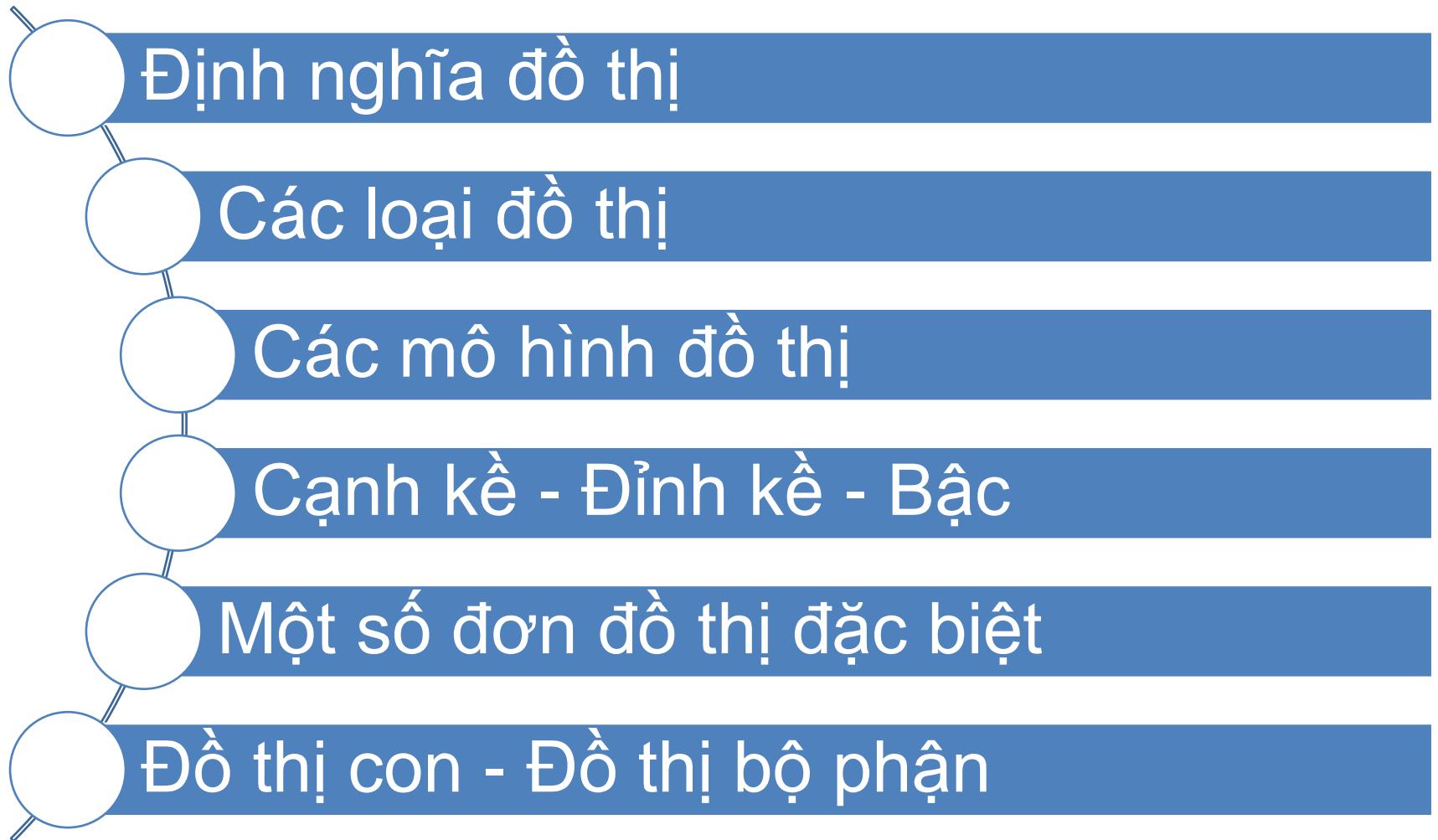


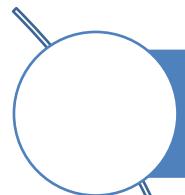
02. ĐẠI CƯƠNG LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Bài giảng Lý thuyết đồ thị

Nội dung



Nội dung



Đồ thị đẳng cấu



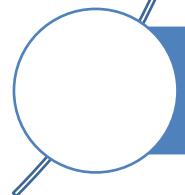
Biểu diễn đồ thị



Đường đi – Chu trình



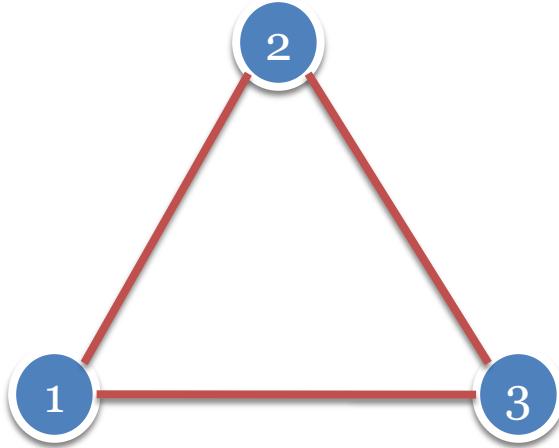
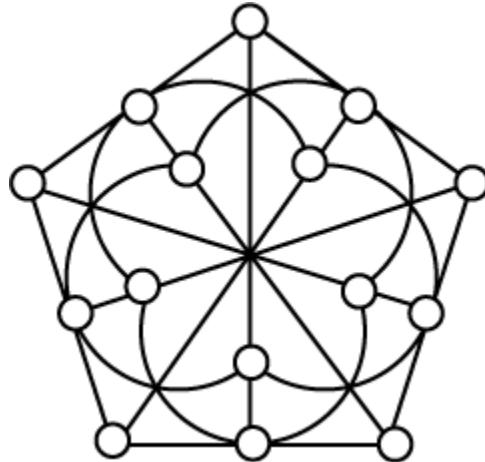
Liên thông



Các phép duyệt đồ thị

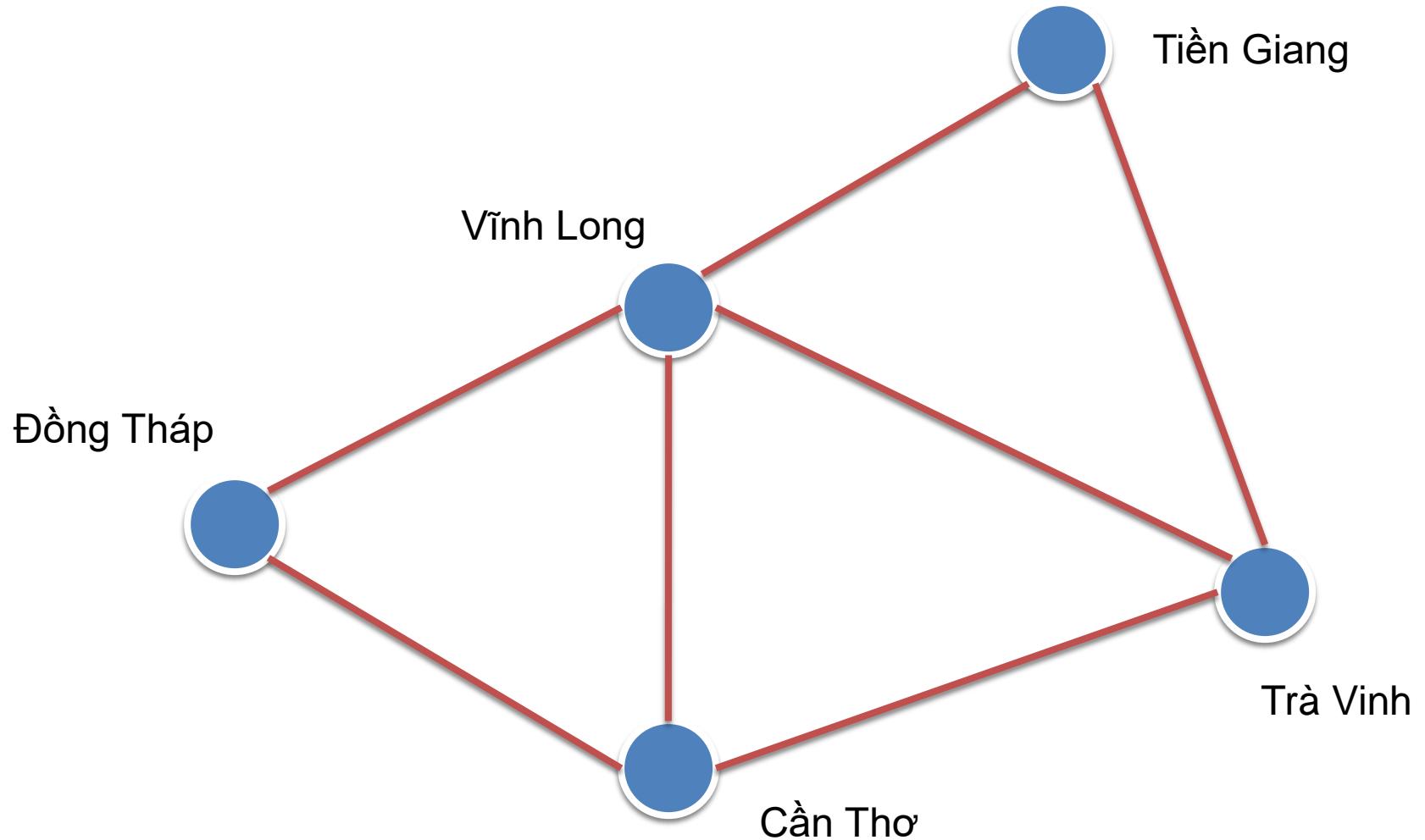
Định nghĩa

- **Đồ thị (graph)** là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó.
- Đồ thị được ký hiệu là $G = (V, E)$, trong đó:
 - V là tập **đỉnh (vertex)**,
 - $E \subseteq V \times V$ là tập hợp các **cạnh (edge)**.



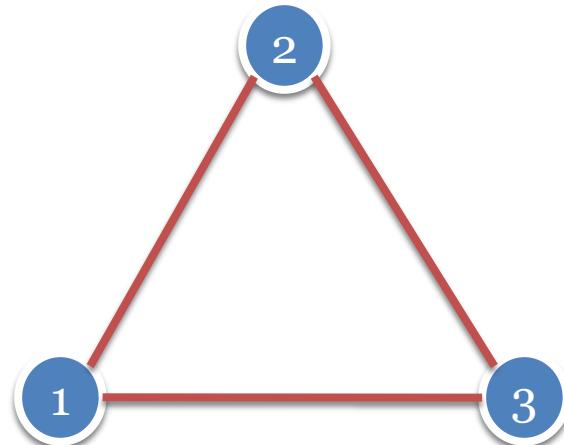
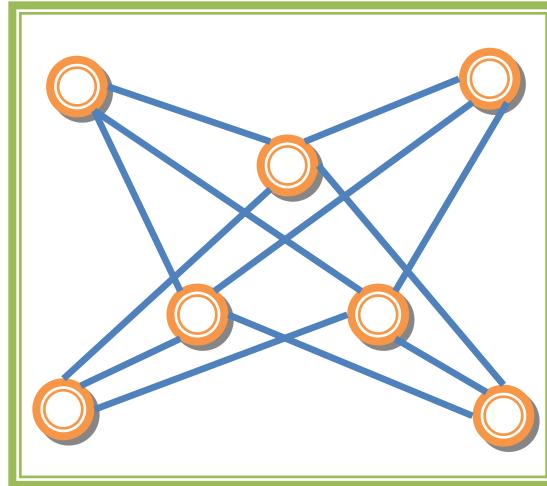
CÁC LOẠI ĐỒ THỊ

Đơn đồ thị

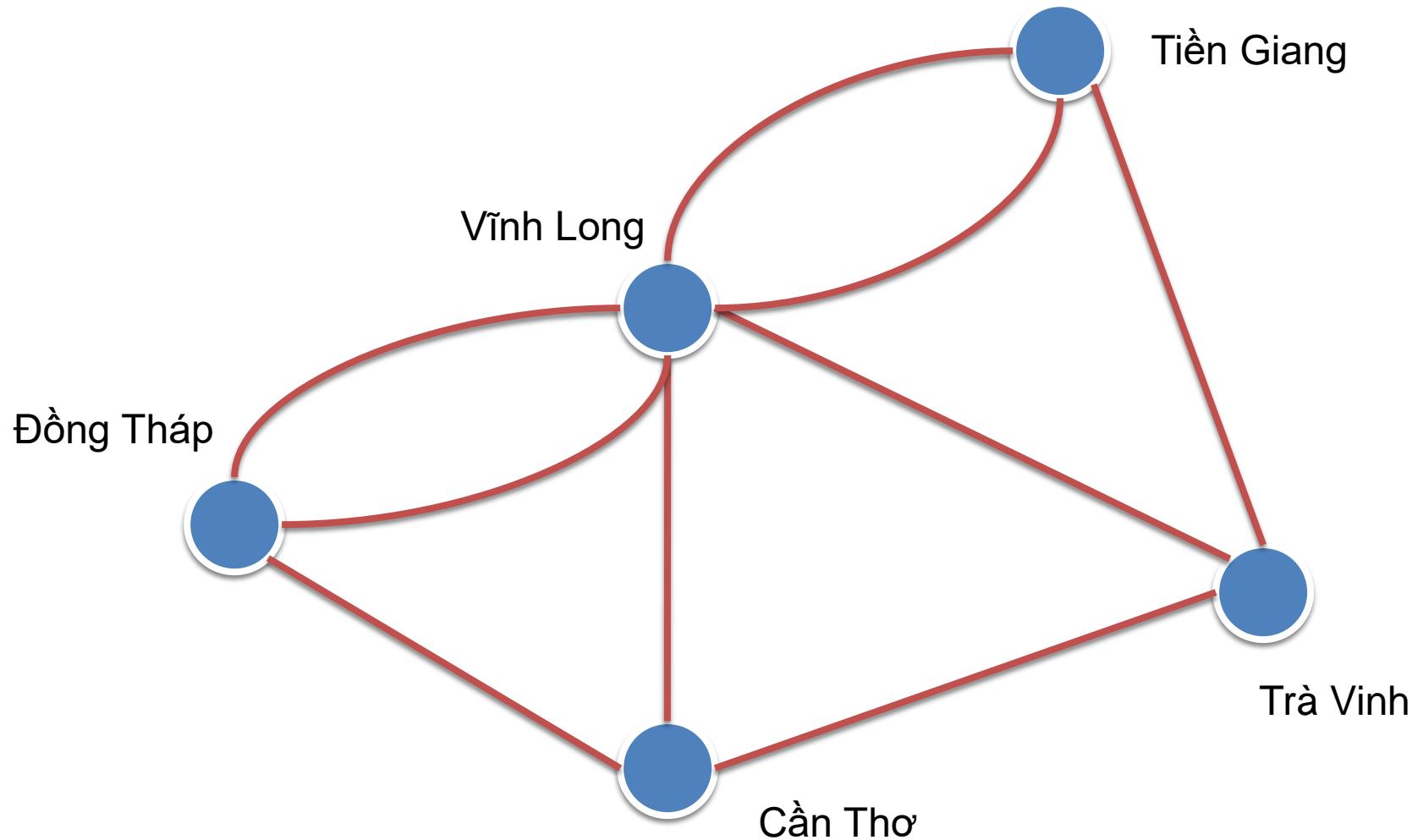


Đơn đồ thị

- Một **đơn đồ thị (simple graph)** $G = (V, E)$ gồm một tập không rỗng V và một tập cạnh E là các cặp không sáp nhập tự của các đỉnh phân biệt.

