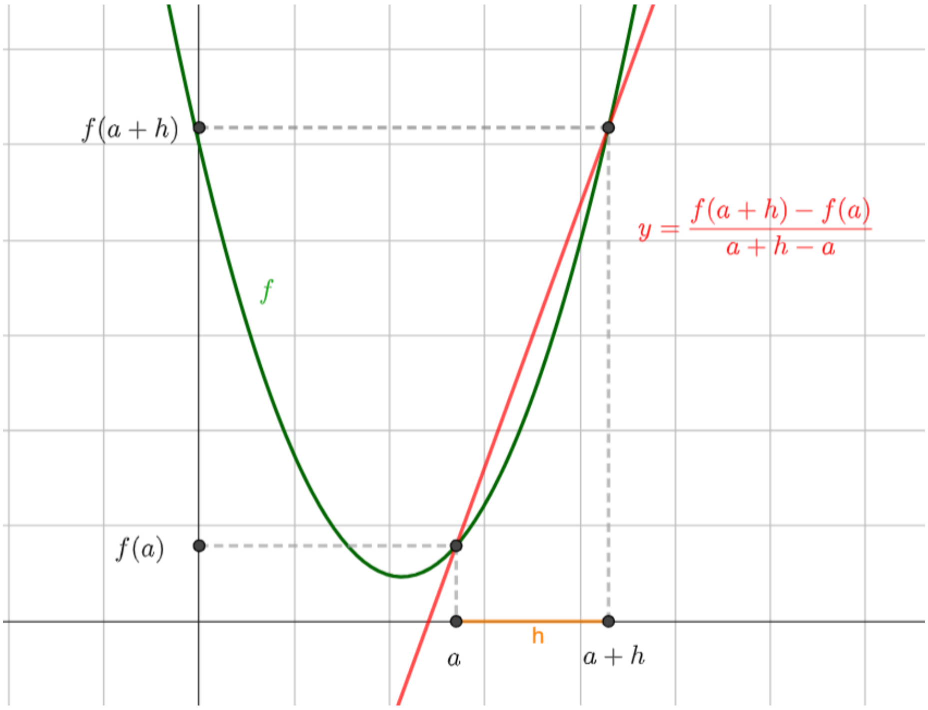
Retour sur la dérivation

L'étude des fonctions est toujours intimement liée à la dérivation. Cette notion forme la base de ce que l'on appelle le calcul infinitésimal. La dérivation est formalisée par Newton et Leibniz au XVIIe siècle. Les deux hommes avaient une approche différente mais ils aboutirent à des résultats similaires.

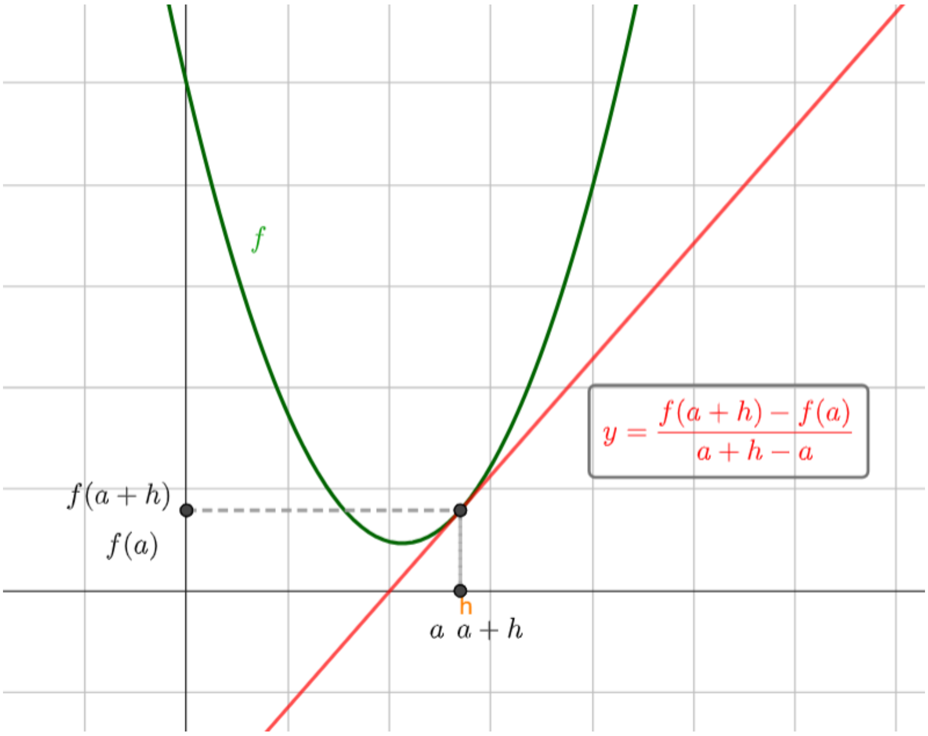
1 Nombre dérivé

Prenons la situation suivante :



On souhaite mesurer la variation de f (ici en vert) entre a et $a+h$. Pour approximer cela, une idée va être de tracer la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$. Ainsi, sa pente approximera le comportement de la courbe de f entre les deux valeurs. On a donc grâce à la formule du taux de variation la pente de la droite, que l'on a appelé y sur le graphique.

