

Condução de calor unidimensional em uma parede plana por método numérico

Manoel Vieira Coelho Neto 14/0152512

Abdullah Zaiter 15/0089392

Lukas Lorenz de Andrade 16/0135109

Vinícius Félix 13/0145777

I. INTRODUÇÃO

Hodiernamente, a aplicação das teorias de transportes - transferência - de calor é infinita, principalmente quando se trata do dimensionamento, simulação, e escolha dos materiais envolvidos no projeto. Assim, é de suma importância o estudo desse campo para a aplicação nos meios industriais, principalmente, de forma a otimizar os processos de fabricação e garantir uma melhor qualidade dos produtos.

Há três principais formas de transmissão de calor, as quais obedecem as Leis da termodinâmica, a saber: condução, convecção e radiação. Na primeira, as moléculas (de mesma massa) interagem por meio de colisões aproximadamente elásticas, trocando energia cinética até que o sistema todo atinja o equilíbrio - a definição de temperatura é justamente a da energia do movimento média das moléculas - ou seja, todas possuem a mesma quantidade de movimento. Na segunda, há uma combinação da primeira com a dinâmica dos fluidos. Por último, a energia, na forma de onda eletromagnética, é transmitida de um corpo a outro dependendo de várias variáveis, inclusive o fator de forma - modo como se dá a relação entre as superfícies - o qual possibilita calcular a transferência de calor líquida entre os corpos analisados. [1]

Dessa forma, todos os fenômenos acima ocorrem devido a uma diferença de temperatura inicial e prosseguem até que esta tenda a zero. Essa energia transferida, calor, é dado no sentido do corpo de maior para o de menor temperatura, de modo que esse fluxo se dá sempre no sentido positivo do eixo coordenado. Ademais, uma forma de atingir o equilíbrio térmico não exclui a outra, de modo que podemos possuir diferentes combinações desses processos.

No entanto, o intuito deste trabalho é a discretização computacional do problema de condução de calor unidimensional em regime transitório com as referidas condições de contorno presentes no roteiro em uma parede. Assim, neste regime, a temperatura não é distribuída de forma uniforme e a condução não é linear com o tempo, mas se aproxima após um Δt . Contudo, a Lei de Fourier e a sua modelação pelas equações diferenciais ordinárias (EDOs) ainda é válida, sendo:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial [k \frac{\partial T}{\partial x}]}{\partial x} + \frac{\partial [k \frac{\partial T}{\partial y}]}{\partial y} + \frac{\partial [k \frac{\partial T}{\partial z}]}{\partial z} \quad (1)$$

Porém, aplicado a situação em questão e tomando a constante de condutividade “k” como constante ao longo da estrutura, temos que:

- condução de calor transiente

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

[2, pp. 292]

- condução de calor permanente a partir da manipulação de (1)

$$Q' = -k.A \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

Logo, com base na equação (2), onde ' ρ ' [kg/m^3] é a densidade da estrutura, ' c ' [$J/(kg.^{\circ}C)$] é a capacidade térmica, T [$^{\circ}C$] a temperatura, será possível a modelação, descrição e simulação computacional do problema proposto.

II. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A partir da equação (2) e do método dos elementos finitos e das diferenças finitas pode-se desenvolver aquela a fim de se transformar as EDOs em funções lineares do tempo e espaço, de modo a se calcular a temperatura por iteração sabendo as condições iniciais - condições de contorno. Dessa forma, pelo método das diferenças finitas, podemos aproximar uma derivada por:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots \quad (4)$$

Tomando Δx como muito pequeno (tendendo a zero), pode-se desprezar as frações a partir do terceiro elemento com um erro consideravelmente muito pequeno. Para derivadas de segunda ordem, aplicando em (4) e adaptando para o problema analisado, temos:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} \quad (6)$$

Onde T_m é a temperatura no nó m.