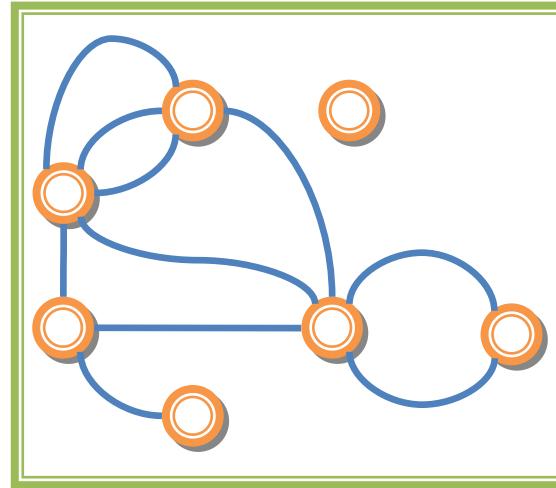


Đa đồ thị

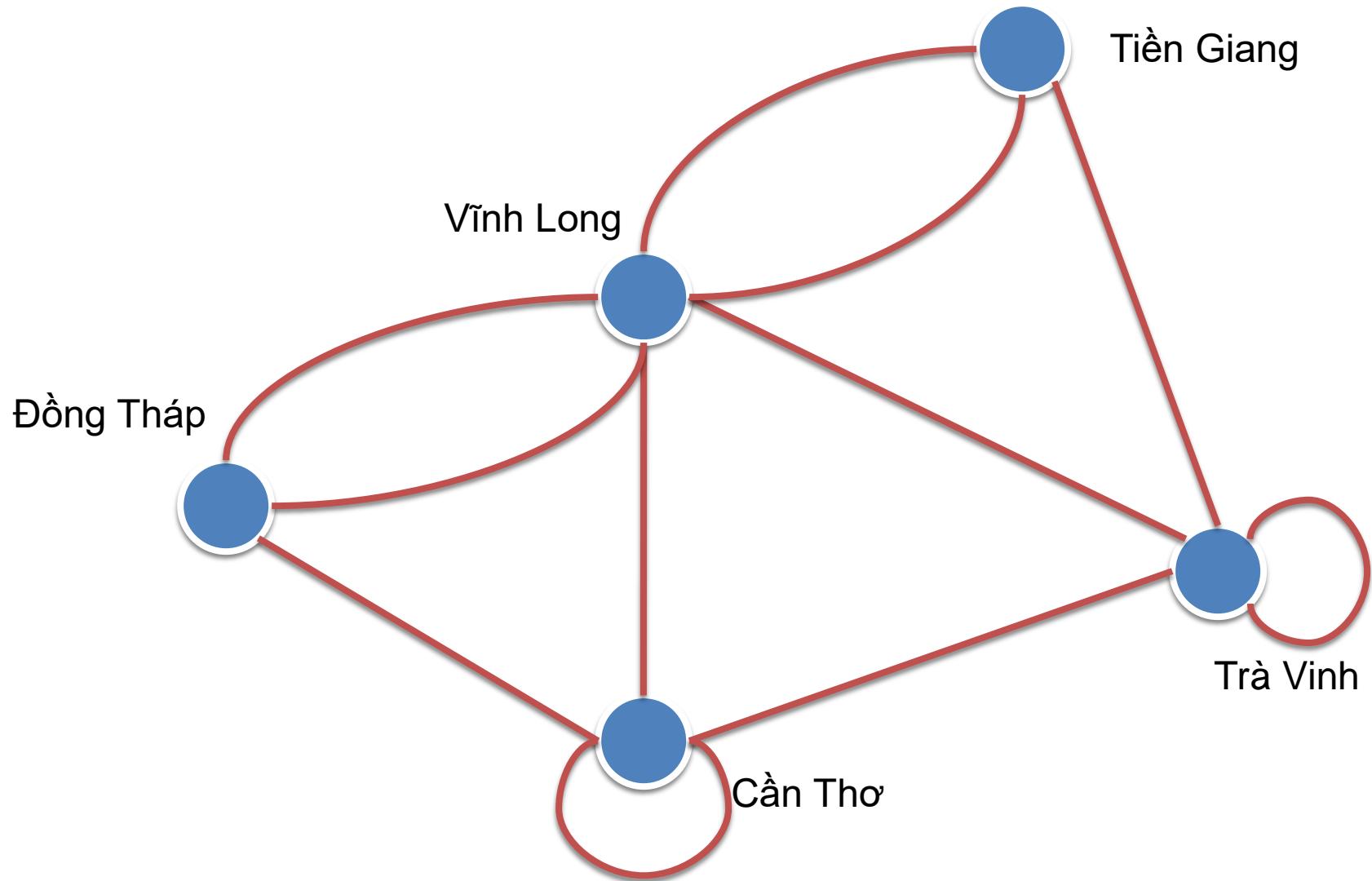


Đa đồ thị

- Xét đồ thị $G = (V, E)$, gồm tập các đỉnh V , tập các cạnh E . Và hàm f từ E tới $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$.
- Các cạnh e_1 và $e_2 \in E$, được gọi là **cạnh song song (parallel)** (hay **cạnh bội (multiple)**) nếu $f(e_1) = f(e_2)$.
- Một đồ thị $G = (V, E)$ là **đa đồ thị (multigraph)** nếu tồn tại các cạnh song song.

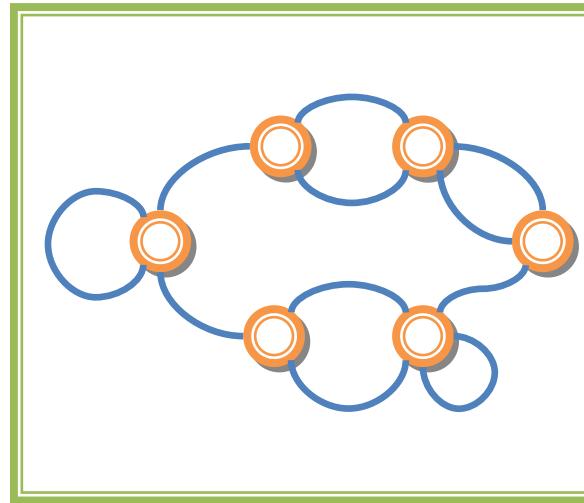


Giả đồ thị

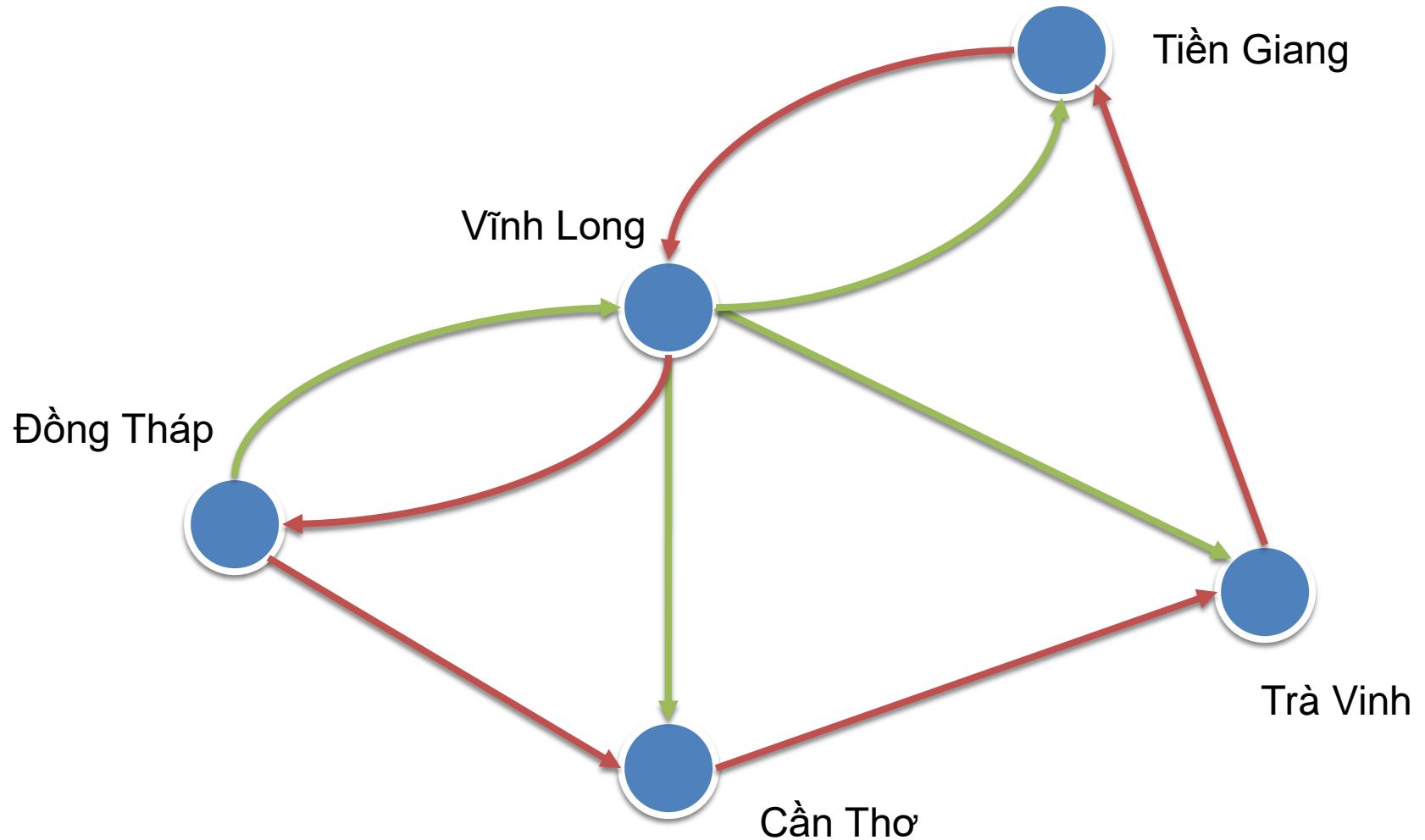


Giả đồ thị

- Xét đồ thị $G = (V, E)$, gồm tập các đỉnh V , tập các cạnh E . Và hàm f từ E tới $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.
- Một cạnh là **khuyên (loop)** nếu $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ với một đỉnh $u \in V$.
- Một đồ thị $G = (V, E)$ là **giả đồ thị (pseudo graph)** nếu tồn tại cạnh khuyên.

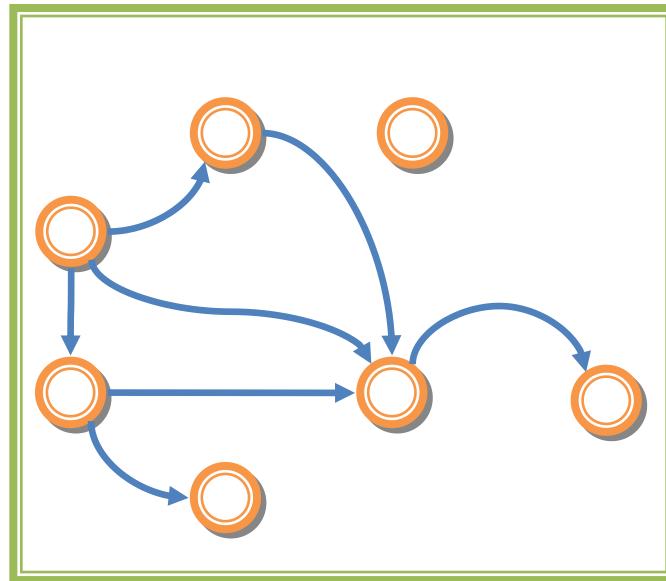


Đồ thị có hướng

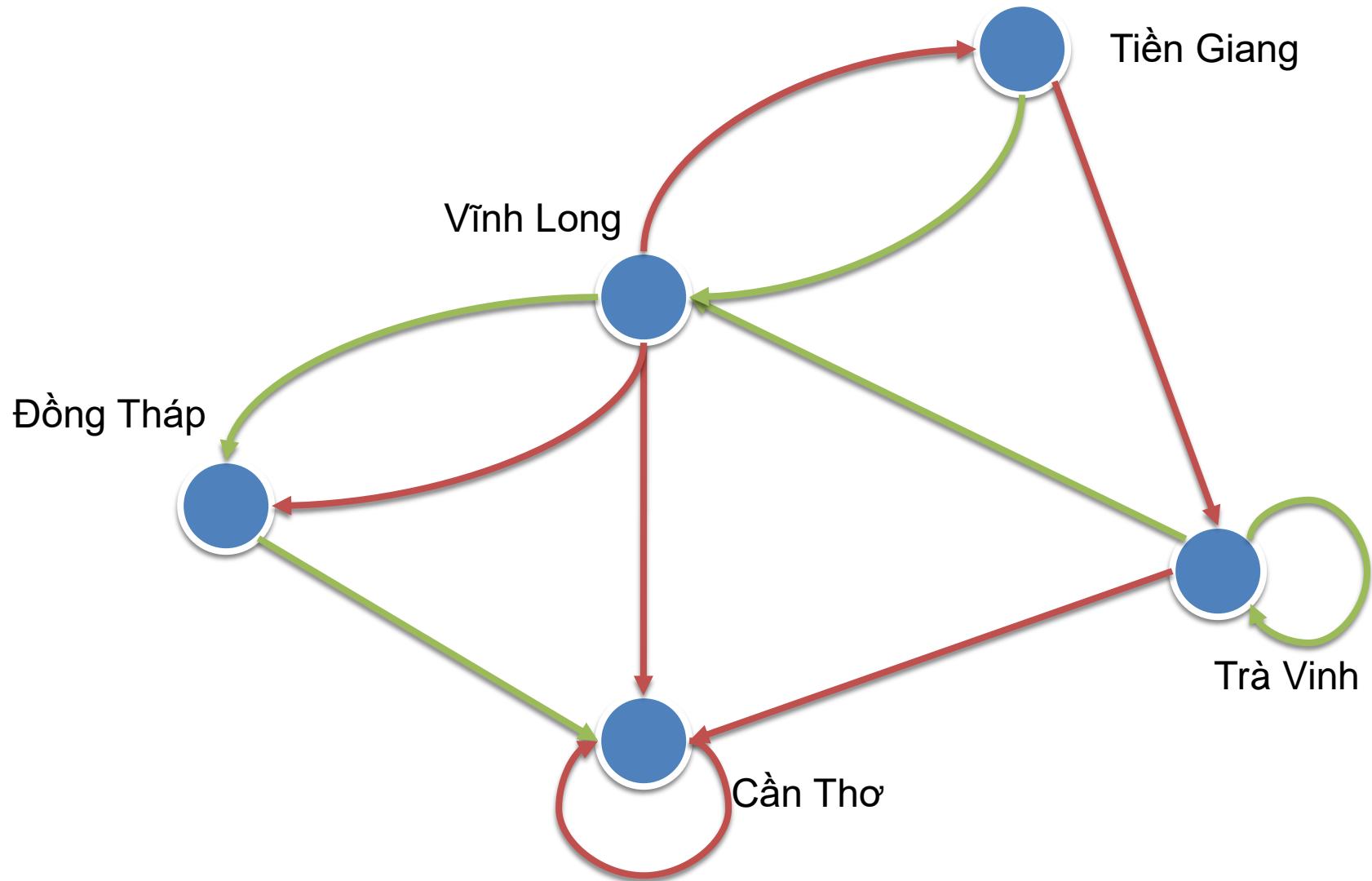


Đồ thị có hướng

- Một đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph) $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E là các cặp có thứ tự của các đỉnh thuộc V .
- Các cạnh ở đây còn được gọi là **cung** (arc).

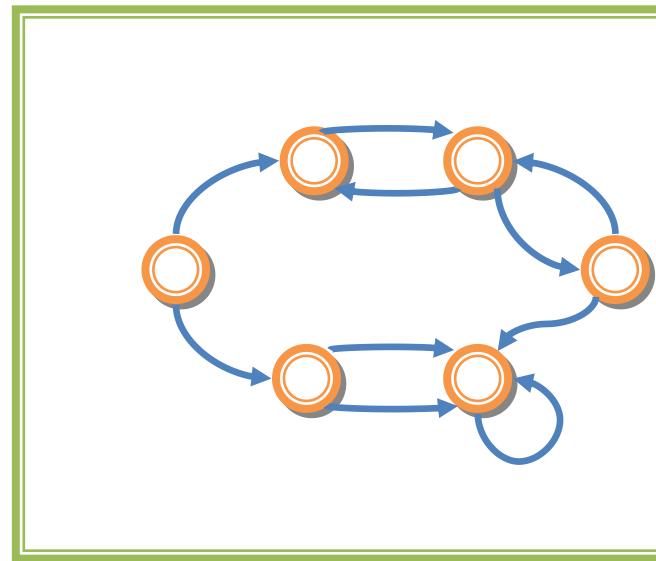


Đa đồ thị có hướng



Đa đồ thị có hướng

- Xét đồ thị $G = (V, E)$, gồm tập các đỉnh V , tập các cạnh E . Và hàm f từ E tới $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$.
- Các cạnh $e_1, e_2 \in E$ là các cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.
- Một đồ thị $G = (V, E)$ là **đa đồ thị có hướng (directed multigraph)** nếu tồn tại các cạnh bội.

