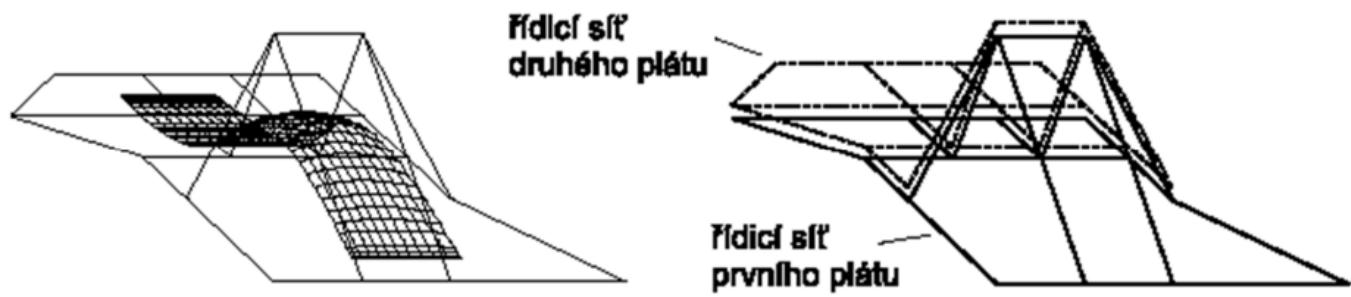
4x4 řídící body

$$C_2(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$$

$$C_3(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$C_4(t) = t^3$$

Bikubická B-spline plocha



Racionální B-spline plocha

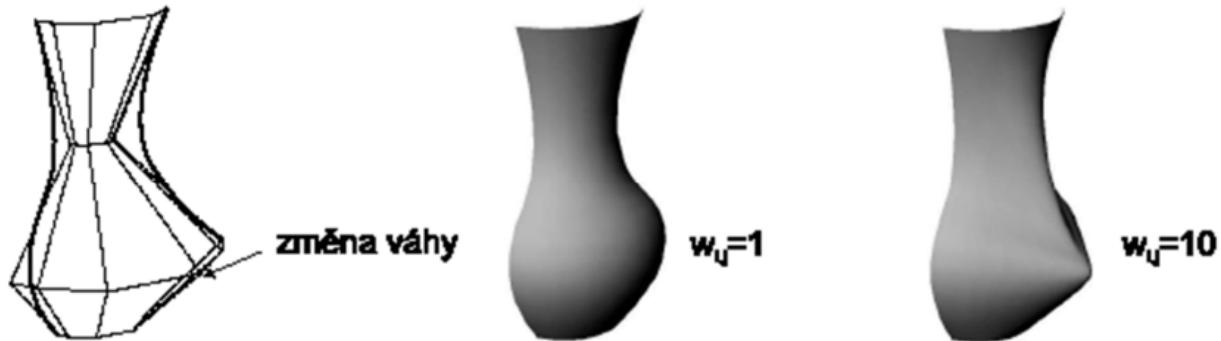
$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} P_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}$$

↓

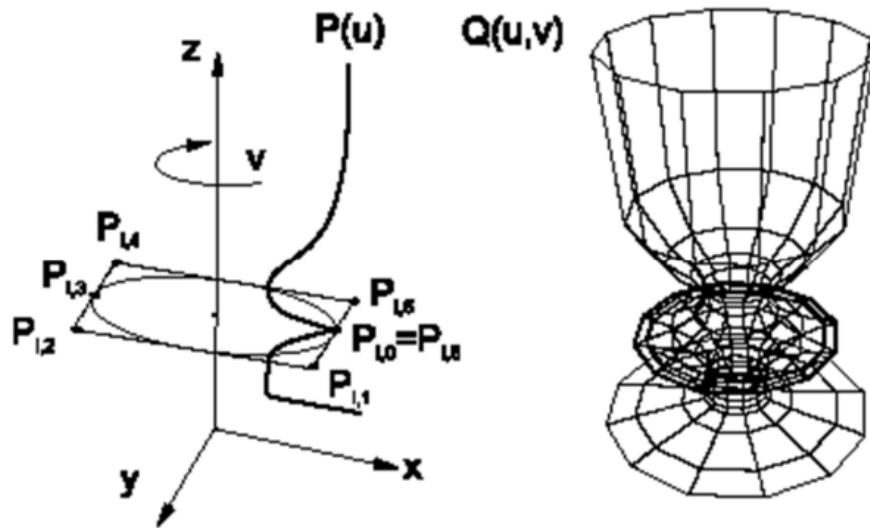
$$R_{i,j}^{m,n}(u, v) = \frac{w_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n w_{rs} N_r^k(u) N_s^l(v)}$$

