Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

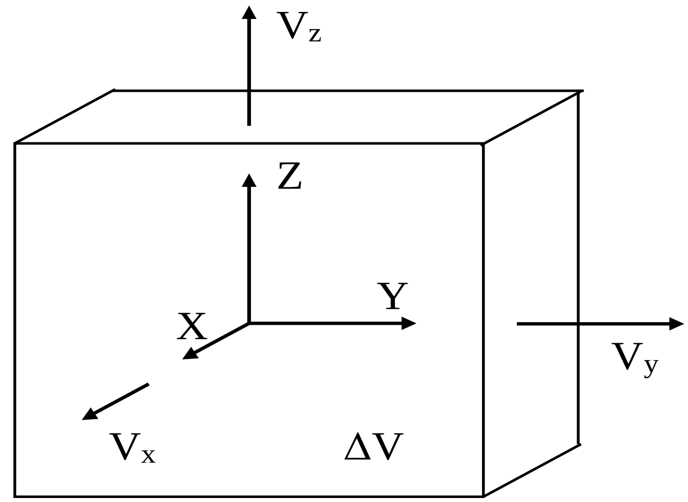

Рис.1. Елементарний об’єм (центр - точка розміщення датчика).

Нехай

Δt - нескінченно малий проміжок часу,

V_x - складова середньої швидкості адвективного переносу вздовж осі X,

V_y - складова середньої швидкості адвективного переносу вздовж осі Y,

V_z - складова середньої швидкості адвективного переносу вздовж осі Z,

q - концентрація субстанції.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Кількість першого інгредієнта $\Delta Q_{вн}$, що вноситься адвективним потоком в елементарний об'єм ΔV

$\Delta Q_{вн} =$

$$\Delta Q_{вн} = V_x \Delta t \Delta y \Delta z q|_x ;$$

Кількість інгредієнта $\Delta Q_{вин}$, що виноситься адвективним потоком з об'єму ΔV

$\Delta Q_{вин} =$

$$\Delta Q_{вин} = V_x \Delta t \Delta y \Delta z q|_{x+\Delta x} .$$

В елементарному об'ємі ΔV накопичується кількість першого інгредієнта

$\Delta Q_x =$

$$\Delta t \Delta y \Delta z \left(V_x q|_x - V_x q|_{x+\Delta x} \right) \approx$$

$$\approx -\frac{\partial (V_x q)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = -\frac{\partial (V_x q)}{\partial x} \Delta V \Delta t$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Аналогічно вздовж осей Y і Z :

$$\Delta Q_y = -\frac{\partial (V_y q)}{\partial y}\Delta V \Delta t; \Delta Q_z = -\frac{\partial (V_z q)}{\partial z}\Delta V \Delta t. \qquad \textbf{(2)}$$

Загальна кількість домішок в елементарному об’ємі

$$\Delta Q_a = -\left(V_x \frac{\partial q}{\partial x} + V_y \frac{\partial q}{\partial y} + V_z \frac{\partial q}{\partial z} \right)\Delta V \Delta t,$$

Вхідний та вихідний потік, викликаний молекулярною дифузією вздовж осі X за час Δt

$$\Delta Q'_{вн} = -D\frac{\partial q}{\partial x}|_x \Delta t \Delta y \Delta z,$$

$$\Delta Q'_{вин} = -D\frac{\partial q}{\partial x}|_{x+\Delta x} \Delta t \Delta y \Delta z,$$

D - коефіцієнт молекулярної дифузії.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Вміст першого інгредієнта в ΔV внаслідок молекулярної дифузії вздовж осі X

$$\Delta Q_x^{'} = \left(-D\frac{\partial q}{\partial x}|_{x+\Delta x} + D\frac{\partial q}{\partial x}|_x \right)\Delta y \Delta z \Delta t =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} D\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = -D\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\Delta V \Delta t.$$

вздовж осей Y і Z:

$$\Delta Q_y^{'} = -D\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\Delta V \Delta t; \Delta Q_z^{'} = -D\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\Delta V \Delta t.$$