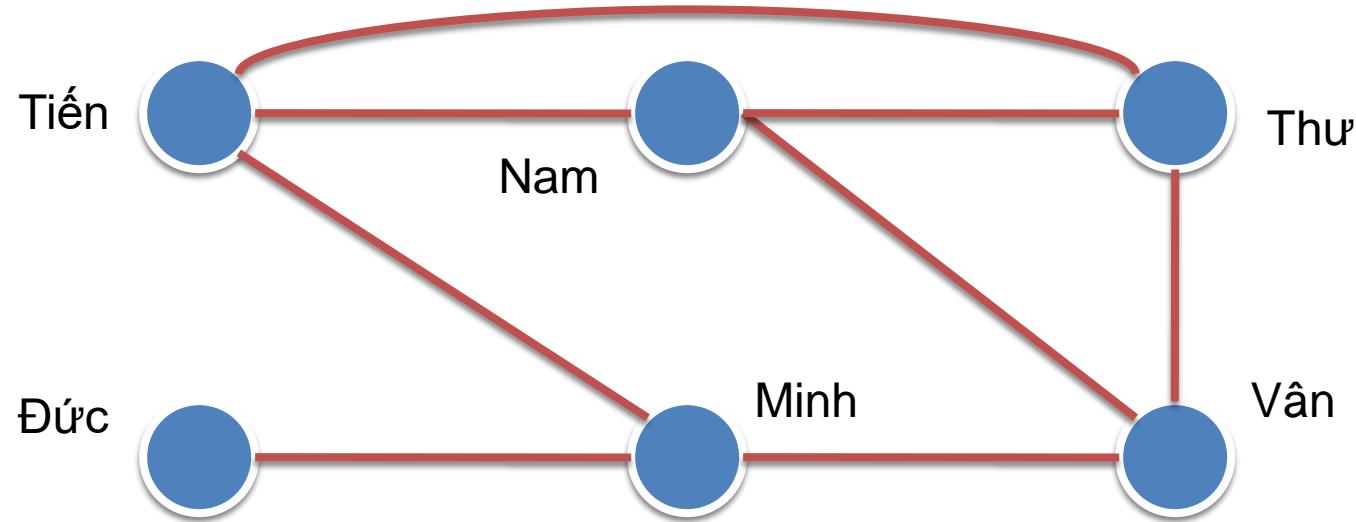


Tóm tắt các loại đồ thị

Loại	Cạnh	Có cạnh bội?	Có khuyên?
Đơn đồ thị	Vô hướng	Không	Không
Đa đồ thị	Vô hướng	Có	Không
Giả đồ thị	Vô hướng	Có	Có
Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	-
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	-

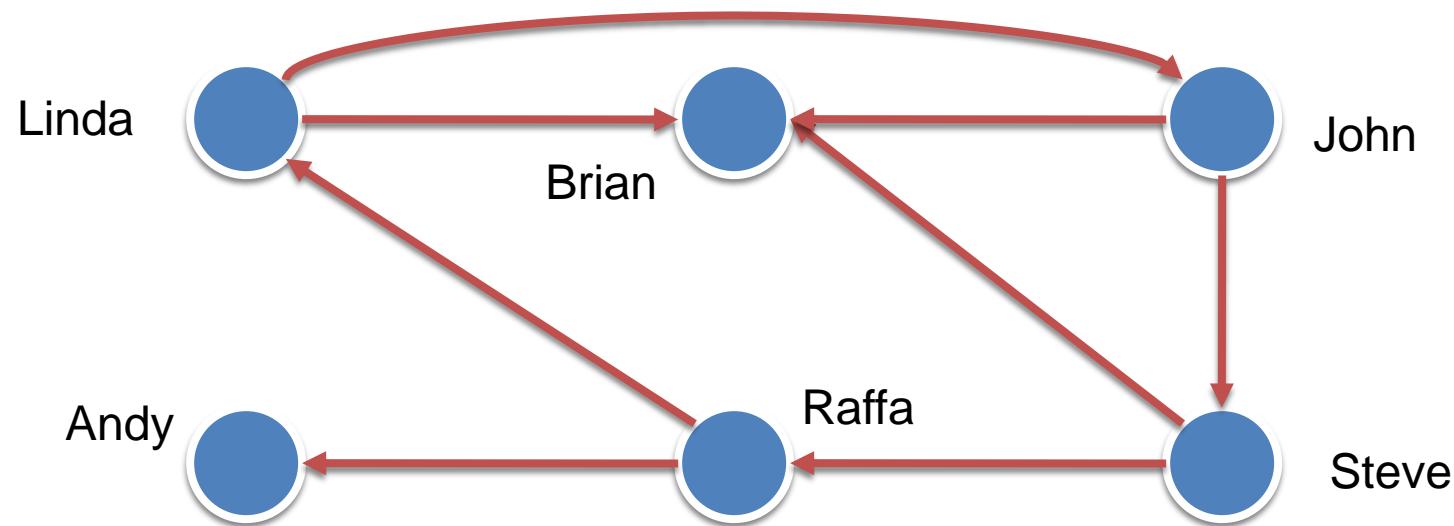
CÁC MÔ HÌNH ĐỒ THỊ

Đồ thị quen biết

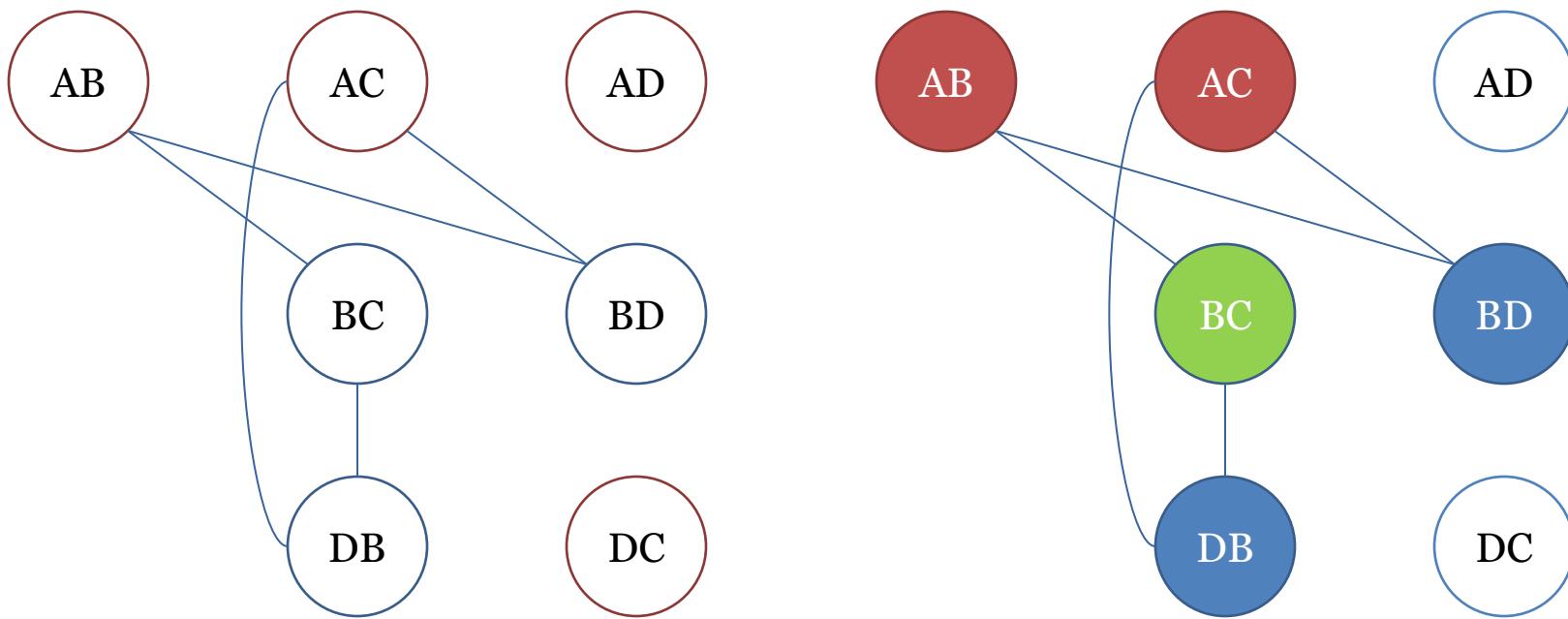
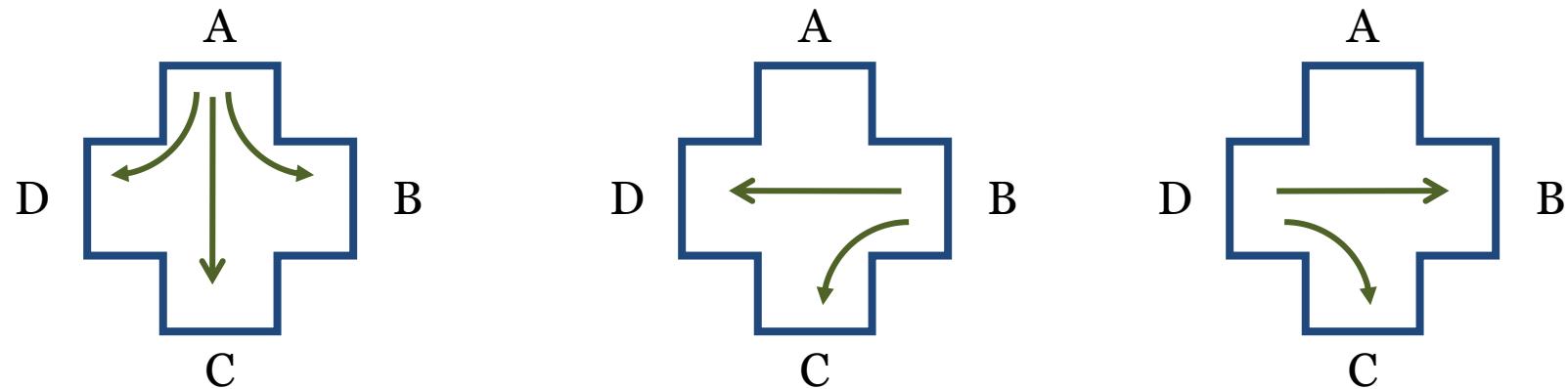


Đồ thị quen biết trên trái đất có hơn 6 tỉ đỉnh và có
thể hơn tỉ tỉ cạnh!

Đồ thị ảnh hưởng



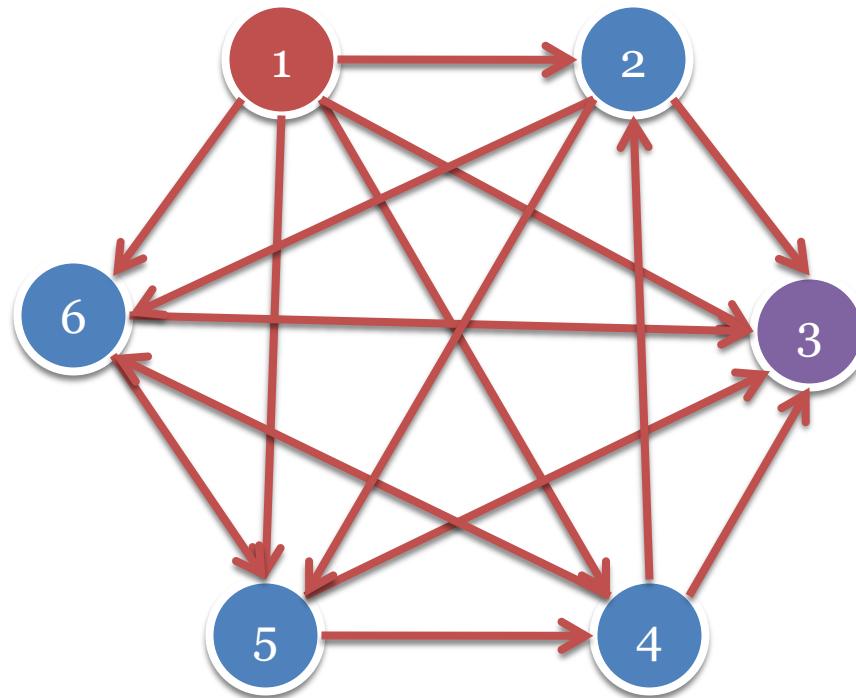
Đồ thị giao thông



Đồ thị cộng tác

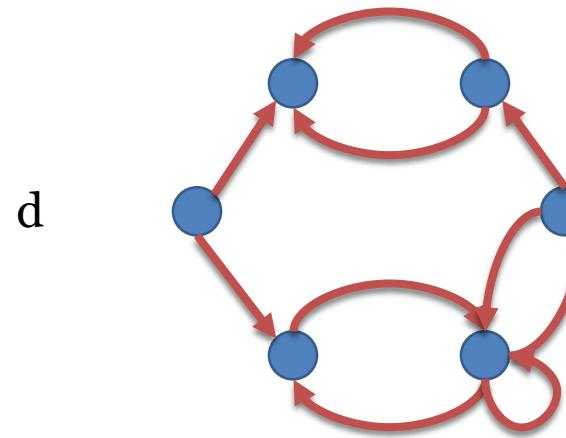
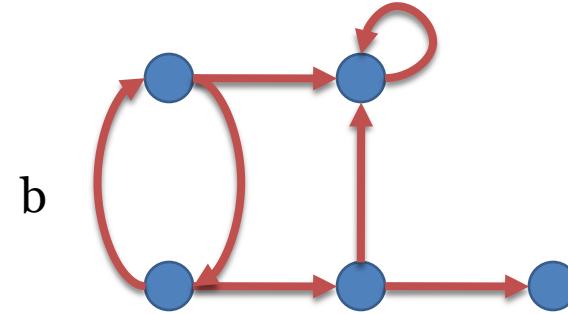
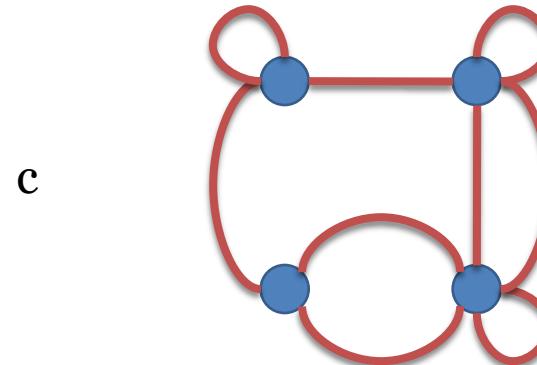
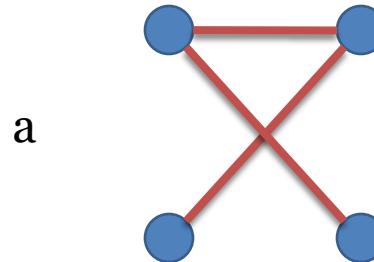
- Đỉnh: tác giả
- Cạnh: 2 người viết chung một bài báo
- Đồ thị cộng tác (2001) có hơn 337000 đỉnh và 496200 cạnh.

Thi đấu vòng tròn



Bài tập

1. Xác định loại đồ thị của các đồ thị sau:



Bài tập

2. Xây dựng đồ thị ảnh hưởng cho các thành viên lãnh đạo của một công ty nếu:
 - Chủ tịch có ảnh hưởng lên giám đốc nghiên cứu & phát triển, giám đốc marketing, giám đốc điều hành;
 - Giám đốc nghiên cứu & phát triển có ảnh hưởng lên giám đốc điều hành;
 - Giám đốc Marketing ảnh hưởng lên Giám đốc điều hành;
 - Không ai có thể ảnh hưởng lên trưởng phòng tài chính và Trưởng phòng tài chính không ảnh hưởng lên bất cứ ai.

CẠNH KẾ, ĐỈNH KẾ, BẬC

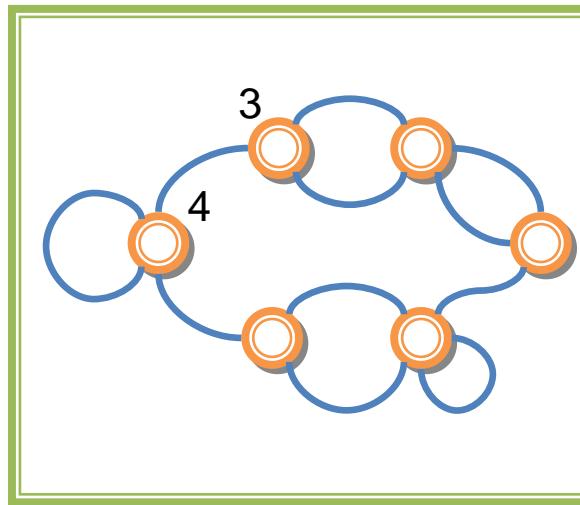
Liên quan giữa cạnh và đỉnh

- Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là **kề** hay **liền kề** (*adjacent*) (hay **láng giềng** (*neibor*)) nếu $\{u, v\}$ là một cạnh của G .
- Nếu $e = \{u, v\}$ thì e được gọi là **cạnh liên thuộc** (*incident*) với các đỉnh u và v . Cạnh e cũng được gọi là **cạnh nối** (*connect*) các đỉnh u và v .
- Các đỉnh u và v gọi là các **điểm đầu mút** (*endpoint*) của cạnh $\{u, v\}$.

