Retour sur les Ensembles

Les ensembles sont à la base de tout. Il existe une théorie qui permet de définir toutes les mathématiques à partir uniquement du concept d'ensemble. Pourtant, ce sont des objets rudimentaires et profondément simples ! Faisons un tour d'horizon et découvrons ça ensemble.

1 Notion générale d'ensemble

1.1 Qu'est ce qu'un ensemble ?

Définition (Ensemble). *Un **ensemble** est une collection d'objets. Il n'y a pas d'ordre entre les objets et le nombre d'apparition ne compte pas.*

On note un ensemble entre accolades "{}", en séparant les éléments par des points virgules ";" .

Exemple. *Voici quelques exemples qui utilisent la notion d'ensemble.*
- $\{1; 2; 5; 7\}$ *est un ensemble de nombres.*
- $\{banane;\ pomme;\ poire\}$ *est un ensemble de fruits.*
- $\{1; 1; 1; 1\} = \{1\}$ *car le nombre d'apparition ne compte pas.*
- $\{1; 2\} = \{2; 1\}$ *car l'ordre ne compte pas.*

Définition (Ensemble Vide). *On appelle **ensemble vide** l'unique ensemble ne contenant aucun élément. On le note* $\emptyset$.

Remarque. *Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.*

Définition (Cardinal). *Soit E un ensemble On appelle **cardinal** de E le nombre d'éléments que contient l'ensemble E. On le note $Card(E)$.*

Remarque. /!\
- $Card(\emptyset) = 0$. *C'est l'unique ensemble dont le cardinal est nul.*
- $Card(\{1; 1; 1; 1\}) = 1$ *car l'unique élément de cet ensemble est* 1.
- $Card(\{4; 5; 7; 3\}) = 4$.

Définition (Appartenance). *Soit E un ensemble non vide et x un objet.*
- *Si x est dans E, on dit que x **appartient à** E. On le note $x \in E$.*
- *Si x n'est pas dans E, on dit que x **n'appartient pas à** E. On le note $x \notin E$.*

Exemple. *Voici quelques exemples autour de l'appartenance.*
- $4 \notin \emptyset$.
- $10 \in \{4; 5; 10; 42\}$.

Définition (Inclusion). *Soit E et F deux ensembles non vides.*
*On dit que F **est inclus dans** E si tous les éléments de F sont des éléments de E. On dit aussi dans ce cas que F est dans E. On le note*

$$F \subset E$$

*On dit alors que F est un **sous-ensemble** de E.*

Remarque. *On peut écrire les ensembles sous 2 manières différentes : en extension et par compréhension.*

- ***En extension*** *: on énonce tous les éléments de l'ensemble :* $\{1; 2; 3; 4\}$.
- ***Par compréhension*** *: on sélectionne des éléments d'un ensemble plus grand qui respectent une condition :* $F = \{x \in E \mid Condition\ sur\ x\}$

1.2 Union, intersection et complémentaire

Définition (Union d'ensemble)**.** *Soient E et F deux ensembles.*
*On appelle l'**union** (ou la réunion) de E et F l'ensemble qui contient tous les éléments de E et tous les éléments de F. On le note*

$$E \cup F$$

Définition (Intersection d'ensemble)**.** *Soient E et F deux ensembles.*
*On appelle l'**intersection** de E et F l'ensemble qui contient uniquement les éléments en commun entre les deux ensembles. On le note*

$$E \cap F$$

Exemple. *Quelques exemples d'unions et d'intersections*

- $\{1; 2\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$
- $\{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$
- $\{1; 2; 3\} \cap \{2; 3; 4\} = \{2; 3\}$
- $\{1; 2; 3\} \cap \{6; 7; 9\} = \emptyset$

Définition (Complémentaire)**.** *Soit E un ensemble et F un sous-ensemble de E. On appelle l'ensemble complémentaire de F dans E l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas dans F. On le note*

$$E \setminus F$$

qui se lit "E privé de F".

Voici un diagramme qui résume tout ce que nous venons de voir :

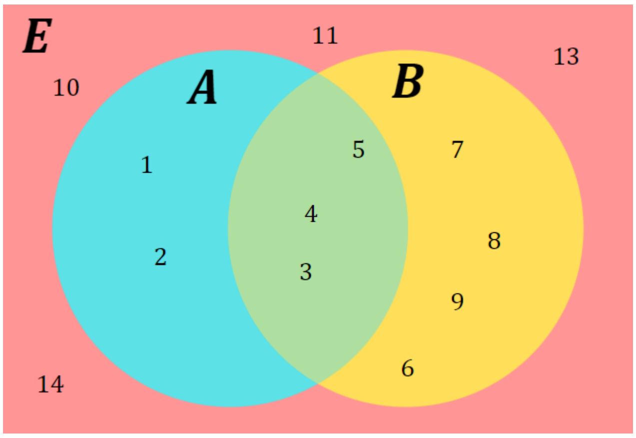


FIGURE 1 – Diagramme de Venn

- $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 14\}$ et $Card(E) = 13$ (Il n'y a pas de 12 dans le diagramme)
- $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $Card(A) = 5$.
- $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $Card(B) = 7$.
- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $Card(A \cup B) = 9$.
- $A \cap B = \{3; 4; 5\}$ et $Card(A \cap B) = 3$.
- $E \setminus (A \cup B) = \{10; 11; 13; 14\}$ et $Card(E \setminus (A \cup B)) = 4$.
- $A \subset E$ et $B \subset E$.

