

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра прикладної математики

Лабораторна робота

Моделювання процесу дифузії забрудника (нафти) у зразку ґрунту з каналом

Студента -

-
-

Зміст

1	Постановка задачі	4
2	Математична модель	4
3	Чисельний метод	4
4	Реалізація моделювання	5
5	Результати	6
6	Висновки	9

Анотація

У даній роботі розглядається задача моделювання проникнення забрудника (нафти) у товщу зразка ґрунту, який містить канал із рухомою рідиною (водою). Метою є визначення часу, необхідного для повного забруднення зразка (концентрація > 4000 мг/кг). Для розв'язання задачі використано чисельний метод скінченних різниць на основі рівняння дифузії, враховуючи граничні умови та геометрію каналу. Результати моделювання представлені у вигляді графіків розподілу концентрації у різні моменти часу.

1 Постановка задачі

Розглядається процес проникнення забрудника (нафти) у зразок ґрунту розміром $8\text{ м} \times 6\text{ м}$ (по горизонталі x від -4 до 4 м, по вертикалі z від 0 до 6 м). Усередині зразка розташований канал, по якому просочується вода зі швидкістю $v_z = -0.02\text{ м/с}$. Забрудник надходить на верхню поверхню зразка зі сталою концентрацією $q_{\text{top}} = 0.01\text{ кг/м}^3$. Необхідно визначити час, за який концентрація забрудника у всьому зразку перевищить порогове значення $q_{\text{threshold}} = 0.004\text{ кг/м}^3$ (4000 мг/кг).

Геометрія каналу задається наступним чином:

- Для $z \geq 3\text{ м}$ ширина каналу становить 0.2 м (від $x = -0.1$ до $x = 0.1$).
- Для $z < 3\text{ м}$ канал звужується до ширини 4 м при $z = 0$ (залежність ширини лінійна).

Граничні умови:

- На верхній межі ($z = 6\text{ м}$): $q = 0.01\text{ кг/м}^3$.
- На нижній межі ($z = 0\text{ м}$): $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$ (немає потоку).
- На бічних межах ($x = -4\text{ м}$ та $x = 4\text{ м}$): $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$.

2 Математична модель

Процес проникнення забрудника описується рівнянням дифузії у двовимірному просторі:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right), \quad (2.1)$$

де $q(x, z, t)$ — концентрація забрудника (кг/м^3), $D = 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}$ — коефіцієнт дифузії, t — час (с).

У каналі концентрація підтримується на рівні $q = 0.01\text{ кг/м}^3$ у міру заповнення водою, що рухається зі швидкістю $v_z = -0.02\text{ м/с}$. Глибина заповнення каналу обчислюється залежно від часу, враховуючи кінчну форму нижньої частини.

3 Чисельний метод

Для розв'язання рівняння використано явний метод скінченних різниць. Просторова сітка має розміри $nx = 41$ по осі x та $nz = 31$ по осі z , із кроками $\Delta x = 0.2\text{ м}$ та $\Delta z = 0.2\text{ м}$. Часовий крок $\Delta t = 500\text{ с}$ вибрано з урахуванням умови стабільності:

$$\alpha = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5, \quad \alpha = D \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq 0.5. \quad (3.1)$$

Підставляючи значення: $\alpha = 10^{-6} \cdot 500 / 0.2^2 = 0.0125 < 0.5$, умова виконується.

Схема для внутрішніх точок ґрунту:

$$q_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^n + D\Delta t \left(\frac{q_{i+1,j}^n - 2q_{i,j}^n + q_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{q_{i,j+1}^n - 2q_{i,j}^n + q_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \right). \quad (3.2)$$

Граничні умови реалізовано через відображення:

- $q_{i,nz-1}^{n+1} = 0.01$,
- $q_{i,0}^{n+1} = q_{i,1}^{n+1}$,
- $q_{0,j}^{n+1} = q_{1,j}^{n+1}$, $q_{nx-1,j}^{n+1} = q_{nx-2,j}^{n+1}$.

4 Реалізація моделювання

Моделювання виконано мовою Python із використанням бібліотек NumPy та Matplotlib. Основні параметри задано у файлі `config.py`:

```
1 nx = 41
2 nz = 31
3 dx = 0.2
4 dz = 0.2
5 dt = 500.0
6 max_time = 1e7
7 D = 1e-6
8 q_top = 0.01
9 v_z_channel = -0.02
10 q_threshold = 0.004
```

Симуляція триває до досягнення максимального часу (10^7 с) або повного забруднення зразка. Знімки розподілу концентрації зберігаються через 1 та 10 діб.

