Démonstration de la formule de la k-ième dérivée d'un terme d'une suite de puissances de fonction affine

VIENNE Mathys

24 Juin 2023

Proposition
Soit f une fonction défnie pour tout réel x par par $f(x) = ax+b$ avec a un réel non-nul et b un réel.
Pour (u_n) une suite de puissances de fonction affine définie par $u_n = (ax+b)^n$, pour tout entier naturel n, la k-ième dérivée de u_n, notée $u_n^{(k)}$, avec k un entier naturel inférieur ou égal à n, nous est donnée par la formule

$$u_n^{(k)} = u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} an - ai\right)$$

Démonstration *Raisonnons par récurrence.*

<u>Initialisation :</u> *Pour n = 0,*

$k \leq n \Leftrightarrow k \leq 0 \Leftrightarrow k = 0$ *car* $k \in \mathbb{N}$
Donc $u_n^{(k)} = u_0^{(0)} = 1$

$u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} an - ai\right) = u_0 \times \left(\prod_{i=0}^{-1} an - ai\right) = 1 \times 1 = 1 = u_n^{(k)}$

Donc la propriété est initialisée

<u>Hérédité :</u> *Supposons que la propriété est vraie à partir d'un certain rang n, donc que $u_n^{(k)} = u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} an - ai\right)$ à partir d'un certain rang n. Montrons que la propriété est vraie pour le rang $n+1$, donc que $u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai\right)$.*

Raisonnons par récurrence.

<u>Initialisation :</u> *Pour k = 0,*

$u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1}$

$u_{n+1-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai\right)$
$= u_{n+1} \times \left(\prod_{i=0}^{-1} a(n+1) - ai\right)$
$= u_{n+1} \times 1$
$= u_{n+1}^{(k)}$

Donc la propriété est initialisée

<u>Hérédité :</u> *Supposons que la propriété est vraie à partir d'un certain rang k inférieur ou égal à n+1, donc que* $u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai \right)$ *à partir d'un certain rang k. Montrons que la propriété est vraie pour le rang* $k+1$, *donc que* $u_{n+1}^{(k+1)} = u_{n+1-(k+1)} \times \left(\prod_{i=0}^{k+1-1} a(n+1) - ai \right)$.

$u_{n+1-(k+1)} \times \left(\prod_{i=0}^{k+1-1} a(n+1) - ai \right) = u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k} a(n+1-i) \right)$

Par hypothèse de récurrence,
$u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai \right)$

Donc $u_{n+1}^{(k+1)} = \left(u_{n+1-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai \right) \right)'$
$= a(n+1-k)u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai \right) + 0(u_{n+1-k})$
$= a(n+1-k)u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1-i) \right)$
$= u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k} a(n+1-i) \right)$

Donc la propriété est héréditaire.

<u>Conclusion :</u> *La propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à* $n+1$, $u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} a(n+1) - ai \right)$.

<u>Conclusion :</u> *La propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n,*

$$u_n^{(k)} = u_{n-k} \times \left(\prod_{i=0}^{k-1} an - ai \right)$$

.

Conséquence (Cas de $k = n$) *Dans le cas où* $k = n$, *on recherche alors la dérivée n-ième d'un polynôme de degré n. Cette dernière est donnée par la formule*

$$u_n^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} ai$$

Démonstration
Posons que $k = n$ *et utilisons la formule précédente.*

$u_n^{(k)} = u_{n-k} \times \prod_{i=0}^{k-1} an - ai$
$= u_0 \times \prod_{i=0}^{n-1} a(n-i)$
$= 1 \times \prod_{i=0}^{n-1} a(n-i)$

$= an \times a(n-1) \times ... \times 2a \times a$
$= \prod_{i=1}^{n} ai$