1. El modelo Kermack-McKendrick

1.1. Definiciones

Dada una población de personas N, se definen:

- $S(t)$, como el número de personas subsceptibles de contagio, es decir, sanas.
- $I(t)$, como el número de personas infectadas.
- $R(t)$, como el número de personas recuperadas (o fallecidas).

donde t es el tiempo.
El modelo utiliza las siguientes tres constantes:

- β que indica la velocidad de infección.
- γ que indica la velocidad de recuperación.

Además define el factor de infección como:

$$R_0 \equiv \frac{\beta S}{\gamma}$$

Que nos indica a cuántas personas sanas es capaz de infectar una persona enferma durante su enfermedad.

1.2. Condiciones adicionales

En una población con N personas, cada persona está sana, infectada o recuperada, esto es:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

1.3. Ecuaciones del modelo

Este modelo relaciona las constantes con las funciones anteriores a través de tres ecuaciones:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta(t)S(t)I(t) \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta(t)S(t)I(t) - \gamma(t)I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma(t)I(t) \tag{3}$$

Es fácil comprobar que, efectivamente,

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

1.4. Calculando el factor de infección

Substituyendo las equaciones 2 y 3 en la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{t}}{\frac{dR(t)}{dt}}$$

Obtendremos:

$$\frac{\frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{t}}{\frac{dR(t)}{dt}} = \frac{\beta(t)S(t)I(t)}{\gamma(t)I(t)} = \frac{\beta(t)S(t)}{\gamma(t)} \equiv R_0$$

Es decir, el factor de infección en cada instante es igual a:

$$R_0 \equiv \frac{\frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{t}}{\frac{dR(t)}{dt}} \tag{4}$$

Es decir, el factor de infección es igual a la variación de infectados más la variación de recuperados, dividido por la variación de recuperados.

1.5. Aproximando el factor de infección

Si aproximamos las derivadas por incrementos, y asumiendo una unidad de tiempo la unidad, obtendríamos:

$$R_0 \approx \frac{\Delta I + \Delta R}{\Delta R} \tag{5}$$

Que es precisamente la fórmula que usamos para aproximar $R_0(t)$.

1.6. Más información

- Ver modelo Kermack-McKendrick en mathworld.
- Ver más información sobre la licencia Creative Commons CC BY-SA 4.0