2. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Priv.-Doz. Dr. A. Degeratu, Dr. E. Chavli, M.Sc. A. Waquet

WiSe 2024/25

*Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum* Votieren *bzw. zum* Vorrechnen *in den Gruppenübungen.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Woche 3 in der Übungsgruppen oder in ILIAS bis spätestens Donnerstag, 31.10.2024, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1. (V) Seien P und Q Aussagen.

Zeigen sie mit Hilfe der entsprechenden Wahrheitstabelle, dass die folgende Verknüpfung immer wahr ist:

$$\big(((\neg P) \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))\big) \Rightarrow P.$$

(Bemerkung: Diese bildet die Grundlage des Widerspruchsbeweises. Wir wollen zeigen, dass P wahr ist. Nehmen wir an, dass P falsch ist, und betrachten eine weitere Aussage Q. Wenn wir dann sowohl Q als auch $\neg Q$ als wahr herleiten können, haben wir einen Widerspruch produziert. Also war die Annahme falsch, d.h., P ist wahr.)

Aufgabe 2. (**S**, 9 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq y$ ist $x - y$ ein Teiler von $x^n - y^n$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 5 ein Teiler von $2^{3n} - 3^n$.
Hinweis: $x^{n+1} - y^{n+1} = x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1}$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.

Aufgabe 3. (V) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{3}{4}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 8$ existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 3a + 5b$.

Aufgabe 4. (V) Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ die Fakultät von n. (Zum Beispiel: $1! = 1$, $3! = 6$.) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Primzahl p gibt mit $n < p < n!$. (*Hinweis :* Betrachten Sie die Primzahlzerlegung von $n! - 1$.) Schließen Sie damit, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 5. (V) Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare (a, b) natürlicher Zahlen ihren ggT sowie ganze Zahlen s, t mit $\mathrm{ggT}(a, b) = sa + tb$: **(i)** $a = 17$, $b = 29$, **(ii)** $a = 552$, $b = 713$, **(iii)** $a = 11253$, $b = 2607$.

Aufgabe 6. (Z) Jedes Jahr gibt es eine bestimmte Anzahl von gesetzlichen Feiertagen (die teilweise vom Bundesland abhängen). Einige davon fallen immer auf das gleiche Datum (Beispiel: 1. Mai), bei anderen wechselt das Datum. Ein Beispiel für Letzteres ist das Osterdatum, also das Datum des Ostersonntags. Dazu gibt es eine lange Geschichte (siehe etwa den entsprechenden wikipedia-Artikel), und tatsächlich haben sich Mathematiker darum bemüht, Formeln für die Berechnung des Osterdatums aufzustellen: dabei geht wesentlich der "mod" Operator ein!

Schauen Sie sich die Gaußsche Osterformel an, siehe

`https://de.wikipedia.org/wiki/Gaußsche_Osterformel`

und berechnen Sie damit das Osterdatum für Ihr Geburtsjahr.

Aufgabe 7. (Z) Wir zeigen mit vollständiger Induktion: *Alle natürlichen Zahlen sind gleich.*

Beweis. Für $a, b \in \mathbb{N}$ definieren wir dazu $\max(a, b)$ als das Maximum von a, b. (Zum Beispiel ist $\max(2, 5) = 5$ und $\max(3, 3) = 3$.) Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $a = b$ mit Induktion nach $n = \max(a, b)$. Induktionsanfang: Ist $n = \max(a, b) = 1$, so folgt $a = b = 1$, also gilt die Behauptung. Nun zum Induktionsschritt. Sei $n \geq 1$ und angenommen, die Behauptung gilt für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $n = \max(a, b)$. Seien nun $a', b' \in \mathbb{N}$ mit $\max(a', b') = n + 1$. Dann ist $\max(a' - 1, b' - 1) = n$, also nach Induktionsannahme $a' - 1 = b' - 1$ und damit auch $a' = b'$. $\square$

Die Aussage ist offenbar nicht richtig, aber wo liegt der Fehler im obigen Beweis?