

Luồng trên mạng V0.2

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 18 tháng 1 năm 2021

Tài liệu tham khảo

- ▶ S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, and U. V. Vazirani, *Algorithms*, July 18, 2006.

Nội dung

Giới thiệu

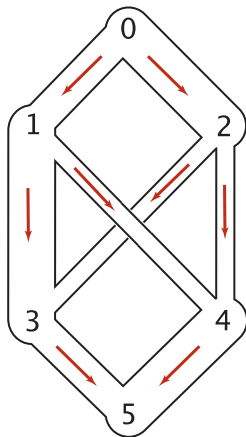
Bài toán luồng cực đại trên mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

Luồng cực đại và lát cắt cực tiểu

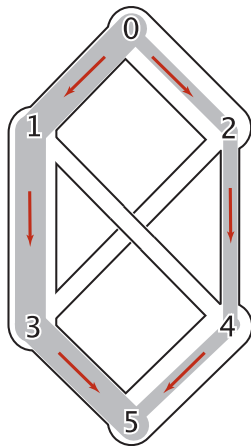
Tính hiệu quả của thuật toán

Bài toán chuyển dầu



	khả năng
$0 \rightarrow 1$	2
$0 \rightarrow 2$	3
$1 \rightarrow 3$	3
$1 \rightarrow 4$	1
$2 \rightarrow 3$	1
$2 \rightarrow 4$	1
$3 \rightarrow 5$	2
$4 \rightarrow 5$	3

Bài toán chuyển dầu



	khả năng	luồng
$0 \rightarrow 1$	2	2
$0 \rightarrow 2$	3	1
$1 \rightarrow 3$	3	2
$1 \rightarrow 4$	1	0
$2 \rightarrow 3$	1	0
$2 \rightarrow 4$	1	1
$3 \rightarrow 5$	2	2
$4 \rightarrow 5$	3	1

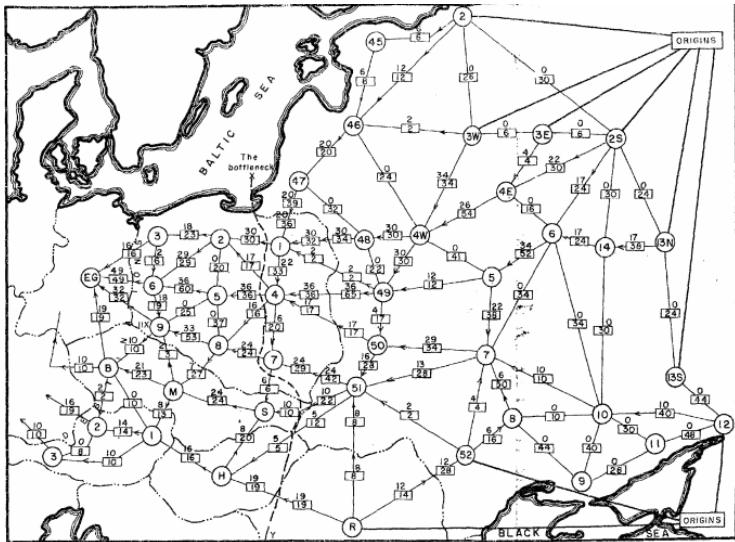
Điều kiện bảo toàn lưuồng

Các điểm trung chuyển không có khả năng lưu trữ dầu

- ▶ Ngoại trừ đỉnh đầu (mỏ dầu) và đỉnh cuối (nhà máy lọc dầu),
- ▶ tại mỗi đỉnh u , lượng dầu đến bằng lượng dầu ra khỏi u .

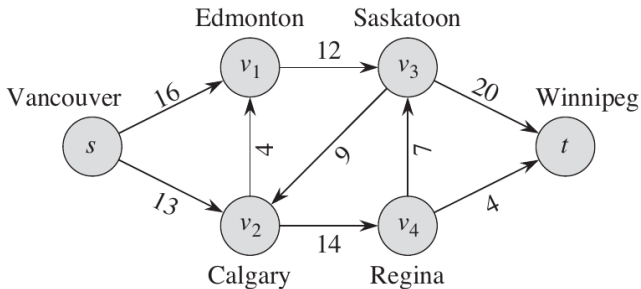
	khả năng	lưuồng			
$0 \rightarrow 1$	2	2	Đỉnh	Lượng đến	Lượng ra
$0 \rightarrow 2$	3	1	0		
$1 \rightarrow 3$	3	2	1		
$1 \rightarrow 4$	1	0	2		
$2 \rightarrow 3$	1	0	3		
$2 \rightarrow 4$	1	1	4		
$3 \rightarrow 5$	2	2	5		
$4 \rightarrow 5$	3	1			

Lịch sử



Bài tập

Hãy tìm cách chuyển **càng nhiều hàng hóa càng tốt** từ s tới t mà không vượt quá khả năng thông qua trên mỗi cạnh.



