Pourquoi faire simple ?

Ok, notre problème est plus ou moins fabriqué de toute pièce. Et si on tentait de calculer une limite (bien connue) sans utiliser une once de dérivation ? Certains diront que c'est stupide, d'autres accueilleront ce défi avec enthousiasme et les derniers passeront juste leur chemins. Je vous amène pas par pas à le faire vous-même parce que vous pouvez le faire !

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche à calculer

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Partie A : Pourquoi se priver de la dérivation ?

On pose

$$\begin{aligned} \sin : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ \theta &\longmapsto \sin \theta \end{aligned}$$

1. On suppose sin dérivable sur son ensemble de définition. En utilisant la définition de la dérivée, montrez que
$$\sin'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \theta(\cos(h) - 1)}{h} + \cos \theta \lim_{h \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

   On rappelle que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

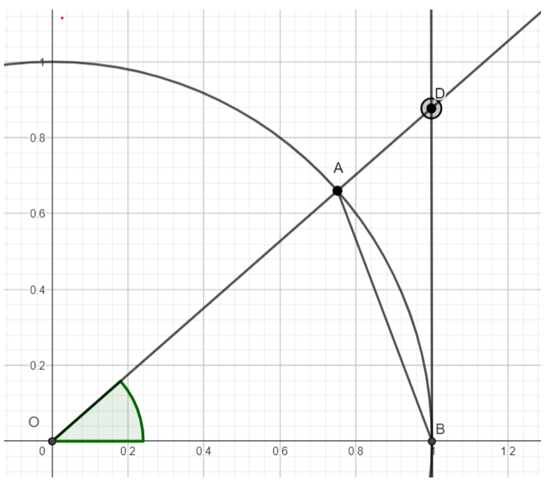
Il est donc assez facile de comprendre pourquoi on voudrait se priver de la dérivée. Pour trouver la dite dérivée, il est plus ou moins nécéssaire de trouver la limite que l'on essayait de calculer à la base. Afin d'éviter un raisonnement circulaire, essayons de ruser un peu. Dans la suite de ce document, vont donc être bannis les développements limités, les développements en séries, ainsi que la la règle de l'Hospital, mais plus globalement l'utilisation de $\sin'$.

Partie B : Approche graphique

Pour déterminer notre limite, nous allons ici procéder par étapes. Premièrement, nous allons déterminer la limite à droite, puis la limite à gauche, pour enfin conclure à partir de ces deux résultats.

On rappelle les formules suivantes et donne la figure suivante qui est un extrait du cercle trigonométrique :

$$\mathcal{A}_{triangle} = \frac{coté \times hauteur}{2}; \quad \mathcal{A}_{secteur} = \frac{r^2 \times angle}{2}$$



On note $\theta = \widehat{AOB} \geq 0$, on pose $f :\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$, et on notera $\mathcal{A}_\theta$ l'aire du secteur du cercle trigonométrique entre $[OA]$ et $[OB]$.

1. Justifier grâce à la figure que $\mathcal{A}_{OAB} \leq \mathcal{A}_\theta \leq \mathcal{A}_{ODB}$
2. En déduire que $\frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{tan\theta}{2}$.
3. A partir de la question précédente, encadrer $\frac{\sin\theta}{\theta}$ et donner sa limite quand θ tend vers 0^+.
4. Montrez que f est paire. Que pouvez-vous en déduire sur $\lim\limits_{\theta \to 0^-} f(\theta)$?
5. Concluez en donnant un résultat pour $\lim\limits_{\theta \to 0} f(\theta)$