Fiche 2

Logique Propositionnelle

On loue souvent la capacité des mathématiques à enseigner une capacité de raisonnement. C'est un fait, faire des mathématiques peut nous permettre d'améliorer nos capacités sur ce plan, et cela vient tout droit de ce que nous allons voir aujourd'hui. Dans la fiche précédente, nous avons esquissé la manière dont les mathématiques telles que nous les connaissons découlent d'axiomes, mais maintenant, il va falloir mettre les mains dans la machine et comprendre comment on arrive à découler d'une proposition à une autre.

Propositions et juxtaposition

Commençons par poser une définition simple :

Définition (Proposition)**.** *Une proposition est une affirmation complète qui est soit vrai, soit faux, et pas les deux.*

Pour le moment, rien d'extraordinaire. $4 = 4$ est une proposition qui est d'ailleurs vraie. $7 = 2$ en est une autre et celle-là est fausse. *"Je suis contente"* et *"Je suis vivante"* sont aussi des propositions.

C'est encore très proche du concept de proposition en grammaire. Et donc, comme en grammaire, on peut les associer avec des connecteurs logiques.

Le connecteur "et"

Le connecteur *et*, que l'on note en logique $\wedge$, est un connecteur qui marche assez intuitivement comme dans la langue française. On a vu précédemment que $4 = 4$ était une proposition et que $7 = 2$ en était une aussi. Je peux créer une nouvelle proposition $4 = 4 \wedge 7 = 2$ qui sera aussi une proposition.

On sait qu'une proposition est soit vraie, soit fausse. Mais il est légitime de se demander comment il est possible de déterminer la valeur de vérité d'une proposition composite, car cela ne va pas forcément de soi. Voici donc un tableau récapitulatif de la valeur de vérité d'une proposition "P et Q" formée à l'aide d'un "et" et de deux propositions quelconques.

P	**Q**	**P et Q**
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Le connecteur "ou"

Le connecteur "ou", que l'on note en logique $\vee$, fonctionne de la même manière que le connecteur précédent. Il permet de représenter l'idée intuitive que l'on a du "ou" dans la langue française. Cependant, il faut faire attention, on parle bien du "ou" **inclusif**. Cela veut dire que l'on représente les situations ou c'est soit l'un, soit l'autre, **ou les deux**.

Ainsi, on va avoir la table récapitulative des valeurs de vérités :

P	**Q**	**P ou Q**
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

La particule "non"

La particule "non", notée $\neg$ en logique, permet d'exprimer la négation d'une proposition. Par exemple, si *"Je suis contente"* est une proposition, $\neg$(*"Je suis contente"*) serait *"Je ne suis pas contente"*. Le langage possède ses nuances alors revenons sur des chiffres. Si $4 = 4$, $\neg(4 = 4)$ serait sa négation, et ça revient au même que de dire $4 \neq 4$. On peut remarquer un fait intéressant. Si A est une proposition vraie, $\neq A$ sera fausse, et inversement. Ce fait nous aide à définir ses possibles valeurs de vérité :

P	**non Q**
Vrai	Faux
Faux	Vrai

On peut composer des propositions à l'aide de ces connecteurs, mais attention ! ! Ils ne font le lien **que** entre deux propositions (sauf le "non") ! Si on veut en utiliser plus, il ne faudra pas oublier de mettre des parenthèses pour que notre expression reste lisible !

Les tableaux que l'on a montrés précédemment s'appellent des tables de vérité. C'est une manière de définir des connecteurs entre propositions de manière rigoureuse en donnant la valeur de vérité associée à chaque couple de valeur de vérités possibles. On peut donc utiliser cette méthode pour définir d'autres opérateurs logiques utilisés en informatique comme le NAND ou le XOR par exemple. Ici, on va utiliser cette méthode pour définir deux autres éléments fondamentaux dans les mathématiques.

Déductions et raisonnement

Nous avons vu comment nous pouvons composer des propositions plus complexes à partir d'autres propositions, ainsi que comment évaluer leur valeur de vérité. Cependant, nous n'avons pas encore fait une seule once de raisonnement. Ne vous inquiétez pas, commençons dès maintenant !

Quand on fait une déduction, on part d'un point (ou plusieurs) pour arriver à un autre. Ici, pour bien saisir l'idée, je vous propose de vous imaginer deux villes éloignées : la ville A et la ville B.

Implication

L'implication logique, que l'on note $\implies$, représente l'idée que l'on peut se faire d'une déduction. Si $A \implies B$, cela signifiera qu'il y a une route à sens unique allant de A vers B, mais rien qui permet de faire le chemin retour ! Plus formellement, c'est la même idée que le *Si...alors* : si on a A, alors on a B. On la définit comme suit :

A	**B**	$\mathbf{A \implies B}$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Je pense que les deux dernières lignes soulèvent quelques questions. Pourquoi est-ce que partir de quelque chose de faux vers quelque chose de vrai ou faux est vrai ? La réponse vient de ce que l'on appelle **le principe d'explosion**. Lorsque l'on fait un raisonnement en partant de prémices fausses, le résultat pourra être vrai ou faux certes, mais la déduction faite pour passer de l'un à l'autre sera correcte et donc la table de vérité affiche "Vrai". La table de vérité indique si l'on a fait un raisonnement correct et s'il existe bien cette route entre nous villes. La question est de savoir s'il est légitime de déduire B à partir de A C'est un peu subtil donc n'hésitez pas à prendre le temps de vous poser sur cette notion et d'y réfléchir un peu. Revenez me voir en cas de problème.

Équivalence

Maintenant que nous avons une route allant de A vers B, il est légitime de se demander s'il existe une route allant de B vers A, le chemin retour. Lorsque ce chemin existe, nous sommes dans une situation d'**équivalence** des propositions. On note l'équivalence $\Leftrightarrow$ en logique. Quand deux propositions sont équivalentes, elles ont toujours la même valeur de vérité. Ainsi la table de vérité est très simple à donner :

P	**Q**	**P$\Leftrightarrow$Q**
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai

Cette table peut se retrouver à partir de cette du "et" et de " $\Longrightarrow$ ". N'hésitez pas à chercher ou à me demander de le faire si vous en avez besoin.

Grâce à cette logique, les mathématiciens écrivent des preuves de leurs propositions, quelle que soit leur nature.