Intégration et Partie Entière

Détermination d'une primitive
de la fonction partie entière

VIENNE Mathys

30 janvier 2025

Table des matières

Résumé

Dans ce document, nous allons tenter d'intégrer la fonction partie entière inférieure, et d'en trouver une primitive. Afin d'expliquer cela, nous commencerons par rappeler quelques définitions, et résultats importants avant de commencer à développer la théorie. Nous commencerons par intégrer par une approche graphique de l'intégrale, puis nous entrerons dans une vue beaucoup plus théorique, en utilisant notamment les théorèmes fondamentaux de l'analyse. Théoriquement, les éléments développés sont en l'état imparfaits et on fait souvent abstraction des hypothèses liées à la continuité des fonctions dans l'utilisation des théorèmes.

Chapitre 1

Prérequis

1.1 Les fonctions partie entière

Définition 1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle* ***partie entière inférieure de*** *x, noté $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier n tel que*

$$n \leq x < n + 1$$

On a donc

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \tag{1.1}$$

On notera alors $E_{inf}(x)$ la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$E_{inf}(x) = \lfloor x \rfloor$$

Proposition 1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$, E_{inf} est constante et continue sur tout intervalle $[n, n+1[$, et*

$$\forall x \in [n, n+1[\ ,\ E_{inf}(x) = n \tag{1.2}$$

Démonstration. Directe application de la définition de E_{inf}. □

Définition 2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle* ***partie entière supérieure de*** *x, noté $\lceil x \rceil$, l'unique entier n tel que*

$$n - 1 < x \leq n$$

On a donc

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil \tag{1.3}$$

On notera alors $E_{sup}(x)$ la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$E_{sup}(x) = \lceil x \rceil$$

Proposition 2. $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \tag{1.4}$$

Démonstration. Immédiate en combinant 1.1 et 1.3. □

1.2 Intégrales et primitives

Pour ce document, nous utiliserons l'intégrale au sens de Riemann. Cette construction des intégrales se base sur l'approximation par des fonctions en escaliers, et donc sur des sommes d'aires de rectangles. Ainsi elle permet de définir l'intégration pour des fonctions continues, mais aussi pour des fonctions continues par morceau. Cela nous permet d'assurer que certaines fonctions qui ne sont pas continues sur un intervalle sont Riemann-intégrables sur le dit intervalle. [1]

Proposition 3 (Relation de Chasles)**.** *Soient $a \leq b \leq c$ et f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, c]$,*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt \tag{1.5}$$

Proposition 4. *Soit C une constante,*

$$\int_a^b C\,dt = C(b-a) \tag{1.6}$$

Définition 3. *On dit que F est la **primitive** de f sur un intervalle I si ces deux fonctions vérifient l'équation*

$$F' = f \tag{1.7}$$

Théorème 1 (Premier théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I. La fonction Φ définie par*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1.8}$$

est dérivable sur I et admet pour dérivée la fonction f.

Théorème 2 (Second théorème fondamental de l'analyse)**.** *Si F est une primitive de f continue sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \tag{1.9}$$

1.3 Sommes d'entiers

Proposition 5. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.10}$$

Démonstration. Se montre par récurrence sur n. □

Proposition 6. *Soit n et m deux entiers naturels avec $n \leq m$.*

$$\sum_{k=n}^{m} k = \frac{m^2 + m + n - n^2}{2} \tag{1.11}$$

Démonstration. Se montre par récurrence sur m. □

On étendra 1.11 pour n et m dans $\mathbb{Z}$ avec $n \leq m$.

1. Il est possible que je n'aie pas bien compris l'intégration selon Riemann, mais nous partirons du principe que l'on peut intégrer les fonctions partie entière. Quand bien même cela serait faux, je suis curieux de ce que cela pourrait donner dans la mesure où les résultats suivants sont particulièrement intéressants.

