



Đề thi Toán rời rạc

Một số khái niệm:

Cho đơn đồ thị G . **Khoảng cách** giữa hai đỉnh của G là độ dài (số cạnh) của đường đi ngắn nhất nối giữa hai đỉnh đó. **Bán kính** của G là số nhỏ nhất trong số các khoảng cách từ một đỉnh tới đỉnh xa nhất. **Đường kính** của một đồ thị là khoảng cách lớn nhất giữa các cặp đỉnh thuộc đồ thị đó.

Đồ thị bù của đơn đồ thị $G = (V, E)$ là đơn đồ thị $\bar{G} = (V, E')$ trong đó với mọi $u, v \in V$, $(u, v) \in E'$ khi và chỉ khi $(u, v) \notin E$.

Trong một đơn đồ thị, một tập đỉnh được gọi là tập **độc lập** nếu hai đỉnh bất kỳ của tập là không kề nhau. **Số độc lập** của một đồ thị là lực lượng lớn nhất của các tập độc lập trong đồ thị.

Một cây n đỉnh được gọi là **đẹp** nếu ta có thể gán nhãn các đỉnh bằng các số $1, 2, \dots, n$ sao cho trị tuyệt đối hiệu nhãn các cặp đỉnh kề nhau là khác nhau.

Một cây được gọi là một **sâu bướm** nếu nó chứa một đường đi sao cho mọi đỉnh không thuộc đường đi này đều kề với một đỉnh thuộc đường đi đó.

Số giao nhau của một đồ thị là số tối thiểu điểm giao nhau giữa các cạnh của đồ thị không tính các đỉnh và mỗi điểm giao nhau không có ba cạnh nào đi qua.

Bề dày của một đồ thị G là số đồ thị con phẳng tối thiểu của G sao cho hợp các đồ thị này cho ta G .



Câu 0: Với \overline{ab} là tháng sinh của bạn, \overline{cd} là ngày sinh của bạn, cho biết hoán vị thứ \overline{abcd} trong số các hoán vị của 7 số tự nhiên đầu tiên (được sắp xếp theo thứ tự từ điển).

Hướng dẫn làm bài:

Với kết quả là hoán vị ở câu số 0, trong mỗi phần trong 7 phần sau, chọn mỗi phần một câu để làm tương ứng với hoán vị của bạn. Ví dụ, hoán vị bạn tìm được là 2, 1, 3, 4, 6, 7, 5, phần 1 bạn làm câu 2, phần 2 làm câu 1, phần 3 làm câu 3, phần 4 làm câu 4, phần 5 làm câu 6, phần 6 làm câu 7 và phần 7 làm câu 5.

Trong trường hợp không thể hoàn thành một câu ở một phần nào đó, bạn có thể chọn một câu có số tương ứng ở phần 8 hoặc một câu ở phần 9 để thay thế, yêu cầu ghi rõ câu thay thế. Chú ý rằng, mỗi câu ở phần 8 có 0,5 điểm, mỗi câu ở phần 9 có 0,25 điểm, mỗi câu ở 7 phần còn lại có 1 điểm.



Phần 1:

Câu 1: Mô tả khái niệm tập hợp có lực lượng không đếm được. Mô tả khái niệm tập hợp rời rạc.

Câu 2: Mô tả khái niệm tập hợp có lực lượng đếm được. Mô tả khái niệm tập hợp liên tục.

Phần 2:

Câu 1: Mô tả về máy Turing, bài toán về tính dừng của thuật toán (Halting problem).

Câu 2: Nêu định đề Church – Turing, cho biết ý nghĩa của định đề này.

Câu 3: Mô tả khái niệm bài toán lớp P , và lớp NP , giả thuyết thời gian mũ (Exponential time hypothesis), ý nghĩa của giả thuyết này đối với giả thuyết $P = NP$.

Câu 4: Mô tả về pháp dẫn thời gian đa thức, lớp các bài toán NPC , nêu một ví dụ về bài toán thuộc lớp NPC , ý nghĩa đối với giả thuyết $P = NP$.

Câu 5: Mô tả khái niệm bài toán lớp P , NP , NP – trung gian.

Câu 6: Mô tả về phép dẫn thời gian đa thức, lớp các bài toán NP – khó, NP – dễ và NP – tương đương.

Câu 7: Mô tả các khái niệm O – lớn, Θ – lớn và Ω – lớn.

Phần 3:

Câu 1: Cho X là tập có n phần tử, có bao nhiêu bộ có thứ tự (A, B) thoả mãn:

$$A \subseteq B \subseteq X.$$

Câu 2: Trên tập n phần tử có bao nhiêu quan hệ:

a) Đối xứng;



- b) Bất đối xứng;
- c) Phản xạ và đối xứng.

Câu 3: Trên tập n phần tử có bao nhiêu quan hệ:

- a) Phản đối xứng;
- b) Bất phản xạ;
- c) Không phản xạ và cũng không bất phản xạ.

Câu 4: Tìm công thức truy hồi cho $p(n)$ là số quan hệ tương đương trên tập có n phần tử.

Câu 5: Tìm biểu diễn tường minh của dãy a_n thoả mãn công thức truy hồi:

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}},$$

với $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Câu 6: Tìm biểu diễn tường minh của dãy a_n thoả mãn công thức truy hồi:

$$a_n = a_{n-1}^3 a_{n-2}^3,$$

với $a_0 = 2, a_1 = 2$.

