Cours d'Analyse 2

Département de Mathématiques, Institut Galilée
Didier Gamblin

17 janvier 2024

Table des matières

Chapitre 1

Dérivées d'ordre supérieur

1 Dérivée seconde, convexité

1.1 Définitions

Définition 1 (Dérivée seconde) *Lorsqu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que la fonction dérivée f' est dérivable sur I on dit que f est deux fois dérivable sur I et on appelle la dérivée seconde de f la fonction $(f')'$ que l'on note f''.*

Exemples
• La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$. La fonction sinus est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\sin'' = -\sin$.

• La fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet :

Définition 2 (Fonction convexe sur un intervalle) *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, C_f sa courbe représentative et I un intervalle inclus dans D. On dit que la fonction f est convexe sur I si pour tout couple (M_1, M_2) de points de C_f d'abscisses dans I, le segment*

$[M_1, M_2]$ *est au-dessus de* C_f.
Cela se traduit par l'inégalité suivante :

$$\boxed{\forall t \in [0,1]\,,\ \forall (x_1, x_2) \in I^2\,,\ f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))}$$

Illustrations graphiques et explications :

Remarque Lorsque f est convexe sur I, on obtient en particulier, avec $t = \frac{1}{2}$,

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2\ ,\ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Définition 3 (Fonction concave sur un intervalle) *De même, on dit que* f *est concave sur* I *si pour tout couple* (M_1, M_2) *de points de* C_f *d'abscisses dans* I*, le segment* $[M_1, M_2]$ *est au-dessous de* C_f.

Illustrations graphiques :

Exemples
- Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0, +\infty[$.

1.2 Propriétés

Remarques
- Si f est convexe (resp. concave) alors $-f$ est concave (resp. convexe).
- Etudier la convexité d'une fonction signifie déterminer les intervalles où elle est convexe et ceux où elle est concave.

Lorsqu'une fonction est deux fois dérivable, le signe de f'' nous renseigne sur la convexité de la fonction f et la position de la courbe représentative de f par rapport à ses tangentes.

Théorème 1 *Si f admet une dérivée seconde partout positive sur l'intervalle I alors f est convexe sur I. Si f admet une dérivée seconde partout négative sur l'intervalle I alors f est concave sur I.*

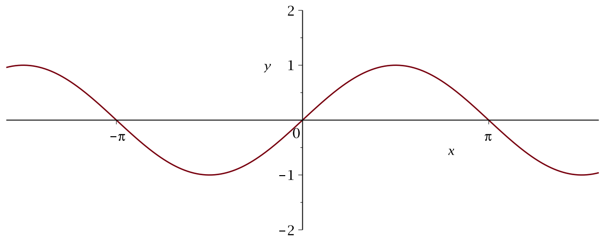
Preuve :

Remarque En fait, si f est deux fois dérivable sur l'intervalle I, il y a équivalence entre $\{f$ est convexe sur $I\}$ et $\{f''$ est positive sur $I\}$.
Exemple La fonction sinus est donc concave sur chacun des intervalles $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et convexe sur chacun des intervalles $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, pour k entier.

Théorème 2 *Si f admet une dérivée seconde partout positive (resp. négative) sur l'intervalle I, pour tout x_0 dans I, la courbe représentative de f est, sur l'intervalle I, au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$.*
Si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en un point x_0, la courbe représentative de f traverse sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$. On dit alors que le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** *de la courbe représentative de f.*

Preuve :

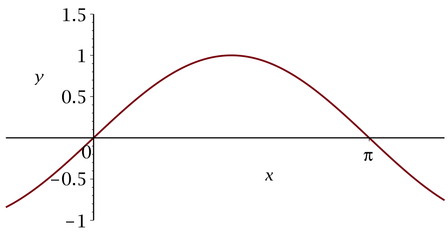
Exemple La courbe représentative de la fonction sinus admet pour points d'inflexions les points $(k\pi, 0)$ pour k entier.



1.3 Quelques inégalités de convexité

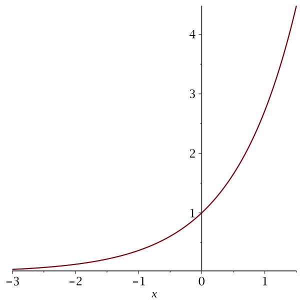
- La fonction sinus étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \,,\, \frac{2}{\pi}\, x \leq \sin x \leq x$$



- La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \,,\, \exp(x) \geq 1 + x$$



2 Dérivée d'ordre n

2.1 Définitions et exemples

Plus généralement on a :

Définition 4 (Dérivées successives) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est n fois ($n \in \mathbb{N}$) dérivable sur I et on définit la dérivée $n$ème de f que l'on note $f^{(n)}$ de la façon suivante :*
On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I et on pose $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$.
On note $D^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont n fois dérivable sur I.

Définition 5 (Fonctions de classe C^n) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I avec une dérivée nième continue sur I.*
On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^n.

Remarque Les fonctions de classe C^0 sont les fonctions continues.

Définition 6 (Fonctions indéfiniment dérivables ou de classe C^∞) *Lorsqu'une fonction est de classe C^n pour tout n dans $\mathbb{N}$ on dit qu'elle est de classe C^∞, ou aussi qu'elle est indéfiniment dérivable. Cela équivaut à dire que f est n fois dérivable pour tout n dans $\mathbb{N}$.*
On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞.

Exemples

• La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même. Par récurrence sur l'ordre de dérivation on obtient que la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ sa dérivée nième est elle-même.

• La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction cosinus. cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sinus est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'' = -\sin$. $\sin''$ est donc 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin^{(4)} = \sin$. Par récurrence sur l'ordre de dérivation on obtient que sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et les dérivées successives de sin sont cos, $-\sin$, $-\cos$, sin, cos, $-\sin$, ... On obtient $\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin$ et $\sin^{(2n+1)} = (\sin^{(2n)})' = (-1)^n \cos$.

• La fonction cosinus est la dérivée de la fonction sinus donc elle est aussi indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\cos^{(2n)} = (\sin')^{(2n)} = \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos$ et $\cos^{(2n+1)} = (\sin')^{(2n+1)} = \sin^{(2n+2)} = (-1)^{n+1} \sin$.

• Soit α un nombre réel. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^\alpha (= \exp(\alpha \ln x))$ est indéfiniment dérivable et pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}$. En effet :

• En particulier si α est un entier naturel, $f : x \longmapsto x^\alpha$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
Si $n < \alpha$, $f^{(n)}(x) = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!}\, x^{\alpha-n}$.
Si $n = \alpha$, $f^{(n)}(x) = \alpha!$.
Si $n > \alpha$, $f^{(n)}(x) = 0$.
• Pour $\alpha = -1$ on obtient que la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. En effet :

2.2 Propriétés, formule de Leibniz

Théorème 3 (Opérations sur les fonctions de classes C^n) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions de classe C^n, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, et α un nombre réel.*
(i) $\alpha.f$ est de classe C^n sur I et on a $(\alpha.f)^{(n)} = \alpha.f^{(n)}$.
(ii) $f + g$ est de classe C^n sur I et on a

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

(iii) $f \cdot g$ est de classe C^n sur I et on a

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \qquad \textit{(formule de Leibniz)}}$$

(iv) Soit h une fonction de classe C^n sur un intervalle $J \supset g(I)$, alors $h \circ g$ est de classe C^n sur I.
(v) Si de plus g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est aussi de classe C^n sur I.
(vi) Si $f : I \longrightarrow J$ est de classe C^n ($n \geq 1$), bijective, et que la fonction dérivée f' ne s'annule pas sur I, alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe C^n sur J.

Preuve :
(i) Pour $n = 0$ le résultat est connu. Si f est de classe C^0, c'est-à-dire continue, il en est de même pour $\alpha.f$. Et évidemment $(\alpha.f)^{(0)} = \alpha.f = \alpha.f^{(0)}$.

Soit n un entier naturel. Supposons le résultat vrai à l'ordre n.
Soit f une fonction de classe C^{n+1}. f est aussi de classe C^n, donc $\alpha.f$ aussi et on a $(\alpha.f)^{(n)} = \alpha.f^{(n)}$.
$f^{(n)}$ est de classe C^1, donc dérivable, ainsi que $\alpha.f^{(n)}$. La fonction $(\alpha.f)^{(n)}$ est donc dérivable, c'est-à-dire que $\alpha.f$ est $n+1$ fois dérivable et on a

$$(\alpha.f)^{(n+1)} = ((\alpha.f)^{(n)})' = (\alpha.f^{(n)})' = \alpha.(f^{(n)})' = \alpha.f^{(n+1)}$$

$f^{(n+1)}$ étant continue, $\alpha.f^{(n+1)}$ l'est aussi et donc aussi $(\alpha.f)^{(n+1)}$. La fonction $\alpha.f$ est donc bien de classe C^{n+1}. Le résultat est donc vrai à l'ordre $n+1$.

(ii)

(iii) Le produit de deux fonctions continues est continue et $(f \cdot g)^{(0)} = f^{(0)} \cdot g^{(0)}$, donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
Le produit de deux fonctions dérivables est dérivable et la formule de Leibniz pour $n = 1$ est connue. De l'égalité $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ on déduit que si f' et g' sont continue alors $(f \cdot g)'$ est continue. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$.

Sans se poser la question de l'existence, calculons $(fg)''$ et $(fg)^{(3)}$:

$(fg)'' =$

$(fg)^{(3)} =$

$\star$ *Coefficients binomiaux :* Pour n entier naturel et k entier naturel vérifiant $k \leq n$ on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \ , \ \binom{n}{0} = 1 \quad \text{et pour } 1 \leq k \leq n \ , \ \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdots k}$$

$\binom{n}{k}$ correspond au nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli (programme de Lycée). C'est aussi le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n (voir Cours Algèbre 1).
On a la relation de Pascal (pour $n \geq 1$ et $k+1 \leq n$) :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ce qui permet de calculer les coefficients binomiaux par récurrence. Ce que l'on visualise avec le triangle de Pascal :

$\star$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$; supposons que le produit de deux fonctions de classe C^n soit de classe C^n et que la formule de Leibniz soit vraie au rang n. Soit f et g deux fonctions de classe C^{n+1}. f et g étant aussi de classe C^n, $f \cdot g$ est de classe C^n et on a $(f \cdot g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.
Dans cette somme les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont de classe C^1, donc avec (i) et (ii) on obtient que $(f \cdot g)^{(n)}$ l'est aussi et donc $f \cdot g$ est de classe C^{n+1}. De la dérivée d'un produit de deux fonctions et de la relation de Pascal on déduit les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(n+1)} &= ((f\cdot g)^{(n)})' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((f^{(k)})'\cdot g^{(n-k)} + f^{(k)}\cdot (g^{(n-k)})'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}\cdot g^{(n-k)} + f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k+1)}\cdot g^{(n+1-(k+1))} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)}\cdot g^{(0)} + f^{(0)}\cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right) f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)}\cdot g^{(0)} + f^{(0)}\cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

La formule de Leibniz est donc vraie au rang $n+1$.

(iv)

(v)

(vi) Pour $n = 1$ le résultat est vrai. En effet, d'après le cours d'Analyse 1, si f est bijective et dérivable sur I et que $f' \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur J et on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Le fait que f^{-1} et f' soient continues assure la continuité de $(f^{-1})'$ et donc le fait que f^{-1} soit de classe C^1.
Supposons le résultat vrai pour un entier $n \geq 1$.
Soit donc $f : I \longrightarrow J$ de classe C^{n+1}, bijective avec $f' \neq 0$. f étant aussi de classe C^n, f^{-1} l'est également. f' étant de classe C^n, $f' \circ f^{-1}$ est de classe C^n d'après (iv) et donc $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ l'est aussi d'après (v). La relation $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ assure alors que f^{-1} est de classe C^{n+1}.