Загальна кількість домішок в елементарному об’ємі, накопичена за час Δt в результаті адвективного переносу і молекулярної дифузії, складе:

$$\Delta Q = -\left(V_x\frac{\partial q}{\partial x} + V_y\frac{\partial q}{\partial y} + V_z\frac{\partial q}{\partial z} + D\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) \right)\Delta V \Delta t.$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Очевидно, що

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \Delta q \qquad \frac{\Delta q}{\Delta t}\Big|_{\Delta t \to 0} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

Враховуючи наявність турбулентної дифузії (K_x, K_y, K_z – складові коефіцієнта турбулентного обміну)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(V_x \frac{\partial q}{\partial x} + V_y \frac{\partial q}{\partial y} + V_z \frac{\partial q}{\partial z}\right) +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x + D\right)\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y + D\right)\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z + D\right)\frac{\partial q}{\partial z}\right],$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Методика, розроблена Ейлером передбачає, що потік повітря в момент часу t характеризується полем швидкостей $\bar{v}(\bar{r},t)$, тобто значеннями складових вектора швидкості у всеможливих точках $r=(x,y,z)$ прямокутного декартового простору.

Для вивчення явища турбулентної дифузії (тобто поширення домішок в турбулентному потоці) більш зручним є метод Лагранжа, згідно з яким замість швидкостей $\bar{v}(\bar{r},t)$ в точках r пропонується використовувати траєкторії руху окремих достатньо малих елементів об'єму повітря.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Нехай домішка входить в потік у вигляді газоподібної добавки чи великої кількості дрібних твердих речовин і характеризується ейлеровим полем об’ємної концентрації $q(t,x,y,z)$.

Розглянемо явище переносу при відсутності дифузії.

Концентрація домішок в елементі об’єму повітря залишається постійною,

$$dq/dt = 0, \qquad \textbf{(3)}$$

чи

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_x \frac{\partial q}{\partial x} + v_y \frac{\partial q}{\partial y} + v_z \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \qquad \textbf{(4)}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Відомо, що для нижнього шару атмосфери в термінах $\bar{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$ виконується рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad \textbf{(5)}$$

чи $$div\bar{v} = 0$$

Враховуючи (5), одержимо:

$$div\bar{v}q = v_x \frac{\partial q}{\partial x} + v_y \frac{\partial q}{\partial y} + v_z \frac{\partial q}{\partial z} + q\,div\bar{v}$$

$$= v_x \frac{\partial q}{\partial x} + v_y \frac{\partial q}{\partial y} + v_z \frac{\partial q}{\partial z}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Тоді рівняння (4) перепишеться у вигляді:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div\bar{v}q = 0. \qquad \textbf{(6)}$$

Надалі вважатимемо, що

- ✓ умова (5) завжди виконується,
- ✓ $v_3 = 0$ при $z = 0$ і $z = H$.

Рівняння (6) можна узагальнити. Якщо в процесі переносу домішки частина її осідає чи перестає існувати, то рівняння (6) набуде вигляду

$$\partial q / \partial t + div\bar{v}q + \sigma q = 0. \qquad \textbf{(7)}$$

де $\sigma \geq 0 -$ величина, пропорційна відносній швидкості самостійного зменшення концентрації домішки.

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Якщо в деякій точці $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ розташоване джерело домішок, інтенсивність і розташування якого описується функцією $f(x, y, z, t)$, наприклад

$f(x, y, z, t) = Q\delta(\bar{r} - \bar{r}_0)$, де $\delta(\bar{r} - \bar{r}_0) - \delta -$ функція, що задовольняє умові:

$$\int\limits_G \varphi(\bar{r})\delta(\bar{r} - \bar{r}_0)dr = \begin{cases} \varphi(\bar{r}_0), \bar{r}_0 \in G, \\ 0, \bar{r}_0 \notin G, \end{cases}$$

рівняння переносу при наявності джерела домішок має вигляд:

$$dq/dt + div\bar{v}q + \sigma q = f. \qquad \textbf{(8)}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Нехай рівняння (8) задано в області G тривимірного декартового простору з боковою циліндричною поверхнею S і основами $z = 0, z = H$.