Chapitre 2

Calculer une intégrale de partie entière

2.1 Approche graphique du procédé

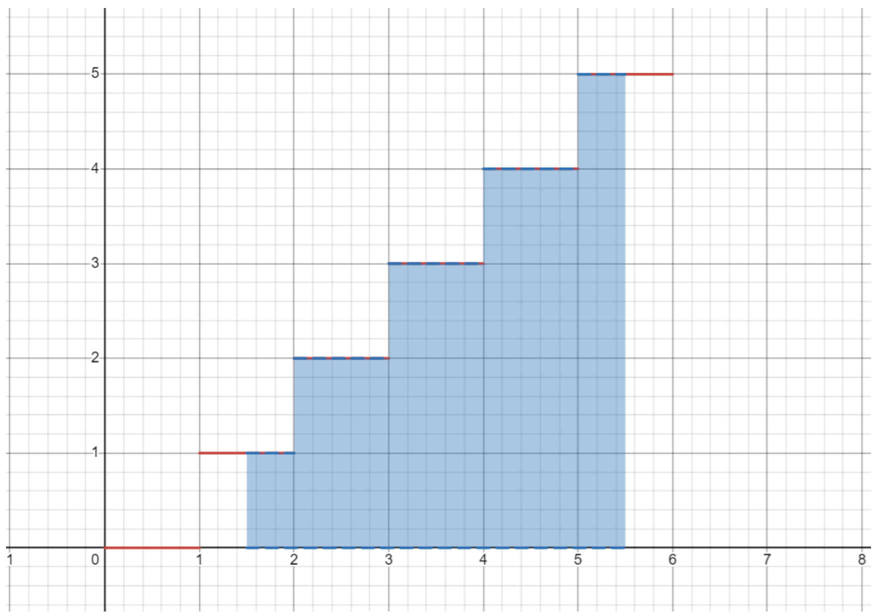

FIGURE 2.1 – Extrait du graphe de E_{inf}

Voici un extrait du graphe de la fonction E_{inf}. La zone bleutée correspond à $\int_{1.5}^{5.5} E_{inf}(t)\,dt$. On voit graphiquement que l'intégrale semble être exactement composée d'une somme d'aires de rectangles. On peut alors essayer de conjecturer une méthode de calcul basée sur cette remarque.

On va diviser l'intégrale en trois parties : le début, le milieu, et la fin. Grâce à la relation de Chasles (1.5), on obtient ceci :

$$\int_{1.5}^{5.5} E_{inf}(t)\,dt = \int_{1.5}^{2} E_{inf}(t)\,dt + \int_{2}^{5} E_{inf}(t)\,dt + \int_{5}^{5.5} E_{inf}(t)\,dt$$

On prendra alors respectivement chaque terme du membre de droite pour début (D), le milieu (M), et la fin (F).

— **Calcul de D :**
On a $D = \int_{1.5}^{2} E_{inf}(t)\,dt$. Or on sait que sur $\forall x \in [1.5, 2[$[1], $E_{inf}(x) = 1$, donc

$$D = \int_{1.5}^{2} 1\,dt \overset{(1.6)}{=} 1 \cdot (2 - 1.5)$$

— **Calcul de M :**
On a $M = \int_{2}^{5} E_{inf}(t)\,dt$. Grâce à la relation de Chasles (**??**), on peut écrire que

$$\int_{2}^{5} E_{inf}(t)\,dt = \int_{2}^{3} E_{inf}(t)\,dt + \int_{3}^{4} E_{inf}(t)\,dt + \int_{4}^{5} E_{inf}(t)\,dt$$

Or d'après 1.2, on va avoir[2] :

$$\int_{2}^{5} E_{inf}(t)\,dt = \int_{2}^{3} 2\,dt + \int_{3}^{4} 3\,dt + \int_{4}^{5} 4\,dt$$

Et pour finir, par 1.6, on obtient :

$$\int_{2}^{5} E_{inf}(t)\,dt = 2 + 3 + 4 = \sum_{k=2}^{4} k$$

— **Calcul de F :**
On a $F = \int_{5}^{5.5} E_{inf}(t)\,dt$. Or on sait que sur $\forall x \in [5,\ 5.5]$, $E_{inf}(x) = 5$, donc

$$F = \int_{5}^{5.5} E_{inf}(t)\,dt = \int_{5}^{5.5} 5\,dt \overset{(1.6)}{=} 5 \cdot (5.5 - 5)$$

Les calculs précédents nous montrent donc de conclure :

$$\begin{aligned}
\int_{1.5}^{5.5} E_{inf}(t)\,dt &= 1 \cdot (2 - 1.5) + \sum_{k=2}^{4} k + 5 \cdot (5.5 - 5) \\
&= 0.5 + 9 + 27.5 - 25 \\
&= 0.5 + 9 + 2.5 \\
&= 12
\end{aligned}$$

2.2 Généralisation

Dans cette partie, nous allons prendre le raisonnement précédent et le généraliser pour tout a et b réels positifs. On va chercher à calculer

$$I = \int_{a}^{b} E_{inf}(t)\,dt$$

Or, par 1.4, on sait que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$. Donc d'après la relastion de Chasles (1.5),

$$I = \int_{a}^{\lceil a \rceil} E_{inf}(t)\,dt + \int_{\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} E_{inf}(t)\,dt + \int_{\lfloor b \rfloor}^{b} E_{inf}(t)\,dt$$

On prendra alors respectivement chaque terme du membre de droite pour début (D), le milieu (M), et la fin (F).

