Suites de Puissance de Fonctions Affines

VIENNE Mathys

7 Juin 2023

Introduction

L'analyse de fonctions et de suites constitue une partie importante des enseignements de mathématiques au lycée. Ce sont deux objets intimement liés dont l'étude, à ce niveau, se fait souvent séparément. Cependant, que se passerait-il si l'on venait mélanger ces deux univers ? C'est cette question, entièrement motivée par la curiosité et la soif de connaissances, qui m'a amenée à imaginer ces suites. Peut-être qu'elles sont déjà connues sous un autre nom, ou que le contenu de ce document est si trivial que le rédiger n'était venu à l'idée de personne. Dans tous les cas, je n'ai pas réussi à trouver de document apaisant ma curiosité. Par conséquent, c'est à moi de rédiger le papier, l'article que j'aurais souhaité trouver, sous une forme que j'aurais apprécié lire.

Nous allons donc aujourd'hui étudier ce que j'ai décidé d'appeler (car je n'ai pas trouvé de ressource sur le sujet) des *suites de puissances de fonctions affines*. On définira, dans un premier temps, ces suites, puis on évoquera des solutions remarquables d'équations particulières. Enfin, je proposerai, dans un dernier temps, des propositions en lien avec les dérivées.

Il est tout de même important de noter plusieurs choses avant de continuer. Premièrement, ceci est l'oeuvre d'un élève en fin de terminale, spécialité mathématiques et option mathématiques expertes. Je suis loin d'être un professionnel. Il ne faut donc pas chercher ici des éléments trop complexes ni de rédaction parfaite, il n'y en aura sûrement pas et je ne suis pas assez expérimenté pour en juger. Deuxièmement, c'est une proposition. De mon faible niveau découle inévitablement une incertitude concernant ce que je présente. Je ne suis pas sûr de ce que j'avance à cent pourcents, même si je le présente avec des démonstrations. Elles peuvent être fausses et mes idées mauvaises. C'est un essai. Je souhaite m'améliorer et affiner mes idées si elles peuvent l'être. Troisièmement, je suis seul. Mon travail n'a pas été relu par une autre personne. Je n'ai pas de retour sur mon travail et je n'ai donc pas de vérification. Si vous êtes ici et que vous vous apprêtez à lire, sachez que des retours seraient appréciés.

Avec cela en tête, vous pouvez lire ce document sans aucun problème. Bonne lecture.

Définition des suites de puissances de fonctions affines

Définition *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a un réel non-nul et b un réel.*
On appelle suite de puissance de fonctions affines les suites définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = (f(x))^n$$

Propriété 1 *Les suites de puissance de fonctions affines sont des suites géométriques de raison $q = f(x)$ et de premier terme $u_0 = 1$*

Démonstration
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (f(x))^n = (ax + b)^n$
$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^n(ax+b)}{(ax+b)^n} = (ax + b) = f(x)$
Le rapport entre le terme de rang $n + 1$ et le terme de rang n ne dépend pas de n, et est par conséquent constant
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = f(x)$ dont le premier terme est $u_0 = (f(x))^0 = (ax + b)^0 = 1$

Remarque

- *Les suites de puissance de fonctions affines sont des suites géometriques de raison $q = f(x)$. On peut donc les définir par récurrence comme suit :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n \times f(x) \end{array} \right.$$

- *Tous les termes d'une suite de puissance de fonctions affines sont des polynômes. Ce sont donc des suites de poynômes.*
- *Le terme de rang n est un polynôme de degré n. On dit que les suites de puissance de fonctions affines sont de type binominal.*

Propriété 2 *La somme* S_n *des* n *premiers termes d'une suite de puissance de fonctions affines est*

$$S_n = \frac{1 - u_{n+1}}{1 - u_1}$$

Démonstration *Soit* (u_n) *une suite de puissance de fonctions affines.*
(u_n) *est une suite géométrique de raison* $q = f(x) = ax + b$ *donc la somme* S_n *des* n *premiers termes de* (u_n) *est*

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (f(x))^{n+1}}{1 - f(x)} = \frac{1 - (ax + b)^{n+1}}{1 - (ax + b)} = \frac{1 - u_{n+1}}{1 - u_1}$$