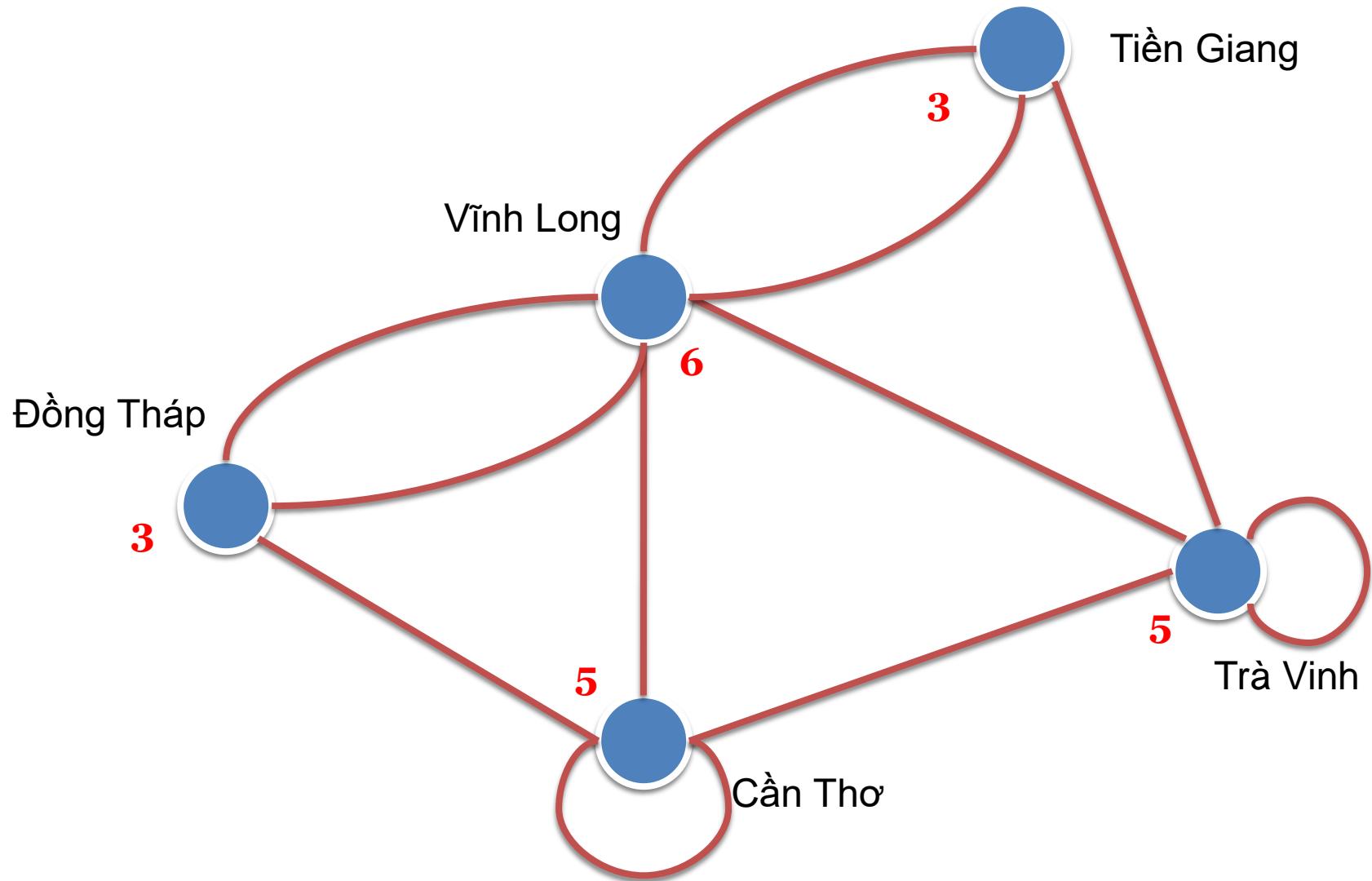


Bậc của đỉnh

- **Bậc (degree)** của một đỉnh trên đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.
- Ký hiệu bậc của đỉnh v: $\deg(v)$.



Bậc của đồ thị



Định lý bắt tay (Handshaking Theorem)

- Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 7?

Chứng minh định lý bắt tay

- Định nghĩa hàm f từ $E \times V$ tới $\{0, 1, 2\dots\}$ trong đó:
 - $f(e, v) = 1$ nếu e **không** là cạnh khuyên và e liên thuộc với v .
 - $f(e, v) = 2$ nếu e là một khuyên và e liên thuộc với v .
 - $f(e, v) = 0$ nếu e **không** liên thuộc với v .
- Do vậy, với cạnh $e \in E$ bất kỳ, ta suy ra được từ định nghĩa

$$\sum_{v \in V} f(e, v) = 2$$

Chứng minh định lý bắt tay

- Do vậy:

$$\sum_{e \in E} 2 = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} f(e, v)$$

$$\Rightarrow 2|E| = \sum_{e \in E} 2 = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} f(e, v) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} f(e, v)$$

$$\text{Ta có: } \deg(v) = \sum_{e \in E} f(e, v)$$

$$\Rightarrow 2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Định lý về số đỉnh bậc lẻ

- **Định lý:** Một đồ thị vô hướng có số lượng đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.
- **Chứng minh:**
 - Giả sử V_1, V_2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Khi đó:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

- Vì $\deg(v)$ là chẵn với mọi $v \in V_1$, nên tổng đầu tiên trong vế phải phải là số chẵn, nên tổng còn lại cũng phải là số chẵn. Vì tất cả các số hạng của tổng này là số lẻ, nên suy ra số các số hạng của nó phải là số chẵn. [đpcm]

Liên quan giữa cạnh và đỉnh

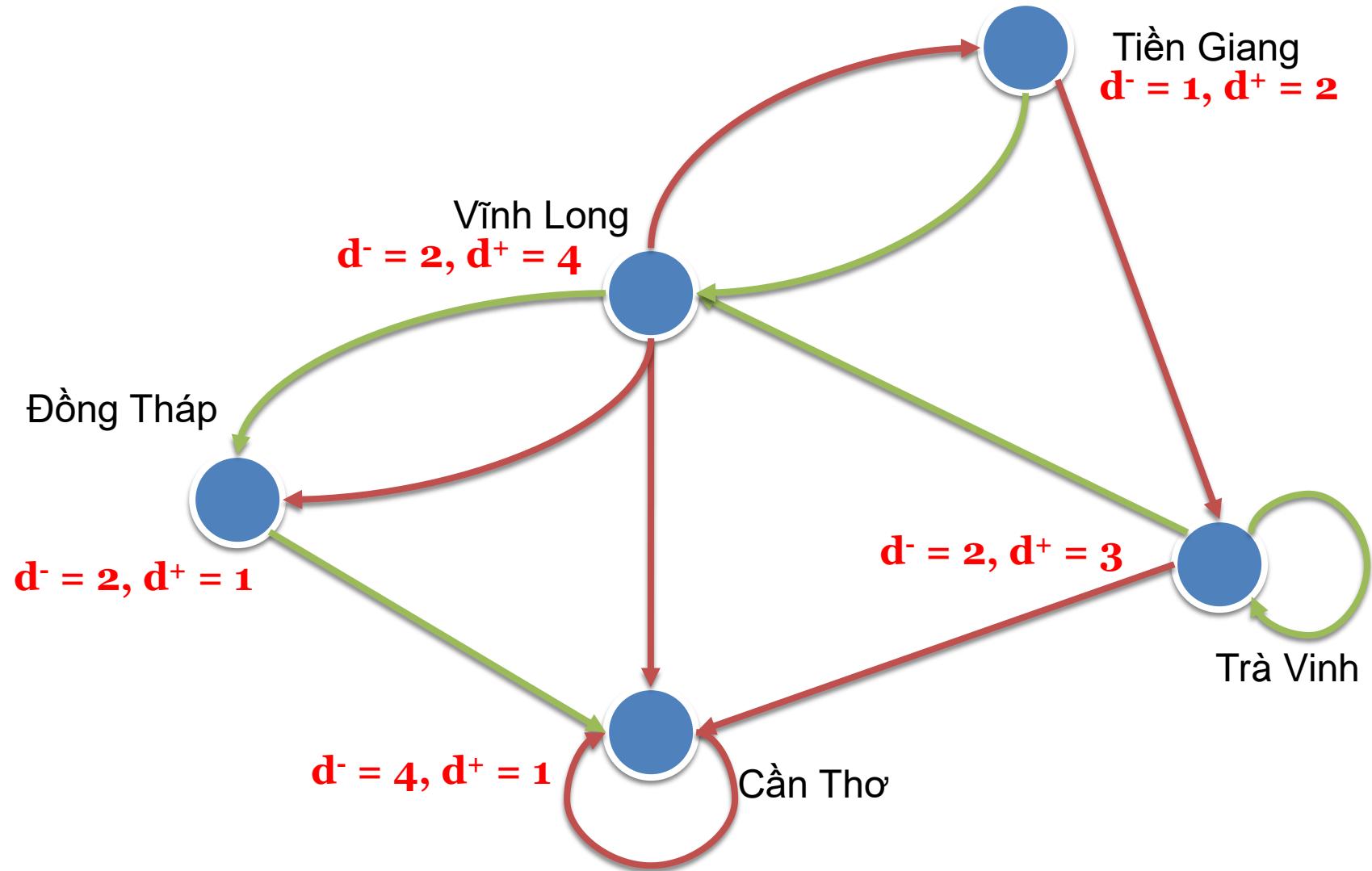
- Khi (u, v) là cạnh của đồ thị có hướng G , thì u được gọi là **nối tới** v và v được gọi là **nối từ** u . Đỉnh u được gọi là **đỉnh đầu (initial vertex)**, đỉnh v gọi là **đỉnh cuối (terminal hoặc end vertex)** của cạnh (u, v) .
- Cạnh $e = (u, v)$ được gọi là đi từ đỉnh u tới đỉnh v hoặc đi ra đỉnh u vào đỉnh v .



Bậc – vào và bậc - ra

- Trong đồ thị có hướng,
 - **Bậc vào (in-degree)** của đỉnh v , ký hiệu là $\text{deg}^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v .
 - **Bậc ra (out-degree)** của đỉnh v , ký hiệu là $\text{deg}^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v .
- (Một khuyên sẽ góp thêm 1 đơn vị vào bậc vào và 1 đơn vị vào bậc ra của đỉnh chưa khuyên)

Bậc - vào và bậc - ra



Định lý về số bậc đồ thị

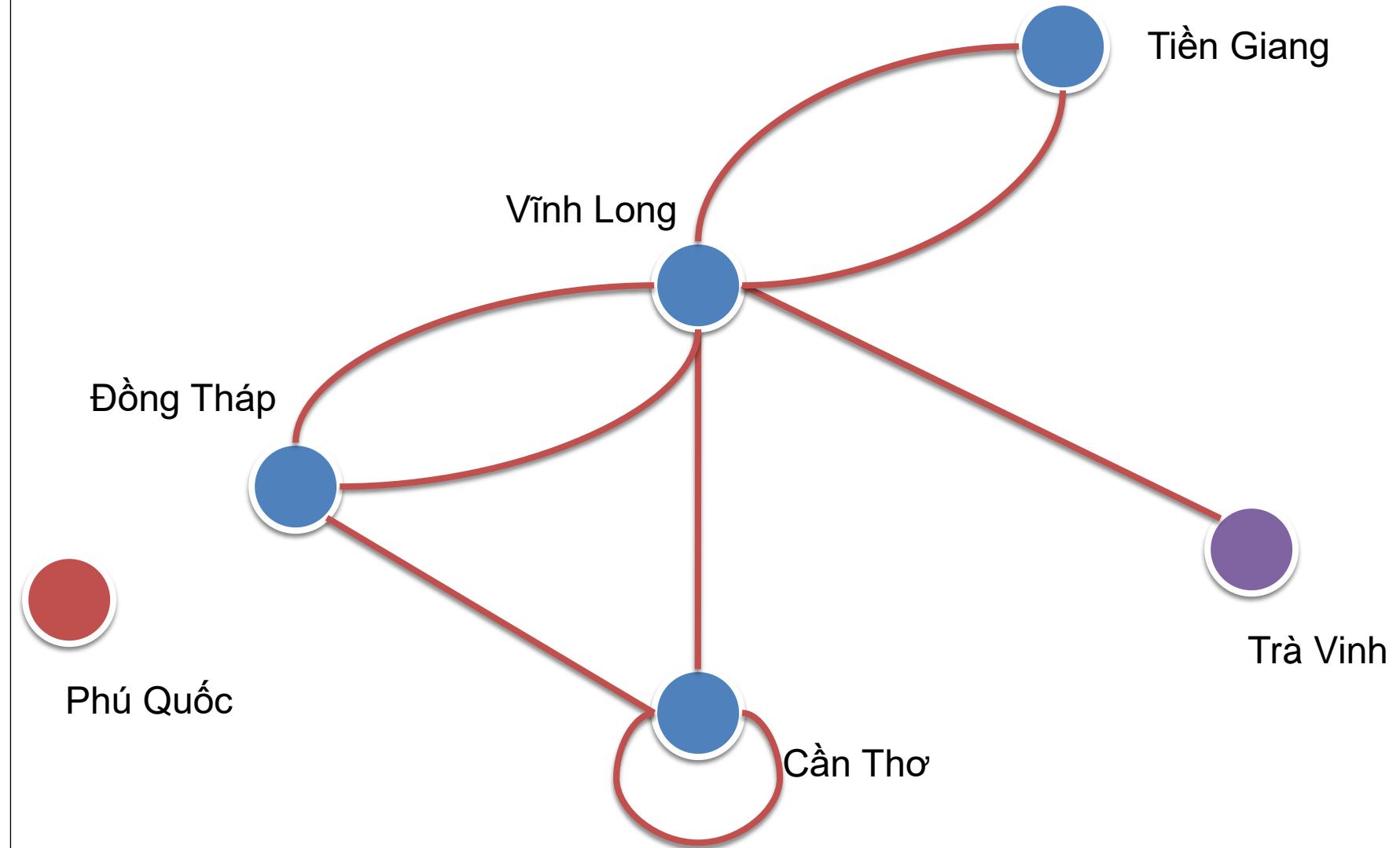
- Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

Đỉnh treo, đỉnh cô lập

- Đỉnh treo (pendant vertex) là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh cô lập (isolated vertex) là đỉnh có bậc bằng 0.

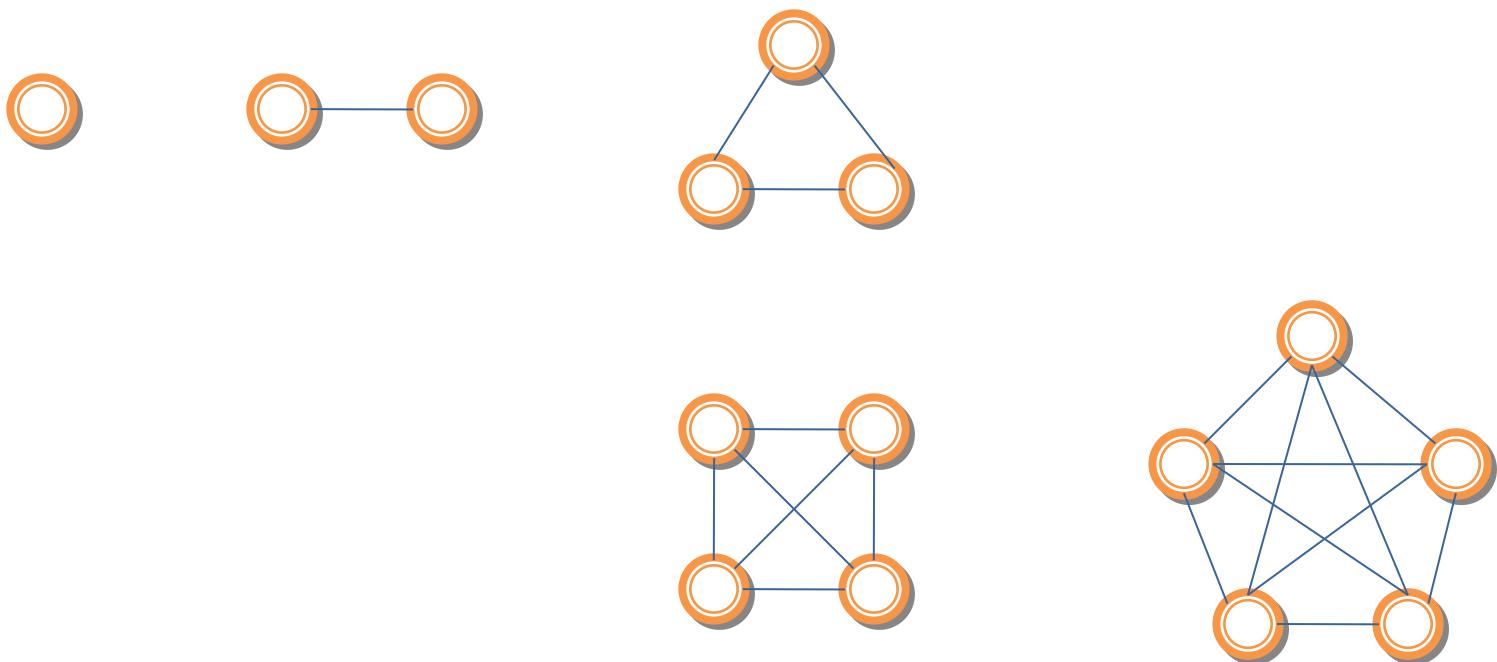
Đỉnh treo, đỉnh cô lập



MỘT SỐ ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đồ thị đầy đủ

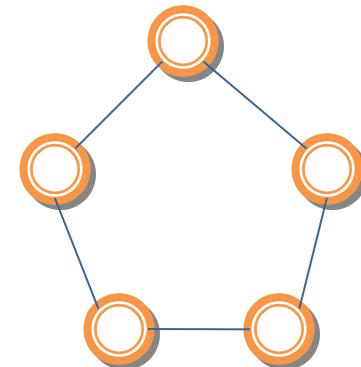
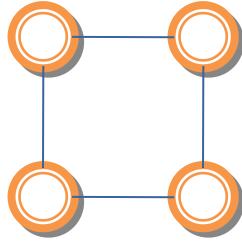
- **Đồ thị đầy đủ (complete graph)** n đỉnh, ký hiệu là K_n , là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.