Além do mais, dividimos a superfície em pequenas regiões - quadrados, triângulos, ..., cuja área tende a zero - delimitadas por vértices ou nós (m) e, no caso unidimensional, igual a $\frac{L}{m}$, onde L[m] é a espessura da parede. A medida que Δx tende

a zero, menor é o erro de T. Passando a equação (6) para o tempo (i) - regime transiente - e aplicando em (2), temos que:

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + \dot{e}_m A \Delta x = \rho A \Delta x c_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (7)$$

[2, pp.293]

Multiplicando a equação acima por $\Delta x k.A$, aplicando o número adimensional de Fourier da malha ($\tau = k.\Delta t \rho.c.\Delta x^2$) e sendo T dependendo do instante de tempo i $\in [0,1,2,...]$, reduz-se a:

$$T_{m-1}^i - 2T_{m+1}^i + T_{m+1}^i + \frac{\dot{e}_m^i \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (8)$$

Manipulando e reagrupando os termos em comum chegamos a:

$$T_0^{i+1} = (1 - 2\tau - 2\tau \frac{h\Delta x}{k}) T_0^i + 2\tau T_1^i + 2\tau \frac{h\Delta x}{k} \infty + \tau \frac{\dot{e}_0^i \Delta x^2}{k} \quad (9)$$

[2, pp.294]

Essa equação relaciona a temperatura em um instante de tempo i+1 com o atual i, de modo que se pode observar a progressão da temperatura no tempo. Porém, caso não haja geração de energia térmica pelo material, o que se aplica ao caso analisado, a condição de estabilidade no limite superior é satisfeita, de modo que $\tau = 0.5$, a equação acima se resume a:

$$T_m^{i+1} = \frac{(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i)}{2} \quad (10)$$

A condição que torna a equação (9) estável, ou seja, a teoria não divirja do real, é expressa pela equação (11), que pode ser desenvolvida, aplicando-se perto das condições iniciais e generalizada para toda a estrutura, por (12). Dessa forma, temos:

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$\tau \leq \frac{1}{2(1 + h \frac{\Delta x}{k})} \quad (12)$$

Assim, as equações utilizadas nesse método computacional, são, essencialmente, (9), (10) e (12), sendo (12) igual a $\frac{1}{2}$.

III. SIMULAÇÃO

A. Problema 1

Condução de calor em um só lado (transiente+permanente):

$$\begin{aligned} T(0, t) &= 1 \\ T(1, t) &= 0 \\ T(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

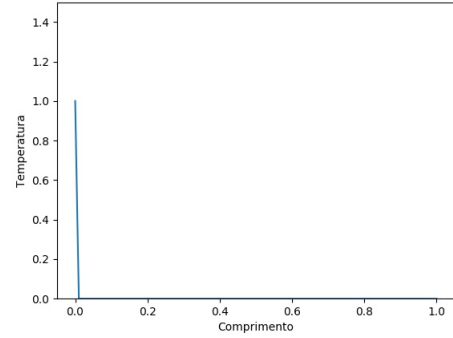


Figura 1. Estado inicial (t=0)

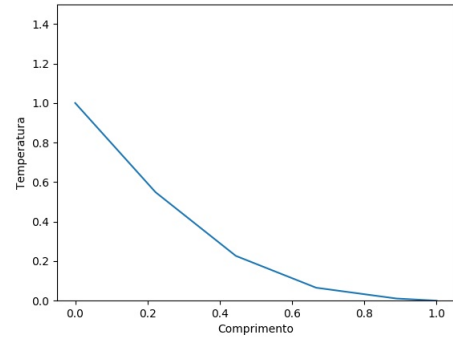


Figura 2. Condução no regime transiente

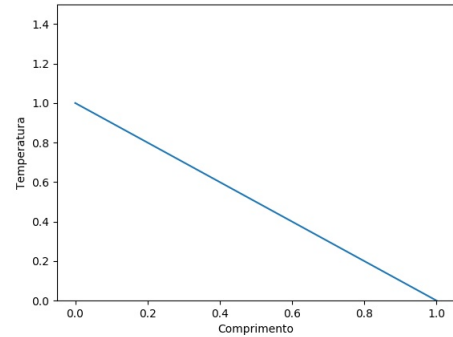


Figura 3. Condução no regime permanente (equilíbrio térmico)

Para o caso 1 é possível observar no decorrer do tempo t como a curva se comporta em regime transiente até que passe ao regime permanente e tenda para uma reta, em uma distribuição de calor linear.

