Fiche 4

Nombres entiers et axiomes de Peano

Aujourd'hui, pour la première fois dans cette série de petites fiches, nous allons parler de nombres. Comme nous l'avons esquissé précédemment, les nombres sont catégorisés. On ne mélange pas toujours tout dans un seul et même ensemble. Aujourd'hui, nous allons nous focaliser essentiellement sur un ensemble très spécifique, à la base de la construction de tous les autres ensembles de référence les plus communs : les entiers naturels [1].

Intuition de ce dont on parle

Des nombres, il y en a plein, mais on ne peut pas parler de la même manière de tous les nombres. À la base, on utilise des nombres pour compter des trucs, pour dénombrer. On cherche à répondre à une question toute bête : j'ai combien de moutons dans mon pré ? Donc on compte . . .0, 1, 2, . . .et on continue longtemps si on a beaucoup de montons. C'est à ces nombres là que l'on va s'intéresser, à savoir des quantités entières et positives qui représentent des choses que l'on peut compter, comme sur ses doigts.

Point Historique

Figure 1 – Giuseppe Peano

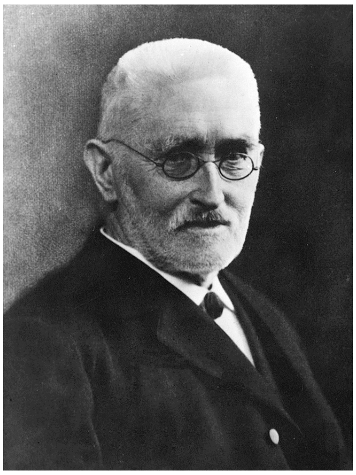

Figure 2 – Richard Dedekind

Au début, les entiers naturels n'existent que pour dénombrer des collections d'objets, pour dire combien il y a d'éléments dans un ensemble. La première vraie révolution sera de considérer ces nombres en tant que nombres sans penser un seul instant à ce qu'ils pourraient représenter. C'est cette première abstraction qui donne naissance à l'étude des nombres entiers et aux fondements de l'arithmétique. On voit cela apparaitre très tôt, l'exemple connu étant peut-être Euclide qui parle des nombres en long et en large, en prouvant même des résultats assez impressionnants, sur la divisibilité ou les nombres premiers (on parle bien de division **euclidienne**). Entre le 19e et le 20e siècle, un courant de pensée se répand chez les mathématiciens. En effet, en quête de vérités, certains chercheurs souhaitent vérifier que les mathématiques et toutes les "avancées" faites sont vraies. En effet, plus on s'éloigne de notre idée intuitive pour faire confiance au langage abstrait, plus l'erreur est permise. Et si les mathématiques étaient allées trop loin ? Pour ce faire, les mathématiciens se reposent encore plus sur la notion d'axiomes et ont pour projet de tout reposer à partir de ces derniers. Les entiers n'y échappent pas, car c'est dans cette période que deux grands noms des mathématiques, Richard Dedekind et Giuseppe Peano, vont proposer presque au même moment deux axiomatisations des entiers naturels très similaires entre elles. On appelle aujourd'hui ces axiomes les axiomes de Peano.

1. Pour les plus pointilleux, on se basera ici sur la construction par Peano. On inclura donc 0.

Les axiomes de Peano

En langage mathématique

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! m \in \mathbb{N},\ m = suc(n)$ où $suc(n)$ représente le **successeur** de n.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ suc(n) \neq 0$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N},\ suc(n) = suc(m) \implies n = m$
5. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble. $(0 \in \mathcal{A}) \wedge (\forall n \in \mathcal{A},\ suc(n) \in \mathcal{A}) \implies \mathcal{A} = \mathbb{N}$

Explications détaillées

1. **L'élément 0 appartient à l'ensemble des entiers naturels.** Cela pose une base ; il y a au moins un élément dans cet ensemble que l'on essaie de définir.

2. **Chaque élément de l'ensemble des entiers naturels possède un unique successeur (un nombre qui le suit directement)**. Tout simplement, cela nous dit que, peu importe le nombre que l'on prend, il y en a encore un après. On peut lire le successeur comme le nombre de base $+1$. C'est vraiment l'idée derrière, de passer au suivant. Aussi, cet énoncé nous affirme que chaque nombre possède bien un suivant direct et pas plus.

3. 0 **n'est le successeur de personne**. Ce point-là est assez évident dans la mesure où on commence, en général, à compter à partir de 0. C'est notre point de *départ.*

4. **Si deux nombres ont le même successeur, alors ils sont égaux.** Pour se rendre compte de celui-là, il est peut-être intéressant de se faire un exemple chez-soi. Si on a deux nombres mystères qui ont tous les deux pour suivant 4, ces deux nombres mystères seront forcément le même : 3.