5 Результати

Нижче наведено розподіл концентрації забрудника у зразку через 1 та 10 діб, а також у момент повного забруднення. На це пішло 30 днів у симуляції.

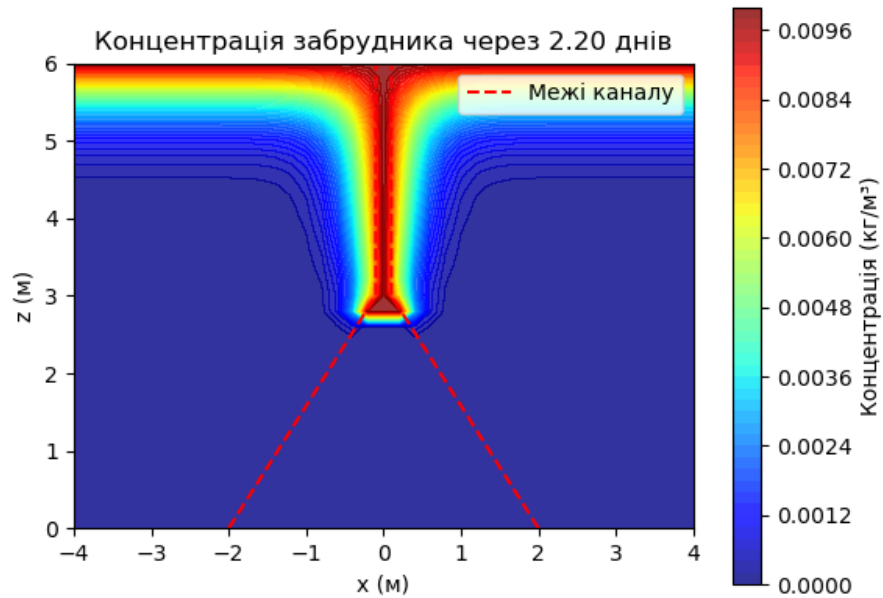


Рис. 5.1. Концентрація забрудника сповільнено.

Час повного забруднення ($q \geq 0.004 \text{ кг/м}^3$ у всьому зразку) залежить від результатів симуляції. У консолі виводиться повідомлення із точним значенням часу у днях.

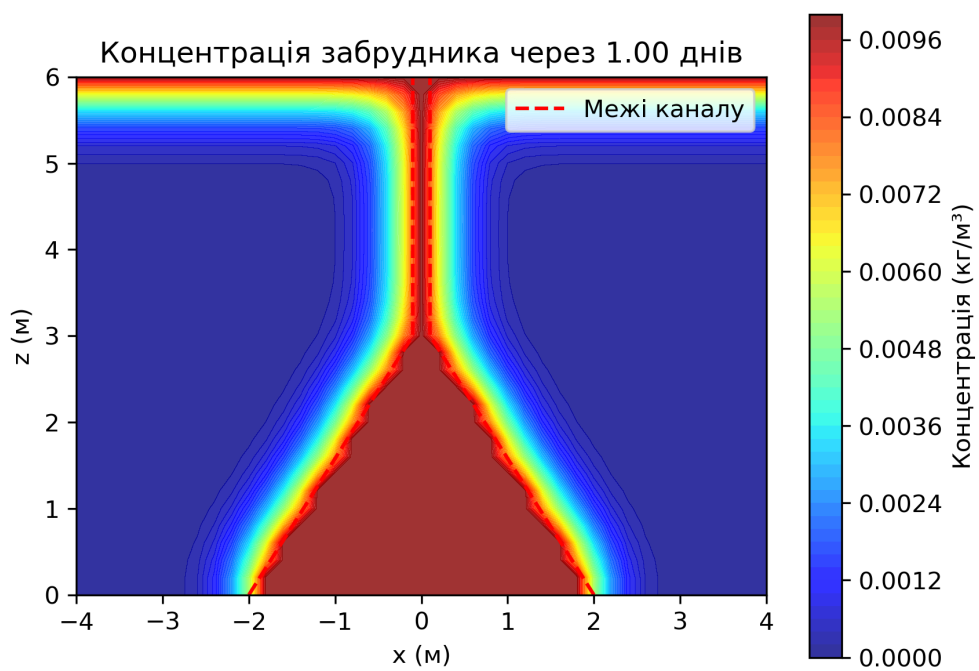


Рис. 5.2. Концентрація забрудника через 1 добу.