Додамо до рівняння (8) початкові і граничні умови:

$$q = q_0 \text{ при } t = t_0, \qquad \textbf{(9)}$$

$$q = q_s \text{ на S при } v_n < 0, \qquad \textbf{(10)}$$

де q_0 і q_s – задані функції; v_n – проекція вектора $\bar{v}$ на зовнішню нормаль до бокової поверхні S.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Фізика флуктуаційних ефектів.

Найпростіша теорія, що дозволяє враховувати флуктуаційні ефекти, передбачає подання функції q у вигляді суми усередненої $\bar{q}$ і флуктуаційної q' компонент, тобто $q = \bar{q} + q'$, при цьому q' достатньо швидко змінюється з часом і є малою величиною в порівнянні з $\bar{q}$.

Флуктуації – механізми збурення, змін, які виводять явище, систему із рівноваги і переводять її на інший рівень функціонування.

Рівняння для середніх значень концентрації домішок має вигляд:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div\bar{v}q + \sigma q = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial q}{\partial z} + \mu \Delta q + f, \qquad \textbf{(11)}$$

де Δ – оператор Лапласа;

$\nu, \mu \geq 0$ – горизонтальний і вертикальний коефіцієнти дифузії відповідно;

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

початкові і граничні умови

$$q = q_s \text{ на } S \text{ при } v_n < 0, \qquad \textbf{(12)}$$

$$\partial q/\partial z = \alpha q \text{ при } z = 0; \;\; \partial q/\partial z = 0 \text{ при } z = z_H \text{ -} \qquad \textbf{(13)}$$

Деякі часткові випадки

Розглянемо дифузійну постановку задачі - $\bar{v} \equiv 0$

$$\sigma q = \mu d^2 q/dx^2 + Q\delta(x - x_0) \qquad \textbf{(14)}$$

$$-\infty < x < \infty,$$

Q – потужність джерела викидів домішки, розташованого в точці $x = x_0$.

В якості граничних умов будемо використовувати умову обмеженості розв'язку в усій області, в якості функції джерела $f = Q\delta(x - x_0)$, де $Q \geq 0$ – константа.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

У випадку наявності n джерел, розміщених в точках $x_1, x_2, ..., x_n$, функція f має такий вигляд:

$$f = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta(x - x_i),$$

де $Q_i \geq 0$ – потужність i – го джерела.

Якщо інтенсивність викиду є функцією часу, f набуде вигляду:

$$f = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t) \delta(x - x_i).$$

Для задачі з рухомим джерелом слід використовувати функцію

$$f = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t) \delta(x - x_i(t)).$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Наведемо задачу (14) до еквівалентної форми, що не містить δ – функції. Для цього проінтегруємо рівняння в ε – околі точки x_0 :

$$\sigma \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} q dx = \mu \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x_0+\varepsilon} - \mu \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x_0-\varepsilon} + Q.$$

Скориставшись властивістю δ – функції, $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x - x_0) dx = 1$, спрямувавши ε

до нуля, одержимо:

$$\mu \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x_0+\varepsilon} - \mu \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x_0-\varepsilon} + Q = 0. \qquad \textbf{(15)}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Розглянемо дві області $-\infty < x \le x_0, x_0 \le x < \infty$ і відповідні їм розв'язки позначимо q_- і q_+, тобто будемо розглядати дві задачі:

$$\mu\, d^2 q_+ / dx^2 - \sigma q_+ = 0,\ \ q_+ = 0 \text{ при } x \to +\infty; \qquad \textbf{(16)}$$

$$\mu\, d^2 q_- / dx^2 - \sigma q_- = 0,\ \ q_- = 0 \text{ при } x \to -\infty. \qquad \textbf{(17)}$$

При $x = x_0$ розв'язки задач (16), (17) зв'язані співвідношенням (15).