Nội dung

Giới thiệu

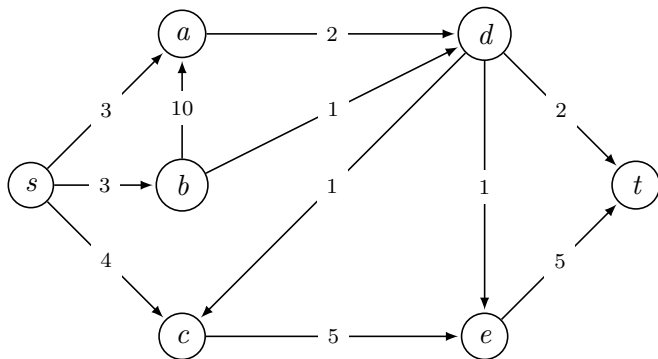
Bài toán luồng cực đại trên mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

Luồng cực đại và lát cắt cực tiểu

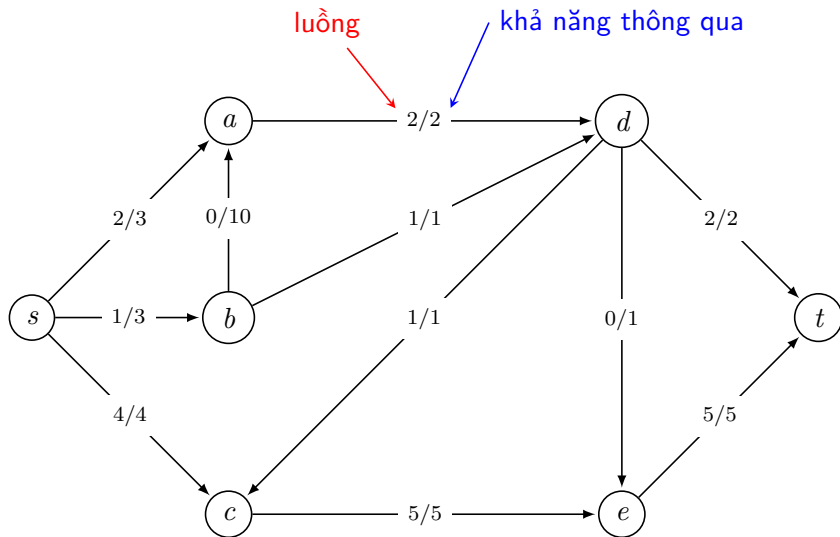
Tính hiệu quả của thuật toán

Mô hình bài toán



- ▶ Đồ thị có hướng biểu diễn mạng đường ống, dầu có thể được chuyển qua đường ống này
- ▶ Mục tiêu là chuyển dầu từ s đến t , **nhieu nhất có thể**.

Một luồng chuyển 7 đơn vị dầu từ s tới t



Mạng

Định nghĩa

Một mạng bao gồm

- ▶ một đồ thị có hướng $G = (V, E)$;
- ▶ hai đỉnh đặc biệt $s, t \in V$, tương ứng, gọi là **đỉnh nguồn** và **đỉnh đích** của G ;
- ▶ và trên mỗi cạnh e của G có gán một giá trị số c_e , gọi là **khả năng thông qua**.

Bài toán

Ta muốn chuyển nhiều dầu nhất có thể từ s tới t mà không vượt quá khả năng thông qua trên mỗi cạnh.

Định nghĩa (Luồng)

Một luồng trên mạng G là một hàm

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

gắn mỗi cạnh e của G với một giá trị số f_e , sao cho:

1. Không vi phạm khả năng thông qua:

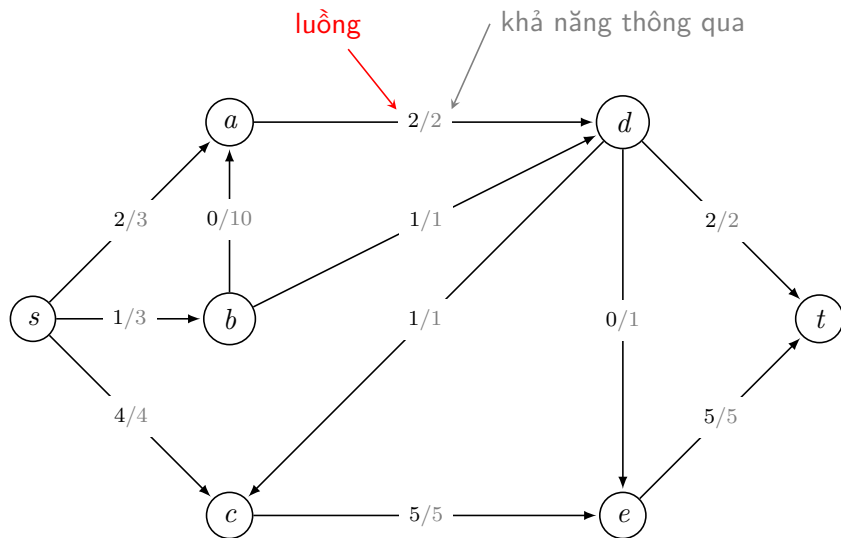
$$0 \leq f_e \leq c_e \quad \text{với mọi } e \in E$$