Remarque : Le théorème précédent reste vrai si l'on remplace à chaque fois " de classe C^n " par " n fois dérivable " ou aussi par " de classe C^∞ ".

2.3 Applications

• Les fonctions polynomiales, c'est-à-dire de la forme $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où les a_i sont des nombres réels, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puisque les fonctions puisssances entières $x \longmapsto x^k$ le sont.
Remarquons que pour tout entier k dans $\{0, \dots, n\}$, les fonctions $x \longmapsto x^k$ ont une dérivée $n+1$ ième nulle. On a donc

$$P^{(n+1)} = 0$$

On a également pour tout entier j dans $\{0, \dots, n\}$,

$$P^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k)^{(j)}(0) = j! a_j$$

On a donc

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \textit{(formule de Taylor)}$$

(*On peut aussi voir cela comme une conséquence de la formule de Taylor reste intégral. Voir la fin du Chapitre 2 du cours d'Analyse 2*).
Ce qui montre l'unicité de l'écriture $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. (Plus précisément, si on a aussi $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ avec $m \geq n$, on a $b_k = 0$ pour $n < k \leq m$ et $b_k = a_k$ pour $0 \leq k \leq n$).
(*Voir le cours d'Algèbre 3 en L2-Maths concernant les polynômes*).

• La fonction tangente est de classe C^∞ sur les intervalles où elle est définie puisque les fonctions sinus et cosinus le sont.

• La fonction Arctangente est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet :

• La fonction Arcsinus est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. En effet :

• La fonction $f : x \longmapsto x\exp(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, par la formule de Leibniz on a pour $n \geq 1$:

$f^{(n)}(x) =$

Régularité des fonctions usuelles
Les fonctions polynomiales, sinus, cosinus, exponentielle, logarithme, tangente, inverse, puissances entières, Arctangente, sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.
Les fonctions racine carrée, racine cubique, Arcsinus, Arccosinus, sont de classe C^∞ sur leur ensemble de dérivabilité.

Remarque *Il existe des fonctions continues qui ne sont pas dérivables ; il existe des fonctions dérivables qui ne sont pas de classe C^1 et il existe des fonctions de classe C^1 qui ne sont pas deux fois dérivables. Plus généralement, pour tout entier n, il existe des fonctions qui sont n fois dérivables et ne sont pas de classe C^n, et des fonctions de classe C^n qui ne sont pas $n+1$ fois dérivables. Voir des exemples dans la section Exercices (ex 1,2,14).*
On a donc les inclusions strictes suivantes :

$$C^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset D^3(I,\mathbb{R}) \subset C^2(I,\mathbb{R}) \subset D^2(I,\mathbb{R}) \subset C^1(I,\mathbb{R}) \subset D^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R})$$

Chapitre 2

Intégration

1 Intégrale de Riemann des fonctions continues

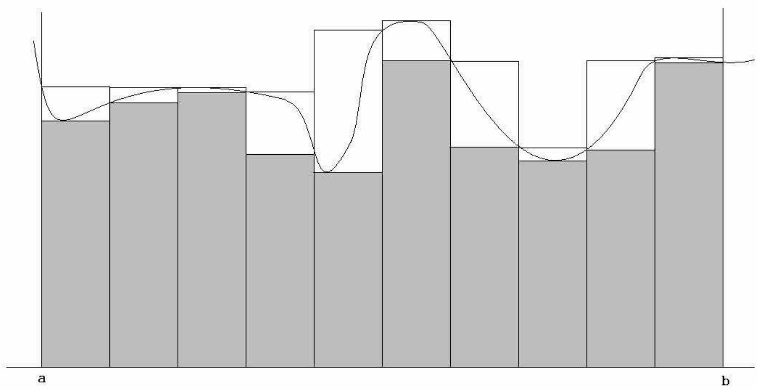
1.1 Définition de l'intégrale

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur égale $\frac{b-a}{n}$:

- Pour tout entier k appartenant à $[0, n-1]$, on pose $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$. Ainsi, $a_0 = a$, $a_n = b$ et $[a, b]$ est la réunion des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ pour k dans $[0, n-1]$.

- On considère une suite finie de points $u = (u_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ telle que pour tout k, u_k appartienne à $[a_k, a_{k+1}]$.



Sommes de Darboux

Sur chacun des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, la fonction continue f atteint son minimum et son maximum. On peut alors définir les sommes de Darboux inférieures et supérieures

$$\boxed{S_n^-(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\min_{[a_k,a_{k+1}]}(f) \quad , \quad S_n^+(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{[a_k,a_{k+1}]}(f)}$$

On définit aussi la somme de Riemann (associée à la suite $u = (u_k)_{0\leq k\leq n-1}$)

$$\boxed{S_n(f,[a,b],u) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)}$$

Remarques

- Lorsque f est positive sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, $\frac{b-a}{n}\min_{[a_k,a_{k+1}]}(f)$ et $\frac{b-a}{n}\max_{[a_k,a_{k+1}]}(f)$ correspondent à des aires de rectangles, et lorsque f est négative sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, ces quantités correspondent à l'opposé d'aires de rectangles, représentés sur la figure.

- Lorsque f est positive sur $[a, b]$, la somme de Darboux inférieure $S_n^-(f,[a,b])$ est égale à la somme des aires des rectangles gris et la somme de Darboux supérieure $S_n^+(f,[a,b])$ est égale à la somme des aires des rectangles blancs (qui contiennent les gris).

- Puisque pour tout entier k dans $[0, n-1]$, on a $\min\limits_{[a_k,a_{k+1}]}(f) \leq f(u_k) \leq \max\limits_{[a_k,a_{k+1}]}(f)$, on en déduit l'inégalité

$$\boxed{S_n^-(f,[a,b]) \leq S_n(f,[a,b],u) \leq S_n^+(f,[a,b])}$$

- Si f est constante égale à C sur $[a, b]$ alors on

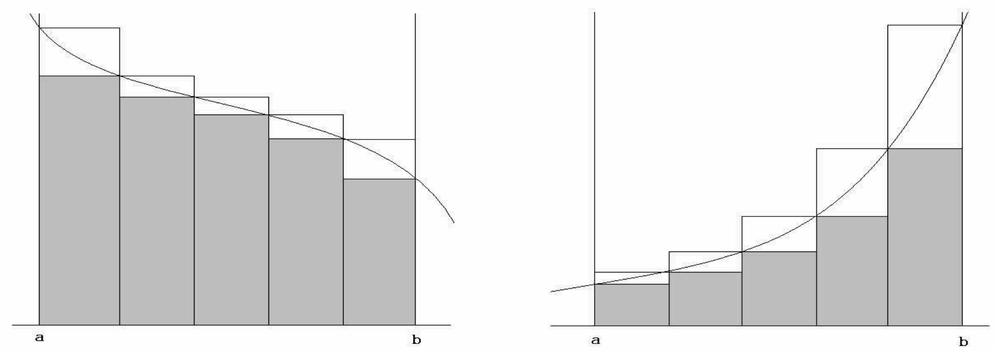
$$S_n^-(f,[a,b]) = S_n(f,[a,b],u) = S_n^+(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C = (b-a)\cdot C$$

Etude d'exemples

- $f(x) = x$ et $[a, b] = [0, 1]$. On a donc $a_k = \frac{k}{n}$. Posons $u_k = a_k$. On a

• $f(x) = \exp(-x)$ et $[a, b] = [-1, 1]$. On a $a_k = -1 + k\frac{2}{n}$. On a

Cas particulier des fonctions monotones



Si la fonction f est croissante sur $[a,b]$ on a

$$\min_{[a_k,a_{k+1}]}(f) = f(a_k) \quad \text{et} \quad \max_{[a_k,a_{k+1}]}(f) = f(a_{k+1})$$

d'où

$$S_n^-(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad S_n^+(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

On en déduit

$$S_n^+(f,[a,b]) - S_n^-(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\left(f(a_n) - f(a_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$$

Si la fonction f est décroissante sur $[a,b]$ on a

$$\min_{[a_k,a_{k+1}]}(f) = f(a_{k+1}) \quad \text{et} \quad \max_{[a_k,a_{k+1}]}(f) = f(a_k)$$

d'où

$$S_n^-(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \quad \text{et} \quad S_n^+(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

On en déduit

$$S_n^+(f,[a,b]) - S_n^-(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\left(f(a_0) - f(a_n)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) - f(b)\right)$$

On constate que lorsque la fonction f est monotone sur $[a,b]$ on a

$$\lim S_n^+(f,[a,b]) - S_n^-(f,[a,b]) = 0$$

En fait ce résultat est général :

Proposition 1 *Pour f continue sur $[a,b]$ on a* $\lim S_n^+(f,[a,b]) - S_n^-(f,[a,b]) = 0$.

Preuve : On ne va pas montrer cette proposition dans le cas général. On a montré le résultat dans le cas où f est monotone. Montrons-le dans le cas où f est de classe C^1 sur $[a,b]$:

On a le théorème suivant :

Théorème 4 *Pour f continue sur $[a,b]$, les trois suites $(S_n^-(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n^+(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(f,[a,b],u))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. De plus, les sous-suites $(S_{2^n}^-(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2^n}^+(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

Preuve : Nous n'allons montrer que la deuxième partie du théorème. La difficulté de la première partie est liée au fait que les suites $(S_n^-(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n^+(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont en général pas monotones.
D'après la proposition 1 on a $\lim S_{2^n}^-(f,[a,b]) - S_{2^n}^+(f,[a,b]) = 0$ puisque toute sous-suite d'une suite convergente est convergente de même limite.
Il reste à montrer que $(S_{2^n}^-(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(S_{2^n}^+(f,[a,b]))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. C'est un peu technique, mais une illustration graphique permet de s'en convaincre :

Notons ici $a_j(n) = a + j\frac{b-a}{2^n}$ pour j dans $[0, 2^n-1]$. On a

$$\begin{aligned}
S_{2^{n+1}}^-(f,[a,b]) &= \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} \min_{[a_j(n+1),a_{j+1}(n+1)]}(f) \\
&= \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \min_{[a_{2k}(n+1),a_{2k+1}(n+1)]}(f) + \min_{[a_{2k+1}(n+1),a_{2k+2}(n+1)]}(f) \\
&\geq \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2 \min_{[a_k(n),a_{k+1}(n)]}(f) = S_{2^n}^-(f,[a,b])
\end{aligned}$$

puisque l'on a

$$[a_{2k}(n+1), a_{2k+1}(n+1)] \cup [a_{2k+1}(n+1), a_{2k+2}(n+1)] = [a_k(n), a_{k+1}(n)]$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
S^+_{2^{n+1}}(f,[a,b]) &= \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} \max_{[a_j(n+1),a_{j+1}(n+1)]}(f) \\
&= \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \max_{[a_{2k}(n+1),a_{2k+1}(n+1)]}(f) + \max_{[a_{2k+1}(n+1),a_{2k+2}(n+1)]}(f) \\
&\leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2 \max_{[a_k(n),a_{k+1}(n)]}(f) = S^+_{2^n}(f,[a,b])
\end{aligned}$$

Définition 7 *La limite commune des trois suites précédentes est appelée intégrale de f sur $[a,b]$ et notée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *ou* $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarque Dans l'expression $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, la variable t est dite muette ; on peut la remplacer par n'importe qu'elle autre variable.

Interprétation en terme d'aire

Lorsque f est positive sur $[a,b]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ représente l'aire du domaine $\mathcal{S}$ délimité par les droites d'équations $y=0$, $x=a$, $x=b$ et le graphe de f.

Si la fonction f change de signe sur $[a,b]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ représente la différence entre l'aire de la partie de $\mathcal{S}$ située au-dessus de l'axe des abscisses et celle de la partie de $\mathcal{S}$ située au-dessous de l'axe des abscisses.