1. Un doute est légitime au sujet de 2, dans la mesure où $E_{inf}(2) = 2$ et non 1. Son exclusion pourrait peut-être poser problème. Pour s'assurer que le procédé est correct, on peut fonctionner avec une intégrale impropre en utilisant le fait que $\lim_{x \to 2^-} E_{inf}(x) = 1$.

2. Une nouvelle fois, en cas de doute pour la borne supérieure de l'intervalle, on se ramènera à une intégrale impropre car la limite à gauche donne bien n et non $n + 1$.

— **Calcul de D :**
On a $D = \int_a^{\lceil a \rceil} E_{inf}(t)\,dt$. Or on sait que $\forall x \in [a, \lceil a \rceil[$ [3], $E_{inf}(x) = \lfloor a \rfloor$, donc

$$D = \int_a^{\lceil a \rceil} \lfloor a \rfloor \,dt \overset{(1.6)}{=} \lfloor a \rfloor \cdot (\lceil a \rceil - a)$$

— **Calcul de M :**
On a $M = \int_{\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} E_{inf}(t)\,dt$. Grâce à la relation de Chasles (1.5), on peut écrire que

$$\int_{\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} E_{inf}(t)\,dt = \sum_{n=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor - 1} \int_n^{n+1} E_{inf}(t)\,dt$$

Or d'après 1.2, on va avoir [4] :

$$\int_{\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} E_{inf}(t)\,dt = \sum_{n=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor - 1} \int_n^{n+1} n\,dt$$

Et pour finir, par 1.6, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} E_{inf}(t)\,dt &= \sum_{n=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor - 1} n(n+1-n) \\
&= \sum_{n=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor - 1} n \\
&\overset{(1.11)}{=} \frac{(\lfloor b \rfloor - 1)^2 + \lfloor b \rfloor - 1 + \lceil a \rceil - \lceil a \rceil^2}{2}
\end{aligned}$$

— **Calcul de F :**
On a $F = \int_{\lfloor b \rfloor}^{b} E_{inf}(t)\,dt$. Or on sait que $\forall x \in [\lfloor b \rfloor,\ b],\ E_{inf}(x) = \lfloor b \rfloor$, donc

$$F = \int_{\lfloor b \rfloor}^{b} E_{inf}(t)\,dt = \int_{\lfloor b \rfloor}^{b} \lfloor b \rfloor\,dt \overset{(1.6)}{=} \lfloor b \rfloor \cdot (\lfloor b \rfloor - b)$$

Les calculs précédents nous permettent donc de conclure :

$$\begin{aligned}
I &= D + M + F \\
&= \lfloor a \rfloor \cdot (\lceil a \rceil - a) + \frac{(\lfloor b \rfloor - 1)^2 + \lfloor b \rfloor - 1 + \lceil a \rceil - \lceil a \rceil^2}{2} + \lfloor b \rfloor \cdot (\lfloor b \rfloor - b) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\lfloor a \rfloor (2\lceil a \rceil - 2a) + \lfloor b \rfloor (2b - \lfloor b \rfloor - 1) + \lceil a \rceil + \lceil a \rceil^2 \right]
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a^b E_{inf}(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\lfloor a \rfloor (2\lceil a \rceil - 2a) + \lfloor b \rfloor (2b - \lfloor b \rfloor - 1) + \lceil a \rceil + \lceil a \rceil^2 \right] \tag{2.1}$$

Nous avons donc obtenu une expression de I qui représente l'intégrale de a à b de la fonction E_{inf}. Cela nous amène donc à utiliser quelques outils supplémentaires d'analyse pour voir jusqu'où on peut pousser notre construction.

3. Un doute est légitime au sujet de $\lceil a \rceil$, dans la mesure où $E_{inf}(\lceil a \rceil) = \lceil a \rceil$ et non $\lfloor a \rfloor$. Son exclusion pourrait peut-être poser problème. Pour s'assurer que le procédé est correct, on peut fonctionner avec une intégrale impropre en utilisant le fait que $\lim_{x \to \lceil a \rceil^-} E_{inf}(x) = \lfloor a \rfloor$.