2. Với mọi đỉnh u , ngoại trừ s và t , tổng luồng vào u bằng tổng luồng ra khỏi u :

$$\sum_{(w,u) \in E} f_{wu} = \sum_{(u,z) \in E} f_{uz}.$$

Nói cách khác, mạng là **bảo toàn** (theo luật Kirchhoff).

Luồng và lượng dầu chuyển



Định nghĩa

Giá trị của luồng f , ký hiệu $\text{giá-trị}(f)$, là tổng lượng gửi từ s đến t . Theo luật bảo toàn, $\text{giá-trị}(f)$ cũng bằng lượng rời khỏi s :

$$\text{giá-trị}(f) = \sum_{(s,u) \in E} f_{su}.$$

- ▶ Mục đích của chúng ta là tìm được luồng có giá trị cực đại.
- ▶ Tương đương, tìm cách gán giá trị

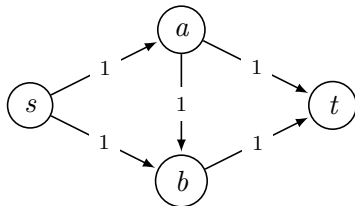
$$\{f_e : e \in E\}$$

thỏa mãn một số ràng buộc.

- ▶ Đây là một bài toán **quy hoạch tuyến tính**.

Ví dụ

Bài toán tìm luồng cực đại trong mạng



tương đương với bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \max \quad & f_{sa} + f_{sb} \\ 0 \leq \quad & f_{sa}, f_{sb}, f_{ab}, f_{at}, f_{bt} \leq 1 \\ & f_{sa} = f_{at} + f_{ab} \\ & f_{sb} + f_{ab} = f_{bt} \end{aligned}$$

Nội dung

Giới thiệu

Bài toán luồng cực đại trên mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

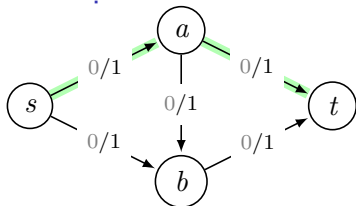
Luồng cực đại và lát cắt cực tiểu

Tính hiệu quả của thuật toán

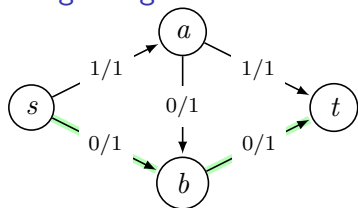
Thuật toán tham lam

- ▶ Bắt đầu với luồng 0
- ▶ **Lặp lại**: Chọn một đường đi thích hợp từ s tới t và tăng luồng nhiều nhất có thể dọc theo đường này.