1.2 Propriétés de l'intégrale

Premières propriétés

On déduit de la définition les propriétés suivantes :

Proposition 2 *On a :*

(i). $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *et* $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$ *(Linéarité de l'intégrale).*

(ii). *Si f est positive sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ *(Positivité de l'intégrale).*

(iii). *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

(iv). *Si M et m vérifient pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors*
$\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$ *(Inégalité de la moyenne).*

(v). *Pour tout $c \in]a,b[$* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(Relation de Chasles).*

(vi). *On a* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$ *(Inégalité triangulaire).*

Preuve :
(i) Considérons une suite finie de points $u = (u_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ telle que pour tout k, u_k appartienne à $[a_k, a_{k+1}]$. On a les égalités suivantes :

$$S_n(f+g,[a,b],u) = S_n(f,[a,b],u) + S_n(g,[a,b],u)$$

$$S_n(\lambda f,[a,b],u) = \lambda S_n(f,[a,b],u)$$

On en déduit le résultat par passage à la limite dans les égalités ci-dessus.

(ii)

Conventions

Définition 8 *Soit $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit par convention :*

$$\int_c^a f(t)\,dt = -\int_a^c f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

En effet,

Le choix de ces conventions permet de généraliser la relation de Chasles de la façon suivante :

Proposition 3 (Relation de Chasles) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Alors pour tous réels a, b et c dans I, on a*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$$

Valeur moyenne et propriété de la moyenne

Définition 9 (Valeur moyenne d'une fonction) *On appelle valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ le nombre*

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt}$$

Théorème 5 (Théorème de la moyenne) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u>. Alors, il existe c dans $[a, b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$$

La valeur moyenne de f est donc une valeur prise par la fonction f sur $[a, b]$.

Preuve :

2 Calcul numérique des intégrales

Avec les notations de la section 1. on a pour une fonction f continue sur $[a, b]$:

$$S_n^-(f, [a, b]) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq S_n^+(f, [a, b])$$

Puisque l'on a $\lim S_n^+(f, [a, b]) - S_n^-(f, [a, b]) = 0$, cela permet en théorie d'obtenir un encadrement de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ aussi précis que l'on veut pourvu que n soit choisi assez grand. Mais en pratique on aimerait pouvoir déterminer l'entier n permettant d'encadrer $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ à une précision donnée.
On rappelle dans la proposition suivante des propriétés démontrées précédemment et qui permettent cela. (*Voir le cas des fonctions monotones et la preuve de la proposition 1*).

Proposition 4 *Lorsque f est monotone sur $[a, b]$, on a l'égalité*

$$\boxed{S_n^+(f, [a, b]) - S_n^-(f, [a, b]) = \frac{(b-a)|f(b) - f(a)|}{n}}$$

Lorsque f est de classe C^1 sur $[a, b]$; si l'on pose $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f'(t)|$, on a la majoration

$$\boxed{S_n^+(f, [a, b]) - S_n^-(f, [a, b]) \leq \frac{M(b-a)^2}{n}}$$

Exemple d'application

On veut approximer l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.
La fonction $f : x \longmapsto e^{-x^2}$ est décroissante sur $[0,1]$ donc monotone.
On a $(1-0)|e^{-1} - e^0| \sim 0.6$ donc $(1-0)|e^{-1} - e^0| < 1$. Si l'on veut un encadrement de I d'amplitude 10^{-2}, il suffit donc de prendre $n = 100$. On obtient avec une machine

$$S^-_{100}(f,[0,1]) = \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} e^{-(k+1)^2/100^2} \sim 0.7436573$$

et

$$S^+_{100}(f,[0,1]) = \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} e^{-k^2/100^2} \sim 0.7499786$$

On a donc l'encadrement suivant

$$0.743 < S^-_{100}(f,[0,1]) \leq I \leq S^+_{100}(f,[0,1]) < 0.750$$

dont l'amplitude est 7.10^{-3} ($< 10^{-2}$).

3 Primitives

3.1 Définition et propriétés

Définition 10 (Primitive) *Une fonction F est dite primitive d'une fonction f sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et $F' = f$.*

Remarque Si F est une primitive de f sur I, les fonctions $F + c$, où c est une constante réelle, sont aussi des primitives de f sur I, puisque l'on a $(F + c)' = F' = f$.

Proposition 5 *Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$ où c est une constante réelle.*

Preuve :

Exemples

• Considérons $F_1(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Cela définit une fonction F_1 sur $\mathbb{R}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet :

Et on a pour tout x réel

$$F_1'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction F_1 est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

• Soit $F_2(x) = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$; la fonction F_2 est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, et pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ on a

La fonction F_2 est donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$.

• Soit $k \in \mathbb{Z}$. Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ on a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{\cos' x}{\cos x}$. Les primitives de la fonction tangente sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$x \longmapsto -\ln|\cos x| + c$$

où c est une constante réelle.

3.2 Opérations sur les primitives

Des propriétés de la dérivation des fonctions on déduit immédiatement :

Proposition 6 *Si F est une primitive de f sur un intervalle I et α un nombre réel, $\alpha.F$ est une primitive de $\alpha.f$ sur I.*
Si F_1 et F_2 sont respectivement des primitives de f_1 et f_2 sur un intervalle I, $F_1 + F_2$ est une primitive de $f_1 + f_2$ sur I.

Remarque
Il n'y a pas de formule donnant les primitives du produit, du quotient, ou de la composée de deux fonctions en fonction des primitives de ces mêmes fonctions.

3.3 Primitives usuelles

Fonctions	Intervalles	Primitives
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[\,\text{ou}\,]0, +\infty[$	$x \longmapsto \ln\|x\| + c$
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$]-\infty, +\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\})$	$]-\infty, 0[\,\text{ou}\,]0, +\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \ (\alpha \neq -1)$	$]0, +\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$x \longmapsto e^x$	$]-\infty, +\infty[$	$x \longmapsto e^x + c$
$x \longmapsto \sin x$	$]-\infty, +\infty[$	$x \longmapsto -\cos x + c$
$x \longmapsto \cos x$	$]-\infty, +\infty[$	$x \longmapsto \sin x + c$
$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \tan x + c$
$x \longmapsto \tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$	$x \longmapsto -\ln\|\cos x\| + c$
$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$	$]-\infty, +\infty[$	$x \longmapsto x + c$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & x + c \\ x & \longmapsto & -x + c \end{array}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]-\infty, -1[\,\text{ou}\,]1, +\infty[$	$x \longmapsto \ln\|x + \sqrt{x^2-1}\| + c$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$]-\infty, +\infty[$	$x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$

4 Relation entre intégrale et primitive

4.1 Théorème fondamental de l'Analyse

Théorème 6 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I. La fonction Φ définie sur I par*

$$\boxed{\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est dérivable sur I et admet pour dérivée la fonction f. On a aussi $\Phi(a) = 0$.
Φ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a.
Toute fonction continue sur un intervalle admet donc des primitives sur cet intervalle.

Preuve :

Remarque
La continuité sur un intervalle est une condition suffisante pour qu'une fonction admette des primitives, mais ce n'est pas nécessaire. En effet, une fonction non continue sur un intervalle peut aussi admettre des primitives ; il suffit de considérer la fonction dérivée d'une fonction dérivable qui n'est pas C^1 (par exemple la dérivée du prolongement continu à $\mathbb{R}$ de $x^2 \sin(\frac{1}{x})$).

Exemple La fonction inverse étant continue sur $]0, +\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On appelle fonction logarithme népérien (notée ln) celle qui s'annule au point 1. On pose

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt}$$

4.2 Calcul intégral et primitive

Corollaire 7 *Si F est une primitive de f continue sur $[a, b]$, alors*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)}$$

On utilise souvent la notation : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Preuve :

Remarque Cela donne donc une méthode de calcul de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ pourvu que l'on connaisse une primitive de f sur $[a, b]$.

Proposition 8 *Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ telle que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$, *alors $f = 0$ sur $[a, b]$.*

Preuve : Posons $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ pour x dans $[a, b]$. Puisque $\Phi' = f \geq 0$ alors Φ est croissante sur $[a, b]$. Comme $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, Φ est nulle sur $[a, b]$. On en déduit $f = \Phi' = 0$ sur $[a, b]$.

5 Méthodes de calcul intégral

Si l'on connaît une primitive d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, cela donne une méthode de calcul de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$.

Exemple La fonction Arctangente est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Mais en général on ne connaît pas une telle primitive.

Nous allons voir les deux outils principaux de calcul intégral que sont l'intégration par parties et la formule de changement de variable.

5.1 Intégration par parties

L'intégration par parties transforme l'intégrale d'une fonction sur un intervalle en une intégrale d'une autre fonction sur le même intervalle. Elle est basée sur la formule de dérivation du produit de deux fonctions.

Théorème 7 *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors :*

$$\boxed{\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt}$$

Preuve :

Mode d'emploi On doit mettre la fonction à intégrer sous la forme du produit de deux fonctions. Parmi ces deux fonctions il faut choisir celle que l'on va dériver (la fonction g de la formule) et celle que l'on va intégrer (la fonction f' de la formule). Il faut bien sûr faire le bon choix, pour se ramener à une intégrale plus simple à calculer. A noter que le choix de f se fait à une constante près.

Exemples

• Calculons $I = \displaystyle\int_1^e \ln t\,dt$.

On pose $\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = \ln t \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$, ce qui donne

$$I = \int_1^e \ln t\,dt = [t\ln t]_1^e - \int_1^e t\frac{1}{t}\,dt = e\ln e - (e-1) = 1$$

• *Calcul des primitives de la fonction logarithme :*

Pour tout $x > 0$ posons $\phi(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$. La même intégration par parties donne

$$\phi(x) = \int_1^x \ln t\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\,dt = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1$$

Les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction logarithme sont donc les fonctions $x \longmapsto x\ln x - x + C$ où C est une constante réelle.

• Intégrales du type $I(P,\alpha) = \displaystyle\int_a^b P(t)e^{\alpha t}\,dt$ où P est une fonction polynômiale de degré $n \geq 1$ et α un réel non nul.

• Considérons $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt$ où α et β sont deux réels non nuls et x un réel quelconque.
On peut indifféremment dériver $t \longmapsto e^{\alpha t}$ ou $t \longmapsto \sin(\beta t)$. Posons par exemple
$\begin{cases} f'(t) = e^{\alpha t} \\ g(t) = \sin(\beta t) \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t} \\ g'(t) = \beta\cos(\beta t) \end{cases}$, ce qui donne

$$F(x) = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,dt.$$

Nous sommes ramenés à une intégrale du même type. Effectuons une seconde intégration par parties qui ne nous ramène pas au point de départ ; autrement dit, nous continuons à intégrer $t \longmapsto e^{\alpha t}$ et à dériver la fonction trigonométrique $t \longmapsto \cos(\beta t)$, ce qui donne

$$F(x) = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos(\beta t)\right]_0^x - \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2\int_0^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt,$$

$F(x)$ est donc solution d'une équation du premier degré à une inconnue. On résoud et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \Big(1+\big(\frac{\beta}{\alpha}\big)^2\Big)^{-1}\Big(\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos(\beta t)\right]_0^x\Big), \\ &= \Big(1+\big(\frac{\beta}{\alpha}\big)^2\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2}\big(e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 1\big)\Big). \end{aligned}$$

• Déterminons les primitives de Arcsinus sur $[-1,1]$:

5.2 Formule de changement de variable

La formule de changement de variable transforme l'intégrale d'une fonction sur un intervalle en une intégrale d'une autre fonction sur un autre intervalle. Elle est basée sur la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.

