Nguyên lý cực trị

Trong một tập hữu hạn phần tử luôn tồn tại phần tử cực trị. Trong một tập các số nguyên dương luôn tồn tại số nhỏ nhất.

■ **Ví dụ 3.3** Chứng minh rằng ■

3.1.2 Một số bài toán tồn tại kinh điển

Hình vuông Latin

Trò chơi Sudoku

Hình vuông Latin trực giao

Ma Phương

Hình lục giác thần bí

Bài toán bốn màu

Bài toán hệ đại diện phân biệt

3.1.3 Phương pháp xác suất

3.1.4 Bài tập

1. Kỳ thi olympic toán sinh viên có 200 sinh viên tham gia. Đề thi bao gồm 6 bài. Biết rằng mỗi bài có ít nhất 120 sinh viên giải được. Chứng minh rằng luôn tìm được hai sinh viên sao cho ít nhất một người trong đó giải được cả 6 bài.
2. Giả sử mỗi điểm nguyên (điểm có các tọa độ là hai số nguyên) trong mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.
3. Một kỳ thủ có 11 tuần để chuẩn bị cho giải đấu muốn luyện chơi ít nhất một trận mỗi ngày, nhưng để tránh mệt mỏi, không muốn có

7 ngày kế tiếp nhau nào đó chơi 12 trận. Chứng minh rằng luôn có một dãy ngày kế tiếp nhau trong đó kỳ thủ này chơi đúng 21 trận.

4. Trong 37, một sinh viên mỗi ngày học ít nhất một giờ. Biết rằng tổng số giờ học của sinh viên đó không quá 60 giờ. Chứng minh rằng có một chuỗi ngày kế tiếp sinh viên đó học tổng cộng đúng 13 giờ.
5. Cho dãy gồm m số nguyên, chứng minh rằng ta luôn có thể tìm được một dãy con có tổng chia hết cho m.
6. Chọn 101 số từ các số 1, 2, ..., 200. Chứng minh rằng trong 101 số này ta luôn chọn được hai số chia hết cho nhau.
7. Hai đĩa, một lớn một nhỏ, mỗi đĩa được chia thành 200 hình quạt đều nhau. Các hình quạt được sơn một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Đĩa lớn có đúng 100 hình quạt được sơn màu đỏ và 100 hình sơn màu xanh. Chứng minh rằng ta luôn có thể đặt hai đĩa trùng tâm nhau sao cho màu ở hai đĩa là khớp nhau tại ít nhất 100 hình quạt.
8. Chọn $n+1$ số từ tập $\{1,2,\ldots,3n\}$. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai số có hiệu không quá 2.
9. Chứng minh rằng trong 52 số nguyên luôn chọn được hai số có tổng, hoặc hiệu chia hết cho 100.
10. Chứng minh rằng mọi số hữu tỉ đều là số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
11. Trong một căn phòng có 10 người có tuổi từ 1 đến 60. Chứng minh rằng ta luôn tìm được trong số này hai nhóm người (rời nhau) có tổng số tuổi những người trong nhóm là bằng nhau.
12. Chứng minh rằng trong một nhóm n người luôn có ít nhất hai người có cùng số người quen trong nhóm.
13. Một bữa tiệc có 100 người. Mỗi người có một số chẵn người quen trong bữa tiệc. Chứng minh rằng có ít nhất ba người có cùng số người quen trong bữa tiệc.
14. Chứng mình rằng trong 9 điểm nằm trong một hình lập phương cạnh 2, có hai điểm cách nhau không quá $\sqrt{3}$.

15. Chứng minh rằng trong 5 điểm nằm trong một tam giác đều cạnh 1, có hai điểm cách nhau không quá $\frac{1}{2}$.
16. Cho 10 điểm không thẳng hàng được nối bằng các đoạn thẳng tô màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luông tồn tại ba điểm sao cho ba đoạn thẳng nối chúng được tô màu đỏ hoặc bốn điểm sao cho sáu đoạn thẳng nối chúng được tô màu xanh.
17. Bộ các tập con khác nhau của tập gồm n phần tử có tính chất hai tập bất kỳ có ít nhất một phần tử chung. Chứng minh rằng số tập của bộ không vượt quá 2^{n-1}.
18. Có n chiếc hộp chứa các quả bóng (không có hộp nào rỗng). Các quả bóng được lấy hết ra và cho vào $n+1$ hộp khác sao cho hộp mới nào cũng có bóng. Chứng minh rằng có hai quả bóng sao cho (các) hộp mới chứa chúng chứa ít bóng hơn so với (các) hộp cũ chứa chúng.
19. Cho n điểm trên mặt phẳng, không đồng thời thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường thẳng đi qua đúng hai điểm.
20. Trên mặt phẳng cho một số hữu hạn hình tròn bán kính đôi một khác nhau sao cho hai hình bất kỳ có không quá một điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn tiếp xúc với không quá năm hình tròn khác.
21. Trên một bàn cờ vô hạn, mỗi ô được ghi một số nguyên dương sao cho mỗi số là trung bình cộng của 4 số ghi tại 4 ô kề cạnh với nó. Chứng minh rằng tất cả các số được ghi trên bàn cờ là bằng nhau.
22. Viết các số từ 1 đến n^2 lên một bàn cờ $n \times n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số sao cho được viết trên hai ô kề cạnh hoặc kề góc nhau sao cho hiệu của chúng không nhỏ hơn $n+1$.
23. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại n đoạn thẳng nối một điểm xanh với một điểm đỏ sao cho không có hai đoạn nào cắt nhau.
24. Cho một tập S gồm hữu hạn các điểm trên mặt phẳng sao cho tam giác tạo bởi ba điểm bất kỳ trong S có diện tích không quá 1. Chứng

minh rằng tồn tại tam giác diện tích không quá 4 chứa toàn bộ S.

25. Cho n điểm trên mặt phẳng được tô hai màu xanh và đỏ sao cho trên đoạn thẳng nối hai điểm cùng màu bất kỳ luôn có một điểm khác màu. Chứng minh rằng n điểm này thẳng hàng.

3.2 Bài toán liệt kê

3.2.1 Giới thiệu

Giới thiệu bài toán liệt kê

Mã hóa cấu hình tổ hợp

3.2.2 Đại cương về thuật toán

Khái niệm thuật toán

Ngôn ngữ lập trình và giả mã

Các cấu trúc cơ bản của thuật toán

3.2.3 Phương pháp liệt kê

Sinh cấu hình kế tiếp

Thuật toán đệ quy quay lui

3.2.4 Một số bài toán liệt kê cơ bản

Liệt kê hoán vị

Liệt kê các tập con

Liệt kê tổ hợp

Phân hoạch số tự nhiên

Phân hoạch tập hợp

3.3 Thiết kế tổ hợp