Mathe Übung 2

Nick Daiber

October 29, 2024

1

P	**Q**	$\neg P \Rightarrow Q$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

2

2.1

Induktionsvorraussetzung

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Induktionsannahme

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^2(n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

2.2

Induktionsvorraussetzung $x^1 - y^1$ ist von $x - y$ trivial teilbar

Induktionsannahme $x^n - y^n$ ist von $x - y$ für ein $n \in \mathbb{N}$ teilbar

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1} \\ &= x^n x - xy^n + xy^n - y^n y \\ &= x \underbrace{(x^n - y^n)}_{x-y \text{ teilt}} + \underbrace{y^n (x - y)}_{x-y \text{ teilt}} \blacksquare \end{aligned}$$

2.3

Es wird zunächst bewiesen, dass $n^2 > 2n + 1$ für $n \geq 5$

Induktionsvorraussetzung $5^2 = 25 \geq 2 \cdot 5 + 1$

Induktionsannahme $n^2 \geq 2n + 1$ gilt für ein $n \geq 5 \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + n + 1 \\ &\geq 5n + n + 1 = 6n + 1 \\ &> 2n + 3 = 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

Nun wird $2^n > n^2$ bewiesen.

Induktionsvorraussetzung $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

Induktionsannahme $2^n > n^2$ gilt für ein $n \geq 5 \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)} &= 2 \cdot 2^n \\ &> 2 \cdot n^2 \\ &> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \blacksquare \end{aligned}$$

3

4

5

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 29 = 1 \cdot 17 + 12 \\
r_1 &= 17 = 1 \cdot 12 + 5 \\
r_2 &= 12 = 2 \cdot 5 + 2 \\
r_3 &= 5 = 2 \cdot 2 + 1 \\
r_4 &= 2 = 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 713 = 1 \cdot 552 + 161 \\
r_1 &= 552 = 3 \cdot 161 + 69 \\
r_2 &= 161 = 2 \cdot 69 + 23 \\
r_3 &= 69 = 3 \cdot 23 + 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 11253 = 4 \cdot 2607 + 825 \\
r_1 &= 2607 = 3 \cdot 825 + 132 \\
r_2 &= 825 = 6 \cdot 132 + 33 \\
r_3 &= 132 = 4 \cdot 33 + 0
\end{aligned}
$$