Théorème 8 *Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\varphi([a,b]) \subset [c,d]$ et soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[c,d]$. Alors*

$$\boxed{\int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u)\, du}$$

Preuve :

Mode d'emploi La formule s'applique dans les deux sens.
Un changement de variable se fait avec trois opérations :
- Remplacer $\varphi(t)$ par u (resp. u par $\varphi(t)$).
- Remplacer $\varphi'(t)\,dt$ par du (resp. du par $\varphi'(t)\,dt$).
- Remplacer les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ (resp. $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ par a et b).

Exemples

• Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$. La fonction sinus étant de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut faire le changement de variable $u = \sin t$ avec t dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On obtient :

• Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,dt$. On pose $t^2 = u$ d'où $2tdt = du$. Si $t = 0$, $u = 0$ et si $t = 1$, $u = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\underbrace{t^4}_{u^2}+1}\,\underbrace{2tdt}_{du} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\left[(u)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Ici, on aurait aussi pû reconnaître la dérivée de la fonction composée $t \longmapsto (t^2)$ et ne pas poser le changement de variable :

$$\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{(t^2)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[(t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

• Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt$. On pose $u = e^t$ de sorte que $du = e^t dt$ (ou encore, en remarquant que $\ln(u) = t$, $dt = \dfrac{du}{u}$). Lorsque $t = 0$, $u = 1$; lorsque $t = 1$, $u = e$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{e^t+\frac{1}{e^t}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{u+\frac{1}{u}}\,\frac{du}{u}\\ &= \int_1^e \frac{u}{u^2+1}\,\frac{du}{u} = \int_1^e \frac{1}{u^2+1}\,du\\ &= [(u)]_1^e = (e) - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

• Calcul de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^4 \ln(1+\sqrt{t})\,dt$.

• Calcul des intégrales du type $I(p,q) = \displaystyle\int_a^b \sin^p t \cos^q t\,dt$ où p et q sont des entiers naturels.

- Si p est impair on effectue le changement de variable $u = \cos t$ et, avec la formule

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_a^b (\sin^2 t)^{\frac{p-1}{2}} \sin t \cos^q t\, dt \\ &= -\int_a^b (1-\cos^2 t)^{\frac{p-1}{2}} \cos^q t(-\sin t)\, dt \\ &= -\int_{\cos a}^{\cos b} (1-u^2)^{\frac{p-1}{2}} u^q\, du \end{aligned}$$

On est donc ramené à intégrer une expression polynômiale puisque $\frac{p-1}{2}$ est un entier naturel.
Si q est impair on peut procéder de la même façon en effectuant le changement de variable $u = \sin t$.

- Si p et q sont pairs la méthode précédente ne marche plus. On linéarise alors l'expression trigonométrique.
Par exemple calculons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t\, dt$. On a

$$\cos^2 t \sin^2 t = \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{8}(1-\cos 4t)$$

D'où

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

Cette méthode de linéarisation marche aussi lorsque p ou q est impair, mais nécessite plus de calculs que la méthode précédente utilisant un changement de variable.

6 Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace

6.1 Formule de Taylor à l'ordre 0

Supposons qu'une fonction f soit de classe C^1 sur un intervalle I. Soit a et b deux points de I. Puisque f est une primitive de f' sur I on a $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$. On obtient la formule :

$$\boxed{f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, dt}$$

Remarques
- Si l'on connaît $f(a)$ et f' sur $[a,b]$ (si $a \leq b$), alors $f(b)$ est déterminé.
- Cette formule permet de retrouver le sens de variation de f connaissant le signe de f'.
- L'application du théorème de la moyenne permet de retrouver la conclusion du théorème des accroissements finis. Mais ici on a supposé la condition plus forte que f' est continue sur $[a,b]$ (si $a \leq b$).
- On retrouve également l'inégalité des accroissements finis avec l'inégalité de la moyenne.

6.2 Formule de Taylor à l'ordre 1

Si l'on suppose maintenant que f est de classe C^2 sur I. Une application de la formule d'intégration par parties donne

On obtient la formule :

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\,dt}$$

Remarques
- Si l'on connaît $f(a)$, $f'(a)$ et f'' sur $[a,b]$ (si $a \leq b$), alors $f(b)$ est déterminé.
- Si f'' est supposée positive sur I on retrouve l'inégalité $f(b) \geq f(a) + (b-a)f'(a)$, c'est-à-dire que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

On peut en déduire une majoration de l'écart entre la courbe représentative de f et sa tangente en un point :
Supposons que $|f''| \leq M$ sur $[a,b]$. (Un tel M existe puisque f'' est continue donc bornée sur $[a,b]$). On a alors

On obtient donc la majoration :

$$\boxed{|f(b) - (f(a) + (b-a)f'(a))| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}}$$

6.3 Généralisation

On peut généraliser les formules ou inégalités obtenues précédemment.

Théorème 9 (formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) *Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur un intervalle I et soit a et b deux points de I. On a*

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Preuve :

Corollaire 9 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Si de plus on suppose que pour tout t dans $[a,b]$ on a $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$, alors*

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq M \, \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Preuve :

Remarque Un tel M existe toujours puisque $f^{(n+1)}$ est supposée continue sur $[a, b]$.
Le résultat reste vrai si $a > b$. On remplacera alors $a - b$ par $b - a$ dans le membre de droite.

6.4 Applications

• On a la formule fondamentale suivante pour la fonction exponentielle :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}$$

Prenons comme définition de la fonction exponentielle que c'est la fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.

Remarque
On pourrait tout aussi bien prendre comme définition de la fonction exponentielle cette formule et montrer qu'on obtient une fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0 (*voir le cours sur les séries entières en Analyse 3*).
Plus généralement, on peut montrer que pour tout nombre complexe z, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ est convergente et on peut alors définir la fonction exponentielle dans le plan complexe en posant (*voir le cours sur les séries entières en Analyse 3*)

$$e^z = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

On peut montrer que cette définition est cohérente avec la définition donnée en Terminale de l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

• Si f est une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I avec $f^{(n+1)} = 0$ sur I, alors f est polynomiale sur I de degré au plus n et on a la formule (de Taylor) : Soit a appartenant à I, on a

$$\boxed{\forall x \in I\ ,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

En effet :

• Une approximation de $\cos x$: On a pour tout x réel

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{x^4}{4!}$$

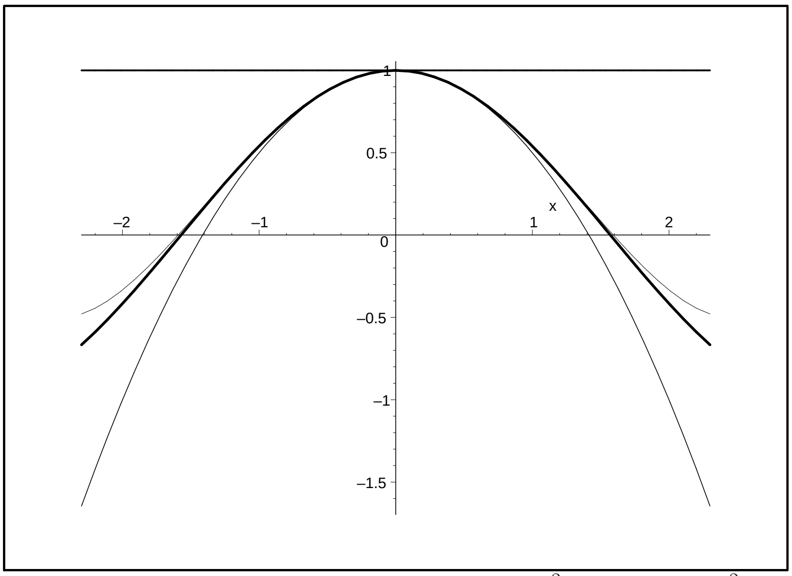
En effet :

Chapitre 3

Les développements limités

Les développements limités sont un outil mathématique permettant d'approximer une fonction au voisinage d'un point par une fonction polynomiale. Plus on se permet d'utiliser des fonctions polynomiales de degré élevé, meilleure est l'approximation.

On peut par exemple montrer qu'au voisinage de 0 :
– La meilleure approximation de la fonction cosinus parmi les fonctions affines est la fonction $x \longmapsto 1$ (dont la courbe représentative est la tangente à la courbe de cosinus au point d'abscisse 0).
– La meilleure approximation de la fonction cosinus parmi les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 est la fonction $x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2}$.
– La meilleure approximation de la fonction cosinus parmi les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4 est la fonction $x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.



Graphes de $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Les développements limités ont de nombreuses applications en analyse comme le calcul de limites de fonctions, de suites, l'étude locale d'une courbe, l'étude du comportement asymptotique (au voisinage de l'infini) des suites ou des fonctions.

1 Définition et premières propriétés

1.1 Définition

Comparaison des fonctions $x \longmapsto x^n$ au voisinage de 0

Soit n et p des entiers naturels tels que $p < n$.

– Pour tout x dans $]-1,1[\setminus\{0\}$ on a $|x^n| < |x^p|$.
– On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n}{x^p} = 0$. On dit alors qu'au voisinage de 0 la fonction $x \longmapsto x^n$ est négligeable par rapport à la fonction $x \longmapsto x^p$, ce que l'on note $x^n \ll x^p$, ou $x^n = o(x^p)$. On a donc

$$\cdots \ll x^3 \ll x^2 \ll x \ll 1$$

– Plus généralement, soit x_0 un réel ; on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(x-x_0)^n}{(x-x_0)^p} = 0$. On a donc au voisinage de x_0

$$\cdots \ll (x-x_0)^3 \ll (x-x_0)^2 \ll x - x_0 \ll 1$$

Définition 11 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 de la forme $]x_0-\eta, x_0[$ ou $]x_0, x_0+\eta[$ ou $]x_0-\eta, x_0[\cup]x_0, x_0+\eta[$ $(\eta > 0)$.(f n'est donc pas forcément définie en x_0).*
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\epsilon : u \mapsto \epsilon(u)$ définie dans un voisinage de 0 (de la forme $]-\eta, 0[$ ou $]0, \eta[$ ou $]-\eta, 0[\cup]0, \eta[$) vérifiant

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x-x_0) \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to x_0} \epsilon(x-x_0) = 0$$

– L'expression polynomiale $a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ s'appelle partie principale du développement limité.
– Le terme $a_p(x-x_0)^p$ s'appelle le terme d'ordre p $(0 \leq p \leq n)$.
– L'expression $(x-x_0)^n\epsilon(x-x_0)$ s'appelle le reste du développement limité.
– Notation : on pourra écrire $DL_n(f, x_0)$ pour désigner le développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 de f.

Remarques
– Dans un développement limité, chaque terme (y compris le reste) est négligeagle devant le précédent (si ce dernier est non nul). Les termes (non nuls) sont donc ordonnés du plus grand au plus petit.
– Dire que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 signifie qu'il existe des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que l'on ait

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - \cdots - a_n(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0$$

c'est-à-dire, au voisinage de x_0,

$$f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - \cdots - a_n(x-x_0)^n \ll (x-x_0)^n$$

Plus n est grand, meilleure est donc l'approximation de $f(x)$ par la partie principale $a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0.

1.2 Translation

Si l'on pose $x = x_0 + h$, on observe que l'égalité

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$$

devient

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h)$$

et $\epsilon(x - x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 si et seulement si $\epsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
On obtient la proposition suivante :

Proposition 10 (Translation d'un DL) *La fonction $f : x \longmapsto f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si la fonction $g : h \longmapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, et les deux parties principales ont les mêmes coefficients.*

Remarque Il suffit donc d'étudier la théorie des développements limités au voisinage de 0.

1.3 Exemples

• Soit n un entier naturel, pour tout $x \neq 1$ on a

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

donc

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

Si l'on pose $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1 - x}$ pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\boxed{\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1 - x}$ admet donc un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.