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} R_{ij}^{mn}(u, v)$$

Změna váhy řídícího bodu



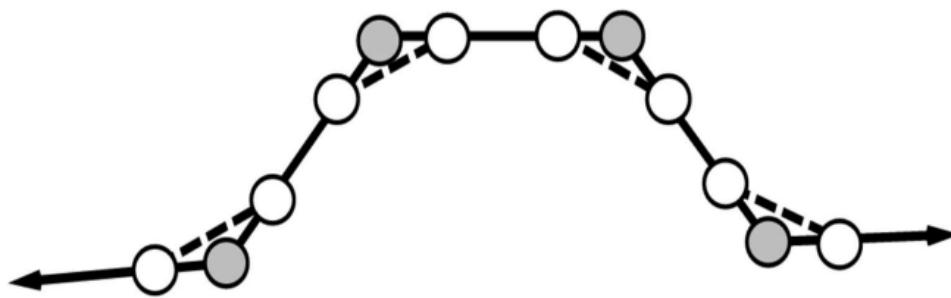
Rotační plocha – např.NURBS



Rekurzivní dělení

Chaikin (1974)

generování křivky z mnohoúhelníku



Dělení bikubického B-spline plátu

$$P(u, v) = U M G M^T V^T$$

↗
4x4 řídící body

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hledáme dělení plátu pro poloviční intervaly $u, v, t.j.:$

$$P(u_1, v_1) = U S M G M^T S^T V^T \quad u_1 = u/2, v_1 = v/2$$

↗
dělící matice (splitting matrix)

Dělení bikubického B-spline plátu

$$P(u_1, v_1) = USMGM^T S^T V^T$$



$$P_1(u, v) = UMG_1M^T V^T$$



$$MG_1M^T = SMGM^T S^T$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = [M^{-1}SM]G[M^TSM^{-T}] = H_1GH_1^T \quad H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

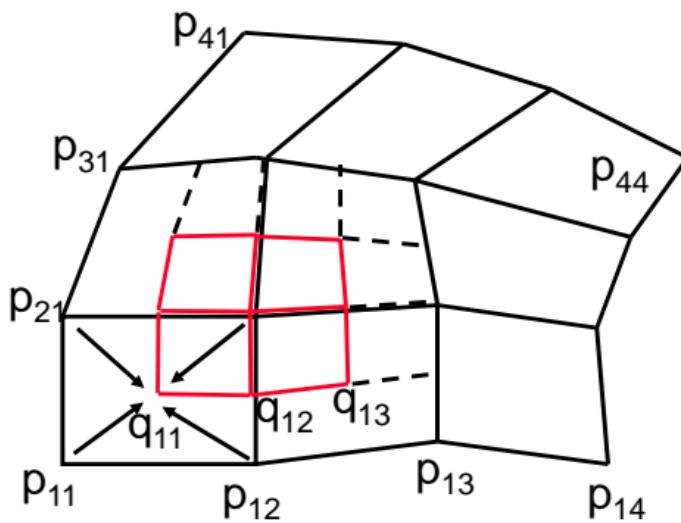
Dělení ...