Propriété 3 *Pour tout entier naturel* n, u_n *est :*

- n *fois dérivable sur* $\mathbb{R}$
- *continu sur* $\mathbb{R}$
- *admet des primitives sur* $\mathbb{R}$

Démonstration
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (ax + b)^n$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ *est un polynôme.*
donc u_n *est* n *fois dérivable sur* $\mathbb{R}$.
donc u_n *est continu sur* $\mathbb{R}$ *donc* u_n *admet des primitives sur* $\mathbb{R}$

Solutions particulières

Proposition 1 *Soit* (u_n) *une suite de puissance de fonctions affines définie par* $u_n = (ax+b)^n$*.*
Pour tout entier naturel n *non-nul, il existe un unique réel* $\alpha = \frac{-b}{a}$ *solution de l'équation* $u_n = 0$

Démonstration
(u_n) *est une suite de puissance de fonctions affines définie par* $u_n = (ax+b)^n$
$u_1 = ax + b$
Donc $u_1 = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$

Posons $\alpha = \frac{-b}{a}$
Pour $x = \alpha$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (ax+b)^n = (a\alpha + b)^n = (a \times \frac{-b}{a} + b)^n = 0^n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \frac{-b}{a}, u_n = 0$

Montrons l'unicité de α*.*
Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe deux solution à l'équation $u_n = 0$*. Notons ces solutions* α_1 *et* α_2*. On a* $\alpha_1 \neq \alpha_2$*, donc on pose* $\alpha_1 < \alpha_2$*.*

- *Dans le cas où* $a > 0$*,*

$$\alpha_1 < \alpha_2$$
$$\Leftrightarrow a\alpha_1 < a\alpha_2$$
$$\Leftrightarrow a\alpha_1 + b < a\alpha_2 + b$$
$$\Leftrightarrow (a\alpha_1 + b)^n < (a\alpha_2 + b)^n$$

  Or, cela est impossible car α_1 *et* α_2 *sont tous les deux des solutions de l'équation* $(ax+b)^n = 0$*, ce qui implique que* $(a\alpha_1 + b)^n = (a\alpha_2 + b)^n$*.*
  Donc,$\forall a > 0, \exists! \alpha \in \mathbb{R}, u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$*.*

- *Dans le cas où* $a < 0$,

$$\alpha_1 < \alpha_2$$
$$\Leftrightarrow a\alpha_1 > a\alpha_2$$
$$\Leftrightarrow a\alpha_1 + b > a\alpha_2 + b$$
$$\Leftrightarrow (a\alpha_1 + b)^n > (a\alpha_2 + b)^n$$

  Or, cela est impossible car α_1 *et* α_2 *sont tous les deux des solutions de l'équation* $(ax+b)^n = 0$*, ce qui implique que* $(a\alpha_1 + b)^n = (a\alpha_2 + b)^n$.
  Donc,$\forall a < 0, \exists! \alpha \in \mathbb{R}, u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc,$\forall a \in \mathbb{R}, \exists! \alpha \in \mathbb{R}, u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2 *Soit* (u_n) *une suite de puissance de fonctions affines définie par* $u_n = (ax+b)^n$.
Pour tout entier naturel n*, il existe un réel* $\beta = \frac{1-b}{a}$ *solution de l'équation* $u_n = 1$.

Démonstration

- *Pour* $n = 0$:
  $u_0 = (ax+b)^0 = 1$
  Donc l'ensemble solution est $\mathbb{R}$

- *Pour* $a \neq 0$:
  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (ax+b)^n$ *donc* $u_1 = (ax+b)^1 = ax+b$
  $ax + b = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1-b}{a}$
  Posons $\beta = \frac{1-b}{a}$
  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (ax+b)^n$

  Pour $x = \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1$$
$$\Leftrightarrow (ax+b)^n = 1$$
$$\Leftrightarrow (a\beta+b)^n = 1$$
$$\Leftrightarrow (a \times \frac{1-b}{a} + b)^n = 1$$
$$\Leftrightarrow 1^n = 1$$
$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

  Donc $\beta = \frac{1-b}{a}$ *est solution de l'équation* $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Proposition 3 *Soit* (u_n) *une suite de puissance de fonctions affines définie par* $u_n = (ax+b)^n$
Pour tout entier naturel n *non-nul, il existe un réel* $\gamma = -\frac{b+1}{a}$*, tel que:*