• Déterminons le développement limité de $\frac{1}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 3 :
On se ramène au calcul d'un développement limité en 0 en effectuant une translation : on pose $x = 3 + h$; lorsque x tend vers 3, h tend vers 0. On a

• Soit $x \longmapsto P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ une fonction polynomiale. $P(x)$ admet un développement limité en 0 à tout ordre n. En effet :
- Si $n \geq p$, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + x^n \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = 0$.
- Si $n < p$, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = a_{n+1} x + \cdots + a_p x^{p-n}$. Et $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
• Déterminons les développements limités en 0 de $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$ aux ordres 1, 2, 3 et 4 :

• On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, φ admet pour développement limité à l'ordre n en 0

$$\varphi(t) = t^n \epsilon(t)$$

puisque

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t^n} = 0$$

1.4 Unicité, meilleure approximation, DL à l'ordre 1

Proposition 11 (Unicité du DL) *Le développement limité d'ordre n d'une fonction f, s'il existe, est unique.*

Preuve : Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. On a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

On a $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$. Le nombre a_0 est donc unique d'après l'unicité de la limite.
Soit p un entier vérifiant $0 < p \leq n$. Supposons que $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ soient uniques. On a

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-1} x^{p-1}}{x^p} = a_p + \cdots + a_n x^{n-p} \epsilon(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p-1} x^{p-1}}{x^p} = a_p$$

et a_p est unique d'après l'unicité de la limite et des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$.

Remarque Si f admet un développement limité au voisinage de x_0, sa limite est finie en x_0 et vaut donc a_0. Par exemple, la fonction inverse et la fonction logarithme n'admettent donc pas de développement limité au voisinage de 0, et ceci à tout ordre.

Proposition 12 (DL et meilleure approximation polynomiale) *La partie principale d'un DL d'une fonction f à l'ordre n en un point x_0 est au voisinage de x_0 la meilleure approximation polynomiale de degré $\leq n$ de f.*

Preuve : Par souci de simplicité, supposons $x_0 = 0$. Soit $P(x)$ la partie principale du DL à l'ordre n en 0 de f et Q une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n différente de P. Nous allons montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\eta, \eta[\setminus\{0\}\ ,\ |f(x) - P(x)| < |f(x) - Q(x)|$$

On a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Notons p le plus petit entier $\leq n$ tel que $a_p \neq b_p$. On a

$$f(x) - P(x) = x^n \epsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

et

$$\begin{aligned} f(x) - Q(x) &= (a_p - b_p)x^p + \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k)x^k + x^n \epsilon_2(x) \\ &= (a_p - b_p)x^p(1 + \epsilon_3(x)) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to 0} 1 + \epsilon_3(x) = 1 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\eta, \eta[\setminus\{0\}\ ,\ 1 + \epsilon_3(x) > 0$$

et donc

$$\left|\frac{f(x) - P(x)}{f(x) - Q(x)}\right| = \left|\frac{x^{n-p}\epsilon_1(x)}{(a_p - b_p)(1 + \epsilon_3(x))}\right|$$

On obtient que

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x) - P(x)}{f(x) - Q(x)}\right| = 0 < 1$$

On en déduit alors le résultat demandé.

Développements limités à l'ordre 1

Proposition 13 *Si f est dérivable en x_0, alors f admet le développement limité à l'ordre 1 en x_0 suivant :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$$

Preuve :

Exemple On a le développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$\sin x = \sin 0 + \sin' 0 \cdot x + x\epsilon(x) = x + x\epsilon(x)$$

Une tentative de réciproque :

Proposition 14 *Si f est continue en x_0 et admet le développement limité à l'ordre 1 en x_0 suivant*
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)\,,$$
alors f est dérivable en x_0, $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$.

Preuve :

2 Opérations sur les développements limités

2.1 Troncature

Si f admet pour développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon_1(x - x_0)$$

alors pour tout entier $p < n$, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\epsilon_2(x - x_0)$$

en posant $\epsilon_2(h) = a_{p+1}h + \cdots + a_nh^{n-p} + h^{n-p}\epsilon_1(h)$. Puisque $\lim_{h\to 0} \epsilon_1(h) = 0$ on a $\lim_{h\to 0} \epsilon_2(h) = 0$. f admet donc un développement limité à l'ordre p au voisinage de x_0.
On obtient la proposition suivante :

Proposition 15 (Troncature d'un DL) *Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, pour tout entier $p < n$, f admet un développement limité à l'ordre p en x_0 dont la partie principale s'obtient en supprimant les termes d'ordre $> p$ dans la partie principale du développement limité à l'ordre n.*

2.2 Intégration

Supposons que f soit dérivable dans un voisinage de 0 de la forme $]-\eta, 0]$, $[0, \eta[$ ou $]-\eta, \eta[$ (en fait en 0 il suffit qu'elle soit continue) et que la fonction dérivée f' admette un développement limité à l'ordre n en 0,

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon_1(x).$$

Posons $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et $Q(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. On a $Q(0) = 0$ et $Q'(x) = P(x)$.

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f - Q$ entre 0 et x, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) - Q(x) - (f(0) - Q(0)) = x(f'(\theta x) - Q'(\theta x));$$

Puisque $f'(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x)$ et que $Q'(x) = P(x)$ alors $f'(x) - Q'(x) = x^n \epsilon_1(x)$ et ainsi

$$f(x) - Q(x) - (f(0) - Q(0)) = x^{n+1}\theta^n \epsilon_1(\theta x) = x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

où $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = \lim_{x\to 0} \theta^n \epsilon_1(x) = 0$. Et puisque $Q(0) = 0$ on a

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

Ce qui fournit la proposition suivante :

Proposition 16 (Intégration d'un DL) *Si f' admet un développement limité à l'ordre n en 0, f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie principale s'obtient en intégrant la partie principale du développement limité de f' et en choisissant $f(0)$ comme constante d'intégration.*

Exemples

• On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_1(x)$$

donc

$$\begin{aligned} -\ln(1-x) &= -\ln 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon_2(x) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

• On a le développement limité à l'ordre 1

$$\sin x = x + x\epsilon_1(x)$$

Par intégration on obtient

$$-\cos x = -\cos 0 + \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon_2(x)$$

donc

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon_3(x)$$

En intégrant à nouveau on obtient

$$\begin{aligned} \sin x &= \\ &= \end{aligned}$$

• Puisque $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ on a le développement limité à l'ordre 0

$$e^x = 1 + \epsilon_0(x)$$

En intégrant et en utilisant $e^0 = 1$ on obtient successivement

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\epsilon_1(x) \\ &= \end{aligned}$$

Applications

• *Etude de limites :* Etudions l'existence des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^3}$.

• *Etude d'un signe :* Déterminons le signe de $\sin x - x$ au voisinage de 0.
On a

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon_4(x) =$$

Remarque Au vu des développements limités obtenus des fonctions sinus et cosinus on peut se demander si la partie principale du développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire n'a pas la même parité.

Proposition 17 *La partie principale du développement limité en* 0 *d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).*

Preuve : Supposons que f admette le développement limité à l'ordre n suivant en 0

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$$

On a alors

$$f(-x) = P(-x) + (-1)^n x^n \epsilon(-x)$$

et $(-1)^n \epsilon(-x)$ tend vers 0 en 0 (comme $\epsilon(x)$). Si f est paire (resp. impaire) on a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) et d'après l'unicité du développement limité on a $P(-x) = P(x)$ (resp. $P(-x) = -P(x)$). Le polynôme P est donc pair (resp. impair).

2.3 Somme et produit

Somme

Supposons que deux fonctions f et g soient définies dans un voisinage commun de 0 et admettent un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$

On obtient

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n \epsilon_3(x)$$

avec $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. ϵ_3 tend vers 0 quand x tend vers 0 puisque c'est le cas pour ϵ_1 et ϵ_2. Ce qui fournit la proposition suivante :

Proposition 18 (Somme de deux DL) *Si f et g admettent des développements limités d'ordre n, alors la fonction $f + g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale est la somme des parties principales des développements limités de f et g.*

Produit

Supposons que deux fonctions f et g soient définies dans un voisinage commun de 0 et admettent un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = A(x) + x^n \epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n \epsilon_2(x)$$

On obtient

$$f(x)g(x) = A(x)B(x) + x^n (A(x)\epsilon_2(x) + B(x)\epsilon_1(x) + x^n \epsilon_1(x)\epsilon_2(x))$$

Gardons dans $A(x)B(x)$ les termes de degré inférieur ou égal à n :

$$A(x)B(x) = C(x) + x^{n+1} D(x) = C(x) + x^n \epsilon_3(x)$$

où $D(x)$ est un polynôme et $\epsilon_3(x) = xD(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Le produit $f(x)g(x)$ se mettra donc sous la forme :

$$f(x)g(x) = C(x) + x^n \epsilon_4(x)$$

avec $\epsilon_4(x) = \epsilon_3(x) + A(x)\epsilon_2(x) + B(x)\epsilon_1(x) + x^n \epsilon_1(x)\epsilon_2(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. D'où la proposition :

Proposition 19 (Produit de deux DL) *Si f et g admettent des développements limités d'ordre n, le produit admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale s'obtient en prenant dans le produit des parties principales les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemples
• Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $e^x \cos x$:
On a
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x)$$
d'où
$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^2\epsilon_3(x) \\ &= 1 + x + x^2\epsilon_4(x) \end{aligned}$$

• Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{e^x}{1-x}$:
On a
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\epsilon_2(x)$$
d'où

2.4 Substitution du type $x \mapsto ax^p$ et composition

Substitutions
Soit a un réel et p un entier ≥ 1. Supposons que $f(x)$ admette un développement limité à l'ordre n en 0. On a
$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$$
On en déduit
$$f(ax^p) = a_0 + a_1ax^p + a_2a^2x^{2p} \cdots + a_na^nx^{np} + a^nx^{np}\epsilon(ax^p)$$
$\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 donc $a^n\epsilon(ax^p)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

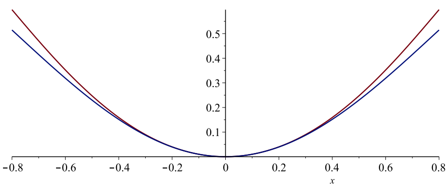
$f(ax^p)$ admet donc un développement limité à l'ordre np en 0.

Exemple On a
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_1(x)$$

donc
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_2(x)$$
Par intégration on obtient alors
$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon_3(x)}$$

Exemple Déterminons le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan x$:

Application *Position relative de deux courbes :* Les courbes représentatives des fonctions définies par $f(x) = \sin^2 x$ et $g(x) = \sin(x^2)$ au voisinage de 0 sont représentées ci-dessous au voisinage de 0. Retrouvons les légendes perdues :



Composition
Supposons que f soit définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et g soit définie dans un voisinage $\mathcal{V}'$ de 0 tels que $g(\mathcal{V}') \subset \mathcal{V}$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Supposons de plus que f et g admettent un développement limité à l'ordre n en 0. On a

$$f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x)$$

avec $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. Puisque $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, on a $b_0 = 0$.
On obtient :

$$f(g(x)) = A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) + (B(x) + x^n\epsilon_2(x))^n\epsilon_1(B(x) + x^n\epsilon_2(x))$$

- $(B(x) + x^n\epsilon_2(x))^n = x^n(b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_2(x))^n = x^nh(x)$ où $h(x)$ est bornée au voisinage de 0.

- Si l'on pose $\epsilon_3(x) = h(x)\epsilon_1(B(x) + x^n\epsilon_2(x))$ par composition des limites on obtient $\lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$.

- $A(B(x)+x^n\epsilon_2(x)) - A(B(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left[(B(x) + x^n\epsilon_2(x))^k - B(x)^k\right] = \sum_{k=1}^{n} a_kx^n\epsilon_2(x)u_k(x)$ où les fonctions u_k sont bornées au voisinage de 0. Donc $A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) = A(B(x)) + x^n\epsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_4(x) = 0$.

