Định lý 2.18 $C_0 = 1$ và $C_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_n$

Số mất thứ tự

Định nghĩa 2.4 Cho số nguyên dương n, số mất thứ tự, ký hiệu D_n hoặc $!n$ là số hoán vị của tập hợp n phần tử sao cho không có phần tử nào xuất hiện ở vị trí ban đầu.

Định lý 2.19

$$!n = (n-1)(!(n-1) + !(n-2)$$

với

$$0! = 1, !1 = 0.$$

Định lý 2.20

$$!n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$!n = n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot !(n-i)$$

$$!n = n[!(n-1)] + (-1)^n$$

Bài toán phủ bằng các quân cờ domino

2.3.3 Bài tập

1. Cho a và b là các số nguyên dương với a là ước của b. Chứng minh rằng một bàn cờ $m \times n$ có thể phủ được bằng các hình $a \times b$ khi và chỉ khi a là ước của cả m và n và b là ước của m hoặc ước của n.
2. Một bàn cờ 6×6 được phủ bởi 18 quân domino. Chứng minh rằng có thể cắt dọc hoặc ngang bàn cờ mà không có quân domino nào bị cắt.

3. Đường cắt trong bài 2 được gọi là đường chia. Phủ bàn cờ 8×8 bằng các quân cờ domino sao cho không có đường chia.
4. Cho S_n là bàn cờ dạng bậc thang có $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ô. Chứng minh rằng S_n không thể phủ được bằng các quân cờ domino.
5. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$
6. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$
7.
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$$
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$$
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{1}{3}4^{n-1} - 3^{n-1} - +2^{n-1}) + \frac{1}{3}}{2}$$
$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{1}{4}5^{n-1} - 4^{n-1} + \frac{3}{2}3^{n-1} + 2^{n-1} - \frac{1}{4}}{3!}$$
8.
$$!n = \left[\frac{n!}{e}\right] = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n \geq 1$$
$$!n = \left\lfloor (e + e^{-1})n! \right\rfloor - \lfloor en! \rfloor, \quad n \geq 2$$
9. Chứng minh rằng số Fibonacci thứ n, $f_n = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left(\begin{matrix} n-i \\ i-1 \end{matrix} \right)$
10. Gọi $f(n)$ là số Fibonacci thứ n. Cho m và n là các số nguyên dương.
    (a) Chứng minh rằng nếu $m \vdots n$ thì $f(m) \vdots f(n)$.
    (b) Cho $d = CLN(m,n)$. Chứng minh rằng $f(d) = CLN(f(m), f(n))$
11. Số Lucas là các số $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$, $l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$, giống dãy số Fibonacci nhưng với điều kiện đầu khác $l_0 = 2$, $l_1 = 1$. Chứng minh rằng
    (a) $l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ với $n \geq 1$.

(b) $l_0^2 + l_1^2 + \ldots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$, với $n \geq 0$.

12. Tìm công thức truy hồi của h_n là số phần của mặt phẳng được chia bởi n đường thẳng đôi một cắt nhau trong đó không có ba đường thẳng nào đồng quy.
13. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh. Tìm công thức truy hồi của h_n là số cách nối các cặp đỉnh sao cho không có 2 đoạn thẳng nào cắt nhau. Tìm công thức truy hồi cho h_n.

2.4 Hàm sinh

2.4.1 Khái niệm hàm sinh

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu về công cụ hàm sinh để giải bài toán đếm. Về cơ bản, hàm sinh là chuỗi Taylor (chuỗi khai triển lũy thừa), nghĩa là hàm khả vi vô hạn lần. Nếu chúng ta có thể tìm được hàm và chuỗi Taylor của nó thì hệ số của chuỗi Taylor cho ta nghiệm của bài toán. Về cơ bản, trong phần này, chúng ta không xem xét tính hội tụ của chuỗi mà sẽ thao tác trên các chuỗi lũy thừa một cách hình thức.
Cho $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ là một *dãy số*

$$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots.$$

Khi đó hàm sinh của dãy số là *chuỗi số*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n + \cdots.$$

Chúng ta cũng quy ước nếu dãy số hay chuỗi số được đánh thứ tự bắt đầu từ h_1 thì xem $h_0 = 0$.
Về cơ bản, phương pháp sử dụng hàm sinh hoặc sẽ cho chúng ta công thức tường mình cho bài toán đếm, hoặc các hệ số trong biểu diễn chuỗi sẽ cho chúng ta đáp án bài toán đếm.
Hai ví dụ đơn giản nhất của dãy *cấp số cộng*, còn gọi là *dãy số học*

$$h_0, h_0 + q, h_0 + 2q + ldots, h_0 + nq, \ldots$$