Precesija Lunine orbite

Vid Klopčič

31. julij 2019

Kazalo

1 Uvod

Lunina orbita je glede na zemljino nagnjena za 5.15° in ima ekscentričnost ≈ 0.0549. Zlasti zaradi gravitacijske sile sonca, ravnina lunine orbite precedira z obhodnim časom ≈ 18.6 let - v tem času se njena vozelna črta (zveznica obeh presečišč lunine orbite z ekliptiko) enkrat zasuče. Suče se tudi dolga os lunine orbite, in sicer enkrat v ≈ 8.85 letih.

V tem poročilu bomo z numeričnim reševanjem enačb gibanja v treh dimenzijah poskusili čim natančneje določiti čas obeh period precesije lunine orbite.

2 Fizikalno ozadje

2.1 Sile

Za opis gibanja lune bomo upoštevali le Newtonov gravitacijski zakon:

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{1}$$

Vsota zunanjih sil na posamezno telo je enaka seštevku vektorjev sil vseh okoliških teles, ki jih bomo izračunali po enacbi (1).

$$\vec{F_p} = \sum_i G\frac{m_p m_i}{r_{pi}^2}\frac{\overrightarrow{r_{pi}}}{|\overrightarrow{r_{pi}}|} \tag{2}$$

2.2 Enačbe gibanja

Iz enačbe (2) lahko z uporabo 2. Newtonovega zakona izpeljemo enačbe, ki opisujejo gibanje v treh dimenzijah:

$$\vec{a_p} = \sum_i G\frac{m_i}{r_{pi}^2}\frac{\overrightarrow{r_{pi}}}{|\overrightarrow{r_{pi}}|} \tag{3}$$

$$d\vec{v_p} = \vec{a_p}dt \tag{4}$$

$$d\vec{x_p} = \vec{v_p}dt \tag{5}$$

3 Simulacija

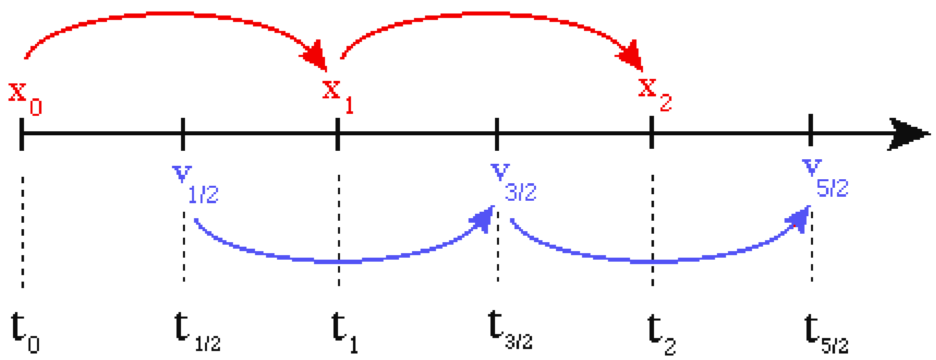
Pri numerični integraciji s funkcijo odeint se energija ne ohranja, kar privede do vedno hitrejšega nabiranja napake. Pri zastavljenem problemu je ključna ravno stabilnost sistema na dolgem časovnem intervalu, kar bi pri integraciji z ne-simplektičnimi integratorji, dosegli le z zelo majhnimi koraki. Zato bomo raje izbrali integrator Leapfrog, ki se pogosto uporablja ravno pri orbitalni mehaniki.

3.1 Leapfrog integrator

Za enačbe drugega reda, kjer je funkcija odvisna le od pozicije, se pogosto uporablja integracijo z metodo Leapfrog. Definirajmo naslednji enačbi za hitrost in pozicijo:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_{i+1/2}\delta t \\ v_{i+3/2} &= v_{i+1/2} + f(x_{i+1})\delta t \end{aligned} \tag{6}$$

Bistvena razlika med Eulerjevo in Leapfrog integracijo je, da pri času t izračunamo novo pozicijo s hitrostjo, ki je bila izračunana pri času $t + dt/2$. [5]



Vir: `https://www.physics.drexel.edu/students/courses/Comp_Phys/Integrators/Leapfrog/`

Slika 1: Leapfrog integracija

Opazimo tudi, da pri integriranju z obratnim časovnim korakom ($-\delta t$) pridemo točno na izhodiščno pozicijo, kar ne velja za integriranje z Eulerjevo metodo. Posledično velja tudi, da se energija na dolgem časovnem intervalu ohranja.