On obtient donc $f(g(x)) = A(B(x)) + x^n\epsilon_5(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_5(x) = 0$. Ce qui fournit la proposition suivante :

Proposition 20 (Composition de deux DL) *Si f et g admettent des développements limités d'ordre n en 0 avec $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ alors, la composée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale s'obtient en prenant dans la composée des parties principales uniquement les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemples
• Pour tout n, e^x admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $\sin x$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, donc $e^{\sin x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. Déterminons ce développement limité dans le cas $n = 3$.
$\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon_1(x)$ et $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + u^3\epsilon_2(u)$ donc

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + (x - x^3/6) + (x - x^3/6)^2/2 + (x - x^3/6)^3/6 + x^3\epsilon_3(x) \\
&= 1 + x - x^3/6 + x^2/2 + x^3/6 + x^3\epsilon_4(x) \\
&= 1 + x + x^2/2 + x^3\epsilon_4(x)
\end{aligned}$$

• Déterminons le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(2 + x + x^2)$:

2.5 Quotient.

Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ admettent des développements limités à l'ordre n en 0 et que $\lim_{x\to 0} g(x) = b_0$ soit $\neq 0$. On a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{b_0}\,\frac{1}{1-\frac{b_0-g(x)}{b_0}}$$

$\frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, $\frac{b_0-g(x)}{b_0}$ aussi, et $\lim_{x\to 0}\frac{b_0-g(x)}{b_0} = 0$, la composée admet donc un développement limité à l'ordre n en 0. $\frac{1}{g}$ admet donc un développement limité à l'ordre n en 0, donc le produit par f également. Ce qui fournit la proposition suivante :

Proposition 21 (Quotient de deux DL) *Si f et g admettent des développements limités d'ordre n en 0 avec $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors, le quotient $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n.*

Exemple
Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan x$:

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \sin x\,\frac{1}{1-(1-\cos x)}\end{aligned}$$

$1-\cos x = x^2/2 + x^3\epsilon_1(x)$ et $\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^3\epsilon_2(u)$ donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(1-\cos x)} &= 1+x^2/2+(x^2/2)^2+(x^2/2)^3+x^3\epsilon_3(x)\\ &= 1+x^2/2+x^3\epsilon_4(x)\end{aligned}$$

$\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon_5(x)$ donc

$$\begin{aligned}\tan x &= (x-x^3/6)(1+x^2/2)+x^3\epsilon_6(x)\\ &= x+x^3/3+x^3\epsilon_7(x)\end{aligned}$$

Remarque Lorsque les fonctions f et g tendent vers 0 toutes les deux en 0, le quotient peut parfois admettre un développement limité en 0.

Exemple Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{\cos x - 1}{\sin x}$:

Le développement limité de $\sin x$ commençant par x, et celui de $\cos x - 1$ commençant par un terme d'ordre ≥ 1, on peut se ramener aux conditions de la proposition précédente en utilisant des développements limités à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur. On a

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!}+x^4\epsilon_2(x)$$

On en déduit

3 Formule de Taylor-Young

Nous allons voir qu'il suffit qu'une fonction soit dérivable un certain nombre de fois au voisinage d'un point pour qu'elle admette un développement limité en ce point à un ordre donné.

Nous avons déjà établi qu'une fonction f définie dans un voisinage de x_0 et dérivable en x_0, admet le développement limité à l'ordre 1 en x_0 suivant :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x - x_0) = 0$$

Nous allons généraliser ce résultat :

Théorème 10 (Formule de Taylor-Young) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n-1$ fois dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$) sur I, et admettant une dérivée nième en un point x_0 de I. Alors f admet le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 suivant*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\epsilon(x-x_0)$$

Preuve : Elle se démontre par récurrence à l'aide de l'intégration des développements limités. Par translation on peut se ramener au cas $x_0 = 0$.
La formule est connue pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n \geq 1$.
Supposons qu'une fonction f vérifie les hypothèses du théorème pour l'entier $n+1$. Alors la fonction f' vérifie les mêmes hypothèses pour l'entier n. D'après l'hypothèse de récurrence on a la formule de Taylor-Young pour f' :

$$f'(x) = f'(0) + (f')'(0)x + \frac{(f')''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(f')^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon_1(x)$$

Par intégration du développement limité on obtient :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)}{2!}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

La fonction f vérifie donc la formule à l'ordre $n+1$.

Remarque : La formule de Taylor-Young a un intérêt théorique et va nous permettre de calculer les développements limités des fonctions de références. Mais ce n'est pas en général la méthode la plus appropriée pour déterminer le développement limité d'une fonction, le calcul des dérivées successives pouvant se révéler très compliqué. Il vaut mieux utiliser les opérations sur les développements limités.

Exemple Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de e^x : La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable et $\exp^{(k)}(1) = \exp(1) = e$ donc la formule de Tayor-Young à l'ordre 3 en $x = 1$ donne

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + (x-1)^3\epsilon(x-1)$$

Formule de Taylor-Mac Laurin

La formule dite de Taylor-Mac Laurin est le cas particulier de celle de Taylor-Young pour $x_0 = 0$.

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + x^n\epsilon(x)}$$

Ce qui fournit le développement limité à l'ordre n de f en zéro, que l'on appelle aussi **développement de Taylor-Mac Laurin** ou encore développement de Taylor-Young au voisinage de 0.

Remarque On a vu une réciproque de la formule de Taylor-Young pour $n = 1$. Cela ne marche plus aux ordres supérieurs. Le problème vient du fait qu'une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre n sans que sa dérivée n'admette un développement limité à l'ordre $n-1$. (La réciproque du théorème d'intégration d'un développement limité est fausse). Considérons par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{101}\cos\left(\frac{1}{x^{100}}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Elle est continue et dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Elle admet un développement limité à l'ordre 100 en 0. En effet, puisque $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x^{100}}\right) = 0$, on a $f(x) = x^{100}\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Elle n'est pourtant même pas deux fois dérivable en 0. Sa fonction dérivée n'admet même pas un développement limité à l'ordre 0 en 0. En effet, pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 101x^{100}\cos\left(\dfrac{1}{x^{100}}\right) + 100\sin\left(\dfrac{1}{x^{100}}\right)$, et $f'(x)$ n'admet donc pas de limite en 0.

4 Développements limités usuels

4.1 Développements limités de référence

Tous les développements limités de cette section sont à connaître absolument.

Nous rappelons que

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)}$$

et

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)}$$

Nous allons obtenir les autres développements de référence par la formule de Taylor-Mac Laurin.

• La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$, la formule de Taylor-Mac Laurin donne

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

• La fonction sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\sin^{(2n)} 0 = (-1)^n \sin 0 = 0$ et $\sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$. Le développement limité à l'ordre $2n$ est donc

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\epsilon(x)}$$

Celui à l'ordre $2n+1$ est

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)}$$

• La fonction cosinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\cos^{(2n+1)} 0 = \sin^{(2n+2)} 0 = 0$ et $\cos^{(2n)} 0 = \sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n$. Le développement limité à l'ordre $2n$ est donc

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)}$$

Celui à l'ordre $2n+1$ est

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)}$$

On peut aussi obtenir le développement de $\cos x$ par intégration du développement de $-\sin x$.

• Soit α un réel. La fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=(1+x)^\alpha$ est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. On obtient donc

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x)}$$

Exemples
• On a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+x^3\epsilon(x)\\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+x^3\epsilon(x)\end{aligned}$$

• Déterminons le développement limité de $\arcsin x$ en 0 à l'ordre 3 :
On a

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &=\\ &=\end{aligned}$$

puis par intégration on obtient

$$\begin{aligned}\arcsin x &=\\ &=\end{aligned}$$

4.2 Développements limités des fonctions usuelles

Le but de cette section est de rappeler les méthodes permettant d'obtenir les développements limités des autres fonctions usuelles à l'aide des développements limités de référence.

Le développement de $\tan x$ s'obtient par composition et produit de développements de référence. Par exemple le développement à l'ordre 5 est

$$\tan x=\sin x\,\frac{1}{\cos x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+x^5\epsilon(x)$$

Puisque
$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\epsilon(x)$

on obtient facilement par substitution les deux suivants :

• $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots(-1)^nx^n+x^n\epsilon(x)$

- $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$

On en déduit les trois suivants par intégration :

- $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$
- $\text{Arctan}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$

A l'aide du développement

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

on obtient le développement

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$

puis par intégration

- $\text{Arcsin}x = x + \dfrac{x^3}{2.3} + \cdots + \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n.(2n+1)}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$

5 Exemples de développements asymptotiques

De la même façon que l'on a approximé des fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, on va approximer des fonctions par des fonctions plus simples (de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^{n-k}$) au voisinage de $\pm\infty$.

Exemples

• Soit $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}e^{\frac{1}{x}}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Posons $X = \frac{1}{x}$; quand $x \to \pm\infty$, $X \to 0$. A l'aide d'un développement limité au voisinage de $X = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{1}{X^2}}{\frac{2}{X}+1}e^X \\ &= \frac{1}{2X}\frac{1}{1+\frac{X}{2}}e^X \\ &= \frac{1}{2X}\left(\left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4}\right)\left(1 + X + \frac{X^2}{2}\right) + X^2\varepsilon(X)\right) \\ &= \frac{1}{2X}\left(1 + \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} + X^2\epsilon(X)\right) \end{aligned}$$

avec $\displaystyle\lim_{X\to 0}\epsilon(X) = 0$. On obtient donc

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = 0$. On a obtenu ce qu'on appelle un *développement asymptotique* de $f(x)$ au voisinage de l'infini.

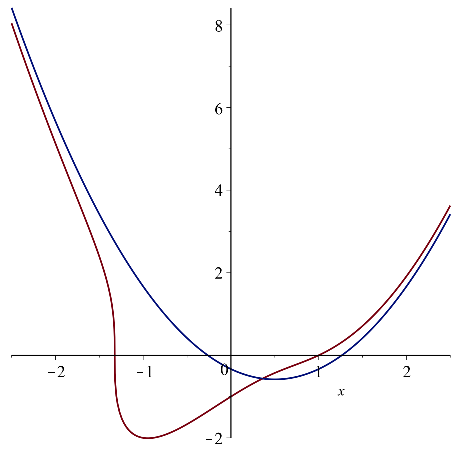
Dans un développement asymptotique (comme dans un développement limité), les termes sont ordonnés du plus grand au plus petit (ici pour $|x|$ grand), chaque terme étant négligeable devant le précédent.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = 0$. On dit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. On a

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8x}\left(1 + \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

qui est du signe de $\frac{1}{8x}$ au voisinage de $\pm\infty$ car l'expression $1 + \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 1 pour $x \to \pm\infty$ et est donc positive pour $|x|$ suffisament grand ; on en déduit aisément la position de la courbe par rapport à son asymptote : au-dessus au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

• On rappelle que la fonction $x \longrightarrow x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longrightarrow x^{\frac{1}{3}}$.
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-1)(x^3-x+1)^{\frac{1}{3}}$. On va déterminer un développement asymptotique de g afin de déterminer une courbe de référence asymptote à C_g.


8
6
4
2
−2
−2
−1
0
1
2
x

6 Exercices

6.1 Exercices pour le chapitre 1

Exercice 1 On considère la fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}$.
2. ψ' est-elle continue sur $\mathbb{R}$? *Indication : on considérera la suite de terme général* $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ *et on calculera* $\psi'(x_n)$.
3. ψ est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculer $\psi'' = (\psi')'$ là où elle est définie.

Exercice 2 Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ est dérivable et que sa fonction dérivée est continue sur $[0, +\infty[$. f est-elle deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$?