Cependant, on voit bien que la courbe verte ne suit pas exactement le tracé de la droite. Pour avoir une mesure plus précise de la variation autour de a, il faudrait que $a+h$ se rapproche de a, et donc que h diminue. Si on fait progressivement diminuer h, on va avoir la situation suivante :



On voit que la distance h est infiniment petite (sans être nulle), et que les points a et $a+h$ sont pratiquement confondus. La droite épouse quasi parfaitement la courbure de f au point a. C'est sur ce principe là que se base la dérivation.

Afin d'exprimer le fait de réduire h infiniment comme nous venons de le faire, introduisons un peu de notation.

Notation. *Soit f une fonction réelle et $x \in \mathbb{R}$. Si quand x s'approche à l'infini d'un certain nombre a, $f(x)$ s'approche infiniment d'un nombre l, alors on note*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Grâce à cette notation, on va pouvoir continuer notre construction.
Lorsque l'on fait tendre h vers 0, la droite va venir épouser la courbe au point $(a, f(a))$. Ainsi, **la pente de la droite représente la variation de la fonction f au point a.**

On aura donc la variation de f en a, que l'on appellera $f'(a)$, qui sera égale à :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

Définition (Dérivabilité en un point)**.** *Soit f une fonction réelle.*
*On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux de variation tend vers un nombre réel quand h prend des valeurs proches de 0. Ce réel est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et est noté $f'(a)$.*

Si f est dérivable en a, on aura

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition (Tangente à la courbe)**.** *Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a, f(a))$ dont le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$ (sur le schéma, c'est la droite rouge).*

L'équation réduite de la tangente est donnée par la formule

$$y_a = f'(a)(x-a) + f(a)$$

2 Fonctions dérivées

Définition (Fonction dérivée)**.** *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I. On appelle **fonction dérivée de** f la fonction qui pour tout $x \in I$ donne le nombre dérivé de f en x. On note cette fonction f'.*

Propriété. *Les affirmations suivantes sont vraies :*

— *Une somme de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.*

— *Un produit de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.*

— *Un quotient de fonctions dérivables sur I et dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable sur I.*

— *Un composé de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.*

2.1 Dérivées usuelles

Voici un tableau qui regroupe les dérivées de fonctions usuelles :

Nom	Expression	Ens. de définition	Dérivée	Ens. de Dérivabilité
Constante	$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

FIGURE 1 – Dérivées usuelles

2.2 Opérations sur les dérivées

Propriété. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.*

— ***Somme :***

$$(u + v)' = u' + v'$$

— ***Produit avec une constante :*** $(k \in \mathbb{R})$

$$(ku)' = ku'$$

— ***Produit de fonctions :***

$$(uv)' = u'v + uv'$$

— ***Quotient :*** $(v \neq 0)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

— ***Composition :***

$$(u(v))' = u'(v) \times v'$$

3 Dérivée et variations

Propriété. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$.*
- *f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$.*
- *Si $f'(x) = 0$, f change de sens de variation.*

Exemple. *Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 10$*

1. *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculez sa dérivée $f'(x)$.*
2. *Étudiez le signe de $f'(x)$.*
3. *Donnez les variations de f.*

1. *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur cet ensemble.*

$$\begin{aligned} f'(x) =& (x^2 - 7x + 10)' \\ =& (x^2)' + (-7x)' + (10)' \\ =& 2x + (-7) + 0 \\ =& 2x - 7 \end{aligned}$$

2. *On cherche à déterminer quand est-ce que $f'(x) \geq 0$. On va donc résoudre cette équation du premier dégré :*

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 7 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 7 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

On va donc pouvoir réaliser le tableau de signe associé à $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. *On sait que si la dérivée est positive la fonction de base croit, et que si la dérivée est négative, la fonction de base décroît. Ainsi, on peut déduire le tableau de variation de f depuis le tableau de signe de $f'(x)$.*

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\frac{7}{2}) = \frac{61}{4}$	$\nearrow$	