

# Qui croit le plus vite ?

*Le but ici sera de déterminer qui croit le plus vite entre la puissance et la factorielle. Ce n'est pas uniquement pour la beauté du geste (même si j'apprécie énormément la démonstration). En effet, cela peut avoir des applications très concrètes, par exemple en algorithmie. On préférera avoir un programme dont la complexité temporelle est la plus faible possible. Alors quel est le plus faible ? Exponentiel ? Factoriel ? Regardons cela ensemble.*

## Exercice

Soit  $x > 1$  un réel. On pose pour tout entier naturel  $n$  la suite réelle  $(u_n)$  définie par

$$u_n = \frac{x^n}{n!}$$

1. Montrer que pour tout  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$ .
2. Montrer que pour tout  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ .
3. Calculer la limite de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .
4. Grâce à la définition de la limite et la question précédente, montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$ ,

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$$

5. Montrer que  $(u_n)$  converge.
6. On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Montrer par l'absurde que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
7. En déduire qui croit le plus vite entre  $n!$  et  $x^n$ .