Fiche 3

Variables et Quantificateurs

La voilà, la fameuse ! On va enfin parler de cette inconnue x que tout le monde cherche désespérément depuis des millénaires ! Que signifie-t-elle ? Que représente-t-elle ? On va répondre à cela tout de suite.

Pourquoi des inconnues ?

Nous avons vu que les mathématiques étaient un jeu de propositions. C'est vrai, mais en général ces dernières parlent d'objets. En effet, quand je dis que $7 = 2$, c'est une proposition qui porte sur des nombres, ici 7 et 2. Mais vient des moments où il serait intéressant de généraliser un raisonnement à une famille d'objets partageant des traits similaires. C'est là que vont intervenir nos variables, vous allez voir.

Avant cela, je vais avoir besoin d'introduire une notation complètement arbitraire et non standard qui nous sera utile dans la suite.

Notation. *Je noterai entre* $\{\}$ *un ensemble. Par exemple,* $\{batiments\}$ *est l'ensemble des bâtiments. C'est une famille d'objets qui sont des bâtiments.*

Prenons un exemple pour notre situation. Imaginons que je suis dans ma ville et que je remarque quelque chose de très suspect : tous les bâtiments ont des murs ! Alors en tant que bon mathématicien, je décide d'aller voir ça de plus près et je vais vérifier que chaque bâtiment possède bien des murs. Mais la ville est grande, c'est fastidieux de tous aller les vérifier un par un. Ce serait pratique si, du fait que ce soit juste un bâtiment, je pouvais affirmer que l'objet possède des murs. J'ai envie d'avoir une propriété générale sur tous les bâtiments ! Ici le besoin se fait ressentir de pouvoir discuter de propriétés sur la famille $\{batiment\}$ de tous les bâtiments de ma ville. On va donc prendre un bâtiment quelconque, que l'on va noter x, qui aura toutes les caractéristiques de ce que c'est "d'être un bâtiment" pour pouvoir raisonner avec. Si ça marche un bâtiment quelconque qui serait remplaçable par n'importe quel bâtiment, à fortiori ça marchera pour tous. Alors prenons x un bâtiment quelconque. Comme je sais que x est un bâtiment, je peux aller chercher sa définition dans le dictionnaire. Il y est écrit que c'est un édifice construit pas l'Homme qui possède des murs et un toit. Surprise ! La définition me dit qu'un bâtiment possède des murs obligatoirement ! Donc, je peux affirmer, grâce à ce raisonnement logique, que tous les bâtiments ont des murs ! Je suis soulagée. Je peux maintenant reprendre ma balade matinale dans ma ville.

Notion d'ensemble

Donnons un peu de précision sur cette idée de famille d'objets. Lors de mon premier cours à la fac, mon professeur a posé une simple question qui a calmé toute la salle : Qu'est-ce qu'un nombre ? Question en apparence très simple, mais qui dans les faits est assez subtile. La réponse que je vais vous donner ici est un infime morceau de ce que l'on appelle la théorie des ensembles, n'hésitez pas à poser des questions à l'envi. Un nombre, c'est un objet mathématique qui appartient à un ensemble de nombres aux propriétés bien définies. En effet, tous les nombres que nous utilisons tous les jours ont été classés en fonction des règles qu'ils suivent pour que l'on puisse au mieux raisonner avec. Ici, nous allons parler de ce mot, ensemble, qui est un point central des mathématiques modernes.

Définition (Ensemble). *Un ensemble est une collection d'objets. Elle peut contenir un nombre d'éléments fini ou infini, ou même être vide. On note un ensemble entre* $\{\}$

Malgré ses allures simplistes, cet objet est l'outil le plus important des mathématiques, avant même l'addition ou les chiffres. Comme nous l'avons fait précédemment dans notre exemple en ville, il peut être intéressant de raisonner sur tous les éléments d'un ensemble, car ils présentent des caractéristiques communes. Ainsi, la notion de variable peut nous être utile.

Aussi, il est important de noter que tout en mathématiques est élément d'un ensemble. Tout objet, toute variable, est élément d'un ensemble. Toutes les mathématiques sont classées et certaines grandes questions se résument souvent à savoir où est-ce que l'on doit classer tel ou tel élément. En effet, on peut faire des ensemble à peu près comme on le souhaite. Par exemple, je peux prendre l'ensemble des nombres qui sont des solutions de mon problème, un ensemble que tous les scientifiques rêvent de découvrir !

Notation (Relation d'appartenance)**.** *Soit E un ensemble et x un objet quelconque. Si x est un élément de E, on dit que "x appartient à E", et on le note $x \in E$. Dans le cas contraire, si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.*

Universalité et Existentialité

Des gros mots compliqués pour dire des choses simples, encore une fois. Quand on raisonne sur un ensemble d'éléments, on va rencontrer exactement deux types de propositions : les propositions universelles et les propriétés existentielles.

Propositions universelles

Une proposition universelle est une proposition qui vaut pour tout le monde. Ainsi, quand on applique cette idée aux ensemble, cela signifie qu'elle portera sur tous les éléments de notre ensemble. Rappelez-vous notre exemple du début : tous les bâtiments ont des murs. C'est une proposition universelle sur les bâtiments, sur $\{batiment\}$.

Si $\mathcal{P}(x)$ est une proposition sur un objet x de E, la notation correcte est la suivante :

$$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$$

qui se lit *"Pour tout x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$"*. Dans notre exemple de bâtiments, l'écriture rigoureuse serait :

$$\forall x \in \{batiment\},\ x \text{ possède des murs}$$

Je vous laisse la traduire en langage parlé en exercice.

Propositions existentielles

Maintenant que nous avons des assertions sur tous les éléments d'un ensemble, il est intéressant de se demander la négation de ces dernières. Quelle est la négation de "Pour tout élément, ceci est vrai" ? Eh bien, il suffit de trouver un seul élément pour qui ceci est faux ! Il suffit juste de montrer l'**existence** de cet élément. Nous avons donc des propositions qui sont basées sur l'existence d'objets au sein d'un ensemble qui respecte des propriétés particulières. On ne demande pas d'unique, juste qu'il y en ait au moins un.

En vérité, il y aurait un tas d'autres raisons de légitimer l'existence des énoncés existentiels, mais cette approche suffira pour le moment. Retenez juste que l'existence d'éléments particuliers peut parfois permettre de trouver des choses intéressantes, voir d'établir des sous-ensembles respectant une liste encore plus spécifique de caractéristiques.

Si $\mathcal{Q}(x)$ est une proposition sur un objet x de E, la notation est la suivante :

$$\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x)$$

qui se lit *"Il existe (au moins) un x appartenant à E tel que $\mathcal{Q}(x)$"*.

Pour revenir sur notre exemple de bâtiments, supposons que l'un des bâtiments de ma ville est une mairie. Je pourrais alors écrire :

$$\exists x \in \{batiment\},\ x \text{ est une mairie}$$

Je vous laisse la traduire en langage parlé en exercice.

Avec cette dernière partie sur la logique, nous avons fait un tour rapide des fondations des mathématiques dans leur sens le plus général. Nous n'avons pas pu parler de tout, mais nous avons esquissé quelques bouts importants. Posez des questions et faites vos recherches pour une vue plus complète. Avant de parler de nombres transfinis, d'homéomorphismes et de variétés différentielles, les mathématiques sont avant tout une manière de conceptualiser le monde et de lui donner un sens rationnel.