Mathe 03

Nick Daiber

November 7, 2024

2

a

Reflexivität

$$\begin{aligned} &a = (n, m) \\ &nm = nm \\ &\Leftrightarrow (n, m) \sim (n, m) \\ &\Leftrightarrow a \sim a \end{aligned}$$

Symmetrie

$$\begin{aligned} &a \sim b \\ &\Leftrightarrow (n, m) \sim (x, y) \\ &\Leftrightarrow ny = xm \\ &\Leftarrow mx = ny \\ &\Leftrightarrow (x, y) \sim (n, m) \\ &\Leftrightarrow b \sim a \end{aligned}$$

Transitivität

Sei $a \sim b$ und $b \sim c$
dann gilt

$$n_a m_b = n_b m_a \Leftrightarrow n_b = \frac{n_a m_b}{m_a} \tag{1}$$

$$n_b m_c = n_c m_b \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &n_b m_c \overset{(1)}{=} \frac{n_a m_b m_c}{m_a} \overset{(2)}{=} n_c m_b \\ &\Leftrightarrow n_a m_c = n_c m_a \\ &\Leftrightarrow a \sim c \end{aligned}$$

■

b

Sei $a := (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ beliebig. Man nehme an, es existiert kein ungekürztes paar in $K(a, R)$
Wähle $(x, y) \in K(a, R)$ beliebig, es gilt also

$$\begin{aligned}
&(n, m) \sim (x, y) \\
&\Leftrightarrow ny = xm \text{ da x,y nach Annahme nicht Teilerfremd} \\
&\Leftrightarrow n(ky') = (kx')m \\
&\Leftrightarrow k(ny') = k(x'm) \\
&\Leftrightarrow ny' = x'm \\
&\Leftrightarrow (n, m) \sim (x', y')
\end{aligned}$$

Sind x', y' immernoch nicht Teilerfremd, so wiederhole man bis sie es sind. Da $a \sim (x', y') \in A$ ist $(x', y') \in K(a, R)$ ist ein Widerspruch zur Annahme ■

c

Zunächst wird gezeigt, dass es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $a \sim b$ gibt.
Sei $a \in A beliebig$ so ist a entweder gekürzt und $a \sim a \in B$ oder $a := (kn, km)$, mit $k = \text{ggT}(n, m)$.
dann gilt $knm = nkm$ also $a \sim (n, m) \in B$. Als nächstes wird gezeigt, dass es genau ein $b \in B$ gibt mit $a \sim b$. Dafür wird angenommen, dass Elemente aus B mit a in relation stehen.
Wähle $a \in A$ beliebig und $b := (n, m), b' := (x, y) \in B$ mit $a \sim b$ und $a \sim b'$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow b \sim b' \\
\Leftrightarrow nx = my \\
\Leftrightarrow n, x, m, y | nx
\end{aligned}$$

Da n, m und x, y Teilerfremd sind, gilt $(n, m) = (x, y)$. Es gibt also nur ein $b \in B$, das mit a in relation steht ■