

Theoretische Informatik III Übung 1

Denise Rappold, Elias Allert, Nick Daiber

October 25, 2024

1

1.1

Nach Annahme gilt

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} &=: A < \infty \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) &< \infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} &=: B < \infty \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(g)}{g(h)}\right) &< \infty\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(g)}{g(h)}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) \cdot \sup\left(\frac{g(n)}{h(n)}\right) = A \cdot B \\&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)}\right) \leq A \cdot B \\&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\left(\frac{f(n)}{h(n)}\right) \leq A \cdot B < \infty \\&\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} < \infty \\&\quad f \in O(h) \blacksquare\end{aligned}$$

1.2

Nach Annahme gilt

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(n)}{g_1(n)} &< \infty \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{f_1(n)}{g_1(n)} \right) &< \infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(n)}{g_2(n)} &< \infty \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{f_2(n)}{g_2(n)} \right) &< \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\infty &> \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{f_1}{g_1} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{f_2}{g_2} \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1 \cdot f_2}{g_1 \cdot g_2} < \infty \\ \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2 &\in O(g_1 \cdot g_2) \blacksquare\end{aligned}$$