3.2 Sistem in začetni parametri

V našem sistemu bodo tri telesa - sonce, zemlja in luna. Vsa telesa bomo smatrali za točkasta, sonce pa kot nepremično točko, ker je njegova masa mnogo večja napram drugim telesom ($3 \cdot 10^5$ krat napram zemlji). Začetno stanje vsakega izmed teles bo definirano z maso (m), hitrostjo ($\vec{v}$) in pozicijo ($\vec{r}$). Te podatke sem pridobil na spletni strani `https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi`.

S primerjanjem razlik med rezultati simulacije pri različnih časovnih korakih sem se odločil za časovni razmak dolg 1 uro. Večja ločljivost ni vplivala na rezultat pri opazovanih pojavih.

Uporabil sem naslednje podatke (izpis je iz navedene spletne strani, dodana je bila masa telesa):

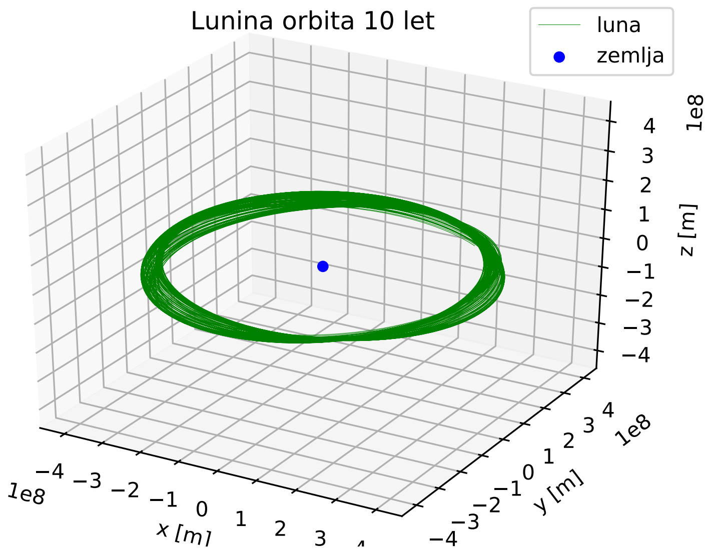
```
ZEMLJA
 2458691.500000000 = A.D. 2019-Jul-27 00:00:00.0000 TDB
 X = 5.597390809621808E-01
 Y =-8.475032990154722E-01
 Z = 3.963355691673358E-05
 VX= 1.408153942006787E-02
 VY= 9.413170146019384E-03
 VZ=-9.061248384474055E-07
 M = 5.972E24

LUNA
 2458691.500000000 = A.D. 2019-Jul-27 00:00:00.0000 TDB
 X = 5.611714991394310E-01
 Y =-8.453640030262498E-01
 Z =-1.452057100706477E-04
 VX= 1.357555850731350E-02
 VY= 9.707401741565039E-03
 VZ= 3.558660152904129E-05
 M = 7.348E22

 SONCE
  2458691.500000000 = A.D. 2019-Jul-27 00:00:00.0000 TDB
  X = 0
  Y = 0
  Z = 0
  VX= 0
  VY= 0
  VZ= 0
  M = 1.989E30


 Symbol meaning [1 au= 149597870.700 km, 1 day= 86400.0 s]:
```