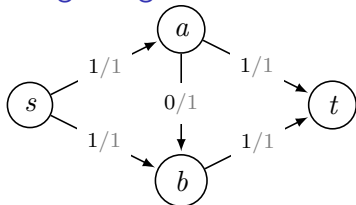
Khởi tạo



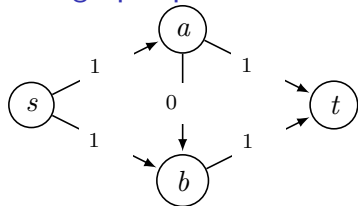
Tăng luồng



Tăng luồng

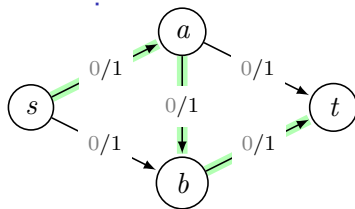


Luồng cực đại

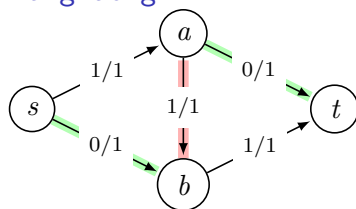


Ví dụ: Cần hủy một phần luồng

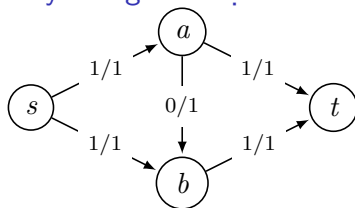
Khởi tạo



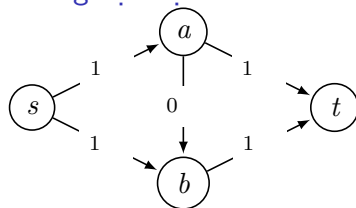
Tăng luồng



Hủy luồng trên cạnh $a \rightarrow b$



Luồng cực đại



Tìm đường tăng luồng

Tìm cạnh (u, v) có một trong hai kiểu

- ▶ $(u, v) \in E$ và khả năng thông qua c_{uv} vẫn chưa đầy. Khi đó f_{uv} có thể tăng thêm nhiều nhất là

$$c_{uv} - f_{uv}.$$

- ▶ $(v, u) \in E$ và có một luồng qua đó, tức là $f_{vu} > 0$. Khi đó ta có thể giảm một phần hoặc toàn bộ f_{vu} .

Đường tăng luồng

Cạnh gốc

- ▶ $e = (u, v) \in E$
- ▶ Lưu lượng f_e
- ▶ Khả năng c_e

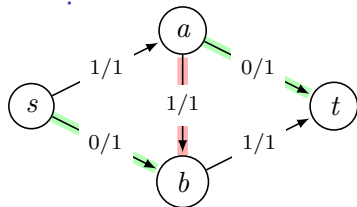
Khả năng thông qua còn lại

$$c^f(e) = \begin{cases} c_e - f_e & \text{nếu } e \in E \\ f_e & \text{nếu } e^R \in E. \end{cases}$$

Cạnh ngược

- ▶ $e^R = (v, u)$
- ▶ “Giảm” lưu lượng f_e đã gửi

Ví dụ



Đồ thị tăng luồng

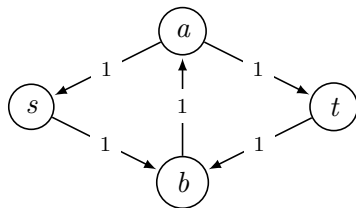
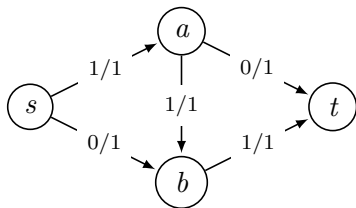
Định nghĩa

Đồ thị tăng luồng của mạng G với luồng f là đồ thị $G^f = (V, E_f, c^f)$ với

$$E_f = \{e : f_e < c_e\} \cup \{e^R : f_e > 0\}.$$

Ví dụ

Mạng G với luồng f và đồ thị tăng luồng G^f tương ứng.



Đường tăng luồng

Định nghĩa

- ▶ Một **đường tăng luồng** là một đường đi từ s đến t trong đồ thị tăng luồng G^f .
- ▶ Khả năng thông qua của đường tăng luồng P là

$$c^f(P) = \min\{c^f(e) : e \in P\}$$

Tăng-luồng(f, P)

$$\delta = c^f(P)$$

foreach cạnh $e \in P$:

$$\text{if } (e \in E) \quad f_e = f_e + \delta$$

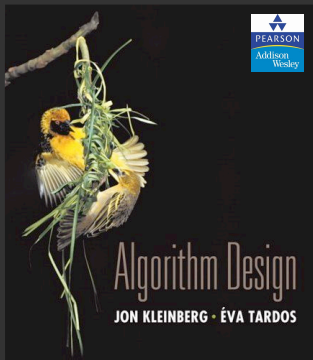
$$\text{else} \quad f(e^R) = f(e^R) - \delta$$

return f

Thuật toán Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson (G)

```
foreach cạnh  $e \in E$ :  $f_e = 0$   
 $G^f$  = đồ thị tăng luồng của  $G$  và  $f$   
while còn đường tăng luồng  $P$  trong  $G^f$ :  
     $f = \text{Tăng-luồng}(f, P)$   
    Cập nhật  $G^f$   
return  $f$ 
```