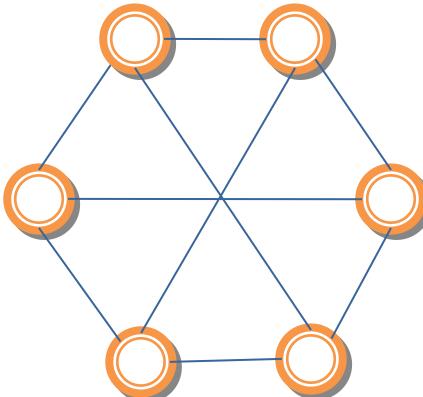
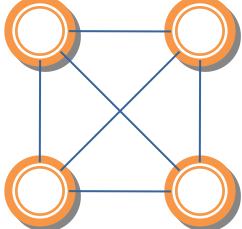
Đồ thị chính quy

- **Đồ thị chính quy (regular graph)** là đơn đồ thị mà bậc của mọi đỉnh đều bằng nhau.
- Nếu bậc của các đỉnh là k , thì đồ thị này được gọi là **k – chính quy (k – regular)**.

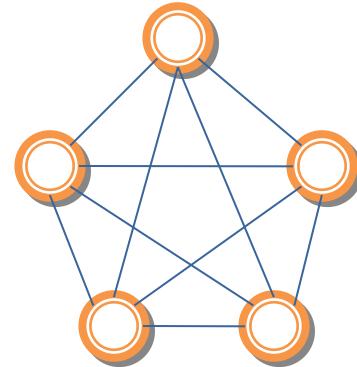
Ví dụ đồ thị chính quy



2 – chính quy



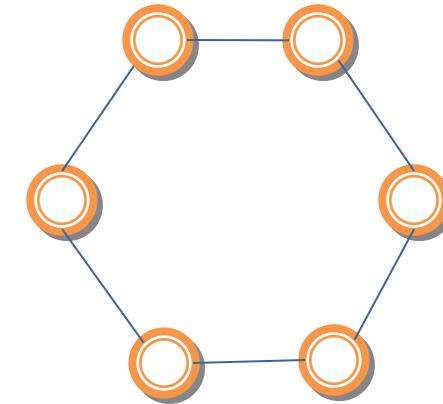
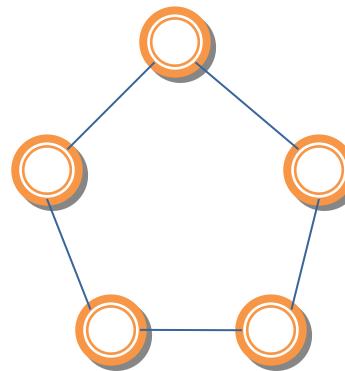
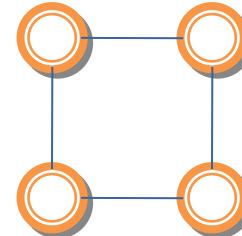
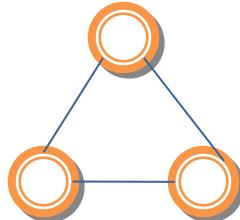
3 – chính quy



4 – chính quy

Đồ thị vòng

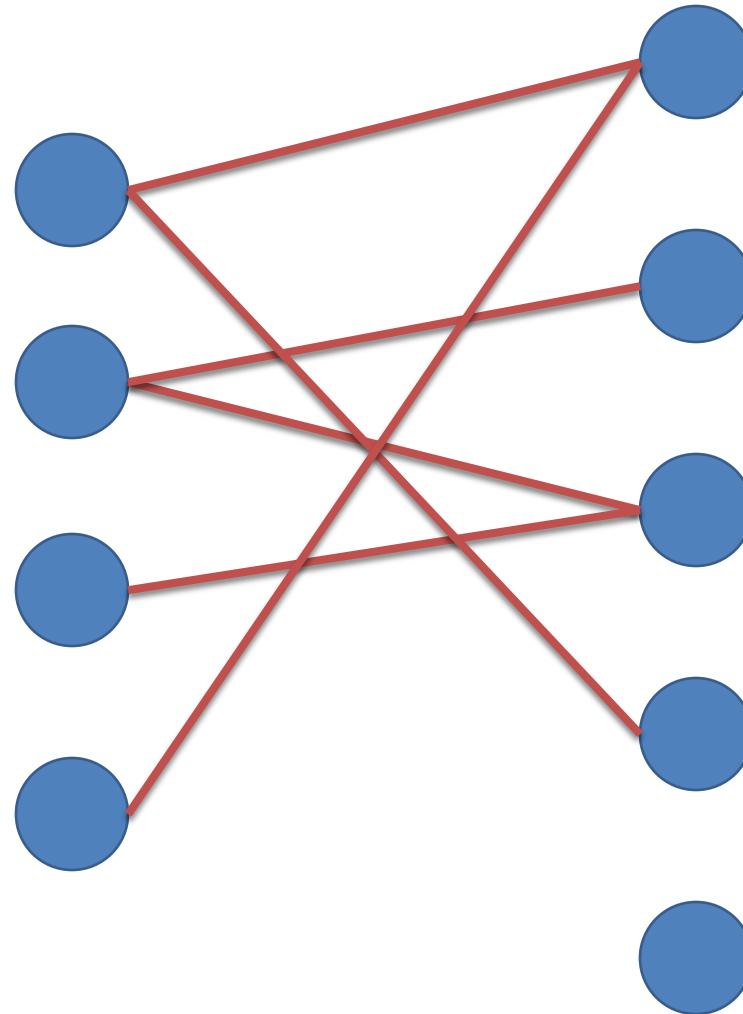
- Đồ thị vòng (cycle) C_n , $n \geq 3$ là một đồ thị có n đỉnh v_1, v_2, \dots, v_n và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ và $\{v_n, v_1\}$.



Đồ thị phân đôi (lưỡng phân)

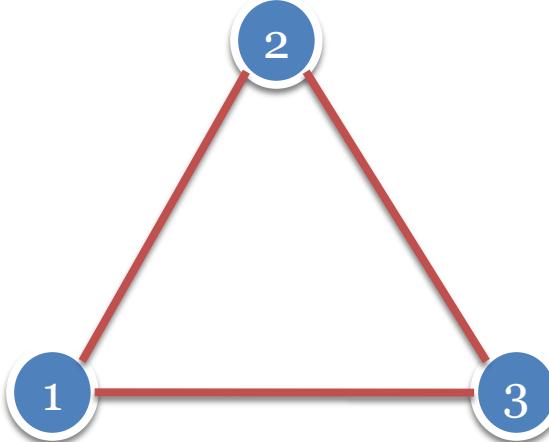
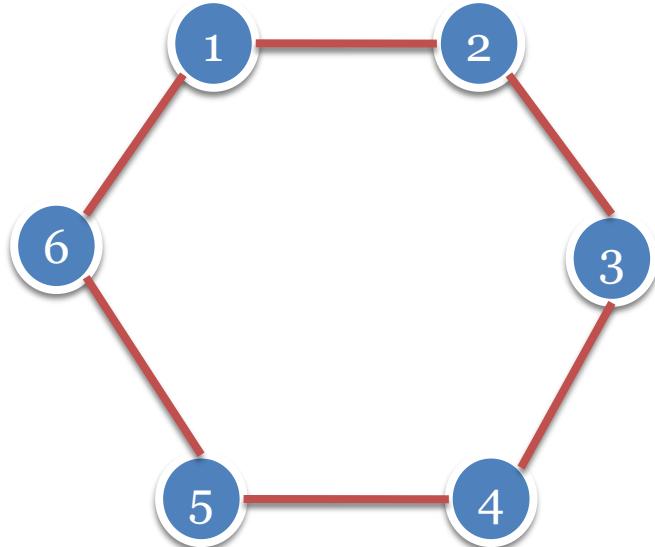
- Một đơn đồ thị G được gọi là **đồ thị phân đôi (bipartite graph)** nếu tập các đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2 .

Đồ thị phân đôi (lưỡng phân)



Đồ thị phân đôi (lưỡng phân)

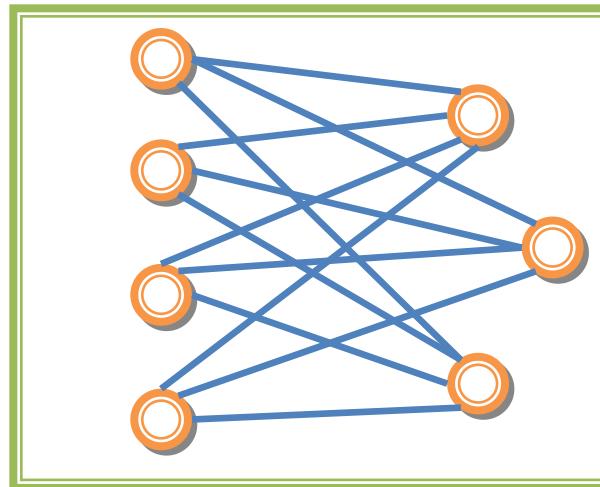
- Đồ thị C_6 và K_3 có phải là các đồ thị phân đôi? Giải thích.



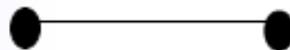
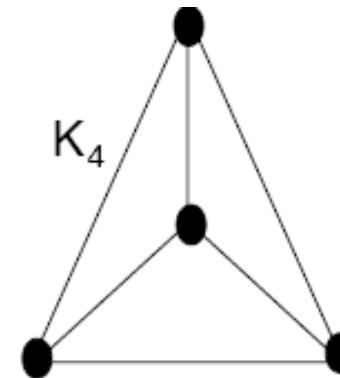
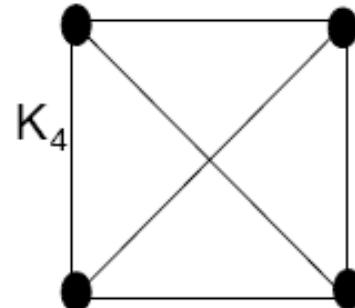
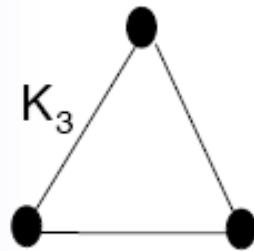
Đồ thị phân đôi đầy đủ

- **Đồ thị phân đôi đầy đủ (complete bipartite graph)**

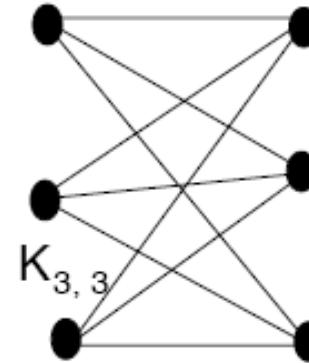
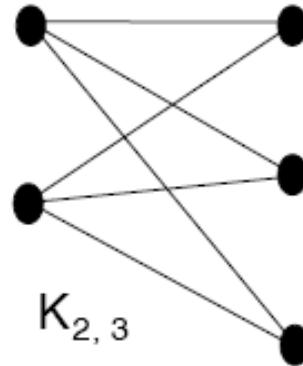
$K_{k,m}$ là đồ thị có tập đỉnh được phân thành hai tập con tương ứng có k đỉnh và m đỉnh và có một cạnh giữa 2 đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc tập con này và đỉnh thứ hai thuộc tập con kia.



Ví dụ tổng hợp



$K_2 \equiv K_{1, 1}$

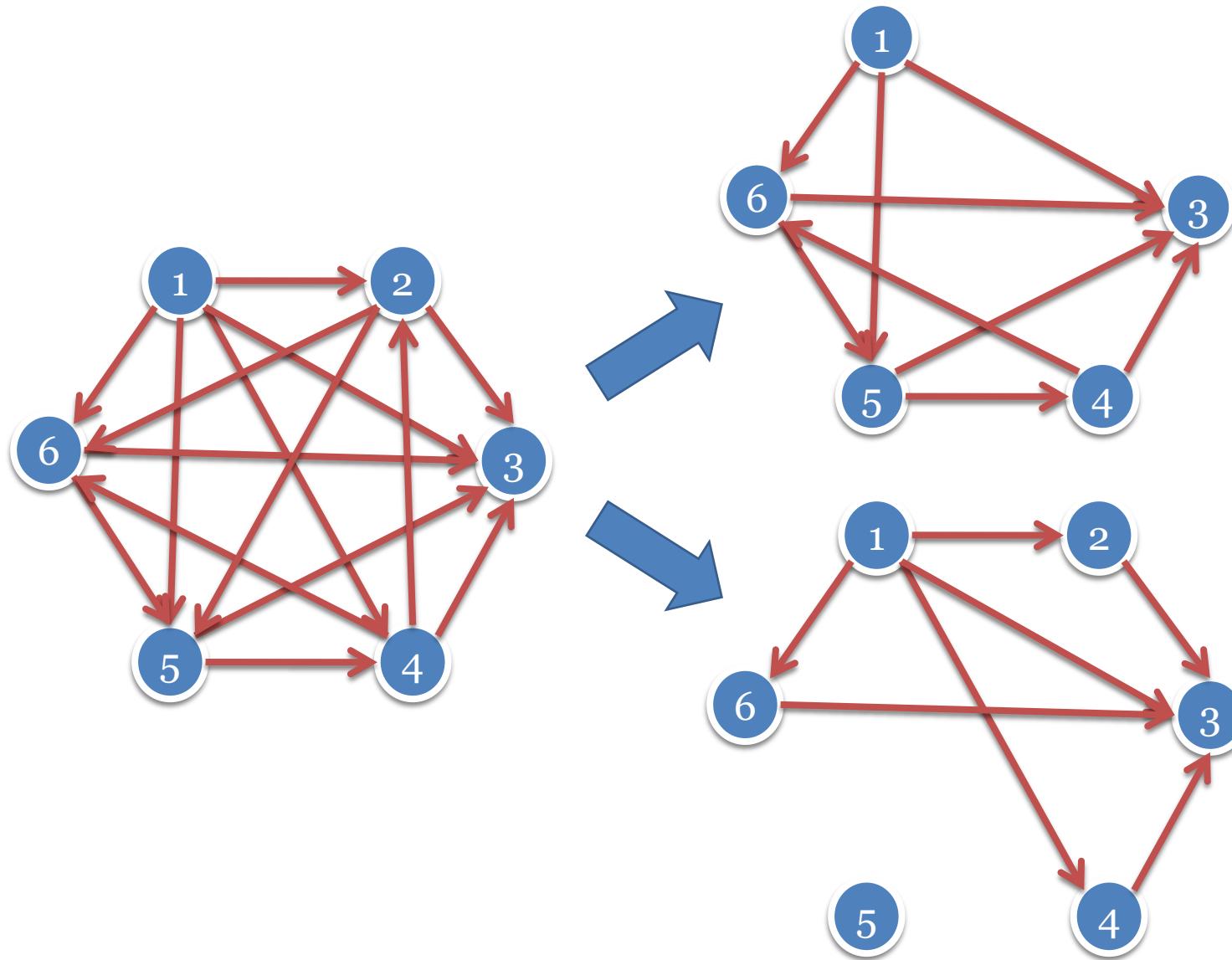


ĐỒ THỊ CON – ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

Đồ thị con - Đồ thị bộ phận

- **Đồ thị con (subgraph)** của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị $H = (W, F)$, trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.
- Đồ thị H , là con của đồ thị G , được gọi là **đồ thị bộ phận (spanning subgraph)** của G khi $W = V$.

