IPVS – Universität Stuttgart
Abteilung Scientific Computing
Prof. Dirk Pflüger
Stefan Zimmer

WS 2024/25

Statistische & Stochastische Grundlagen der Informatik
Übungsblatt 1

Abgabe (Aufgaben 1.3 – 1.9) in Dreiergruppen bis Dienstag 05.11., 14:00
Von den 26 möglichen Punkten müssen Sie wenigstens 13 erreichen.
Besprechung in den Übungen 07.11.–15.11.

Aufgaben zu den Videos für den 14.10.

Wenn wir für ein Zufallsexperiment wissen wollen, was da im Mittel rauskommt, uns aber nicht in Wahrscheinlichkeitsrechnungen stürzen wollen, können wir das Experiment im Rechner nachbauen, es sehr oft durchführen lassen und zählen. Die in diesen Aufgaben gefragten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte werden wir auch noch direkt ausrechnen – aber auch dann ist die Simulation ein nützliches Hilfsmittel, z.B., um die errechnete Lösung zu kontrollieren.
Und man kann diese Aufgaben auch nutzen, um Python zu lernen – um Zufallszahlen zu erzeugen, dürfte aus der Python-Standardbibliothek das Modul `random` hilfreich sein, hier speziell z.B. `random.randrange`.

1.1 Betrunkene Seeleute (keine Abgabe)

An einem Abend torkeln n betrunkene Seeleute in ihre Unterkunft. Unfähig, ihr eigenes Bett zu identifizieren, aber noch in der Lage, ein belegtes Bett zu vermeiden, legt sich jeder zufällig in eins der n Betten, so dass in jedem Bett genau eine Person liegt.
Nun zählen wir, wie viele Seeleute im richtigen Bett liegen (dass jemand zufällig das eigene Bett trifft, ist ja nicht ausgeschlossen).
Simulieren sie diesen Abend (das Heimkommen, nicht das Trinken)!
Lassen Sie die Seeleute sehr oft heimkommen und zählen Sie (d.h. lassen Sie Ihr Programm zählen), wie viele Seeleute im Mittel im richtigen Bett liegen. Probieren Sie das für verschiedene Werte von n aus.

1.2 Sammelbilder (keine Abgabe)

In der guten alten Zeit (die im Sinne dieser Aufgabe 2014 endete) lagen vor einer Fußball-EM oder WM jedem Schokoriegel einer bestimmte Marke eins von n Bildern unserer Nationalspieler bei (bei der WM 2014 war $n = 63$; wir gehen davon aus, dass der Hersteller fair war, so dass die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Bild in einem bestimmten Schokoriegel immer $1/n$ ist).
Der Hersteller hätte gerne, dass Sie so lange seine Schokoriegel essen (zumindest kaufen und dabei nicht versuchen, durch das Papier hindurch das Foto zu identifizieren), bis Sie eine komplette Sammlung von n verschiedenen Bildern zusammen haben.

Auch hier sollen Sie wieder simulieren: Lassen Sie sehr viele Leute Sammlungen anlegen (jeder für sich: ohne zu tauschen) und protokollieren Sie, wie viele Schokoriegel dabei verbraucht werden.
Berechnen Sie durch Mitteln über hinreichend viele Wiederholungen eine Näherung für die Zahl der Schokoriegel, die man für eine komplette Sammlung mit $n = 63$ Bildern braucht.
Außer der mittleren Gesamtzahl pro Sammlung sind auch für $0 \leq i < n$ die Zahl von Schokoriegeln interessant, die man im Mittel braucht, um seine Sammlung von i auf $i+1$ verschiedene Bilder zu erweitern.
Machen Sie dazu mit $n = 10$ und wiederum Mitteln über hinreichend viele Wiederholungen eine Tabelle (Zeilen für $i = 0, \ldots 9$), mit diesen Ergebnissen. Können Sie in dieser Tabelle eine Gesetzmäßigkeit entdecken?

Aufgaben zu den Videos für den 15.10. und 21.10.

1.3 Ikosaeder werfen (3 Punkte)

Ein Ikosaeder, dessen Flächen von 1 bis 20 numeriert sind, wird *zweimal* geworfen.

a) Geben Sie einen geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ für dieses Zufallsexperiment an.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse $A, \ldots, E$ an:

- A: Bei dem **ersten** Wurf wird eine 6 gewürfelt
- B: Bei **beiden** Würfen wird eine 6 gewürfelt
- C: Bei **mindestens einem** der Würfe wird eine 6 gewürfelt
- D: Bei **genau einem** der Würfe wird eine 6 gewürfelt
- E: Die **Augensumme** aus beiden Würfen ist kleiner oder gleich vier.

1.4 Betrunkene Seeleute: Verteilung (3 Punkte)

Drei betrunkene Seeleute kommen nach Hause und verhalten sich so, wie wir das aus Aufgabe 1.1 kennen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Zahl der Seeleute, die dabei im richtigen Bett zu liegen kommen.
Zeichnen Sie (solange nicht explizit anders verlangt, kann „zeichnen" von Hand oder mit dem Rechner passieren, ganz wie Sie wollen) die Verteilung als Stabdiagramm und die Verteilungsfunktion F^X von X.

Aufgaben zu den Videos für den 22.10.

