# Mathe Übung 2

Nick Daiber

October 29, 2024

## 1

| **P** | **Q** | $\neg P \Rightarrow Q$ | $\neg P \Rightarrow \neg Q$ | $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 2

### 2.1

**Induktionsvorraussetzung**

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

**Induktionsannahme**

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**Induktionsschritt**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^2(n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

## 2.2

**Induktionsvorraussetzung** $x^1 - y^1$ ist von $x - y$ trivial teilbar

**Induktionsannahme** $x^n - y^n$ ist von $x - y$ für ein $n \in \mathbb{N}$ teilbar

**Induktionsschritt**

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1} \\ &= x^n x - xy^n + xy^n - y^n y \\ &= x\underbrace{(x^n - y^n)}_{x-y \text{ teilt}} + \underbrace{y^n(x-y)}_{x-y \text{ teilt}} \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.3

Es wird zunächst bewiesen, dass $n^2 > 2n + 1$ für $n \geq 5$

**Induktionsvorraussetzung** $5^2 = 25 \geq 2 \cdot 5 + 1$

**Induktionsannahme** $n^2 \geq 2n + 1$ gilt für ein $n \geq 5 \in \mathbb{N}$

**Induktionsschritt**

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + n + 1 \\ &\geq 5n + n + 1 = 6n + 1 \\ &> 2n + 3 = 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

Nun wird $2^n > n^2$ bewiesen.

**Induktionsvorraussetzung** $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

**Induktionsannahme** $2^n > n^2$ gilt für ein $n \geq 5 \in \mathbb{N}$

**Induktionsschritt**

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)} &= 2 \cdot 2^n \\ &> 2 \cdot n^2 \\ &> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \blacksquare \end{aligned}$$