
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Информатика
Лабораторная работа № 6

Выполнил студент
Хоанг Тхе Вьет
Группа: № Р3132
Преподаватель: Белокон Юлия Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2024

задачник кванта

клеток $mn/2$ костями домино (прямоугольниками 1×2 клетки, разумеется; мы считаем одно из чисел m и n чётным).

- а) Докажите, что $p_{2,n} = f_n$ - последовательность, задаваемая соотношением $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$; $f_1 = 1, f_2 = 2$ (последовательность Фибоначчи).
 Б)* Докажите, что (для чётных n) верны оценки

$$(3/2)^{n^2/2} < p_{n,n} < 2^{n^2/2}$$



Рисунок 1

прямоугольника $2n$ можно добавить справа вертикальные домино, к любому покрытию прямоугольника $2(n-1)$ - два горизонтальных домино, и этим способом получаются по разу все покрытия прямоугольника $2(n+1)$. Отсюда $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Равенства $f_1 = 1, f_2 = 2$ очевидны. Несколько следующих значений f_n приведены в таблице на полях.

Числа этой последовательности - числа Фибоначчи - встречаются в самых разнообразных задачах комбинаторики, геометрии, анализа. Для них можно написать явные формулы, выразив f_n в виде суммы двух геометрических прогрессий:

$$f_n = b_1 q_1^n + b_2 q_2^n$$

где q_1, q_2 - корни уравнения $q^2 = q + 1$ (т.е. $q_i = (1 \pm \sqrt{5})/2$) а b_i определяются начальными условиями $f_0 = f_1 = 1$; в результате получаем формулу Бинэ:

$$f_n = (q_1^{n+1} - q_2^{n+1})/\sqrt{5}$$

Поскольку $|q_2| < 1$, при больших n получаем $f_n \approx Bq_1^n$, где $q_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,61803\dots$; B - константа,

$$B = (1 + \sqrt{5})/(2\sqrt{5})$$

Для решения задачи Б) удобно использовать оценку $f_n > (3/2)^n$, верную при $n \geq 5$. Её легко доказать по индукции: $f_5 = 8 > (3/2)^5 = 243/32$, $f_6 = 13 > (3/2)^6 = 729/64$; если $f_{n-1} > (3/2)^{n-1}$ и $f_n > (3/2)^n$, то

$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > (3/2)^{n-1}(3/2 + 1) > (3/2)^{n+1}$, поскольку $(3/2) + 1 = 5/2 > 9/4$.

В задаче Б) левое неравенство (оценку снизу)

для $n = 4$ можно проверить непосредственно:

$p_{4,4} = 36$ (это - 25 = 5.5 покрытий двух горизонтальных прямоугольников 2×4 , и ещё 11 покрытий, а $(3/2)^8 < 32 < 36$, поскольку $3^5 < 2^8$, $3^3 < 2^5$).

Для $n \geq 6$ оценку снизу можно получить, рассмотреть лишь покрытия $n/2$

горизонтальных полосок $2n$ клеток: поскольку $f_n > (3/2)^n$, то

$$p_{n,n} > (f_n)^{n/2} > (3/2)^{n^2/2}$$

.

n	F _n
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
...	...

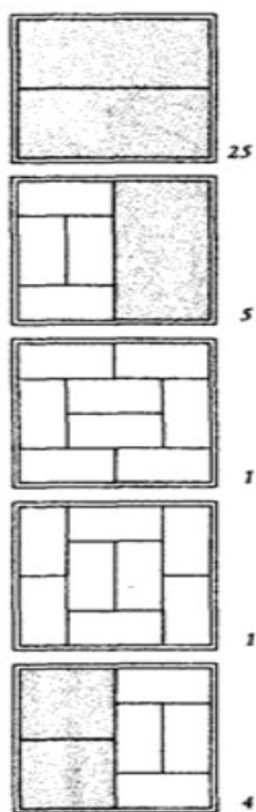
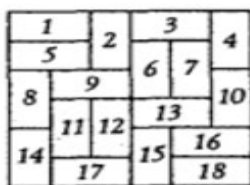


Рисунок 3



1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16

Рисунок 4

Ф1368. Велосипедное колесо радиусом $R = 50\text{ см}$ немного деформировали - оно осталось полуским, но превратилось в эллипс с разностью полуосей $\Theta = a - b = 1\text{ см}$. При какой скорости качения этого колеса по горизонтальной поверхности оно начнёт подпрыгивать?