Übung 1

Nick Daiber

October 22, 2024

1

Aufgabe 1. (V) Ein Mann ist in einem Keller gefangen. Nach einer kurzen Suche findet er drei Türen. Hinter einer der Türen ist ein Weg in die Freiheit. Hinter den anderen zwei Türen ist jedoch ein b¨oser Feuer speiender Drache. An jeder Tür hängt ein Zettel mit einem Hinweis auf ihren Inhalt. Mindestens einer der drei Hinweise ist wahr und mindestens einer von ihnen ist falsch. Die Hinweise lauten: Tür führt in die Freiheit. Tür 2: Es befindet sich ein Drache hinter dieser Tür. Tür 3: Es befindet sich ein Drache hinter der Tür 2. Welche Tür sollte der Mann öffnen, um frei zu kommen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Führe Tür 1 in die Freiheit, dann gilt ① wahr und ① $\Rightarrow$ ① $\land$ ② $\land$ ③
Führe Tür 2 in die Freiheit, dann gilt $\neg$① $\land$ $\neg$② $\land$ $\neg$③
Führe Tür 3 in die Freiheit, dann gilt $\neg$① $\land$ ② $\land$ ③
Da mindestens eine Aussage falsch und eine wahr sein muss, können fallen Tür 1,2 weg.

2

A:= Anna hat die Prüfung bestanden.
B:= Britta hat die Prüfung bestanden.
C:= Carlo hat die Prüfung bestanden.

2.1

$C \land \neg A \land \neg B$

2.2

$\neg A \land B \land C$

2.3

$(A \land \neg B \land \neg C) \lor (B \land \neg A \land \neg C) \lor (C \land \neg A \land \neg B)$

2.4

$A \vee B \vee C$

2.5

$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

2.6

$\neg(A \wedge B \wedge C)$

2.7

$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C \wedge \neg A) \vee (A \wedge C \wedge \neg B)$

3

3.1

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= (\{z \in X | z \in A \vee z \in B\})^C \\
&= X \setminus \{z \in X | z \in A \vee z \in B\} \\
&= \{y \in X | y \notin \{z \in X | z \in A \vee z \in B\}\} \\
&= \{y \in X | y \notin A \wedge y \notin B\} \\
&= \{y \in X | y \in \{z \in X | z \notin A\} \wedge y \in \{z \in X | \notin B\}\} \\
&= \{y \in X | y \notin A\} \cap \{y \in X | y \notin B\} \\
&= A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

3.2

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)^c &= X \setminus \{z \in X | z \in A \wedge z \in B\} \\
&= \{y \in X | y \notin \{z \in X | z \in A \wedge z \in B\}\} \\
&= \{y \in X | y \notin A \vee y \notin B\} \\
&= \{y \in X | y \in \{z \in X | \notin A\} \vee y \in \{z \in X | z \notin B\}\} \\
&= A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

4

4.1

$A = \mathbb{Z} \setminus \{7\}$
$B = \{-2, 2, -3, 3, -5, 5, -7, 7, -11, 11, -13, 13, -17, 17, -19, 19, -23, 23, -29, 29, -31, 31\}$

$C = (-35, 35)$
$Seia^3 := x, b = 0$, dann ist $a^3 - b^3 = x$

4.2

$A \cap B = B \setminus \{7\}$
$A \cup B = \mathbb{Z}$
$A \cap B \cap C = B \setminus \{7\}$

4.3

Sei $I := [a; b]$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, (a > 7 \vee b < 7) \wedge b > a \Rightarrow [a; b] \subset A \wedge \emptyset \subset [a; b]$
Mit $c := \frac{b-a}{10}$ definieren wir $A_0 = \{a + 0 \cdot c, a + 1 \cdot c, a + 2 \cdot c, \ldots, a + 10 \cdot c\}$
Da es unendlich $a < 7$ und $b > 7$ gibt, gibt es unendlich Teilmengen von A und unendlich Teilmengen von A mit genau 11 Elementen.

4.4

1. Ja, $\frac{12}{1-7} = -6 \in \mathbb{Z}$
2. Nein, da 1 keine Primzahl ist
3. Ja, da $2, 3 \in (-35, 35)$
4. Nein, da $B \subset C$
5. Nein, C ist Überabzählbar unendlich
6. Nein, $A \setminus B$ ist Überabzählbar unendlich
7. Ja, $\emptyset \cup C = C$
8. Nein, $A \cap C = (-35, 35) \setminus \{7\}$
9. Nein, $B \cap C = B$
10. Nein, $A \cup C = \mathbb{Z}$