Câu 7: Lập công thức truy hồi cho R_n là số cách chia một hình chữ nhật có kích thước $2 \times n$ ra thành các hình chữ nhật con có các cạnh song song với hình chữ nhật đã cho và với kích thước là $1 \times 2, 2 \times 1$ và 2×2 , giải hệ thức thu được.

Phần 4:

Câu 1: Có bao nhiêu cách hoán vị các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho không có chữ số chẵn nào ở đúng vị trí ban đầu.

Câu 2: Có bao nhiêu cách hoán vị các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho không có chữ số lẻ nào ở đúng vị trí ban đầu.

Câu 3: Cho $n + 1$ số tự nhiên không vượt quá $2n$, chứng minh rằng luôn tồn tại hai số nguyên tố cùng nhau.



Câu 4: Cho dãy gồm m số nguyên, chứng minh rằng luôn tồn tại dãy con liên tiếp (có thể chỉ gồm một số) sao cho tổng của các số trong dãy con là chia hết cho m .

Câu 5: Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n trong đó có sự xuất hiện của 01 đúng 2 lần.

Câu 6: Tính số cách chia n – giác lồi thành các tam giác bằng các đường nối không cắt nhau giữa các đỉnh.

Câu 7: Tính số đường đi từ góc phải dưới của một lưới $n \times n$ ô vuông tới góc trái trên của lưới chỉ bao gồm việc đi sang ngang và đi lên theo các nút dưới và không vượt qua đường chéo nối hai điểm góc (dưới đây là ví dụ cho trường hợp $n = 4$).

(hình minh họa)

Phần 5:

Câu 1: Chứng minh hoặc bác bỏ rằng trong đơn đồ thị hữu hạn có số đỉnh $n \geq 2$ luôn có hai đỉnh có bậc bằng nhau.

Câu 2: Chứng minh hoặc bác bỏ rằng trong đa đồ thị hữu hạn có số đỉnh $n \geq 2$ luôn có hai đỉnh có bậc bằng nhau.

Câu 3: Một đồ thị vô hướng là định hướng được nếu ta có thể định hướng các cạnh sao cho đồ thị có hướng thu được là liên thông mạnh. Chứng minh rằng một đồ thị là không định hướng được nếu nó có cạnh cầu.

Câu 4: Một giải đấu là một đơn đồ thị có hướng sao cho nếu u, v là hai đỉnh khác nhau của đồ thị thì hoặc hoặc (u, v) hoặc (v, u) là cạnh của đồ thị. Chứng minh rằng trong một giải đấu luôn chứa một đường đi Hamilton.

Câu 5: Chứng minh rằng nếu một đơn đồ thị có đường kính lớn hơn hay bằng 4 thì đồ thị bù của nó có đường kính không vượt quá 2.

Câu 6: Chứng minh rằng nếu một đơn đồ thị có đường kính lớn hơn hay bằng 3 thì đồ thị bù của nó có đường kính không vượt quá 3.



Câu 7: Cho đa đồ thị có $2m$ đỉnh bậc lẻ, chứng minh rằng nếu một chu trình chứa tất cả các cạnh của đồ thị thì sẽ có m cạnh xuất hiện hơn một lần trong chu trình đó.

Phần 6:

Câu 1: Tìm bán kính và đường kính của:

- a) K_6 ;
- b) $K_{4,5}$;
- c) Q_3 ;
- d) C_6 .

Câu 2: Tính số độc lập của:

- a) K_n ;
- b) $K_{m,n}$;
- c) Q_n ;
- d) C_n .

Câu 3: Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị có ít nhất hai đỉnh sẽ có ít nhất hai đỉnh không phải là đỉnh khớp (đỉnh khi xoá đỉnh đó và tất cả các cạnh liên thuộc khỏi đồ thị sẽ làm tăng số thành phần liên thông).

Câu 4: Tính số giao nhau của:

- a) K_5 ;
- b) $K_{5,5}$.

Câu 5: Tính số giao nhau của:

- a) K_6 ;
- b) $K_{4,4}$.

Câu 6: Tính số giao nhau của:

- a) K_7 ;
- b) $K_{3,4}$.



Câu 7: Chứng minh hay bác bỏ rằng bề dày của một đồ thị bằng số giao nhau của đồ thị đó.

Phần 7:

Câu 1: Cho đơn đồ thị G có ít nhất 11 đỉnh, chứng minh rằng hoặc G , hoặc bù của G là đồ thị không phẳng.

Câu 2: Chứng minh rằng một cây có n đỉnh sẽ có tổng bậc các đỉnh là $2n - 2$.

Câu 3: Cho n số nguyên dương d_1, d_2, \dots, d_n có tổng là $2n - 2$, chứng minh rằng tồn tại một cây có đỉnh trong đó bậc của các đỉnh lần lượt là d_1, d_2, \dots, d_n .

Câu 4: Cho đơn đồ thị có hướng liên thông sao cho không có hai cạnh nào có cùng trọng số. Chứng minh rằng nếu một cạnh có trọng số nhỏ nhất trong số các cạnh kề với một đỉnh nào đó thì cạnh đó phải xuất hiện trong tất cả các cây khung nhỏ nhất.

Câu 5: Chứng minh hoặc bác bỏ rằng một cây là đẹp nếu tất cả các cạnh của nó tạo thành một đường đi đơn.

Câu 6: Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tất cả các sâu bướm đều đẹp.

Câu 7: Tính số cây nhị phân đầy đủ có $2n + 1$ nút.

Phần 8:

(đang cập nhật...)

Phần 9:

(đang cập nhật...)