Đồ thị con – Đồ thị bộ phận



Tóm tắt

- Thế nào là 2 đỉnh kề nhau?
- Độ của đỉnh là gì?
- Mối liên quan giữa số cạnh và bậc?
- Số lượng đỉnh bậc lẻ của một đồ thị?
- Đỉnh treo? Đỉnh cô lập?
- Đồ thị đầy đủ?
- Đồ thị vòng?
- Đồ thị phân đôi?
- Đồ thị phân đôi đầy đủ?
- Đồ thị con? Đồ thị bộ phận

Bài tập

1. Cho G là một đồ thị đơn, vô hướng có số đỉnh $n > 3$.
Chứng minh G có chứa 2 đỉnh cùng bậc.

Hướng dẫn:

- Giả sử có 1 đỉnh bậc 0 \rightarrow đỉnh có bậc lớn nhất còn lại chỉ là $n - 2$. Vậy các đỉnh có thể có bậc là $0..n-2$.
- Nếu không có đỉnh bậc 0 \rightarrow các đỉnh có thể có bậc là $1, 2... n-1$.
- Do vậy theo Dirichlet, phải có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.

Bài tập

2. Có thể tồn tại đồ thị đơn có 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 hay không?

Hướng dẫn

- Không thể vì 15 (số đỉnh) \times 5 (bậc) là một số lẻ. Điều này trái với định lý bắt tay.

Bài tập

3. Trong một buổi chiêu đãi, mọi người bắt tay nhau. Chúng tỏ rằng tổng số người được bắt tay với một số lẻ người khác là một số chẵn. Giả sử không ai tự bắt tay mình

Hướng dẫn

Chứng minh tương tự định lý số đimbus bậc lẻ của đồ thị

Bài tập

4. Vẽ các đồ thị:

a. K_7

b. $K_{1,8}$

c. $K_{4,4}$

Bài tập

5. Các đồ thị sau đây có bao nhiêu cạnh?

a. K_n

b. $K_{m,n}$

Hướng dẫn

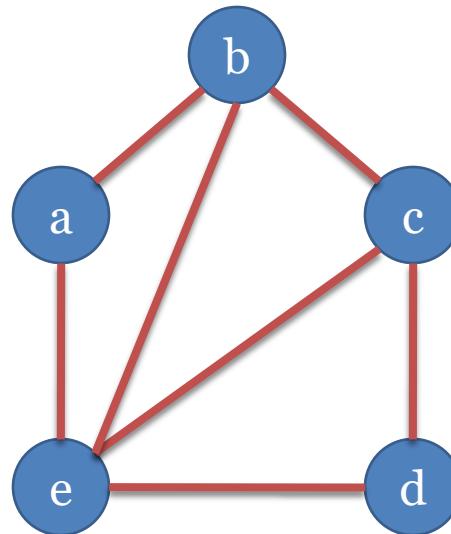
- K_n có số cạnh là $C(2, n) = n(n-1)/2$.
- $K_{m,n}$ có số cạnh là mn .

Bài tập

6. Đồ thị sẽ có bao nhiêu cạnh nếu nó có các đỉnh bậc 4, 3, 3, 2, 2? Vẽ một đồ thị như vậy.

Hướng dẫn

- Tổng số bậc đỉnh của đồ thị là $4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 14$, vậy đồ thị này có 7 cạnh (nếu tồn tại đồ thị).



Bài tập

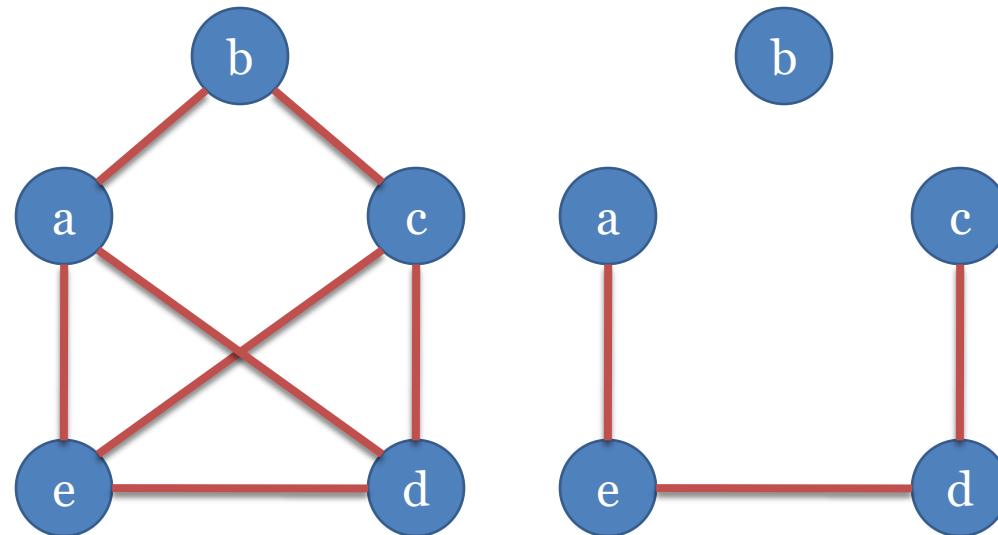
7. Có tồn tại đồ thị đơn chứa năm đỉnh với các bậc sau đây? Nếu có hãy vẽ đồ thị đó.

- a. 3, 3, 3, 3, 2
- b. 1, 2, 3, 4 ,5
- c. 1, 1, 1, 1, 1
- d. 1, 2, 1, 2, 1
- e. 2, 1, 0, 2, 1

Hướng dẫn

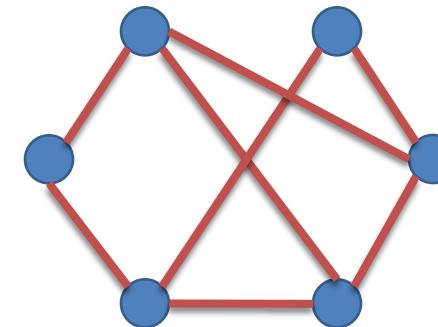
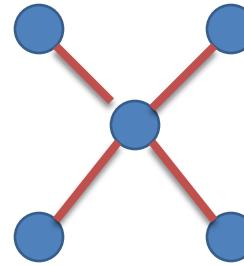
a, e). Có.

b, c, d). Không thể (vì có số đỉnh bậc lẻ là một số lẻ).



Bài tập

9. Các đồ thị sau đây có phải là đồ thị phân đôi không?



Hướng dẫn

- Đồ thị bên trái: có.
- Đồ thị bên phải: không.

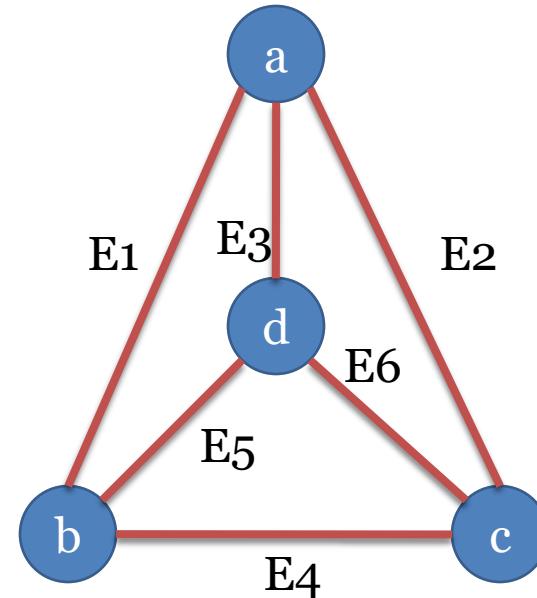
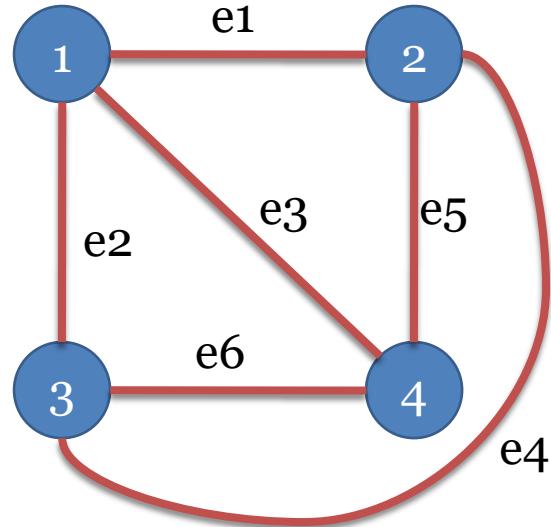
ĐỒ THỊ ĐĂNG CẨU

Đẳng cấu

- Các đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là **đẳng cấu (isomorphic)** nếu:
 - có hàm song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh u và v là liền kề trong G_1 nếu và chỉ nếu $f(u)$ và $f(v)$ là liền kề trong G_2 với mọi $u, v \in V_1$.
- Hàm f như vậy được gọi là một *đẳng cấu*.

Đồ thị đồng cầu

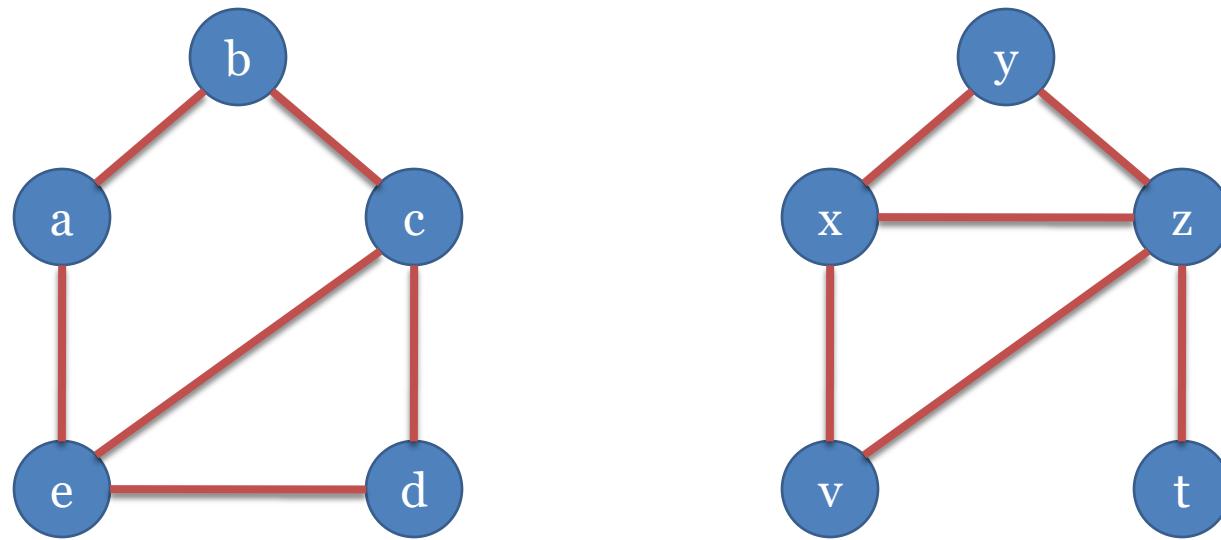
- Đồ thị G_1 và G_2 là đồng cầu với nhau:
 - $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$
 - $e_1 - E_1, e_2 - E_2 \dots$



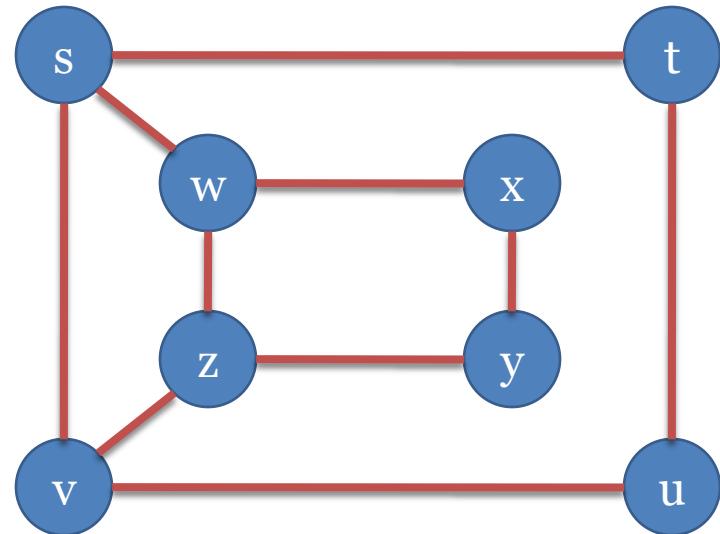
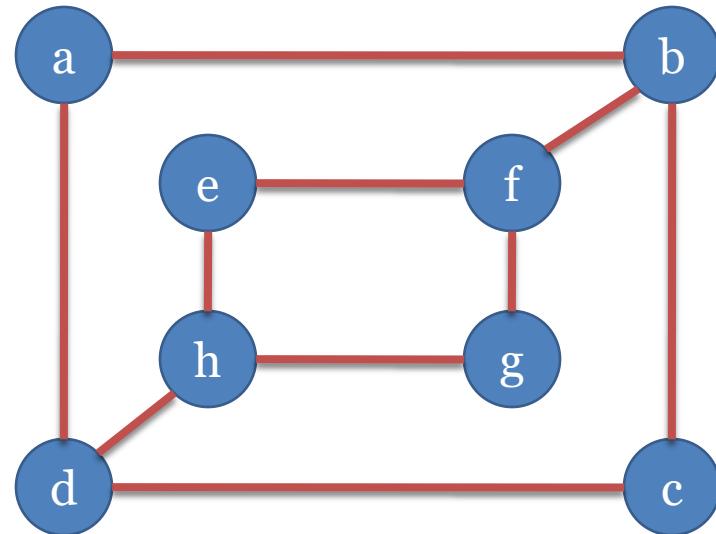
Đồ thị đẳng cấu

- Để xác định xem các đồ thị là đẳng cấu hay không là rất khó khăn!
- Để chứng minh 2 đồ thị là đẳng cấu, cần đưa ra một quan hệ tương đương (đẳng cấu) giữa 2 đồ thị này.
- Để chứng minh 2 đồ thị không đẳng cấu, chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà các đồ thị đẳng cấu phải có.

Chứng minh đồ thị không đằng cấu



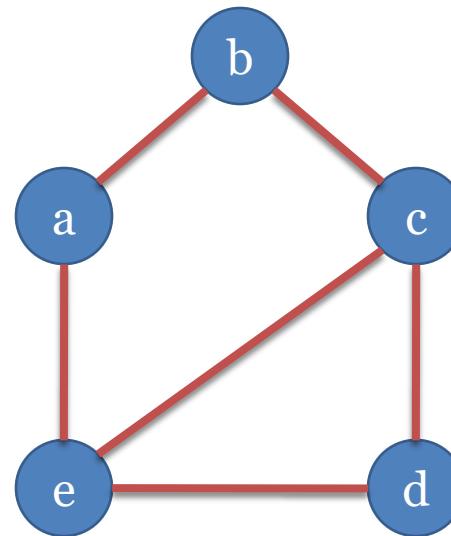
Chứng minh đồ thị không đằng cấu



BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

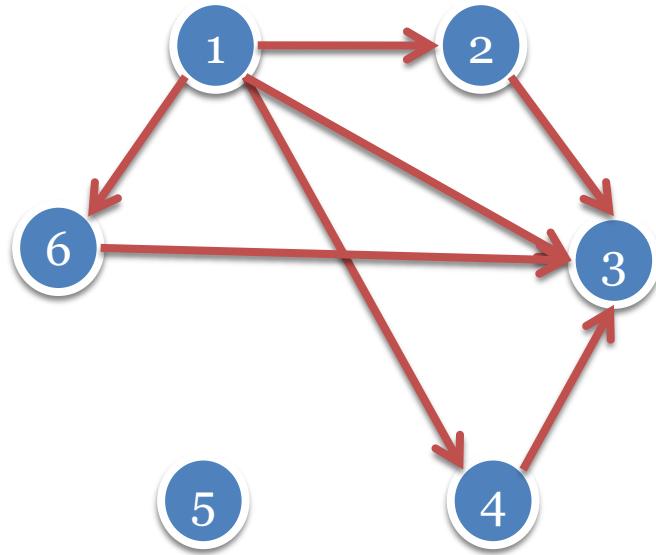
Biểu diễn bằng danh sách kề

Định	Các đỉnh kề
a	b, e
b	a, c
c	b, d, e
d	c, e
e	a, c, d



Biểu diễn bằng danh sách kề

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
1	2, 3, 4, 6
2	3
3	
4	3
5	
6	3

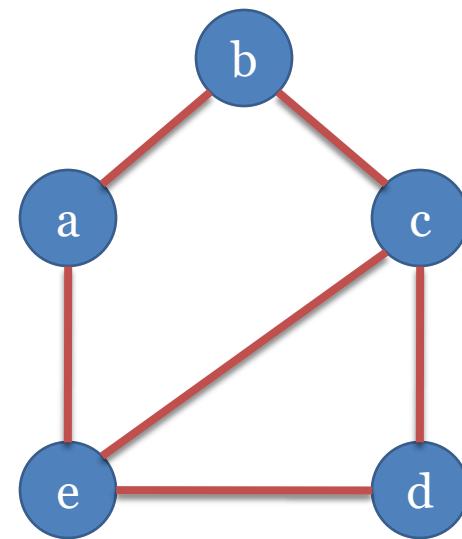


Biểu diễn bằng Ma trận kề

- Giả sử $G = (V, E)$ trong đó $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$.
- **Ma trận kề (Adjacency Matrix) A** (hay A_G) của G là một ma trận 0-1, cấp $n \times n$, có phần tử tại dòng i , cột j , a_{ij} :
 - bằng 1 nếu v_i và v_j kề nhau và
 - bằng 0 nếu v_i và v_j không kề nhau.

