

Định lý 2.21

$$c(x) = 1 + xc(x)^2$$

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$$

Số mất thứ tự**Số Euler****Bài toán phủ bằng các quân cờ domino****2.4.5 Bài tập**

Cho số thực α và số nguyên không âm k , ký hiệu

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

1. Viết hàm sinh của các dãy số sau

- (a) $\binom{\alpha}{0}, \binom{\alpha}{1}, \dots, \binom{\alpha}{n}, \dots$
- (b) $1, c, c^2, \dots, c^n, \dots$
- (c) $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$
- (d) $\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \dots, (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \dots$
- (e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
- (f) $0, 1, 0, \frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots, 0, (-1)^n \frac{1}{2n+1}, 0, \dots$
- (g) $0, 1, 8, 27, \dots, n^3, \dots$
- (h) $\binom{0}{3}, \binom{1}{3}, \dots, \binom{n}{3}, \dots$

2. Cho đa giác $n+2$ đỉnh nội tiếp một đường tròn sao cho không có ba đường chéo nào thẳng hàng. Gọi h_n là số phần của đa giác tạo nên bởi các đường chéo.

- (a) Tìm công thức truy hồi cho h_n .
 - (b) Xây dựng hàm sinh cho h_n .
 - (c) Tìm công thức tường minh cho h_n .
3. Viết hàm sinh mũ của các dãy số sau
- (a) $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots, 0, (-1)^n, 0, \dots$
 - (b) $1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots, 0, (-1)^n, 0, \dots$
4. Cho h_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = n$. Tìm h_n , với điều kiện
- (a) Các số e_i là số chẵn.
 - (b) Các số e_i là bội của 3.
 - (c) $e_1 = 0, e_2 \geq 3, e_3 \leq 4$.
 - (d) e_1 là 1, 3 hay 5, e_2 là 2 hay 4.
 - (e) Các số $e_i \geq 5$.
5. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $2e_1 + 3e_2 + e_3 + 4e_4 = n$.
6. Cho dãy $\left\{ h_n = \binom{n}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$, viết hàm sinh cho dãy.
7. Cho h_n là số cách tô bàn cờ $1 \times n$ bằng k màu phân biệt. Tìm hàm sinh mũ của dãy $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, với điều kiện
- (a) Mỗi màu đều được sử dụng chẵn lần.
 - (b) Mỗi màu được sử dụng ít nhất ba lần.
 - (c) Mỗi màu được sử dụng không quá 4 lần.
 - (d) Màu thứ nhất được sử dụng số lẻ lần, màu thứ hai được sử dụng với số lần là số chia ba dư 1.
 - (e) Màu thứ nhất được sử dụng 1 lần, màu thứ 2 2 lần, \dots , màu thứ k k lần.
 - (f) Màu thứ nhất được sử dụng không quá 1 lần, màu thứ 2 không quá 2 lần, \dots , màu thứ k không quá k lần.
8. Cho h_n là số chuỗi tam phân (chuỗi gồm các ký tự '0', '1', '2') độ dài n . Tìm hàm sinh mũ của dãy $\left\{ h_n = \binom{n}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$ và công thức tường minh cho h_n biết rằng

- (a) Số ký tự '0' là lẻ, số ký tự '1' là chẵn.
- (b) Số ký tự '0' và '1' đều là số lẻ.
- (c) Số ký tự '0' và '1' đều là số chẵn khác không.
- (d) Tìm số số có n chữ số sao cho các chữ số đều xuất hiện ít nhất 2 lần. Chữ số 0 xuất hiện không quá 3 lần. Các chữ số chẵn xuất hiện lẻ lần và các chữ số xuất hiện chẵn lần.

2.5 Giải công thức truy hồi tuyến tính hệ số hằng

2.5.1 Công thức truy hồi thuần nhất

2.5.2 Công thức truy hồi không thuần nhất

2.5.3 Sử dụng hàm sinh giải công thức truy hồi

Khái niệm hàm sinh có thể được mở rộng cho trường hợp chuỗi chỉ số kép hay tổng quát hơn chuỗi đa chỉ số.

Định nghĩa 2.5 Cho

$$\{a_{n,k}\}_{n=0,k=0}^{\infty} = \{a_{0,0}, a_{\{0,1\}}, a_{1,0}, a_{1,1}, a_{0,2}, a_{\{2,0\}}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots,$$

$k = 0, 1, \dots$ và $n = 0, 1, \dots$ là dãy (chỉ số kép). Tổng vô hạn

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x^k y^n$$

được gọi là hàm sinh (hai biến x, y) của dãy $\{a_{n,k}\}_{n=0,k=0}^{\infty}$.

Tổng vô hạn

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^k}{k!} \frac{y^n}{n!}$$

được gọi là hàm sinh mũ của dãy $\{a_{n,k}\}_{n=0,k=0}^{\infty}$.

■ **Ví dụ 2.12** Xét dãy $\{a_{n,k} = \binom{n}{k}\}_{k,n=0}^{\infty}$. Sử dụng công thức nhị thức