Exercice 3 *Sauvetage en bord de mer*
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le demi-plan au-dessous de l'axe (Ox) représente la plage et le demi-plan au-dessus de l'axe (Ox) représente la mer. On suppose qu'un sauveteur court sur la plage à la vitesse v_1 et nage dans la mer à la vitesse v_2. Le sauveteur se trouve au point M_1 de coordonnées (a_1, b_1) et un baigneur en diffficulté se situe au point M_2 de coordonnées (a_2, b_2) avec $b_1 < 0 < b_2$ et $a_1 < a_2$. On cherche à minimiser le temps de parcours du sauveteur.
On considère le point M de coordonnées $(x, 0)$ (avec x réel). Supposons que le sauveteur effectue en ligne droite le trajet M_1M puis le trajet MM_2. On note $T(x)$ son temps de parcours. On définit ainsi une fonction T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Faire un dessin. Montrer que $T(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(x - a_2)^2 + b_2^2}$.
2. Montrer que la fonction T est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que T'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que T admet un unique minimum sur $\mathbb{R}$ en un point c, et que c appartient à l'intervalle $]a_1, a_2[$.
4. *Loi de Snell-Descartes*
Lorsque $x = c$, notons α_1 et α_2 les angles des droites (M_1M) et (M_2M) avec la verticale. Montrer que
$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Exercice 4 Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes sur les intervalles où elles sont définies :

$$f : x \longmapsto \ln(\exp(-x) + 1) \quad , \quad g : x \longmapsto \sin(x^2) \quad , \quad h : x \longmapsto x^x (= \exp(x \ln x))$$

Exercice 5 Montrer, uniquement avec la définition du cours, que les fonctions $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $a < b < c$ des nombres réels. Que pensez-vous de la proposition suivante ?
Si f est convexe sur $[a,b]$ et convexe sur $[b,c]$ alors f est convexe sur $[a,c]$.

Exercice 7

1. Montrer que la fontion tangente est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. En déduire que l'on a
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad , \quad x \leq \tan x$$
et
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad , \quad \tan x \leq \frac{4}{\pi} x$$

Exercice 8 *Inégalité arithmético-géométrique*

1. Montrer que la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que pour tout $x > 0$ on a $\ln x \leq x - 1$.
2. Soit x_1, x_2, x_3 trois réels strictement positifs. On pose $y_i = \frac{3x_i}{x_1+x_2+x_3}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
Calculer $y_1 + y_2 + y_3$ et montrer avec la question 1. que $\ln(y_1 y_2 y_3) \leq 0$.
En déduire l'inégalité suivante :
$$(x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad (\star)$$
3. *Application :* On considère un parallélépipède rectangle de volume V et de surface S. Montrer que l'on a l'inégalité $V \leq \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\star\star)$.
Indication : si l'on note a, b, c les longueurs des côtés du parallélépipède rectangle, considérer les nombres ab, ac, bc.
4. Dans quels cas y-a-t-il égalité dans les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$?
5. Réfléchir à une généralisation de $(\star)$ pour n nombres.

Exercice 9

1. Soit D le domaine de définition de l'expression $\ln(\ln x)$. On note $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction associée. Déterminer D puis montrer que g est concave.
2. En déduire que pour tous réels x et y strictement supérieurs à 1, on a l'inégalité
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{(\ln x)(\ln y)}$$

Exercice 10 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Etudier les variations de f, sa convexité, déterminer ses points d'inflexion et tracer sa courbe représentative.

Exercice 11 Etudier la convexité de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 4x \cdot \arctan x - x^2$. On donnera les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

Exercice 12 Soit α un nombre réel. On considère les fonctions f_α de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln x$.

1. Déterminer les points d'inflexion éventuels de f_α.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de f_α en fonction des valeurs du paramètre α.

Si on n'étudie pas le cas général, on pourra tracer la courbe pour $\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = 2$. Lorsque f_α se prolonge par continuité en 0 à droite (c'est-à-dire lorsque $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) \in \mathbb{R}$), on calculera $\lim\limits_{x \to 0^+} f'_\alpha(x)$ pour préciser le comportement de la courbe lorsque x tend vers 0 à droite.

Exercice 13 Soit M un nombre strictement positif et une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, vérifiant les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1]\ ,\ |f''(x)| \leq M$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ |f(x)| \leq M\,\frac{x(1-x)}{2}$$

Pour cela, on définit des fonctions g et h de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $g(x) = f(x) - M\,\frac{x(1-x)}{2}$ et $h(x) = f(x) + M\,\frac{x(1-x)}{2}$.

1. Montrer que g est convexe et que h est concave.
2. Calculer $g(0)$ et $g(1)$ puis en déduire que g est négative sur $[0,1]$.
3. Calculer $h(0)$ et $h(1)$ puis en déduire que h est positive sur $[0,1]$.
4. Conclure.

Exercice 14 Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Rappeler l'inclusion entre les ensembles $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $D^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Que dit de cette inclusion l'exemple précédent ?

Exercice 15 On considère la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$ que l'on note g. Calculer $g^{(k)}(x)$ pour $k = 0,1,2,3,4$. Conjecturer une formule pour $g^{(n)}(x)$ (n dans $\mathbb{N}$) puis la montrer par récurrence.

Exercice 16 Montrer par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n, et tout x réel,

$$\cos^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \quad \text{et} \quad \cos^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x\ .$$

Exercice 17 Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 e^x$. Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée d'ordre n à l'aide de la formule de Leibniz.

Exercice 18 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \exp(x)$.

1. Justifier à l'aide du cours que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale Q_n telle que pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{x^{n+1}} \cdot \exp(x)$. On exprimera Q_{n+1} en fonction de Q_n.
3. En déduire le calcul de $Q_3(x)$ et de $f^{(3)}(x)$.
4. (a) On note $g(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, et tout $x \neq 0$, on a $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
   (b) En appliquant la formule de Leibniz à $f = g \cdot \exp$, donner une expression de $f^{(n)}(x)$ sous la forme d'une somme, puis en déduire une expression de $Q_n(x)$ sous la forme d'une somme. Retrouver l'expression de $Q_3(x)$.

Exercice 19 *Un exemple de raccordement C^∞*
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

1. Justifier que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ'.
3. Montrer que pour tout entier n, φ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\varphi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{t^{2n}} P_n(t) \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

   où P_n est une fonction polynomiale. *(On ne demande pas de calculer P_n pour tout n).*
   La fonction φ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 *On rappelle la formule du binôme de Newton : pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tous a et b réels (ou complexes),*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1. Calculer pour n dans $\mathbb{N}^*$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$.
2. En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, le calcul de la dérivée $n$ième de la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{n-1} \ln x$. (*On pourra utiliser les formules du cours sur les dérivées nième des fonctions puissances et l'exercice 15*).

Exercice 21 Soit n un entier naturel. Donner l'expression de la dérivée $n$ième de x^{2n}. En écrivant $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ et en utilisant la formule de Leibniz, donner une autre expression de la dérivée $n$ième de x^{2n}.
En déduire le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 22 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier naturel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I. On suppose que f s'annule au moins en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

6.2 Exercices pour le chapitre 2

Exercice 23 *Sommes de Darboux et intégrales*

1. On rappelle, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Démontrez-la par récurrence si vous ne l'avez pas déjà fait en Analyse 1 ou en Algèbre 1.
   (a) Calculer les sommes de Darboux $S_n^-(f,[0,1])$ et $S_n^+(f,[0,1])$ lorsque f est la fonction carré sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^1 t^2\,dt$ sans faire appel à la notion de primitive.
2. (a) Rappeler la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour q dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et n dans $\mathbb{N}$.
   (b) En déduire le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(k\frac{2}{n}\right)$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^2 \exp(t)\,dt$ sans faire appel à la notion de primitive.

Exercice 24 *Intégration numérique (voir la proposition 4 et l'exemple qui suit)*
Donner un encadrement d'amplitude $< 10^{-1}$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ par des sommes de Darboux puis donner un encadrement d'amplitude $\leq 10^{-1}$ par des valeurs numériques.

Exercice 25 Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles où elles sont définies :

$$t \longmapsto (t-1)^\alpha \ (\alpha\in\mathbb{R})\ ,\ u \longmapsto \frac{1}{(1+2u)^3}\ ,\ x \longmapsto \frac{\ln x}{x}\ ,\ x \longmapsto 3x\,e^{-x^2}\ ,\ x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}\ ,$$

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ x \longmapsto x(1+x^2)^n\ (n\in\mathbb{N})\ ,\ x \longmapsto \frac{1}{x\ln^2 x}\ ,\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ ,\ x \longmapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Indication : on essaiera de reconnaître des dérivées de fonctions composées.

Exercice 26 *Limites de suites et calcul intégral*
On considère les suites de terme général
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ $(n \geq 1)$.
- $v_n = \dfrac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$ (où $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

En reconnaissant des sommes de Riemann ou de Darboux, calculer les limites de ces suites.

Exercice 27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = a\sin(wt+\varphi)$ où a et w sont deux réels strictement positifs et φ un réel quelconque. Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{w}\right]$.

Exercice 28 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\, dx$.

Exercice 29 On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$. Calculer $I + J$ et $I - J$ puis en déduire le calcul de I et J.

Exercice 30

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$. (*On pourra utiliser le théorème de Rolle pour la fonction* $x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$).

2. Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe ξ dans $[0, 1]$ tel que $g(\xi) = \xi$. (*On pourra considérer la fonction* $t \longmapsto g(t) - t$ *et utiliser la question 1.*).

Exercice 31 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties :

$$\int_0^1 te^{2t}\, dt \quad , \quad \int_0^{\pi} t \sin t\, dt \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t\, dt \quad , \quad \int_1^e (t+1) \ln t\, dt \quad , \quad \int_0^1 t^2 e^{-t}\, dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t \cos t\, dt \quad , \quad \int_1^2 (\ln x)^2\, dx$$

Exercice 32 Calculer les primitives des fonctions suivantes (en précisant les intervalles où elles sont définies) en utilisant une intégration par parties :

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2} \quad , \quad x \longmapsto \arctan x \quad , \quad x \longmapsto \ln(1 + x^2)$$

(*On calculera à chaque fois une primitive sous la forme* $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ *avec le nombre a de son choix*).

Exercice 33 Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

1. Montrer, sans calculer I_n, que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire le calcul de I_2.
   (c) En déduire $\lim nI_n$.

Exercice 34 Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1)^n\, dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour $n \geq 1$, $I_n = -\dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2. En déduire une formule pour I_n. Exprimer I_n à l'aide de factoriels d'entiers.

Exercice 35 Pour tout entier naturel n on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \, dt$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.
3. En déduire le calcul de I_2 et I_3.

Exercice 36 Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'un changement de variables :

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2+2} \, dt \quad , \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dt \quad , \quad \int_0^2 \frac{t^2}{t^6+1} \, dt \quad , \quad \int_1^4 e^{\sqrt{t}} \, dt \quad , \quad \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx$$

Exercice 37

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1} \, dx$ à l'aide du changement de variable $x = (t-1)^2$ $(t \geq 1)$.
3. A l'aide du changement de variable $x = \tan t$ calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$.
4. Pour $a > 0$, calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx$ à l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{y}$.
5. Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$. (On mettra d'abord x^2+x+1 sous forme canonique).

Exercice 38

1. Déterminer deux réels a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \qquad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

2. En déduire le calcul des primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}$ sur les intervalles où elle est définie.
3. En déduire, à l'aide du changement de variable $\cos t = u$, les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$. (On calculera $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin t} \, dt$).