1.5 Erwartungswert (3 Punkte)

Beim Würfeln mit einem fairen Würfel werde die Zufallsvariable

$$X : k \mapsto (k-3)^2$$

betrachtet, wobei k die gewürfelte Augenzahl bezeichne (also $k \in \{1, \ldots, 6\}$) .

a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F^X von X.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X und die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}(X)).$$

1.6 Würfelmaximum (4 Punkte)

Ein „Würfel“ mit n Seiten und der Beschriftung $\{1, \ldots, n\}$ wird k-mal geworfen, es liege ein Laplace-Experiment auf $\Omega = \{1, \ldots, n\}^k$ vor.
Die Zufallsvariable M bezeichne die größte gewürfelte Augenzahl.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F^M(m)$, $m \in \mathbb{R}$, (als Ausdruck in n, k und m) und zeichnen Sie sie für $n = 6$ und $k = 10$.

   Dazu ist es keineswegs nötig, zuerst die Verteilung zu bestimmen: Hier ist die Verteilungsfunktion mal einfacher zu bestimmen als die Verteilung.

b) Es sei X eine Zufallsvariable, die Werte in $\{1, \ldots, n\}$ annehmen kann. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von X gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq m).$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe von b) den Erwartungswert von M (allgemeines n und k – eine Vereinfachung der Summe der Potenzen am Ende ist nicht gefordert).

Aufgaben zu den Videos für den 28.10.

1.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit (3 Punkte)

a) Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$.

   Unter welchen Bedingungen ist $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$?

b) Für eine Krankheit, an der jeder 1000. der untersuchten Gruppe leidet, gibt es einen recht zuverlässigen Test. Dieser Test liefert bei einem Betroffenen nur in 1% der Fälle ein negatives und bei einem nicht Betroffenen nur in 1% der Fälle ein positives Ergebnis.

   (i) Geben Sie die genannte Zuverlässigkeit als bedingte Wahrscheinlichkeiten in den Ereignissen „krank“, „gesund“, „Test positiv“ und „Test negativ“ an.

   (ii) Berechnen Sie mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig herausgegriffenen Probanden der Test positiv ausfällt.

   (iii) Berechnen Sie mittels der Formel von Bayes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffener Proband, bei dem der Test positiv ausfällt, von der Krankheit betroffen ist.

1.8 Unabhängigkeit (5 Punkte)

a) Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ der endlicher W-Raum mit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{15}$, $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{2}{15}$, $\mathbb{P}(\{c\}) = \frac{4}{15}$.

   Bestimmen Sie alle Ereignisse $B \subset \Omega$, so dass $A := \{a, b\}$ und B unabhängig sind.

Nun sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein beliebiger endlicher W-Raum und $A, B, C \subset \Omega$ beliebige Ereignisse darin.

b) Es seien $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A \cap B)$ bekannt. Berechnen Sie damit die folgenden Wahrscheinlichkeiten (Begründungen nicht vergessen!):

   (i) $\mathbb{P}(A \cup B)$

   (ii) $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$

c) Es seien A und B unabhängig. Zeigen Sie, dass auch $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig sind.

d) Es seien A, B, C unabhängig. Zeigen Sie, dass auch $A \cup B$ und C unabhängig sind.

1.9 Binomialverteilung (6 Punkte)

a) Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und binomialverteilt: $X \sim \mathrm{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}\left(2, \frac{3}{4}\right)$.

   (i) Erstellen Sie eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ und $\mathbb{P}(Y = k)$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

   (ii) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von Y und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F^Y.

   (iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = Y)$.

b) Und jetzt lassen wir zwei Teams zum Elfmeterschießen antreten: Jedes Team hat n Versuche, die Versuche seien unabhängige Bernoulli-Experimente mit Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsvariablen X bzw. Y zählen die Erfolge des ersten bzw. zweiten Teams, X und Y seien also unabhängig und $\mathrm{Bin}(n, p)$-binomialverteilt.

   Schreiben Sie ein Programm, das die Verteilung der Tordifferenz $Z := X - Y$ berechnet! (Berechnet, also nicht durch Simulation approximiert.)

   Hier gilt mal wieder: Der Weg (also das Herumspielen mit dem Programm) ist das Ziel! Lehrreich (weit über das Thema „Binomialverteilung" hinaus) ist z.B., das Programm zweimal zu implementieren, wobei einmal als Ergebnisse die Trefferzahlen der Teams verwendet werden (also z.B. $2 : 3$), und einmal die komplette Historie, also $2n$ Wahrheitswerte „Treffer/kein Treffer" – der arme Rechner muss dann einen wesentlichen Teil der Herleitung der Binomialverteilung für uns nach mal machen...

   Python-technisch kann man hier das Rechnen mit Brüchen üben, aber rechnen mit Gleitpunktzahlen ist auch OK.

   Ach ja, irgendeine Abgabe sollte ich noch definieren – also: Geben Sie halt für $n = 5$ und $p = 3/4$ die Verteilung von Z ab. (Für $n = 2$ und $p = 1/2$ ginge es im Kopf: $\mathbb{P}(Z = -2) = \mathbb{P}(Z = 2) = 1/16$, $\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = 1/4$, $\mathbb{P}(Z = 0) = 3/8$.)