5. **Si un ensemble contient 0 et que tous les éléments de cet ensemble ont leur successeur dans ledit ensemble, alors cet ensemble est forcément $\mathbb{N}$.** C'est ce que l'on appelle l'axiome de récurrence. Il permet de nombreux raisonnements sur les entiers naturels, mais ici, il joue un rôle encore plus important. Il est le maillon construit effectivement les entiers naturels. La nature si singulière des entiers naturels dans l'océan des autres nombres vient d'ici. Attardons-nous un peu dessus.

Axiome de Récurrence ?

Dans les quatre premières règles, on esquisse des règles de l'ensemble. On énonce quelques évidences, mais on voit déjà apparaître 2 points importants, les règles 1 et 2. On nous dit que 0 est dans l'ensemble, puis, que chaque nombre à un successeur. Cependant, il ne nous est jamais donné de limite. On sait que dans $\mathbb{N}$ il y a 0 et on peut imaginer les successeurs qui en découlent. En suivant scrupuleusement les règles 1 à 4, qu'est-ce qui nous permet de dire qu'il n'y a pas autre chose que les successeurs qui découlent de 0 dans $\mathbb{N}$? Eh bien rien. C'est pourquoi la règle 5, l'axiome de récurrence, est décisive dans notre construction. Elle nous permet de dire que si un ensemble contient 0 et que chaque successeur se trouve dans cet ensemble, alors ce sera forcément $\mathbb{N}$ parce qu'il ne contient maintenant que ça et rien d'autre. Cela justifie donc l'existence de la dernière règle.

Maintenant, il est légitime de se demander pourquoi cette petite règle bien salement formulée possède un nom que l'on retrouve partout dès que l'on parle d'entiers en mathématiques. L'axiome de récurrence est à la base de ce que l'on appelle le raisonnement par récurrence. C'est un type de raisonnement qui permet de montrer une proposition qui porte sur les entiers naturels. Je peux en montrer des exemples à la demande, mais voici l'idée avec un exemple concret :

Je souhaite montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n + 1 \geq n$. (on rappelle que le symbole au milieu est *"plus grand ou égal à"*).Je vais donc utiliser la construction même des entiers pour effectuer cette preuve.

J'ai le droit de poser l'ensemble des entiers tels que $n+1 \geq n$, c.-à-d. l'ensemble des entiers qui fonctionnent bien.

$$\text{On pose } S := \{n \in \mathbb{N} \mid n+1 \geq n\}$$

Et donc, comme on veut que ça marche bien pour tous les entiers naturels, il faudrait montrer que l'ensemble des nombres qui marchent bien, que l'on a appelé S, est égal à l'ensemble des entiers naturels.

$$\text{Il nous faut donc montrer que } S = \mathbb{N}$$

Pour cela, je vais me reposer sur l'**axiome de récurrence**.

- **Commençons par vérifier que** $0 \in S$.
  $0+1 = 1 \geq 0$ donc 0 est un nombre qui fonctionne bien, donc il appartient à S !

- **Vérifions que le successeur de chaque élément de** S **est dans** S. Pour cela, on prend un nombre quelconque de S, que l'on va appeler k, et on va réfléchir sur $k+1(= suc(k))$. En effet, on prend un entier quelconque et on suppose qu'il fonctionne. On va se demander si le suivant fonctionne aussi. Si c'est le cas, alors il sera aussi dans S.
  Comme on sait que k est un nombre qui marche, on sait que
  $$k+1 \geq k$$
  Donc cela signifie que l'on peut ajouter 1 de chaque côté sans perdre l'inégalité. et on obtient
  $$(k+1)+1 \geq k+1$$
  C'est exactement ce que l'on recherche, cette inégalité affirme que $k+1 \in S$. Ainsi le successeur de chaque élément de S est aussi dans S.

Comme nos deux conditions sont remplies, on peut scrupuleusement appliquer l'axiome 5 qui nous dit immédiatement que notre ensemble S est égal à $\mathbb{N}$. Cela conclut notre démonstration.

$\square$

La rédaction ici est volontairement lourde parce que je viens détailler chaque détail par rapport aux axiomes. Au lycée, on attend une rédaction plus légère dans la mesure où c'est une méthode de raisonnement usuelle. On peut facilement énoncer un théorème du raisonnement par récurrence pour généraliser les lourdeurs de rédactions ici faites en une seule preuve, pour pouvoir ensuite l'appliquer plus facilement. Aussi, pour prouver cet énoncé, il n'est pas forcément nécessaire de faire une récurrence. Personne ne l'aurait fait comme ça instinctivement, mais ça constitue néanmoins un bon exemple du fonctionnement de ce type de raisonnement.

L'essentiel sur les entiers, c'est leur rapport avec cette idée de successeur. Le fait qu'il y ait un suivant unique et évident rend la manipulation de ces nombres très agréable et singulière. C'est tout pour aujourd'hui !