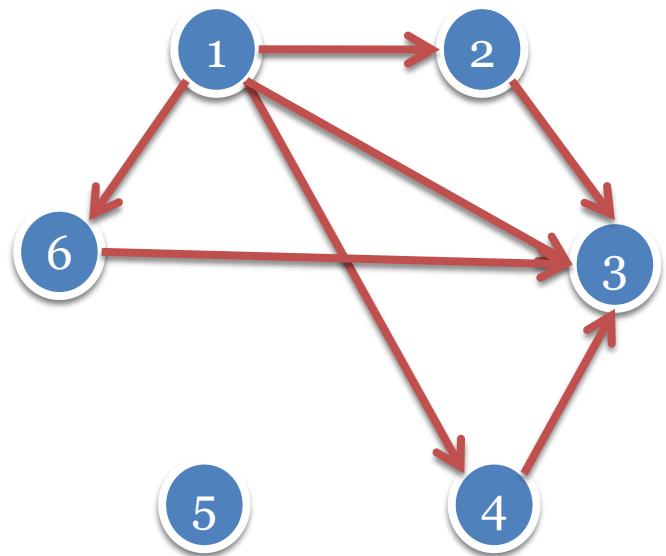
Biểu diễn bằng Ma trận kề

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	1
b	1	0	1	0	0
c	0	1	0	1	1
d	0	0	1	0	1
e	1	0	1	1	0



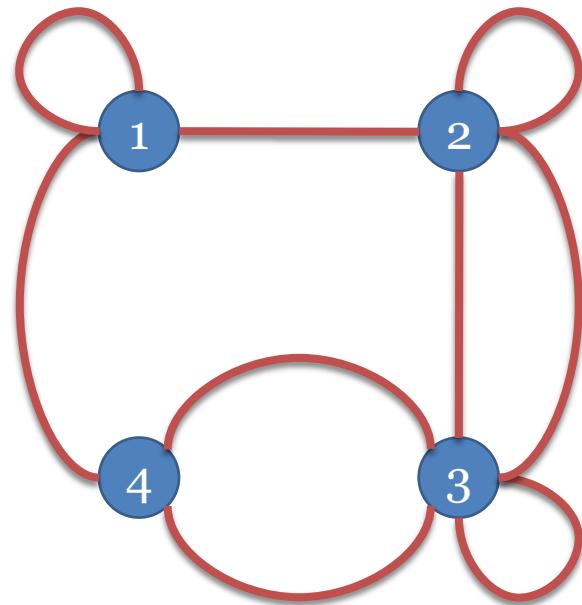
Biểu diễn bằng Ma trận kẽ

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	1
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0



Biểu diễn bằng Ma trận kế

	1	2	3	4
1	1	1	0	1
2	1	1	2	0
3	0	2	1	2
4	1	0	2	0

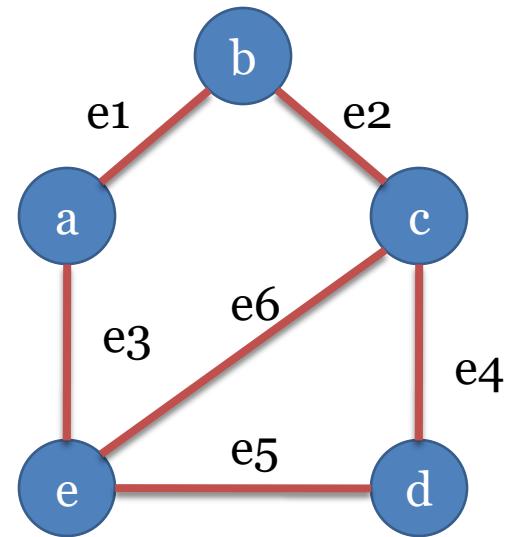


Biểu diễn bằng Ma trận liên thuộc

- Giả sử $G = (V, E)$ trong đó:
 - $V = \{v_1, v_2, \dots\}$, $|V| = n_v$.
 - $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, $|E| = n_e$.
- **Ma trận liên thuộc (incidence matrix) M** của G là một ma trận 0-1 kích thước $n_v \times n_e$ có phần tử tại dòng i , cột j , a_{ij}
 - bằng 1 nếu cạnh e_j liên thuộc (nối) với đỉnh v_i và
 - bằng 0 nếu cạnh e_j không liên thuộc (nối) với đỉnh v_i .

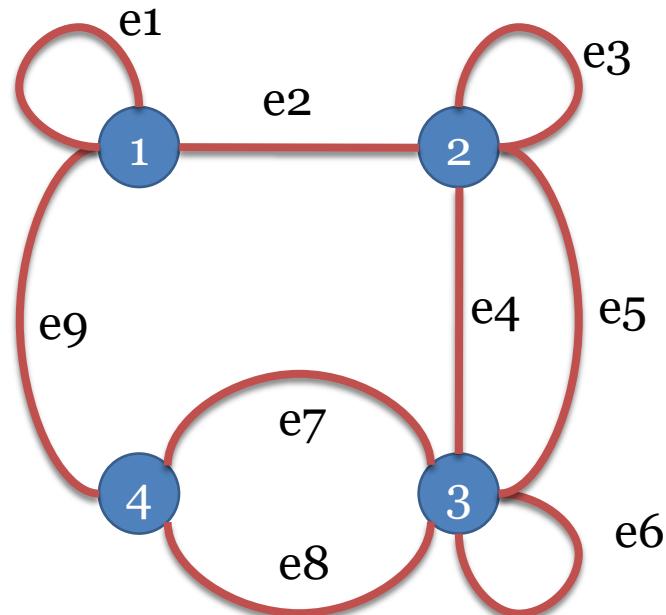
Biểu diễn bằng Ma trận liên thuộc

	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	1	0	1	0	1
d	0	0	0	1	1	0
e	0	0	1	0	1	1
	(a, b)	(b, c)	(a, e)	(c, d)	(d, e)	(c, e)



Biểu diễn bằng ma trận liên thuộc

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
	(1)	(1, 2)	(2)	(2, 3)	(2, 3)	(3)	(3, 4)	(3, 4)	(1, 4)

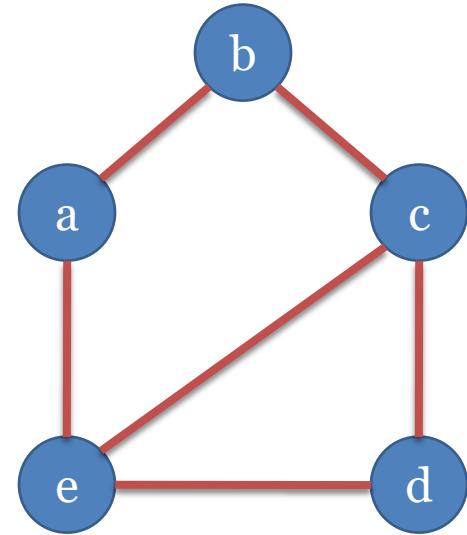


Biểu diễn trên máy tính

Danh sách kề

- Cách 1: Mảng
 - int MT_Ke[MAX][MAX];
 - int SoDinhKe[MAX];
- Cách 2: Danh sách liên kết
 - list DS_Ke[MAX];

	0	1	2	3	...
0					
1					
2					
3					
4					
...					



Đỉnh	Các đỉnh kề
a	b, e
b	a, c
c	b, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Biểu diễn trên máy tính

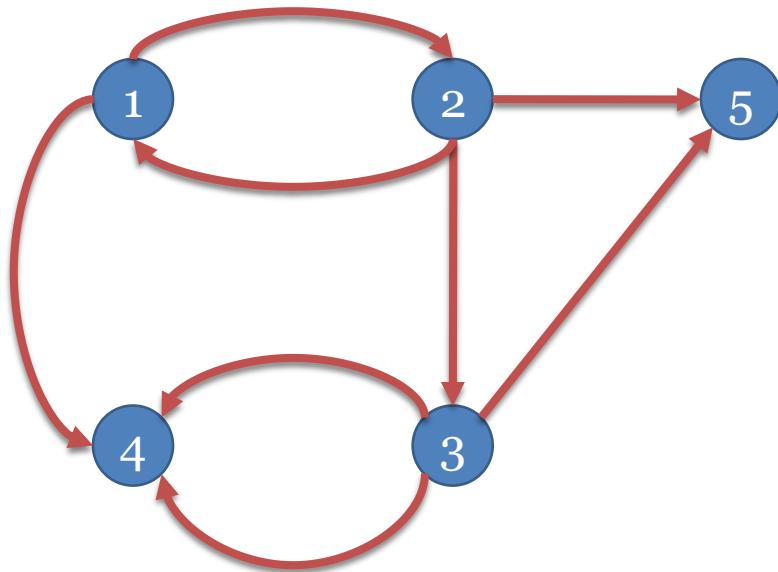
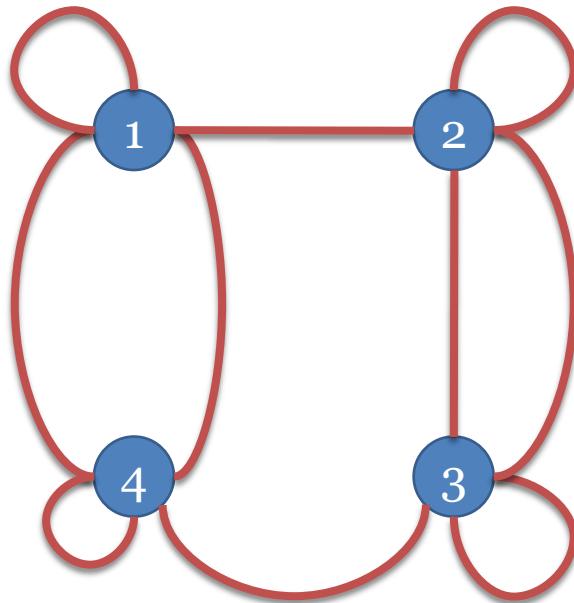
- **Ma trận kè & Ma trận liên thuộc**
 - int a[MAX][MAX];

Lựa chọn cách biểu diễn

- Chọn lựa cách biểu diễn nào là phù hợp?

Bài tập

1. Hãy biểu diễn các đồ thị sau đây bằng 3 cách biểu diễn đã học. Liệu có thể biểu diễn được?



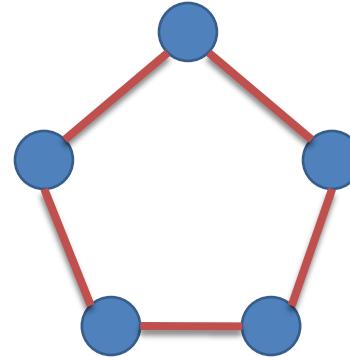
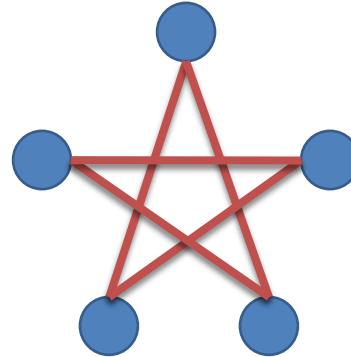
Bài tập

2. Hãy biểu diễn các đồ thị sau bằng các cách biểu diễn đã học

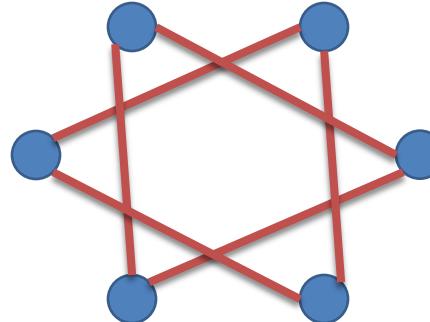
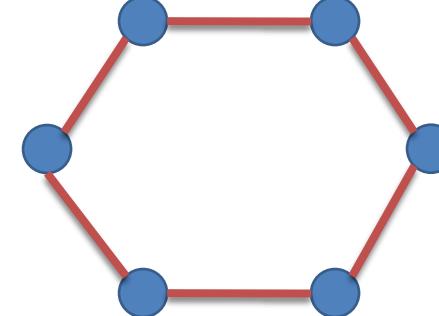
- a) K_4
- b) $K_{1,4}$
- c) C_4
- d) $K_{2,3}$

6. Các đồ thị sau đây có đằng cầu?

a)

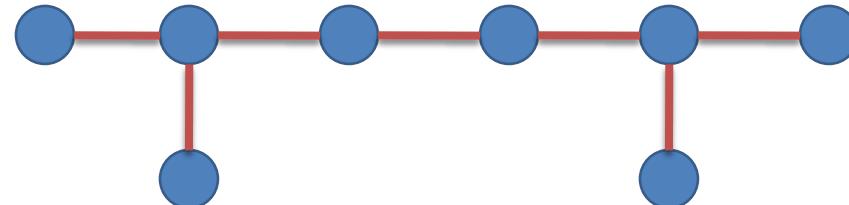
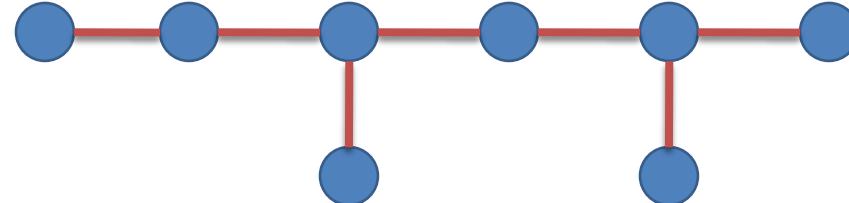


b)

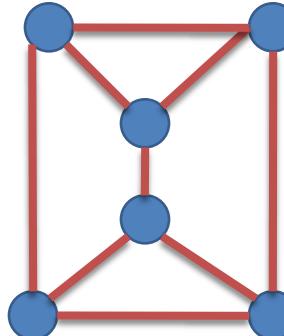
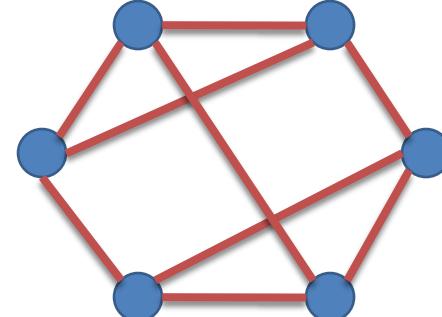


7. Các đồ thị sau đây có đằng cầu?

a)



b)



ĐƯỜNG ĐI, CHU TRÌNH

Đường đi

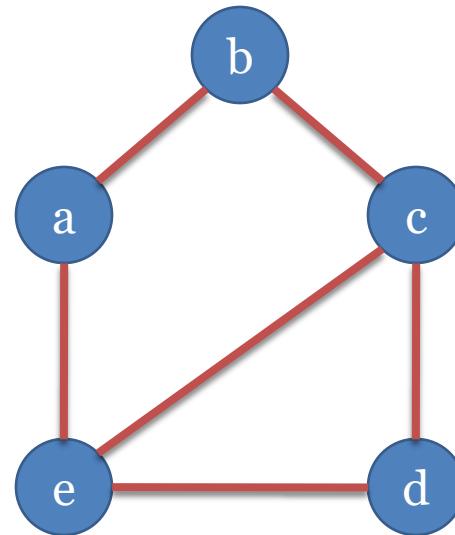
- **Đường đi (path)** (độ dài n) từ u tới v trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh $e_1, e_2 \dots e_n$ của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}, f(e_2) = \{x_1, x_2\} \dots f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$.
- Khi đồ thị là đơn ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, \dots x_n$.

Chu trình

- Đường đi được gọi là **chu trình (cycle/circuit)** nếu nó bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh (nghĩa là $u = v$).
- Đường đi hay chu trình gọi là đơn nếu nó không đi qua cùng một cạnh quá một lần.