B. Problema 2

Condução de calor no sentido de ambos os lados (temperatura distribuída no início + equilíbrio térmico):

$$T(0, t) = 0$$

$$T(1, t) = 0$$

$$T(x, 0) = 1$$

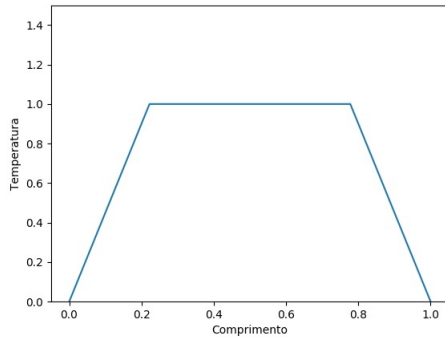


Figura 4. Estado inicial ($t=0$)

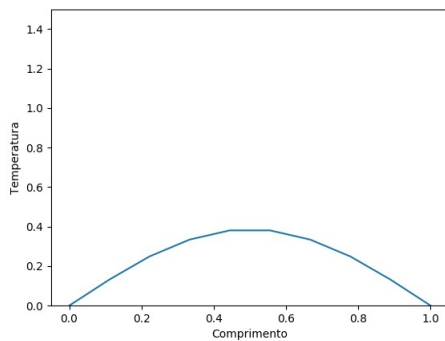


Figura 5. Condução no regime transiente

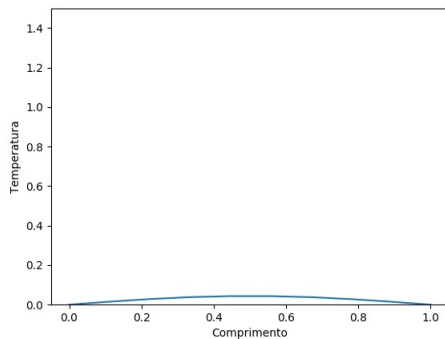


Figura 6. Condução no regime permanente (equilíbrio térmico)

No caso 2, ambas as pontas da barra estão em 0°C e a temperatura ao longo da barra é igual a 1°C e assim com o decorrer o tempo o calor tende a se distribuir na barra até que esta esteja na temperatura das pontas em uma distribuição linear e constante igual a 0.

IV. RESULTADOS E CONCLUSÃO

A partir das figuras 1 a 3 percebe-se o comportamento da temperatura ao longo da espessura genérica da parede no primeiro problema analisado. A figura 1 faz menção ao início do processo de troca de calor por condução onde a troca ocorre num regime transiente (representada por uma função exponencial decrescente).

Também é notório nas figuras 4 a 6 o comportamento da temperatura ao longo da espessura genérica da parede no segundo problema analisado. Onde a parede troca calor com o ambiente dos dois lados, onde na figura 4 a temperatura está máxima e tende para diminuir pelo efeito da troca de calor com o ambiente que tem uma temperatura menor, essa temperatura vai descendo à medida que o tempo tende a infinito até atingir a temperatura do ambiente como mostrado na figura 6. O comportamento do decrescimento da temperatura nas figuras 4 a 6 no regime transiente até o permanente é explicado fisicamente pois a parede esfria de fora para dentro onde a parte que tem contato direto com o ambiente esfria mais rápido do que a parte de dentro da parede.

Traçando um paralelo entre as análises numéricas e algébricas podemos concluir que em regime permanente as curvas traçadas obtêm aproximações com grande acurácia em relação aos valores reais, tendo seu momento transitório, referente a valores de t antes da total convergência, comportamento esperado pelo embasamento teórico.

REFERÊNCIAS

- [1] COMSOL, "The finite element method (fem)," <https://br.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>, 2016, [Online; accessed 1-02-2017].
- [2] J. C. Yunus Cengel, *Fluid Mechanics Fundamentals and Applications*, 3rd ed. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2013. [Online]. Available: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=37123FD0D67F744B6E6E3D184DCB5E4C>