4. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Priv.-Doz. Dr. A. Degeratu, Dr. E. Chavli, M.Sc. A. Waquet

WiSe 2024/25

*Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum* Votieren *bzw. zum* Vorrechnen *in den Gruppenübungen.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Woche 5 in der Übungsgruppen oder in ILIAS bis spätestens Donnerstag, 14.11.2024, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1. (V) Seien A, B, C nicht-leere Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.
(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
(d) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
(e) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

Aufgabe 2. (V) Zeigen Sie dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m, n, k \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen

(a) $a \equiv b \bmod n \quad \Longrightarrow \quad a^k \equiv b^k \bmod n.$

(b) $a \equiv b \bmod n$ und $m \mid n \quad \Longrightarrow \quad a \equiv b \bmod m.$

(c) $a \equiv b \bmod n \quad \Longleftrightarrow \quad ma \equiv mb \bmod mn.$

(d) $ma \equiv mb \bmod n$ und $\mathrm{ggT}(n, m) = 1 \quad \Longrightarrow \quad a \equiv b \bmod n.$

(Z) Zusätzlicher Teil : Als Anwendung finden Sie die letzten zwei Ziffern von 11^{128}, 11^{256}, 11^{1030} in der üblichen Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl, und ohne einen Computer zu benutzen.

Aufgabe 3. (**S**, 10=3+4+3 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n^2 kongruent zu 0, 1 oder -1 modulo 5 ist.

(b) Finden Sie $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \{0, 1, \ldots, 12\}$ mit $2^{2024} \equiv r_1 \mod 13$, $3^{2024} \equiv r_2 \mod 13$, $5^{2021} \equiv r_3 \mod 13$, $7^{2024} \equiv r_4 \mod 13$, ohne einen Computer zu benutzen.

Hinweis : Zunächst bemerke dass $5^2 = 25 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 13)$ gilt und benutze danach Aufgabe 1 (a) ; analog, $3^3 = 27 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 13)$ etc. Bei 7^{2021} wird es ein bisschen komplizierter.

(c) Finden Sie alle Primzahlen p sodass auch $8p^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 4. (V) Sei $A := \{\overline{1}, \ldots, \overline{9}\}$ wobei $\bar{n}$ die Restklasse von $n \in \mathbb{Z}$ modulo 10 bezeichnet (wie in Beispiel 4.10 der Vorlesung). Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $\{(\overline{n}, \overline{m}) \in A \times A \mid \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{1}\}$

(b) $\{\overline{n} \in A \mid \exists\, \overline{m} \in A : \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{0}\}$.

Aufgabe 5. (V)

(a) Berechnen Sie $\binom{11}{4}$.

(b) Berechnen Sie $(1+\sqrt{5})^5 + (1-\sqrt{5})^5$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von

$$22 \cdot \mathrm{ggT}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-27)^k\, 82^{2n-k}\,, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 187^k\, 209^{n-k} \right).$$

Aufgabe 6. (Z)
(a) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass A abzählbar unendlich ist.

(b) Sei $B := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \mathrm{ggT}(n,m) = 1\}$. Zeigen Sie, dass B abzählbar unendlich ist.
(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $f\colon B \to \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto 2^n 3^m$, und benutzen Sie (a).)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 7. (Z) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (also die Menge *aller* Teilmengen von $\mathbb{N}$) überabzählbar unendlich ist. Zeigen Sie nun, dass die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Suchen Sie im Internet nach " set of finite subsets of N" (oder einem ähnlichen Stichwort); Sie werden viele Ideen dazu finden (auch manche falsche). Suchen Sie sich eine aus, die korrekt ist und Ihnen am besten gefällt, und schreiben Sie das Argument sorgfältig auf.