Fiche 1

Structures des mathématiques

Quand on demande à quelqu'un quel est l'intérêt d'étudier les mathématiques, il y a de fortes chances que l'on vous réponde que c'est pour la capacité à formuler des raisonnements et des réflexions construites. C'est tout à fait vrai et cette critique se repose essentiellement sur le contenu de cette fiche : la logique. Nous allons voir comment ces petits concepts simples et intuitifs forment l'un des fondements les plus importants pour toute la suite des mathématiques, voire plus.

Comment sont construites les mathématiques modernes ?

Les mathématiques peuvent apparaitre comme un gros nuage d'énoncés et de théorèmes qui n'ont ni lien ni sens. Cependant, c'est un langage codifié d'une rigueur absolue. Regardons un exemple :

Théorème (Théorème de Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle. Si ABC est rectangle en B, alors l'égalité $AC^2 = AB^2 + CB^2$ est vérifiée.*

C'est un théorème bien connu : le théorème de Pythagore. Il nous donne une égalité numérique dans le cas où nous serions face à un triangle rectangle. Le but ici n'est pas de l'utiliser sur le terrain, mais bien de comprendre la logique de l'énoncé. Regardons-le de plus près :

— En orange, on **déclare les objets** que l'on va utiliser. On ne sort rien du chapeau ! On peut les mettre avec les hypothèses dans la mesure où on émet une hypothèse sur notre environnement à savoir l'existence d'un certain objet.

— En bleu, on a ce que l'on appelle une **hypothèse**. C'est quelque chose que l'on suppose vraies sur nos objets déclarés précédemment. Il peut y en avoir comme il peut y en avoir plusieurs. Par exemple, le Théorème de Thalès en demande lui plusieurs. Elles permettent de faire le raisonnement pour arriver à la conclusion.

— En rouge, on a la **conclusion**. C'est le résultat en lui-même de l'énoncé. Grâce aux hypothèses, il est possible d'arriver à cette conclusion.

— En jaune, ce sont les **connecteurs logiques** qui permettent de bien saisir le type d'énoncé auquel on fait face. La structure *"Si...Alors"* nous dit bien que **SI** des choses sont vraies, **ALORS** d'autres le sont. C'est ce qui permet de faire des **déductions**.

Ici, ce n'est qu'un exemple parmi tant d'autres, mais l'élément le plus intéressant à remarquer, c'est que les énoncés de mathématiques se bases sur des hypothèses qui sont. . .d'autres énoncés mathématiques ! Ainsi, les mathématiques se nourrissent de mathématiques !

Attention, les mathématiques ne bouclent pas et c'est ce que l'on va voir tout de suite.

Les mathématiques comme un arbre

Dans l'exemple précédent, nous avons vu une déduction. Elle arrivait à une conclusion à partir d'hypothèses préalables, comme c'est le cas pour une grande partie des énoncés mathématiques. Cela veut dire que l'on doit se baser sur des hypothèses qui elles-mêmes sont des énoncés mathématiques et qui sont construites à partir de mathématiques. Notre jeu à nous va être de remonter la ligne jusqu'à toucher le bout afin de répondre à la question : c'est quoi le début des maths ?

La réponse tient en un seul mot : axiome. Un axiome est un énoncé que l'on admet vrai. C'est le point d'origine de toutes les théories mathématiques modernes. L'idée est la suivante : on pose un petit nombre d'axiomes qui ont l'air plutôt évidents et on les assemble pour faire des énoncés plus compliqués en utilisant de la déduction. Il existe donc. . .plein de possibilités ! Regardons un set d'axiomes assez facile : les axiomes d'Euclide :

1. Il existe toujours une droite passant par deux points du plan.
2. Tout segment peut être étendu, suivant sa direction en une droite infinie.
3. À partir d'un segment, il existe un cercle dont le centre est un des sommets du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule et unique droite passant par ce point et parallèle à la première.

Ces quelques règles nous donnent assez d'éléments pour retrouver toutes les règles de géométrie que l'on voit au collège, et en fait beaucoup plus. Ce sont les bases de la géométrie dans le plan.

On pourra faire en exercice quelques preuves d'énoncés simples qui partent de cette axiomatique. N'hésitez pas à me le demander.

Pour conclure cette partie, je vous invite à voir les mathématiques comme une forêt d'arbres qui correspondent tous à un domaine spécifique, dont les racines sont des sets d'axiomes. Il en existe plein pour des usages très variés. Chaque nouvel énoncé sera construit à partir du travail de nos prédécesseurs, le tout dans un ensemble logique et cohérent.

Glossaire des types d'énoncés

— **L'axiome** est un énoncé non démontré que l'on utilise comme fondement d'une théorie.

— **Une propriété** est l'énoncé d'une caractéristique concernant un objet.

— **Une proposition** est un énoncé complet qui est soit vrai, soit faux. Si on connait sa valeur de vérité, on peut en faire la démonstration [1].

— **Un théorème** est une assertion au même titre que la proposition. C'est souvent l'énoncé le plus important d'un document ou d'un cours et sera donc souvent vrai et démontré.

— **Un corollaire** est une déduction quasiment immédiate d'un théorème.

— **Une notation** n'est pas un énoncé logique, il permet d'établir une manière d'écrire quelque chose afin de faciliter la lecture.

1. On dit aussi faire la preuve.