- *Si* n *est pair,* γ *est solution de l'équation* $u_n = 1, \gamma \neq \beta$
- *Si* n *est impair,* γ *est l'unique solution de l'équation* $u_n = -1$

Démonstration
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (ax+b)^n$
Donc $u_2 = (ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$
Donc $u_2 = 1 \Leftrightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 - 1 = 0$

Soit Δ *le discriminant de* $a^2x^2 + 2abx + b^2 - 1$.
$\Delta = (2ab)^2 - [4 \times a^2 \times (b^2 - 1)]$
$\Delta = 4a^2b^2 - [4a^2 \times (b^2 - 1)]$
$\Delta = 4a^2b^2 - (4a^2b^2 - 4a^2)$
$\Delta = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4a^2$
$\Delta = 4a^2$

Donc $\Delta > 0$
Donc l'équation $u_n = 1$ *admet deux solutions réelles distinctes. Notons les* x_1 *et* x_2.

$x_1 = \frac{-2ab+\sqrt{4a^2}}{2a^2} = \frac{-2ab+2a}{2a^2} = \frac{2a(1-b)}{2a^2} = \frac{1-b}{a} = \beta$
$x_2 = \frac{-2ab-\sqrt{4a^2}}{2a^2} = \frac{-2ab-2a}{2a^2} = \frac{2a(-1-b)}{2a^2} = \frac{-b-1}{a} = -\frac{b+1}{a}$

Posons $\gamma = \frac{b+1}{a}$.
Pour $x = \gamma$,

- *Dans le cas de* n *pair :*
  $u_n = (ax+b)^n = (a\gamma+b)^n = (a \times \frac{b+1}{a} + b)^n = (-1)^n$
  Or n *est pair,*
  Donc $(a\gamma+b)^n = 1$
- *Dans le cas de* n *impair :*
  $u_n = (ax+b)^n = (a\gamma+b)^n = (a \times \frac{b+1}{a} + b)^n = (-1)^n$
  Or n *est impair,*
  Donc $(a\gamma+b)^n = -1$

Dérivées n-ièmes

Proposition 4 *Soit (u_n) une suite de puissance de fonctions affines définie par $u_n = (ax+b)^n$.*
Pour tout entier naturel n non-nul, la dérivée n-ième du terme u_n est $u_n^{(n)}$ telle que

$$u_n^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} ai$$

Démonstration *Raisonnons par récurrence.*

- ***Initialisation**: Pour $n = 1$,*
  $u_1 = ax + b$
  Donc $u_1^{(1)} = a$

  $\prod_{i=1}^{1} ai = a \times 1 = 1$

  Donc la propriété est initialisée.

- ***Hérédité**: Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_k^{(k)} = \prod_{i=1}^{k} ai$*
  Montrons que $u_{k+1}^{(k+1)} = \prod_{i=1}^{k+1} ai$

  $$u_{k+1} = (ax+b)^{k+1} = a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+...+a_1x^1+a_0x^0 = \sum_{i=1}^{k+1}(a_{k+1-i}\times x^{k+1-i})$$

  Donc $u_{k+1}^{(k+1)} = a_{k+1} \times (k+1)!$
  $= a^{k+1} \times (\prod_{i=1}^{k+1} i)$
  $= (\prod_{i=1}^{k+1} a) \times (\prod_{i=1}^{k+1} i)$
  $= \prod_{i=1}^{k+1} ai$

  Donc la propriété est hérédiataire.

- ***Conclusion****:* *La propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe de récurrence,*

$$u_n^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} ai$$

Proposition 5 *Soit* (u_n) *une suite de puissance de fonctions affines définie par* $u_n = (ax+b)^n$.
Pour tout entier naturel n non-nul, la dérivée n-ième du terme u_n *est* $u_n^{(n)}$ *telle que*

$$u_n^{(n)} = u_{n-1}^{(n-1)} \times an$$

Démonstration
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \neq 0, u_{n-1}^{(n-1)} \times an$
$= \prod_{i=1}^{n-1} ai \times an$
$= a \times 2a \times 3a \times ... \times (n-1)a \times na$
$= \prod_{i=1}^{n} ai = u_n^{(n)}$