

Mathe 04

Nick Daiber

November 8, 2024

3

b

Induktions Anfang

ist $n = 1$, so gilt $n^2 = 1 \equiv 1 \pmod{5}$
ist $n = 2$, so gilt $n^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$
ist $n = 3$, so gilt $n^2 = 9 \equiv -1 \pmod{5}$
ist $n = 4$, so gilt $n^2 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$
ist $n = 5$, so gilt $n^2 = 25 \equiv 0 \pmod{5}$

Induktions Schritt

$(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25 \equiv n^2 \pmod{5} \equiv \{-1, 0, 1\} \pmod{5}$
Da \equiv nach 4.5 transitiv ist.

b

2^{2024}

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16 \equiv 3 \pmod{13} \\ 2^{2024} \pmod{13} &= (2^4)^{506} \pmod{13} \\ &= \overline{3^{506}} \\ &= \overline{(3 \cdot 3 \cdot 3)^{168} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \overline{1^{168} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= 1 = r_1 \end{aligned}$$

3^{2024}

$$\begin{aligned} 3^{2024} \pmod{13} &= \overline{3^{2024}} \\ &= \overline{(3 \cdot 3 \cdot 3)^{674} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \overline{1^{674} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= 9 = r_2 \end{aligned}$$

$$5^{2021}$$

$$\begin{aligned} 5^{2021} \mod 13 &= (5^{2020} \cdot 5) \mod 13 \\ &= \overline{-1^{1010}} \cdot 5 \\ &= 1 \cdot 5 = 5 = r_3 \end{aligned}$$

$$7^{2024}$$

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \equiv 5 \pmod{13} \\ 7^{2024} \mod 13 &= (7^{2021} \cdot 49) \mod 13 \\ &= \overline{5^{674}} \cdot 49 \\ &= \overline{-1^{337}} \cdot 49 \\ &= \overline{-1} \cdot 49 \\ &= 3 = r_4 \end{aligned}$$

c

Sei p eine ungerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned} p &\equiv 1 \pmod{2} \\ \Rightarrow p^2 &\equiv 1 \pmod{2} \\ \Rightarrow 8p^2 &\equiv 1 \pmod{2} \\ \Rightarrow 8p^2 + 1 &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Also gilt $2 \mid (8p^2 + 1)$, wenn p ungerade ist, also ist $(8p^2 + 1)$ auch keine Primzahl.

$8 \cdot 2^2 + 1 = 33$ ist eine Primzahl und da 2 die einzige gerade Primzahl ist, gilt $(8p^2 + 1)$ nur für 2. ■