Припускаючи, що розв'язок задачі неперервний в усіх точках, включаючи $x = x_0$, одержимо:

$$q_+ = q_- \text{ при } x = x_0. \qquad \textbf{(18)}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Розв'язки задач мають вигляд:

$$q_+ = C_+ \exp\left[-\sqrt{\sigma/\mu}\,(x - x_0)\right],$$
$$q_- = C_- \exp\left[-\sqrt{\sigma/\mu}\,(x_0 - x)\right].$$

Підставляючи ці розв'язки в (15) і (18), одержуємо $C_+ = C_- = Q\big/\left(2\sqrt{\sigma\mu}\right)$.

Остаточно розв'язок задачі (14) запишемо у вигляді:

$$q(x) = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}}\begin{cases}\exp\left[-\sqrt{\sigma/\mu}\,(x - x_0)\right], & x \ge x_0,\\ \exp\left[-\sqrt{\sigma/\mu}\,(x_0 - x)\right], & x < x_0.\end{cases}$$

В результаті дифузії одержується розв'язок, який експоненціально і симетрично зменшується в обидва напрямки від точки $x = x_0$.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

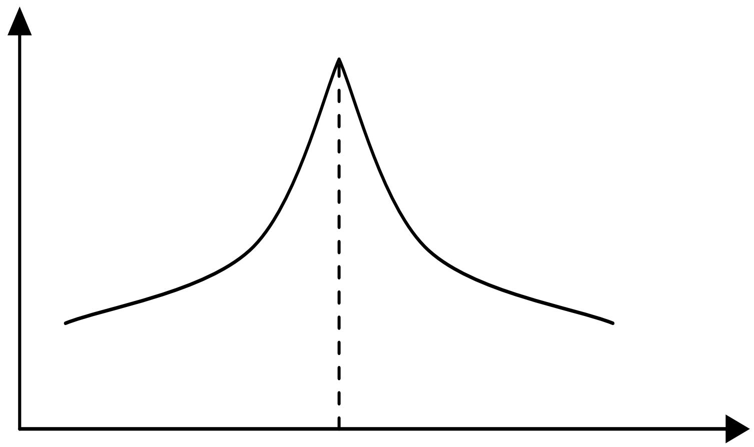

Рис.2 Аналітичний розв'язок спрощеної задачі (v=0).

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Розглянемо більш складну ситуацію, коли швидкість потоку повітря v відрізняється від нуля, тобто поширення домішок описується рівнянням

$$v\,dq/dx + \sigma q = \mu\,d^2q/dx^2 + Q\delta(x - x_0),$$

$v > 0,\ \ -\infty < x < +\infty.$

Аналогічно попередньому випадку одержимо дві задачі:

$$\mu\,d^2q_+/dx^2 - v\,dq_+/dx - \sigma q_+ = 0,\ \ q_+ = 0 \text{ при } x \to +\infty; \qquad \textbf{(19)}$$

$$\mu\,d^2q_-/dx^2 - v\,dq_-/dx - \sigma q_- = 0,\ \ q_- = 0 \text{ при } x \to -\infty. \qquad \textbf{(20)}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Розв’язки задач (19), (20) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} q_+ &= C_+ \exp\left\{-\left[\left(\sigma/\mu + v^2/\left(4\mu^2\right)\right)^{1/2} - v/(2\mu)\right](x - x_0)\right\}, x \ge x_0, \\ q_- &= C_- \exp\left\{-\left[\left(\sigma/\mu + v^2/\left(4\mu^2\right)\right)^{1/2} - v/(2\mu)\right](x_0 - x)\right\}, x < x_0. \end{aligned} \quad \textbf{(21),(22)}$$

Підставляючи (21), (22) в (15) і в (18), одержуємо $C_+ = C_- = Q/\left(4\sigma\mu + v^2\right)^{1/2}$.