$$G_1 = H_1 G H_1^T$$

$$q_{11} = \frac{(p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22})}{4}$$

$$q_{13} = \frac{(p_{12} + p_{13} + p_{22} + p_{23})}{4}$$

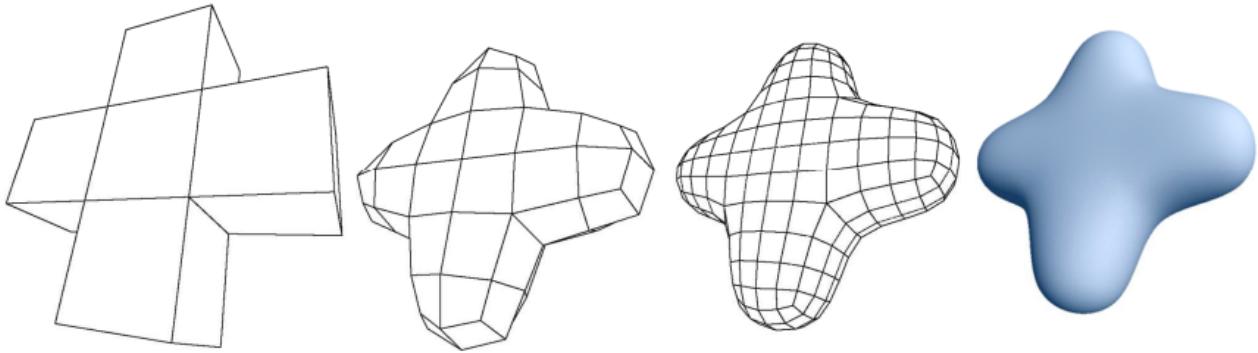
$$q_{12} = \frac{\frac{(q_{11} + q_{13})}{2} + \frac{(p_{12} + p_{22})}{2}}{2}$$



Rekurzivně dělené povrchy

Co je rekurzivní dělení ?

- postupné zjemňování řídící sítě přidáváním nových bodů, hran a stěn (dělením původních)
- výsledkem je approximující hladký (limitní) povrch



Rekurzivní dělení CC

E.Catmull, J.Clark (1978)

- rekurzivní dělení aplikováno na 3D sítě (povrchy)
- v pravidelné části sítě (tj. vrcholy valence 4) iteruje dělení k bikubickým B-splajn plochám (spojitost C^2)
- v průběhu dělení dochází ke zmenšování okraje

Pravidla dělení - Catmull&Clark

- A. Nové body ve stěnách - průměr všech bodů definujících stěnu
- B. Nové body na hranách - průměr středů původních hran a hran propojujících 2 nové body v přilehlých stěnách
- C. Nové vrcholy - průměr $Q + 2R + S(n-3)/n$, kde
 - Q - průměr všech nových stěnových bodů ve stěnách přilehlých k vrcholu
 - R - průměr všech středů původních hran incidujících s vrcholem
 - S - původní vrchol

“subdivision surfaces”

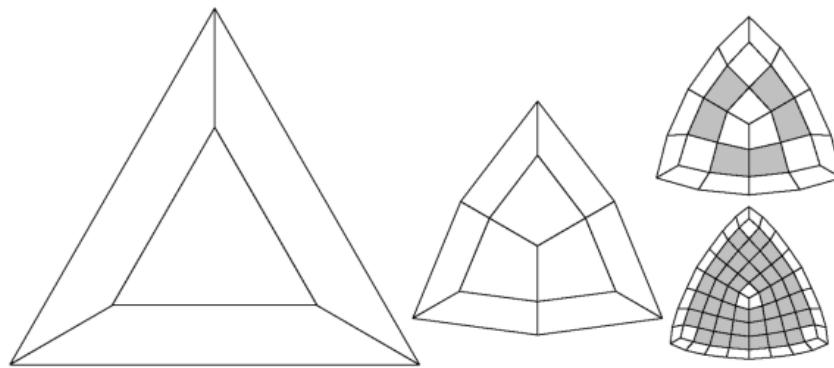
Pravidla dělení - Catmull&Clark

Nové hrany vytvoříme spojením

- nových stěnových bodů s novými hranovými body
- nových vrcholových bodů s novými hranovými body