2 Ensembles de référence

On peut faire des ensembles avec à peu près tout et n'importe quoi mais ici on se concentrera principalement sur des ensembles de nombres. Il existe des ensembles de nombres que l'on dit de référence. Ils séparent les nombres connus en différentes grandes catégories que l'on va montrer ici. Chaque ensemble vient avec son lot de règles et c'est l'appartenance à l'un ou plusieurs de ces ensembles qui définit ce que l'on a le droit de faire avec ou non.

2.1 Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des **nombres entiers positifs ou nuls**.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

2.2 Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des **nombres entiers positifs ou négatifs**.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

2.3 Les nombres décimaux

L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble de tous les nombres à virgule qui ont un développement décimal fini.

On peut écrire tous les nombres décimaux comme ceci :

$$\frac{a}{10^n}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. *Voici quelques nombres pour se donner une idée.*

— $3.45 \in \mathbb{D}$ *car il possède un développement décimal fini* (45). *On peut aussi l'écrire comme* $\frac{345}{10^2}$.

— $0.5 \in \mathbb{D}$ *car il possède un développement décimal fini* (5). *On peut aussi l'écrire comme* $\frac{5}{10^1}$.

— $\pi \notin \mathbb{D}$ *car il possède un développement décimal infini. De plus, on peut montrer qu'il est impossible de l'écrire sous la forme des décimaux.*

2.4 Les nombres rationnels

Les nombres rationnels sont tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers irréductible. Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres

$$\frac{a}{b}$$

avec a et b des entiers relatifs, $b \neq 0$.

2.5 Les nombres réels

Informellement, on va poser l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, comme l'ensemble de tous les nombres qui existent. Cela inclut les positifs, les négatifs, 0, les nombres à virgules, les irrationnels mais aussi les constantes un peu spéciales commes π, e ou encore $\sqrt{2}$ par exemple.

Il existe des nombres qui n'appartiennent pas à cet ensemble mais ils ne sont pas au programme de la terminale générale spécialité mathématiques. Il y a de très fortes chances que tous les nombres vous avez rencontré dans votre vie soient des réels.

Remarque. $\mathbb{R}$ *est le plus grand de ces ensembles, si grand qu'il contient tous les autres. En fait, il y a une relation d'inclusion entre tous les ensembles.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

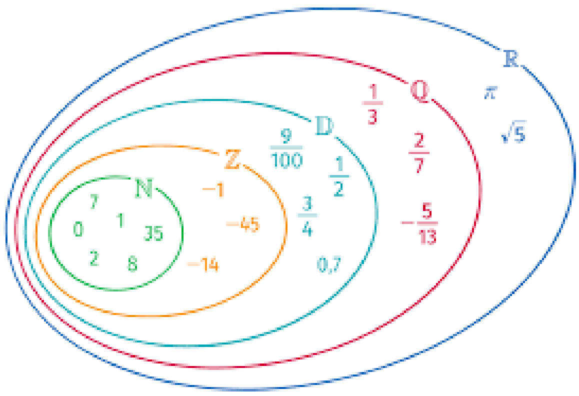


FIGURE 2 – Schéma des inclusions des ensembles de référence

3 Intervalles

Définition (Intervalle borné). *Soient a et b deux nombres réels (qui appartiennent à $\mathbb{R}$) avec $a < b$.*
On appelle ***intervalle borné*** *entre a et b l'ensemble I de tous les nombres réels compris entre a et b.*
Il existe différents cas selon si on inclut les bornes ou non :

— *Si a et b sont inclus, on note $I = [a; b]$.*

— *Si a et b ne sont pas inclus, on note $I =]a; b[$.*

— *Si a inclus et b exclus, on note $I = [a; b[$.*

— *Si a exclus et b inclus, on note $I =]a; b]$.*

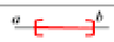
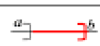
L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	

FIGURE 3 – Représentation des intervalles bornés

Définition (Intervalle non borné)**.** *Soient a et b deux nombres réels (qui appartiennent à $\mathbb{R}$) avec $a < b$.*
*On appelle **intervalle non borné** un intervalle dont l'une des bornes est $+\infty$ ou $-\infty$.*

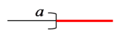
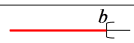
L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

FIGURE 4 – Représentation des intervalles non bornés

Remarque. ***ATTENTION ! ! !***
*On n'atteint **jamais** l'infini ! L'infini est donc **toujours** exclus de l'intervalle et il faut retourner le crochet !*

Résumé

— Un ensemble est une collection d'objet.

— Un ensemble dans un ensemble est un sous-ensemble.

— L'intersection c'est ce qu'il y a en commun

— L'union c'est le tout.

— Les nombres sont rangés dans les ensembles de références $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$.

— Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient tous les nombres entre deux bornes.