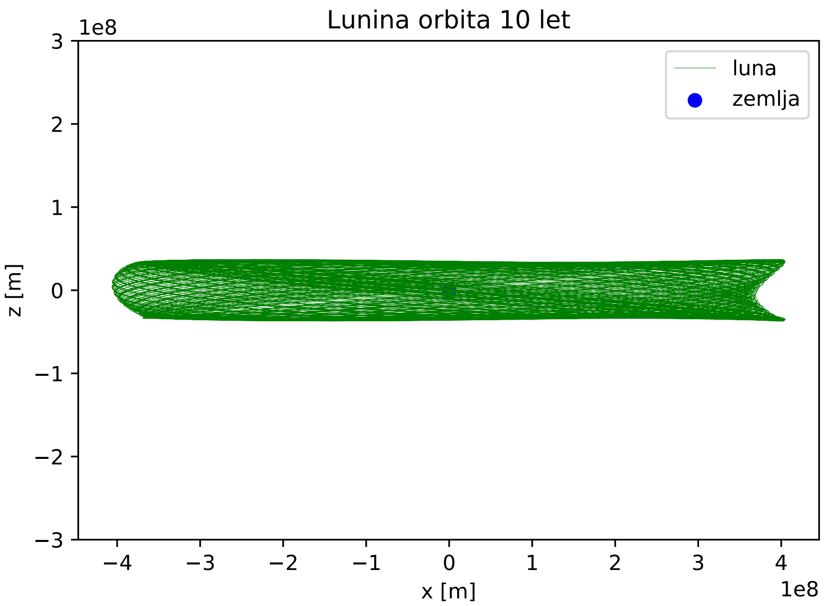
JDTDB	Julian Day Number, Barycentric Dynamical Time
X	X–component of position vector (au)
Y	Y–component of position vector (au)
Z	Z–component of position vector (au)
VX	X–component of velocity vector (au/day)
VY	Y–component of velocity vector (au/day)
VZ	Z–component of velocity vector (au/day)
M	Mass of the body (kg)

[3]

4 Rezultati

Za lažjo predstavo rezultatov simulacije si najprej oglejmo obris lunine orbite v 3d perspektivi.

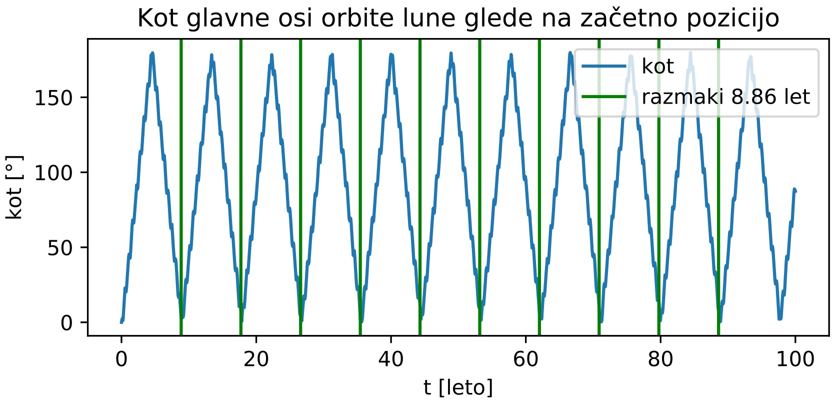




Slika 3: orbita lune

4.1 Precesija dolge osi

Precesijo dolge osi lunine orbite sem razbral z grafa (4), ki prikazuje kot med začetno in trenutno dolgo osjo lunine orbite okoli z osi. Pozicijo dolge osi lunine orbite sem spremljal numerično - zabeležil sem pozicijo in čas v vsaki točki, ko je razdalja med zemljo in luno dosegla maksimum.

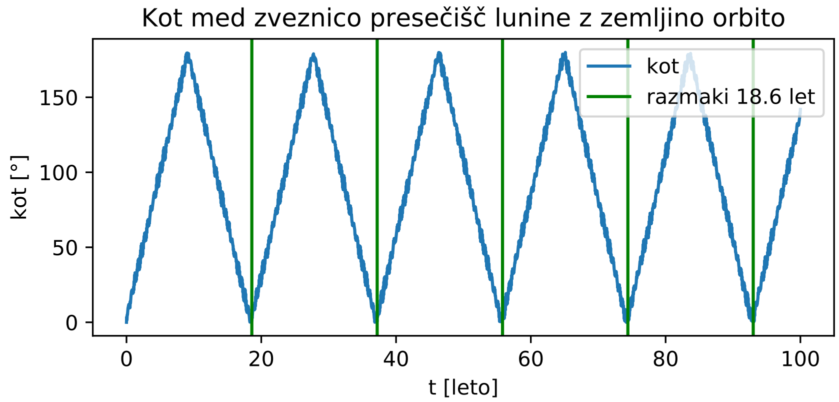


Slika 4: precesija dolge osi

Rezultat simulacije se zelo dobro ujema z dejanskim časom precesije dolge osi, ki je 8.85 let. [1]

4.2 Precesija vozelne črte

Precesijo vozelne črte lunine orbite sem razbral z grafa (5), ki prikazuje kot med začetno in trenutno vozelno črto lunine orbite. Pozicijo vozelne črte lunine orbite sem spremljal numerično - zabeležil sem pozicijo in čas v vsaki točki, ko je razdalja med luno in ravnino zemljine orbite dosegla minimum.