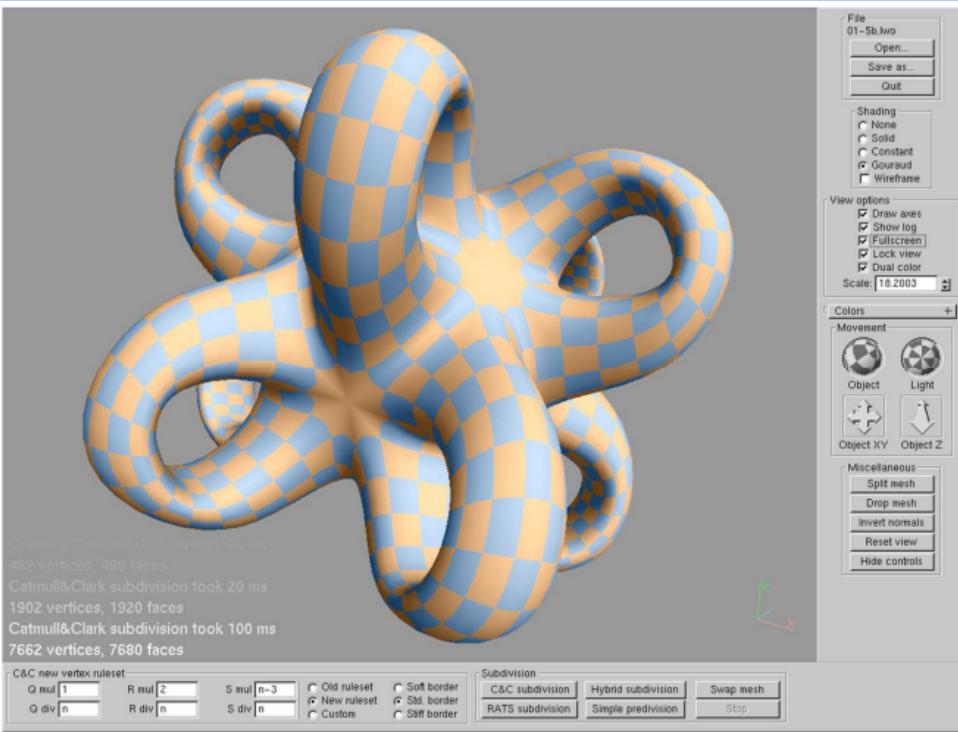
Nové stěny jsou ohrazeny novými hranami.

Catmull-Clark povrchy - vlastnosti



- po první iteraci jsou všechny stěny čtyřúhelníkové a počet nepravidelných bodů konstantní
- přibývá stěn, jež můžeme nahradit B-spline plátem
- uzavřené povrchy: v každé iteraci se počet stěn zvýší 4x

Ukázky



modifikace pravidel

Jiná schémata dělení

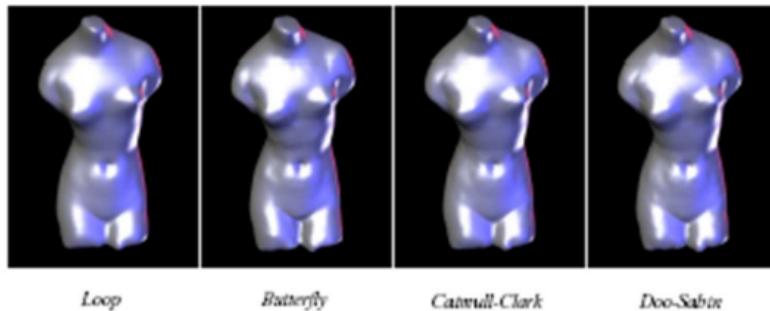


Figure 4.20: Different subdivision schemes produce similar results for smooth meshes.