Exercice 39 *Parité et périodicité*

1. Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Montrer que si f est paire on a $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
   (b) Montrer que si f est impaire on a $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
   Pour ces deux questions on pourra utiliser un changement de variable.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que pour tout x réel, $\displaystyle\int_{x}^{x+T} g(t)\,dt = \int_{0}^{T} g(t)\,dt$.
   On pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes :
   - Dériver l'expression $\displaystyle\int_{x}^{x+T} g(t)\,dt$ *par rapport à* x.
   - Ecrire $\displaystyle\int_{x}^{x+T} g(t)\,dt = \int_{x}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{T} g(t)\,dt + \int_{T}^{x+T} g(t)\,dt$ *et utiliser un changement de variable.*

Exercice 40 *Encadrement de* $n!$ *et nombre de chiffres dans l'écriture décimale de* $n!$

1. Montrer que l'on a pour k entier naturel,
$$\forall k \geq 2\ ,\ \int_{k-1}^{k} \ln t\,dt \leq \ln k \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1\ ,\ \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t\,dt$$
   On ne calculera pas les intégrales ci-dessus.
2. En sommant la première inégalité pour $k = 2, ..., n$ et la deuxième pour $k = 1, ..., n-1$ montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:
$$\int_{1}^{n} \ln t\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_{1}^{n} \ln t\,dt + \ln n$$
3. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln t\,dt$.
   (b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis l'encadrement suivant de $n!$:
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{(Stirling faible)}$$
4. (a) *Rappel sur le nombre de chiffres d'un entier :* Soit q un entier naturel non nul. Il existe un unique entier p vérifiant $10^p \leq q < 10^{p+1}$. Le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de q est $p + 1$.
   Montrer que le nombre de chiffres de q est $E\left(\frac{\ln q}{\ln 10}\right) + 1$. ($E(x)$ désigne la partie entière de x).
   (b) Déduire des questions 3.(b) et 4.(a) un encadrement du nombre de chiffres de 2024! à quelques unités près, à l'aide d'une simple calculette.

Exercice 41 *Méthode des trapèzes*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On souhaite approximer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode des trapèzes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $k \in [0, n]$, on pose $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ et on définit la somme

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

1. Faire un dessin et constater que lorsque f est positive, $T_n(f)$ correspond à une somme d'aires de trapèzes que l'on dessinera.
2. Soit α et β dans $[a, b]$ avec $\alpha < \beta$.
   (a) Montrer que l'on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$
   (b) Considérons $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$. Déduire la majoration suivante :
   $$\left| \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta) f''(x)\,dx \right| \le \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12}$$
3. Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties, que l'on a
   $$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta) f''(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$
4. En écrivant $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$, déduire des questions précédentes que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :
   $$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) \right| \le \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$$

Exercice 42 *Approximation de* $\sin x$

Montrer avec l'inégalité de Taylor-Lagrange (sur $[0, x]$) que pour tout x réel on a

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \le \frac{|x|^5}{5!}$$

En déduire une approximation de $\sin 1$ à 10^{-2} près par un rationnel. Est-ce une approximation par excès ou par défaut ?

Exercice 43 *Approximation du logarithme*

On considère la fonction f défnie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
   Montrer que pour tout $x \ge 0$ on a $|f^{(4)}(x)| \le 6$.
2. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0, x]$ à un ordre bien choisi, déterminer une fonction polynomiale P de degré 3, telle que pour tout $x \ge 0$ on ait
   $$|f(x) - P(x)| \le \frac{x^4}{4}$$

Exercice 44 *Inégalité de Kolmogorov*
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On pose

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

Le but de l'exercice est de montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

1. Pour x réel et $h > 0$, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x + h$ et montrer que
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$
2. En étudiant la fonction $h \longmapsto \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$, obtenir l'inégalité demandée.

Exercice 45 *Méthode de Newton*
On considère une fonction φ de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ vérifiant $\varphi'' \geq 0$, $\varphi' > 0$ et $\varphi(a) < 0 < \varphi(b)$. *Au fur et à mesure des questions on complètera une illustration graphique de l'exercice.*

1. Montrer que φ s'annule une unique fois sur $]a, b[$ en un point α.
2. Soit $x_0 \in [\alpha, b]$, c'est-à-dire tel que $\varphi(x_0) \geq 0$. Ecrire l'équation de la tangente au graphe de φ au point $(x_0, \varphi(x_0))$.
3. On note x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
Montrer que $x_1 = x_0 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}$ et $\alpha \leq x_1 \leq x_0$.
4. On peut ainsi définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 dans $[\alpha, b]$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers α. *Ce qui donne un moyen d'obtenir des approximations successives du nombre* α.
5. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi''(x)|$ et $m = \inf_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$.
Rappeler pourquoi M et m existent bien et pourquoi $m > 0$.
Montrer que l'on a pour tout entier n, $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_n - \alpha|^2$.
On pensera à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

6.3 Exercices pour le chapitre 3

Exercice 46 Soit la fonction polynomiale définie par $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 4$.
Déterminer les développements limités de $P(x)$ au voisinage de 0 aux ordres 2 et 5.

Exercice 47 A l'aide d'une translation, déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{1+x}$.

Exercice 48 A l'aide d'une translation, déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de -1 de $Q(x) = x^3 - 2x - 1$.

Exercice 49 Supposons qu'une fonction f admette le développement limité suivant à l'ordre 1 au voisinage de 0, $f(x) = 2 - 3x + x\epsilon(x)$, et que f soit continue en 0.
Calculer $f(0)$. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Exercice 50 On donne les développements limités des fonctions sinus et cosinus au voisinage de 0 suivants :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x) \quad , \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_2(x)$$

Déterminer les développements limités au voisinage de 0 de cosinus aux ordres 3, 4 et 5 et de sinus aux ordres 4, 5 et 6.

Exercice 51 On donne le développement limité de e^x au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

Déterminer les développements limités de e^x aux ordres 3 et 4.

Exercice 52 Etudier les limites quand x tend vers 0 de $\frac{\cos x - 1}{x^2}$, $\frac{\cos x - 1}{x^3}$ puis $\frac{\cos x - 1}{x^n}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 53 A l'aide de développements limités, calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

Exercice 54 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$ de $\sin x$.

Exercice 55 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 4 de $\ln x$.

Exercice 56 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{e^{-2x}}{2 + x}$.

Exercice 57 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2 x$.
En déduire le calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 58 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x - \sin x}$.

Exercice 59 Etudier la limite en 0 de $\frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$.

Exercice 60 On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que ψ est dérivable en 0 et calculer $\psi'(0)$.
2. Calculer $\psi'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. La fonction ψ est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 61 Déterminer le développement limité à l'ordre 50 en 0 de $x^{46}\sin^4 x$.

Exercice 62 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\ln(1-x)\,\sin x}{1+x^2}$.

Exercice 63 Etudier le signe de $x\cos x - \sin x$ au voisinage de 0.

Exercice 64 En utilisant des développements limités, étudier au voisinage de 0 la position relative des deux courbes C_1 et C_2 d'équations respectives : $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ et $y = e^{2x}$.
Tracer l'allure de C_1 et C_2 au voisinage du point de coordonnées $(0,1)$ ainsi que leur tangente commune T en $(0,1)$. On respectera la position relative de ces trois courbes.

Exercice 65 A l'aide de développements limités, étudier au voisinage de 0 la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$y = \arctan(x^2) \quad \text{et} \quad y = \arctan^2 x$$

On dessinera dans un même repère, au voisinage de 0, l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, de leur tangente au point d'abscisse 0 et de la parabole d'équation $y = x^2$, en respectant les positions relatives de ces quatre courbes.

Exercice 66 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+\cos x}$.

Exercice 67 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln\cos x$ de deux manières différentes (intégration et composition).

Exercice 68 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $h = 0$ de $\arctan(1+h)$, puis celui de $\arctan x$ à l'ordre 4 au voisinage de $x = 1$.

Exercice 69 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $e^{\cos x}$.

Exercice 70 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

Exercice 71

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction $x \longmapsto x^x = \exp(x\ln x)$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln^2 x}$.

Exercice 72 Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $\varphi^{(27)}(0)$.

Exercice 73 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \cos\sqrt{x}$.

1. A l'aide d'un développement limité en 0 de $\cos x$, montrer que $\cos\sqrt{x}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (à droite) que l'on déterminera.
2. En déduire que la fonction f est dérivable en 0 à droite.

3. Etudier au voisinage de 0 à droite la position du graphe de f par rapport à sa demi-tangente en 0.

Exercice 74 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{e^x-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

1. Montrer que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi''(0)$.
2. Donner, au voisinage de 0, la position de la courbe représentative de φ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 75 Déterminer le développement limité de $\sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 2 en $x = 1$.

Exercice 76 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{\frac{4-x}{1-x}}$.
En déduire l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe C d'équation $y = \sqrt{\frac{4-x}{1-x}}$, puis la position relative de T et C.

Exercice 77 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x+x^2)$. Etudier la position relative de C_f et de sa tangente au point d'abscisse 1.
On pourra utiliser un DL de f ou étudier sa convexité.

Exercice 78 *Approximation de* $\cos x$ *par une fraction rationnelle*
Déterminer les réels a et b tels que la fonction rationnelle $x \longmapsto f(x) = \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ approxime le mieux possible $\cos x$ au voisinage de 0 (c'est-à-dire tels que $\frac{f(x)-\cos x}{x^n}$ tende vers 0 avec n le plus grand possible). Comparer alors au voisinage de 0, $\cos x$ et l'approximation obtenue.

Exercice 79 *Courbure et cercle osculateur*

1. Soit $r > 0$. Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $r - \sqrt{r^2 - x^2}$.
2. A l'aide de la question 1., déterminer le cercle qui approche le mieux la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ au voisinage du point d'abscisse 0.
   Le cercle obtenu s'appelle cercle osculateur de $\mathcal{P}$ au point $(0,0)$. Si ρ est le rayon de ce cercle, on appelle courbure de $\mathcal{P}$ au point $(0,0)$ le nombre $\frac{1}{\rho}$.
3. Etudier au voisinage de 0 la position relative de $\mathcal{P}$ et du cercle osculateur.
4. Soit f une fonction définie et dérivable dans un voisinage de 0, deux fois dérivable en 0, vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$. Exprimer la courbure de C_f au point $(0,0)$ en fonction de $f''(0)$. Etudier le cas où $f'(0) \neq 0$.

Exercice 80 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Déterminer le DL à l'ordre 3 en $X = 0$ de $\frac{1-X^3}{\sqrt{1+X^2}}$.
2. En posant $X = \frac{1}{x}$, en déduire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$.
3. En déduire que la courbe représentative de f admet une parabole asymptote au voisinage de $+\infty$. Déterminer leur position relative au voisinage de $+\infty$.
4. Faire la même étude au voisinage de $-\infty$.

Exercice 81 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.
On note C son graphe.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $X = 0$ de
$$g(X) = \frac{\sqrt{1+X^2}}{1+e^X}$$
2. Poser $X = \dfrac{1}{x}$. Exprimer $f\left(\dfrac{1}{X}\right)$ en fonction de $g(X)$. Puis déterminer un développement asymptotique de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. En déduire que C admet une droite asymptote D au voisinage de $+\infty$. On donnera une équation de D et on étudiera la position relative de C et D au voisinage de $+\infty$.

Exercice 82 *Une étude complète de courbe*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Montrer que f admet un prolongement continu en 0 à gauche, et que ce prolongement est dérivable à gauche en 0.
2. Déterminer le sens de variation de f. Donner le tableau des variations de f.
3. Etudier la convexité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
4. Montrer que C_f admet une droite asymptote D au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ et étudier la position relative de C_f et D au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
5. Tracer C_f et D.

Exercice 83 *DL et limites de suites*
Déterminer les limites des suites de terme général :
- $u_n = (n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
- $v_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
- $w_n = \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ $(a > 0,\ b > 0)$.