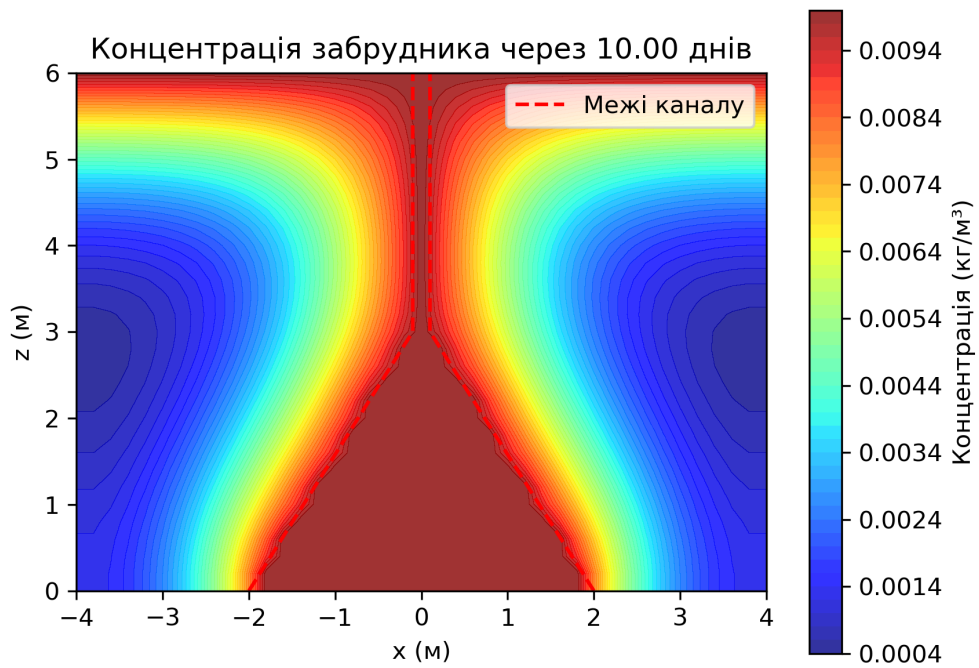


Рис. 5.3. Концентрація забрудника через 10 діб.

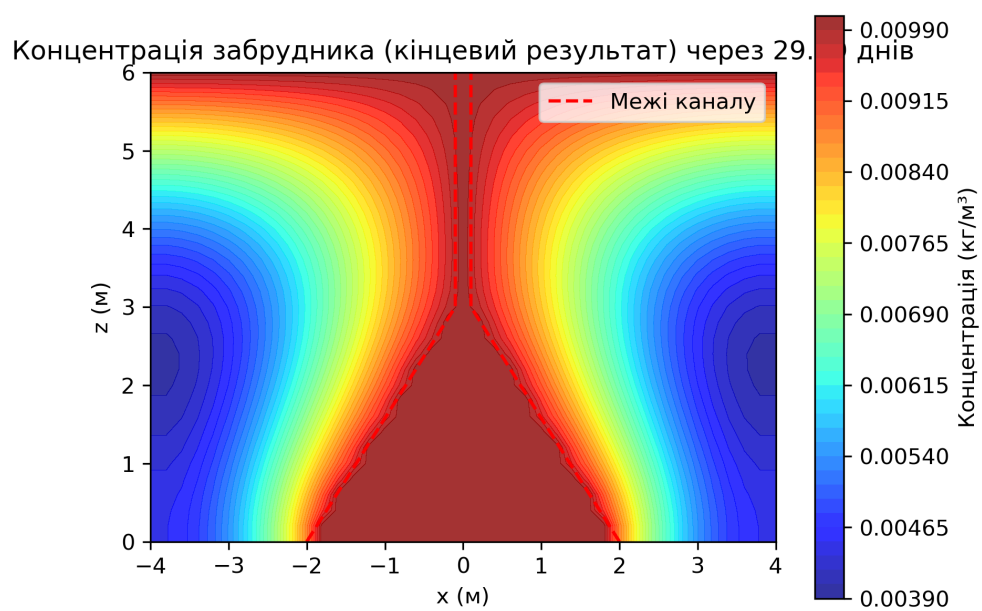


Рис. 5.4. Концентрація забрудника у момент повного забруднення.

6 Висновки

У роботі реалізовано модель дифузії забрудника у зразку ґрунту з каналом, враховуючи рух рідини та геометрію системи. Чисельний метод скінченних різниць дозволив отримати розподіл концентрації у просторі та часі. Отримані результати можуть бути використані для оцінки швидкості забруднення ґрунтів у реальних умовах з врахуванням різних рідин, ґрунтів, поверхонь.