В підсумку розв’язок задачі буде мати вигляд:

$$q(x) = \frac{Q}{\left(4\sigma\mu + v^2\right)^{1/2}} \begin{cases} \exp\left\{-\left[\sigma/\mu + v^2/\left(4\mu^2\right)\right]^{1/2}(x - x_0)\right\}, x \ge x_0, \\ \exp\left\{-\left[\sigma/\mu + v^2/\left(4\mu^2\right)\right]^{1/2}(x_0 - x)\right\}, x < x_0. \end{cases}$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

В загальному випадку задача прогнозування забруднення може бути визначена як розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}U_i\frac{\partial q}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial q}{\partial x_i}k_i\frac{\partial q}{\partial x_i}-\alpha q, \qquad \textbf{(23)}$$

де t – час;

$\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega,\Omega\in R^3$ – просторова область;

$q(t,\bar{x})$ – концентрація домішки в точці;

$\bar{U}(U_1,U_2,U_3)$ – вектор швидкості вітру;

k – тензор коефіцієнтів турбулентної дифузії;

α – інтенсивність поглинання домішки;

при певних початкових і граничних умовах

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

В декартовій системі координат осі x_1 і x_2, розташовані в горизонтальній площині, позначають через x і y, а вертикальну вісь x_3 – через z; відповідно $U_1 = u, U_2 = v, U_3 = w$ і $k_1 \equiv k_x, k_2 \equiv k_y, k_3 \equiv k_z$.

При розв'язуванні практичних задач вигляд рівняння (23) може спрощуватись

якщо вісь x орієнтована за напрямком середньої швидкості вітру, то $v = 0$;

якщо вертикальний рух в атмосфері над горизонтальною однорідною підстилаючою поверхнею малий, то у випадку легких домішок можна покладати $w = 0$;

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

якщо ж розглядається важка домішка, то w є швидкістю осідання входить в рівняння зі знаком “мінус”;

при наявності вітру можна знехтувати членом з k_x, що враховує дифузію по осі x.

За періоди часу, які можна порівняти з часом переносу домішок від джерела до розглядуваної точки, процес дифузії стабілізується (Марчук,1982).

Таким чином, вихідне прогностичне рівняння (23) зводиться до рівняння:

$$u\frac{\partial q}{\partial x} - w\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial q}{\partial y} - \alpha q. \qquad \mathbf{(24)}$$

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

При наявності точкового джерела з координатами $x=0, y=0, z=H$ гранична умова матиме вигляд:

$$uq = Q\delta(y)\delta(z-H) \text{ при } x=0,$$

де Q – викид речовин від джерела за одиницю часу; $\delta(\xi)$ – дельта-функція.

Граничні умови .

- ✓ на нескінченній віддалі від джерела беруться згідно з природнім припущенням про те, що концентрація прямує до нуля: $q \to 0$ при $|y|,|z| \to \infty$.
- ✓ коли домішки поширюються над поверхнею води, вона поглинає домішки, тому їх концентрація безпосередньо біля поверхні: $q=0$ при $z=0$.
- ✓ з поверхнею землі домішки зазвичай слабко взаємодіють, тому середній турбулентний потік домішки біля поверхні землі достатньо малий $k_z \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0$ при $z=0$.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Інтегровані прогностичні рівняння (за Берляндом).

Використання залежності, запропонованої Берляндом (1963): $k_y = k_0 u$, дозволяє спростити інтегрування вихідного рівняння (24), виразивши розв'язок для випадку точкового джерела $q(x, y, z)$ через розв'язок для лінійного джерела $q'(x, z)$ за допомогою співвідношення:

$$q(x, y, z) = \frac{q'(x, z)}{(2\pi k_0 x)^{(1/2)}} \exp\left(-y^2\right) / \left(4 k_0 x\right), \qquad \textbf{(25)}$$

де q' задовільняє рівняння:

$$u \frac{\partial q'}{\partial x} - w \frac{\partial q'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial q'}{\partial z} - \alpha q', \qquad \textbf{(26)}$$

і початкову умову:

$$uq' = Q\delta(z - H) \text{ при } x = 0.$$

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

У випадку, коли u і k_z задані степеневими функціями від z, розв'язок рівняння (26) знаходиться аналітично.

Для легкої домішки, що зберігається ($w = \alpha = 0$), при

$$u = u_1 z^n, k_z = k_1 z, (u_1, k_1 = const)$$

з врахуванням (25), згідно робіт Берлянда (1963,1975), наземна концентрація при $z = 0$:

$$q = \frac{Q}{2(1+n)k_1(2\pi k_0 x)^{(1/2)}} \exp\left[-\left(u_1 H^{1+n}\right)/\left((1+n)^2 k_1 x\right) - y^2/(4k_0 x)\right]$$

Якщо відомі очікувані значення швидкості вітру, показника стійкості атмосфери і потужності викиду, то можна дати прогноз концентрації домішки.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Метод скінченних різниць.

