Mathe 08

Nick Daiber

December 9, 2024

1

a

i

$$\begin{aligned} (5x-2)^2 &= 4 \\ 25x^2 - 20x + 4 &= 4 \\ 25x^2 - 20x &= 0 \\ x(25x-20) &= 0 \\ x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

ii

$$\begin{aligned} |x-5| &= \frac{1}{4} \\ x_1 - 5 &= \frac{1}{4} & x_2 - 5 &= \frac{1}{4} \\ x_1 &= \frac{21}{4} & x_2 - 5 &= \frac{19}{4} \end{aligned}$$

iii

$$
\begin{aligned}
&|\frac{2x-5}{x-1}| = 4 \\
&\frac{2x_1-5}{x_1-1} = 4 \qquad\qquad && \frac{2x_2-5}{x_2-1} = -4 \\
&2x_1 - 5 = 4x_1 - 4 && 2x_2 - 5 = -4x_2 + 4 \\
&-2x_1 = 1 && 6x_2 = 9 \\
&x_1 = -\frac{1}{2} && x_2 = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

iv

$|2x-3| + |x+1| \geq |2x-3|$

$$
\begin{aligned}
&|2x-3| = 1 \\
&2x_1 - 3 = 1 \qquad\qquad && 2x_2 - 3 = -1 \\
&2x_1 = 4 && 2x_2 = 2 \\
&x_1 = 2 && x_2 = 1
\end{aligned}
$$

Da $|2 \cdot 1.5 - 3| < 1$ ist $|2x-3| > 1$ und $|2x-3| + |x+1| > 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [1, 2]$
$|2x-3| + |x+1| \geq |x+1|$

$$
\begin{aligned}
&|x+1| = 1 \\
&x_1 + 1 = 1 \qquad\qquad && x_2 + 1 = -1 \\
&x_1 = 0 && x_2 = -2
\end{aligned}
$$

Da $|-1+1| < 1$ ist $|x+1| > 1$ und $|2x-3| + |x+1| > 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$
und damit ist $|2x-3| + |x+1| > 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b

i

$|2x-3| \leq 1$ für $x \in [1, 2]$ (siehe a.iv)

ii

$|2x-3| \geq 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus (1, 2)$ (siehe a.iv)

iii

$$
\begin{aligned}
|5-\frac{2}{x}| &= 1 \\
5-\frac{2}{x_1} &= -1 & 5-\frac{2}{x_2} &= 1 \\
\frac{2}{x_1} &= 6 & \frac{2}{x_2} &= 4 \\
x_1 &= \frac{1}{3} & x_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

da $|5-\frac{2}{\frac{5}{12}}| = \frac{1}{5} < 1$ gilt $|5-\frac{2}{x}| < 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus ((\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup 0)$

iv

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 &= 4 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
\Rightarrow x_1 = -1, & x_2 = 3
\end{aligned}
$$

da $(1-1)^2 = 0 < 4$ gilt $(x-1)^2 < 4$ für alle $x \in (-1, 3)$

v

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 2 = 0(x-1)(x+1) & & = 0 \\
x_1 = 1, x_2 = -1
\end{aligned}
$$

da $0^2 - 0 - 2 = -2 \leq 0$ gilt $x^2 - x - 2 \leq 0$ für alle $x \in [-1, 1]$