4. Une nouvelle fois, en cas de doute pour la borne supérieure de l'intervalle, on se ramènera à une intégrale impropre car la limite à gauche donne bien n et non $n+1$.

Chapitre 3

Formuler une primitive ?

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les deux théorèmes fondamentaux de l'analyse afin de proposer un e expression qui ressemble très étrangement à une primitive et se comporte très étrangement comme une primitive.

Dans un premier temps, on va appliquer le premier théorème fondamental de l'analyse [1] (1.8) à l'égalité que nous venons de montrer (2.1). On va poser la fonction Φ telle que

$$\Phi(x) = \int_0^x E_{inf}(t)\, dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\overset{2.1}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\lfloor 0 \rfloor (2\lceil 0 \rceil - 2 \cdot 0) + \lfloor x \rfloor (2x - \lfloor x \rfloor - 1) + \lceil 0 \rceil + \lceil 0 \rceil^2\right] \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor (2x - \lfloor x \rfloor - 1)}{2}\end{aligned}$$

Donc nous pouvons conclure par (1.7) que

$$\left(\frac{\lfloor x \rfloor (2x - \lfloor x \rfloor - 1)}{2}\right)' = E_{inf}(x) \tag{3.1}$$

Montrons que notre résultat tient la route en dérivant le membre de gauche.

Démonstration. On supposera [2] que $\forall x \in \mathbb{R}, E'_{inf}(x) = 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\lfloor x \rfloor (2x - \lfloor x \rfloor - 1)}{2}\right)' &= \left(\frac{1}{2} \cdot (\lfloor x \rfloor (2x - \lfloor x \rfloor - 1))\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((\lfloor x \rfloor)' \cdot (2x - \lfloor x \rfloor - 1) + \lfloor x \rfloor \cdot (2x - \lfloor x \rfloor - 1)') \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2\lfloor x \rfloor) \\ &= \frac{2\lfloor x \rfloor}{2} \\ &= \lfloor x \rfloor\end{aligned}$$

□

1. On a fait fit de l'hypothèse de continuité. C'est pas bien mais la suite est intéressante !
2. On ignore toujours les points de discontinuité. On peut voir cela comme une extension de la dérivation sur une infinité d'ouverts par continuité.

Considérons donc Φ comme une primitive de E_{inf} sur $\mathbb{R}$. On peut donc se demander si Φ va respecter le second théorème fondamental de l'analyse (1.9). En toute logique, comme nous considérons que c'est une primitive, le théorème fonctionne bien. Cependant, dans la mesure où nous avons ignoré des hypothèses lors de notre construction, il serait intéressant de le montrer plus rigoureusement. Reprenons notre exemple de tout à l'heure.

$$I = \int_{1.5}^{5.5} E_{inf}(t)\, dt$$

Comme nous connaissons une primitive de E_{inf}, nous sommes tentés d'utiliser le second théorème fondamental de l'analyse (1.9) :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1.5}^{5.5} E_{inf}(t)\, dt \\
&= \left[\frac{\lfloor x \rfloor (2x - \lfloor x \rfloor - 1)}{2} \right]_{1.5}^{5.5} \\
&= \left(\frac{\lfloor 5.5 \rfloor (2 \cdot 5.5 - \lfloor 5.5 \rfloor - 1)}{2} \right) - \left(\frac{\lfloor 1.5 \rfloor (2 \cdot 1.5 - \lfloor 1.5 \rfloor - 1)}{2} \right) \\
&= \left(\frac{5(11 - 5 - 1)}{2} \right) - \left(\frac{1(3 - 1 - 1)}{2} \right) \\
&= \left(\frac{5 \cdot 5}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{25 - 1}{2} \\
&= \frac{24}{2} \\
&= 12
\end{aligned}$$

Cela correspond bien à nos résultats précédents. L'expérience montre que cela fonctionne bien pour différentes valeurs de a et de b dans $\mathbb{R}$. Je n'ai pas de preuve à apporter pour montrer que tout s'assemble bien. Cependant, si on s'appuie sur les éléments précédemment montrés, l'édifice semble tenir correctement. Il suffirait alors de trouver un moyen de colmater les failles liées à la discontinuité de la fonction E_{inf}.