7. NETWORK FLOW I

► *Ford-Fulkerson demo*

Lecture slides by Kevin Wayne

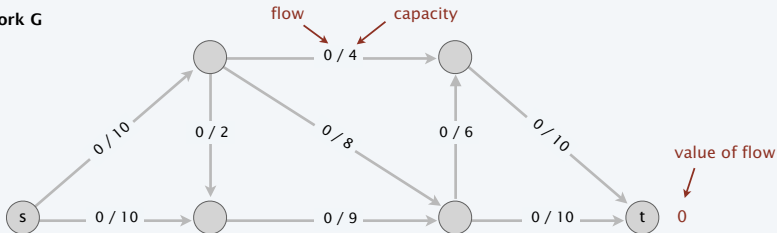
Copyright © 2005 Pearson-Addison Wesley

Copyright © 2013 Kevin Wayne

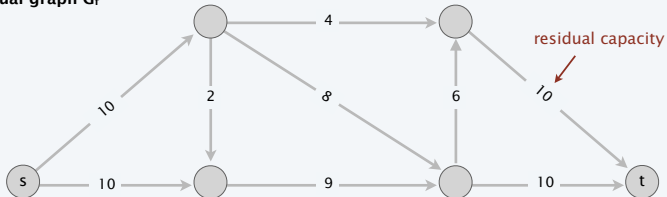
<http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos>

