Mathe 04

Nick Daiber

November 14, 2024

3

b

Induktionsannahme

Wir zeigen die Identität zunächst für $n \in \{k \in \mathbb{N} | k \equiv 1 (\mod 5)\}$ ist $n = 1$, so gilt $n^2 = 1 \equiv 1 \mod 5$

Induktions Schritt

$(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25 \equiv n^2 (\mod 5), n^2 \equiv 1 (\mod 5)$
Da $\equiv$ nach 4.5 transitiv ist.

Induktionsannahme

Danach für $n \in \{k \in \mathbb{N} | k \equiv 2 (\mod 5)\}$ ist $n = 2$, so gilt $n^2 = 4 \equiv -1 \mod 5$

Induktions Schritt

$(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25 \equiv n^2 (\mod 5), n^2 \equiv 2 (\mod 5)$
Da $\equiv$ nach 4.5 transitiv ist.

Induktionsannahme

für $n \in \{k \in \mathbb{N} | k \equiv 3 (\mod 5)\}$ ist $n = 3$, so gilt $n^2 = 9 \equiv -1 \mod 5$

Induktions Schritt

$(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25 \equiv n^2 (\mod 5), n^2 \equiv 3 (\mod 5)$
Da $\equiv$ nach 4.5 transitiv ist.

Induktionsannahme

für $n \in \{k \in \mathbb{N} | k \equiv 4 (\mod 5)\}$ ist $n = 4$, so gilt $n^2 = 16 \equiv 1 \mod 5$

Induktions Schritt
$(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25 \equiv n^2 (\mod 5), n^2 \equiv 4 (\mod 5)$
Da $\equiv$ nach 4.5 transitiv ist.

Induktionsannahme
für $n \in \{k \in \mathbb{N} | k \equiv 0 (\mod 5)\}$ ist $n = 5$, so gilt $n^2 = 25 \equiv 0 \mod 5$

Induktions Schritt
$(n+5)^2 = n^2 + 10n + 25 \equiv n^2 (\mod 5), n^2 \equiv 0 (\mod 5)$
Da $\equiv$ nach 4.5 transitiv ist.

b

2^{2024}

$$\begin{aligned} 2^4 = 16 &\equiv 3 \mod 13 \\ 2^{2024} \mod 13 &= (2^4)^{506} \mod 13 \\ &= \overline{3}^{506} \\ &= \overline{(3 \cdot 3 \cdot 3)^{168} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \overline{1^{168} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= 1 = r_1 \end{aligned}$$

3^{2024}

$$\begin{aligned} 3^{2024} \mod 13 &= \overline{3^{2024}} \\ &= \overline{(3 \cdot 3 \cdot 3)^{674} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \overline{1^{674} \cdot 3 \cdot 3} \\ &= 9 = r_2 \end{aligned}$$

5^{2021}

$$\begin{aligned} 5^{2021} \mod 13 &= (5^{2020} \cdot 5) \mod 13 \\ &= \overline{-1^{1010}} \cdot 5 \\ &= 1 \cdot 5 = 5 = r_3 \end{aligned}$$

7^{2024}

$$\begin{aligned} 7^3 = 343 &\equiv 5(\mod 13) \\ 7^{2024} \mod 13 &= (7^{2021} \cdot 49) \mod 13 \\ &= \overline{5^{674}} \cdot 49 \\ &= \overline{-1^{337}} \cdot 49 \\ &= \overline{-1} \cdot 49 \\ &= 3 = r_4 \end{aligned}$$

c

Sei p eine ungerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned} p &\equiv 1(\mod 2) \\ \Rightarrow p^2 &\equiv 1(\mod 2) \\ \Rightarrow 8p^2 &\equiv 1(\mod 2) \\ \Rightarrow 8p^2 + 1 &\equiv 0(\mod 2) \end{aligned}$$

Also gilt $2|(8p^2+1)$, wenn p ungerade ist, also ist $(8p^2+1)$ auch keine Primzahl.

$8 \cdot 2^2 + 1 = 33$ ist eine Primzahl und da 2 die einzige gerade Primzahl ist, gilt $(8p^2 + 1)$ nur für 2.$\blacksquare$