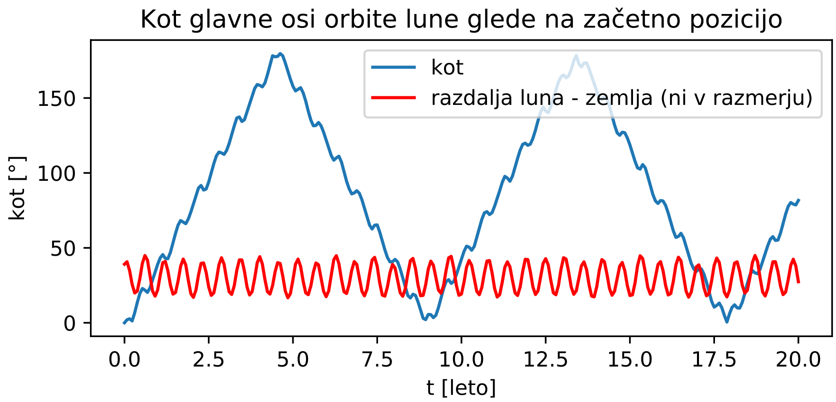
Slika 5: precesija vozelne črte

Rezultat simulacije se na eno decimalno mesto ujema z dejanskim časom precesije vozelne črte, ki je 18.6 let. [1]

5 Komentar

Z uporabo integratorja Leapfrog smo se izognili sistematični napaki na daljšem časovnem intervalu. Recimo, da pri integriranju enega obhoda planeta nastane napaka v energiji, ki znaša ϵ. Sedaj zamenjajmo smer gibanja ($v' = -v$) in ponovno integriramo. Napaka v energiji bo sedaj enaka 2ϵ. Če vzamemo časovno obrnljiv integrator mora biti $\epsilon = 0$, saj le tako končamo natanko v izhodiščni legi. Pri takšnem integriranju je napaka v energiji periodična, kar pomeni, da na daljšem časovnem intervalu ne bo rasla. [4] To je zelo pomembno pri opazovanju pojavov kot je precesija lunine orbite, saj v nasprotnem primeru numerične napake razmeroma kmalu zasenčijo dejanski pojav.

Kotna hitrost precesije je konstantna, a na obeh grafih (5 in 4) opazimo celo kratkotrajno zamenjavo smeri, ki je periodična. Podrobneje si oglejmo del grafa precesije vozelne črte (5). Na istem grafu je izrisana tudi razdalja med luno in zemljo v točkah, ko je le ta dosegla maksimum (točka, v kateri smo zabeležili orientacijo glavne osi).



Slika 6: precesija vozelne črte

Vidimo, da je nazobčenost grafa kota posledica napake pri določanju glavne osi. Perioda napake v razdalji se ujema s periodo nazobčenosti grafa, ki prikazuje kot. V primeru, da bi določili pravo točko največje oddaljenosti, bi razdalja morala biti konstantna. Do enakega zaključka pridemo tudi pri drugem grafu.

Dodatek A Izvorna koda

Izvorna koda programa za simulacijo lunine precesije je na voljo na spletnem portalu GitHub [2].

6 Literatura

[1] Wikipedia The Free Encyclopedia. *Lunar precession.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lunar_precession (pridobljeno 2019).

[2] Vid Klopčič. *Izvorna koda.* URL: https://github.com/vidklopcic/lunar_precession_leapfrog (pridobljeno 2019).

[3] NASA. *Solar System Dynamics.* URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi (pridobljeno 2019).

[4] Drexel University. *The Leapfrog Integrator.* URL: https://www.physics.drexel.edu/students/courses/Comp_Phys/Integrators/leapfrog/ (pridobljeno 2019).

[5] Charles Varin. *Leapfrog integration.* URL: http://cvarin.github.io/CSci-Survival-Guide/leapfrog.html (pridobljeno 2019).