Визначення похідної неперервної функції q аргументу z

$$\frac{dq(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{q(z+\Delta z)-q(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{q(z)-q(z-\Delta z)}{\Delta z}.$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{q(z+\Delta z)-q(z)}{\Delta z}\approx\frac{q_{j+1}-q_j}{z_{j+1}-z_j}.$$

***Таблиця 1**. Прості скінченно -різницеві формули для похідних.*

Похідна	Формула	Порядок точності
$\frac{\partial q}{\partial z}$	$\frac{q_{j+1}-q_j}{\Delta z}$	Перший (різницевий вперед)
	$\frac{q_j-q_{j-1}}{\Delta z}$	Перший (різницевий назад)
	$\frac{q_{j+1}-q_{j-1}}{\Delta z}$	Другий (центральні різниці)
$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$	$\frac{q_{j+1}-2q_j+q_{j-1}}{\Delta z^2}$	Другий (центральні різниці)

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Метод скінченних елементів у формі методу Гальоркіна.

Нехай W^{∞} – гільбертів простір функцій, визначених на $\Omega\times[0,T]$, $(\cdot,\cdot)$– скалярний добуток на W^{∞}, W^{N} – скінченновимірний підпростір $W^{N}\subset W^{\infty}$.

Нехай $q^{*}\in W^{\infty}$ – шуканий точний розв'язок диференціальної задачі (23).

Для будь-якої функції $q\in W^{\infty}, q\neq q^{*}$, нев'язкою рівняння

$$A\cdot q-f=0, \qquad (27)$$

$A[\cdot]=\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\left[u_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]+\alpha\right\}[\cdot]$; $f(\bar{x},t)$– функція правої частини,

назвемо величину

$$e=A\cdot q-f.$$

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Зрозуміло, що

$$e^{*} = A \cdot q^{*} - f = 0.$$

Введемо бази в просторах W^{∞} і W^{N} так, щоб орти бази підпростору W^{N} $\{W_n(\bar{x},t)\}_{n=0}^{N}$ були частиною бази простору W^{∞} $\{W_n(\bar{x},t)\}_{n=0}^{\infty}$. Наближений розв'язок рівняння (23) будемо шукати як функцію $\tilde{q} \in W^{N}$:

$$\tilde{q} = \sum_{n=0}^{N} \tilde{q}_n W_n(\bar{x},t), \qquad \textbf{(28)}$$

де $\tilde{q}_n$ – коефіцієнти розкладу $\bar{q}$ за базі $\{W_n\}_{n=0}^{N}$.

Δt

Побудова диференціальної моделі поширення забруднень

Задача пошуку наближеного розв’язку $\overline{q}$ тоді зводиться до визначення таких коефіцієнтів $\tilde{q}_n$, які надають мінімум невязці $\tilde{e} = A^*\overline{q} - f$ в значенні норми $|\tilde{e}| = (\tilde{e}, \tilde{e})$. У відповідності з нерівністю Коші-Буняковського функція $\tilde{e}$ дістає мінімальне по нормі значення , якщо наближений розвязок $\tilde{q}_n$ є проекцією точного розвязку q^* на підпростір W^N. В цьому випадку нев’язка перпендикулярна ортам бази підпростору W^N

$$\left(A^*\tilde{q} - f, w_n\right) = 0, n = 0, ..., N. \qquad \textbf{(29)}$$

Оскільки $\tilde{q}$ у відповідності з (28) визначається коефіцієнтами $\tilde{q}_{n,} n = 0, ..., N$, то система (29) є системою $(N+1)$ рівнянь з $(N+1)$ невідомими, з яких визначаються коефіцієнти $\tilde{q}_n, n = 0, ..., N$. Тоді функція (28) з обчисленими значеннями коефіцієнтів є розв’язком рівняння (27), який визначений методом Гальоркіна.