Ford-Fulkerson algorithm demo

network G

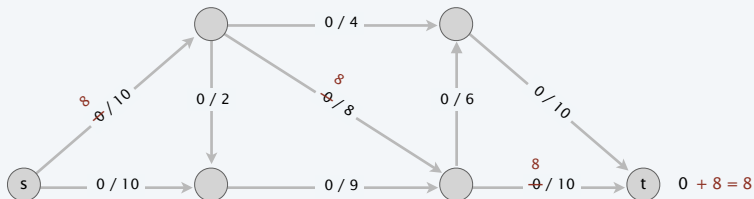


residual graph G_f

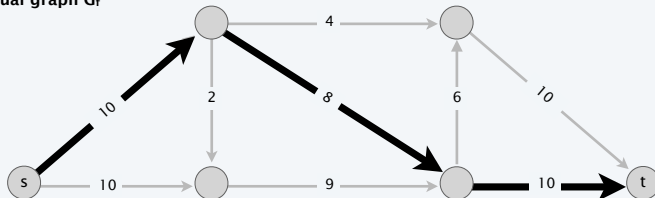


Ford-Fulkerson algorithm demo

network G

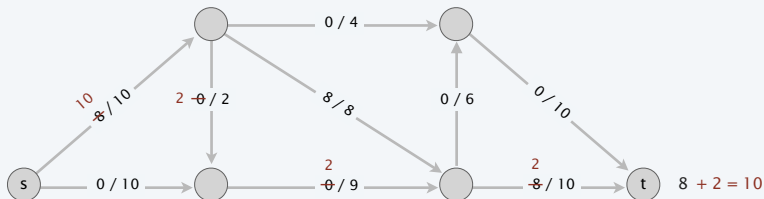


residual graph G_f

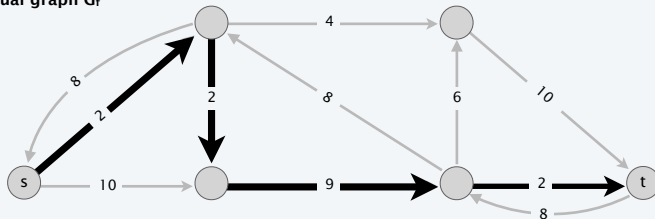


Ford-Fulkerson algorithm demo

network G

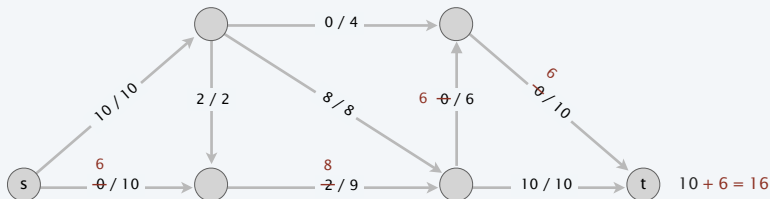


residual graph G_f

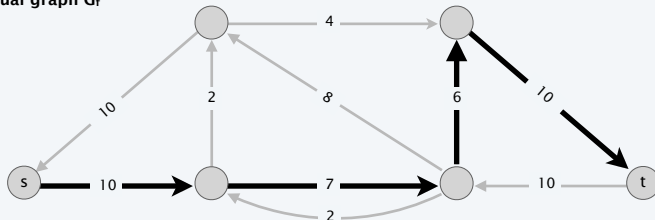


Ford-Fulkerson algorithm demo

network G

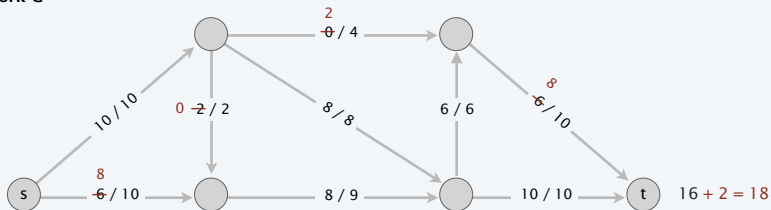


residual graph G_f

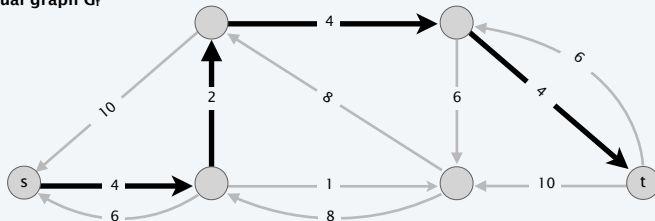


Ford-Fulkerson algorithm demo

network G

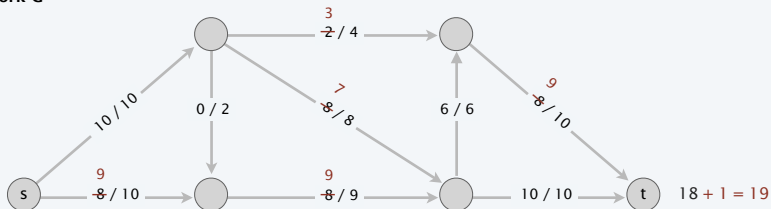


residual graph G_f

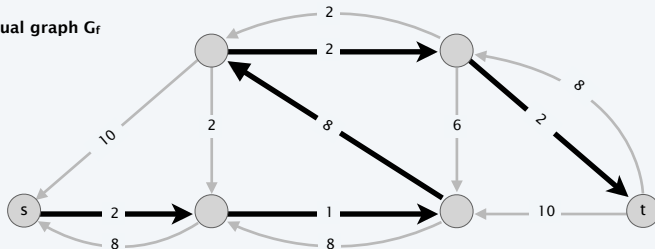


Ford-Fulkerson algorithm demo

network G

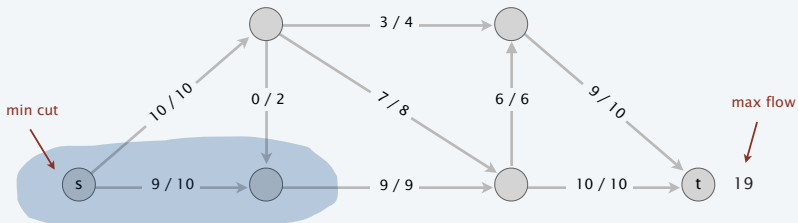


residual graph G_f

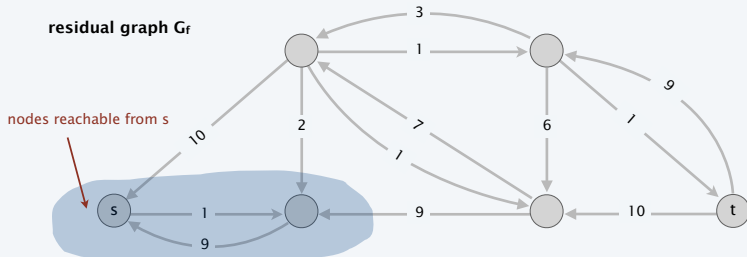


Ford-Fulkerson algorithm demo

network G



residual graph G_f



Nội dung

Giới thiệu

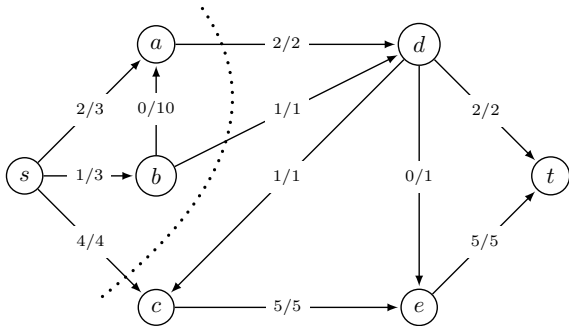
Bài toán luồng cực đại trên mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

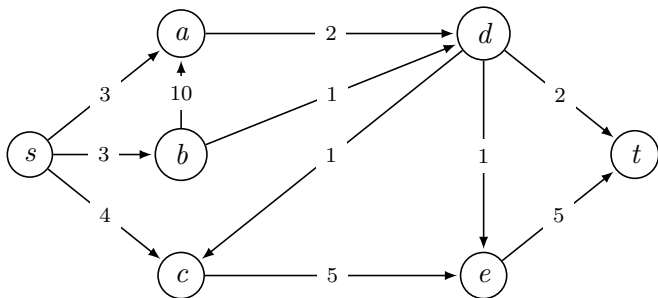
Luồng cực đại và lát cắt cực tiểu

Tính hiệu quả của thuật toán

Phân hoạch $L = \{s, a, b\}$ và $R = \{c, d, e, t\}$



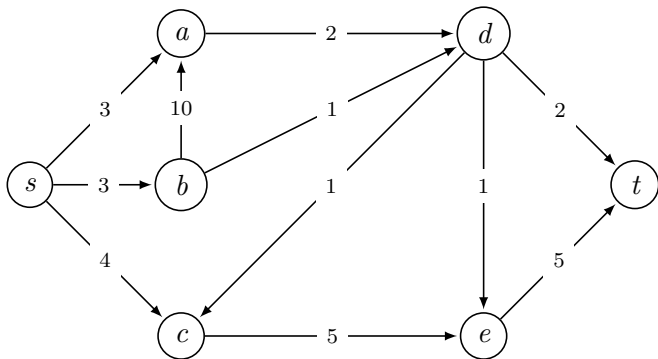
- ▶ Lượng dầu chuyển từ s sang t phải chuyển từ L sang R .
- ▶ Không luồng nào có thể vượt tổng khả năng thông qua của các cạnh từ L sang $R = 4 + 1 + 2 = 7$.
- ▶ Vậy luồng này là tối ưu.



Định nghĩa

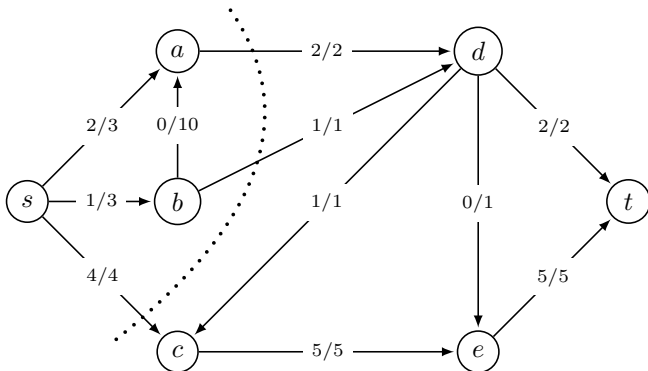
- ▶ Một (s, t) -**lát cắt** (hay ngắn gọn là lát cắt) là một cách phân hoạch tập đỉnh thành hai phần L và R sao cho $s \in L$ và $t \in R$.
- ▶ **Khả năng thông qua của lát cắt (L, R)** là tổng khả năng thông qua của các cạnh từ L đến R . Cụ thể,

$$\text{khả-năng-thông-qua}(L, R) = \sum_{u \in L, v \in R} c_{uv}.$$



Bài toán lát cắt cực tiểu

Tìm lát cắt có khả năng thông qua là nhỏ nhất.



Chặn trên cho luồng

Với mỗi luồng f và mỗi lát cắt (L, R) , ta luôn có

$$\text{giá-trị}(f) \leq \text{khả-năng-thông-qua}(L, R).$$

Định lý (Max Flow-Min Cut)

Giá trị của luồng cực đại trong mạng bằng với khả năng thông qua của lát cắt cực tiểu.

Chứng minh.

- ▶ Xét f là luồng tìm được do thuật toán Ford-Fulkerson. Khi đó t không đến được từ s trong đồ thị G^f .
- ▶ Xét L là các nút đạt được từ s , và đặt $R = V - L$. Vậy (L, R) là một lát cắt.
- ▶ Ta khẳng định rằng

$$\text{giá-trị}(f) = \text{khả-năng-thông-qua}(L, R).$$

- ▶ Bởi vì: Mọi cạnh từ L tới R phải đã đầy khả năng thông qua, và mọi cạnh từ R tới L phải có luồng bằng 0. □

Định lý (Luồng Nguyên)

Nếu các khả năng thông qua là số nguyên, thì tồn tại luồng cực đại nguyên.

Chứng minh.

Thuật toán Ford-Fulkerson kết thúc và luồng cực đại tìm được là luồng nguyên. □

Q & A

Liên quan đến thuật toán Ford-Fulkerson

- ▶ Làm thế nào tính được lát cắt cực tiểu? Dễ thôi, xem chứng minh Định lý Max Flow-Min Cut.
- ▶ Làm thế nào để tìm đường tăng luồng? Dùng BFS!
- ▶ Nếu thuật toán kết thúc thì luồng thu được có là luồng cực đại? Có chứ. Lát cắt cực tiểu là bằng chứng.
- ▶ Thuật toán có luôn kết thúc? Có, nếu khả năng thông qua là số nguyên. Mỗi lần tìm được đường tăng luồng là luồng lại tăng lên. Luồng không thể tăng vô hạn.

Nội dung

Giới thiệu

Bài toán luồng cực đại trên mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

Luồng cực đại và lát cắt cực tiểu

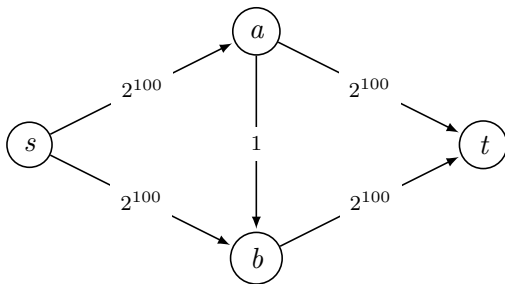
Tính hiệu quả của thuật toán

Trường hợp tồi tệ của thuật toán

Kể cả khi khả năng thông qua là tối ưu, số đường tăng luồng cần tìm có thể lớn bằng giá trị của luồng!

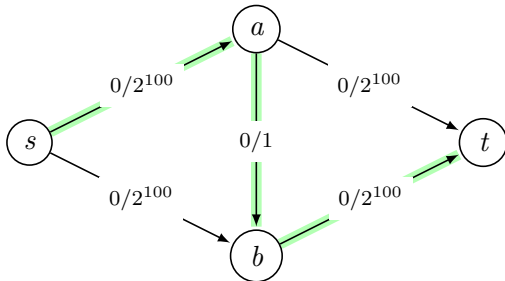
Ví dụ

Mạng sau có luồng cực đại là 2×2^{100} và thuật toán Ford-Fulkerson có thể dùng đến 2×2^{100} đường tăng luồng để tìm được luồng cực đại.



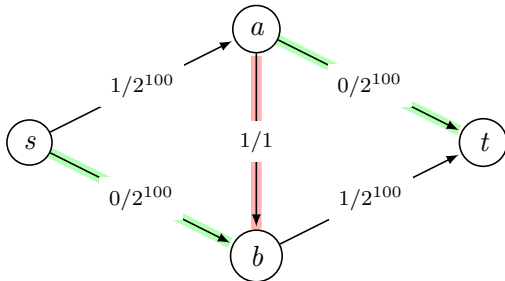
Ví dụ

Khởi tạo và tìm đường tăng luồng đầu tiên



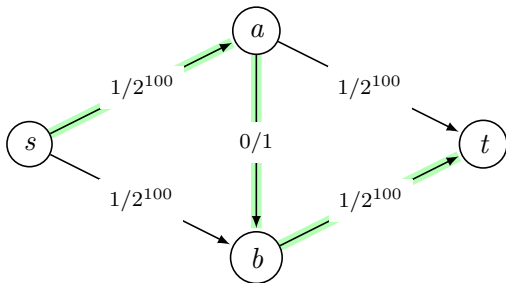
Ví dụ

Tìm đường tăng luồng thứ hai



Ví dụ

Tìm đường tăng luồng thứ ba



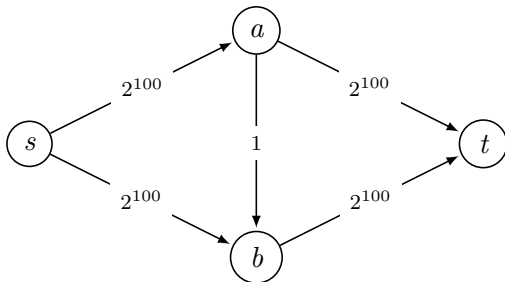
Tiếp tục $2 \times (2^{100} - 1)$ lần như vậy, ta được luồng tối ưu.

Trường hợp tồi tệ của thuật toán

- ▶ Số đường tăng luồng cần tìm có thể lớn bằng giá trị của luồng!
- ▶ Tuy nhiên, trường hợp này có thể tránh được nếu lựa chọn đường tăng luồng cẩn thận (**Ngắn nhất** hoặc **Đầy nhất**).

Ví dụ

Nếu chọn đường đi ngắn nhất, ta chỉ cần tìm 2 hai đường tăng luồng để được luồng cực đại.



Lựa chọn đường tăng luồng

Đường tăng luồng	số đường	cài đặt
Đường ngẫu nhiên	$\leq m\ell$	hàng đợi ngẫu nhiên
Đường DFS	$\leq m\ell$	ngăn xếp (DFS)
Đường ngắn nhất	$\leq 1/2mn$	hàng đợi (BFS)
Đường đầy nhất	$\leq m \ln(m\ell)$	hàng đợi ưu tiên

Bảng: Đồ thị có trọng số với n đỉnh và m cạnh, và các khả năng thông qua là số nguyên trong khoảng 1 đến ℓ

Bài tập

Hãy chạy thuật toán Ford-Fulkerson để tìm luồng cực đại cho mạng sau. Bạn nên dùng thuật toán BFS để tìm đường tăng luồng.