Ví dụ về đường đi trên đồ thị

- $\{a, b, c, e, d\}$ là một đường đi độ dài 4.
- $\{a, b, e, d\}$ không là đường đi.
- $\{a, b, c, e, a\}$ là một chu trình.
- $\{c, e, d, e, c\}$ không phải là một đường đi đơn.

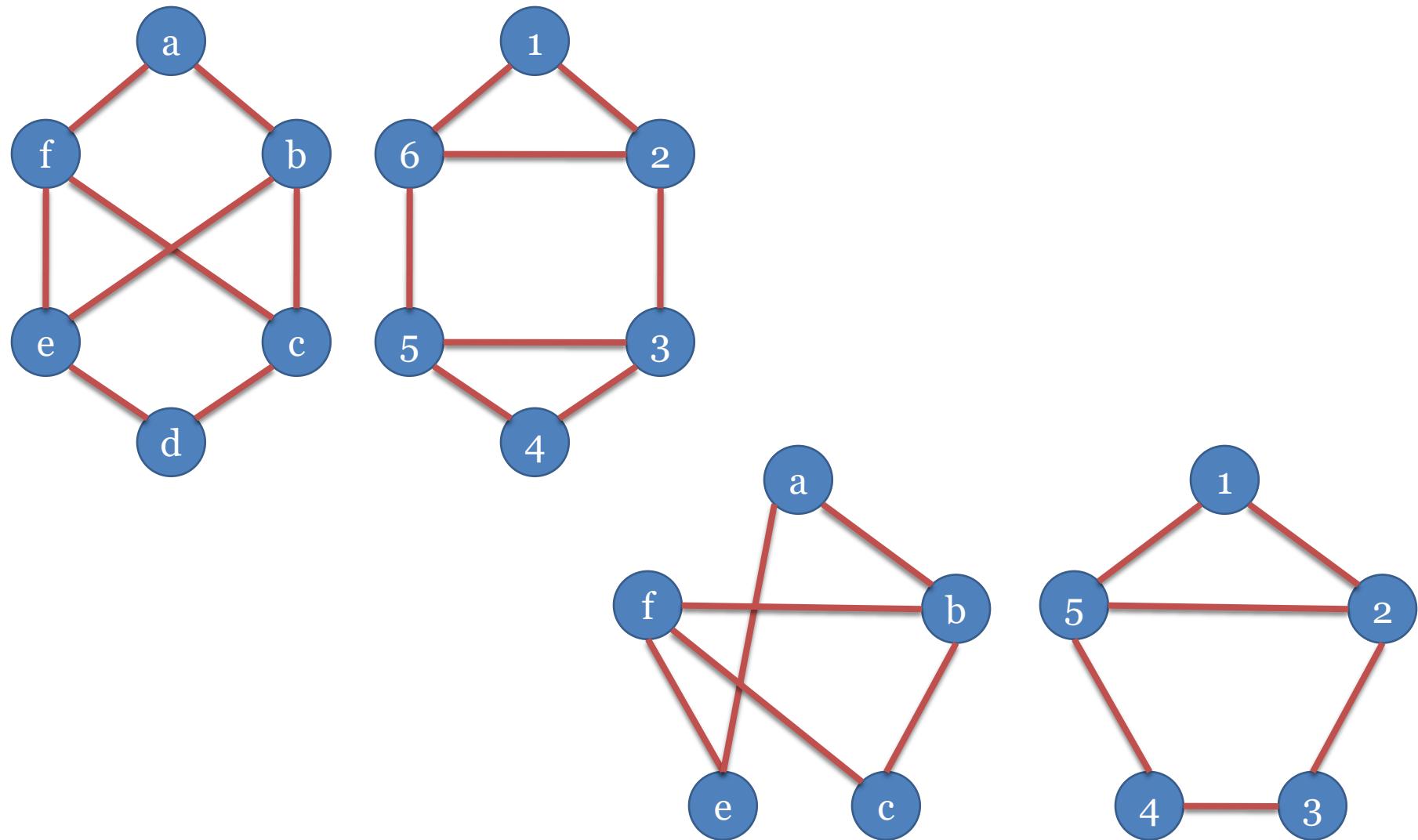


Chu trình và sự đằng cấu

- Nếu 2 đồ thị đằng cấu với nhau, nó sẽ có các chu trình có cùng độ dài k với nhau, trong đó $k > 2$.

(Điều này suy ra *Nếu điều kiện trên không thỏa, nghĩa là 2 đồ thị không đằng cấu với nhau*)

Chu trình và sự đằng cấu

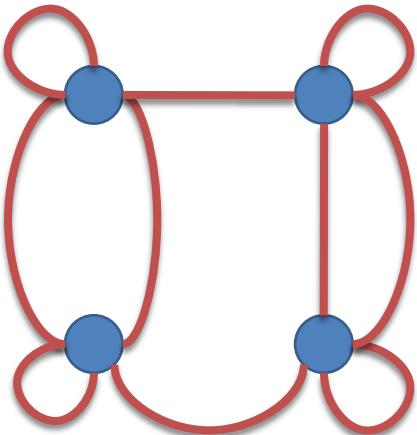
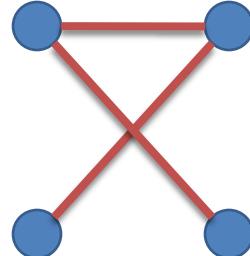
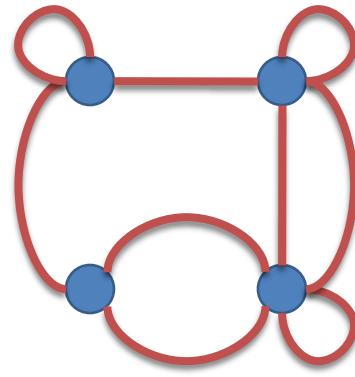
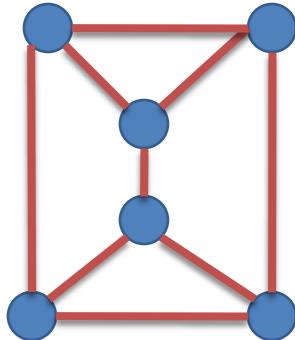
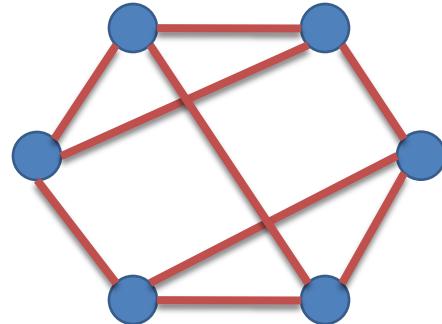


LIÊN THÔNG

Liên thông

- Một đồ thị vô hướng được gọi là **liên thông** (**connected**) nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.
- Ngược lại, đồ thị này được gọi là **không liên thông** (**disconnected**).

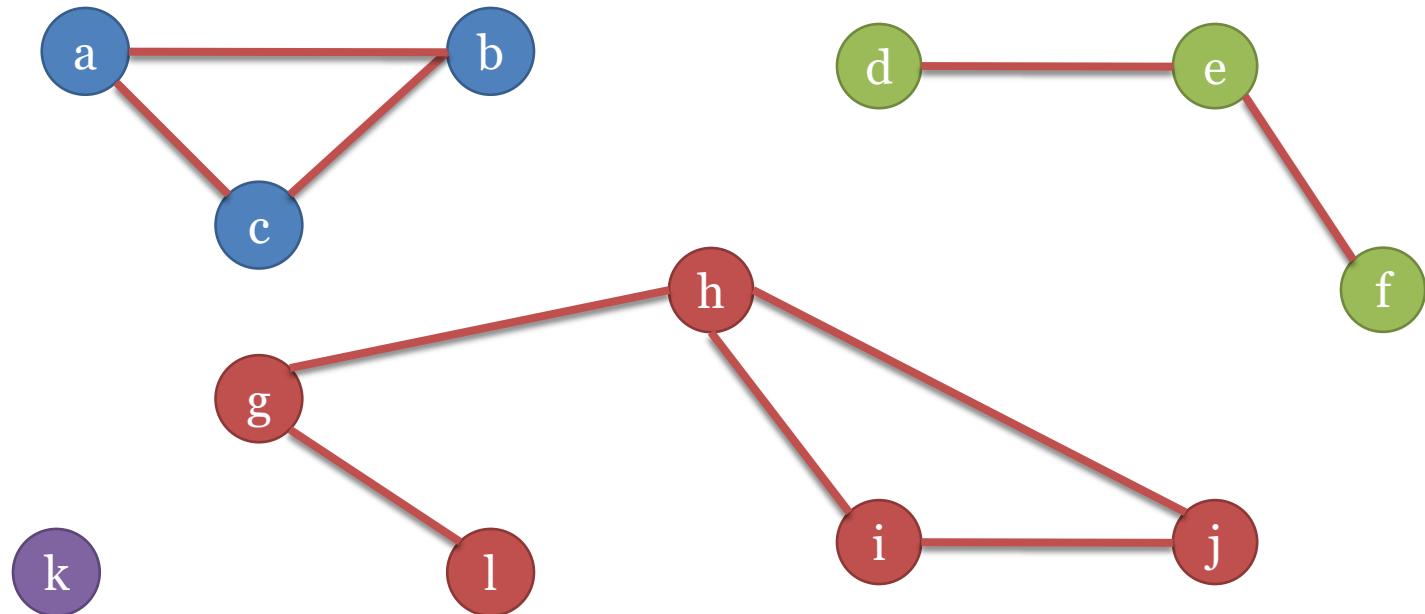
Ví dụ về đồ thị liên thông



Thành phần liên thông

- Một đồ thị không liên thông sẽ bao gồm nhiều đồ thị con liên thông, các đồ thị con này được gọi là các **thành phần liên thông (connected component)**.

Thành phần liên thông



Định lý về đường đi giữa 2 đỉnh bậc lẻ

- Định lý: Nếu một đồ thị G (không quan tâm liên thông hay không) có đúng 2 đỉnh bậc lẻ, chắc chắn sẽ có một đường đi nối 2 đỉnh này.

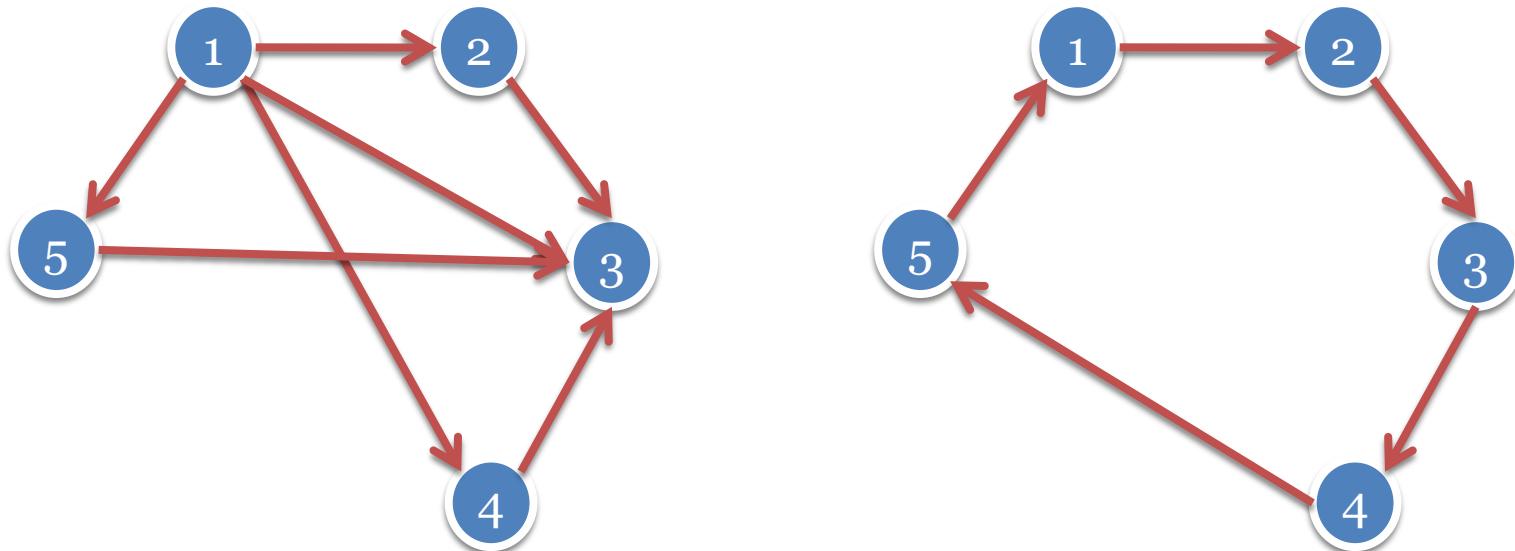
Chứng minh:

- TH1: G liên thông: rõ ràng có đường nối 2 đỉnh bậc lẻ này (do định nghĩa của đồ thị liên thông).
- TH2: G không liên thông: các thành phần liên thông của G là một đồ thị. Do đó, theo định lý về số đỉnh bậc lẻ, 2 đỉnh này phải thuộc về cùng một thành phần liên thông. Do vậy, phải có đường nối.

Đồ thị liên thông có hướng

- Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh* (*strongly connected*) nếu có đường đi từ a tới b và từ b tới a với mọi cặp đỉnh a và b của đồ thị.
- Đồ thị có hướng gọi là *liên thông yếu* (*weakly connected*) nếu có đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng nền.
- Đồ thị có hướng được gọi là *liên thông một phần* (*unilaterally connected*) nếu với mọi cặp đỉnh a, b bất kỳ, có ít nhất một đỉnh đến được đỉnh còn lại.

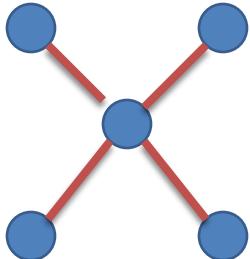
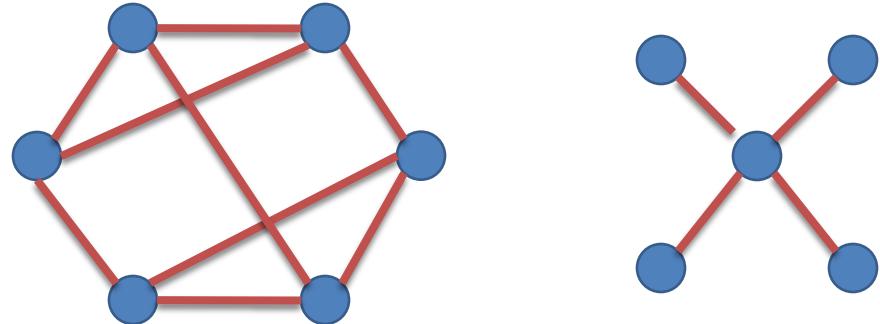
Ví dụ đồ thị liên thông có hướng



Đỉnh khớp, đồ thị song liên thông

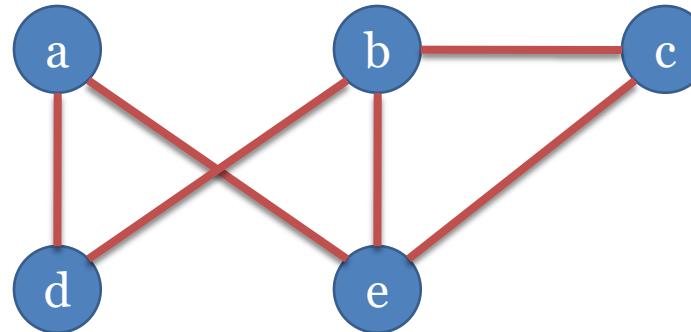
- **Đỉnh khớp (cut vertex/ articulation point)** của một đồ thị vô hướng là đỉnh mà nếu xóa đỉnh này khỏi đồ thị và các cạnh nối đến nó thì số thành phần liên thông của đồ thị sẽ tăng thêm.
- **Cạnh cầu (bridge)** của một đồ thị vô hướng là cạnh mà nếu xóa đi khỏi đồ thị thì số thành phần liên thông của đồ thị sẽ tăng thêm.
- **Đồ thị song liên thông (biconnectivity)** là đồ thị không chứa đỉnh khớp.

Ví dụ về đồ thị song liên thông



Bài tập

1. Mỗi danh sách các đỉnh sau đây có tạo nên đường đi trong đồ thị đã cho hay không? Đường đi nào là đường đi đơn? Đường đi nào là chu trình? Độ dài của các đường đi?
- a) a, e, b, c, d
 - b) a, e, a, d, b, c, a
 - c) e, b, a, d, b, e
 - d) c, b, d, a, e, c



Bài tập

3. Các đồ thị sau đây có phải là đồ thị song liên thông?

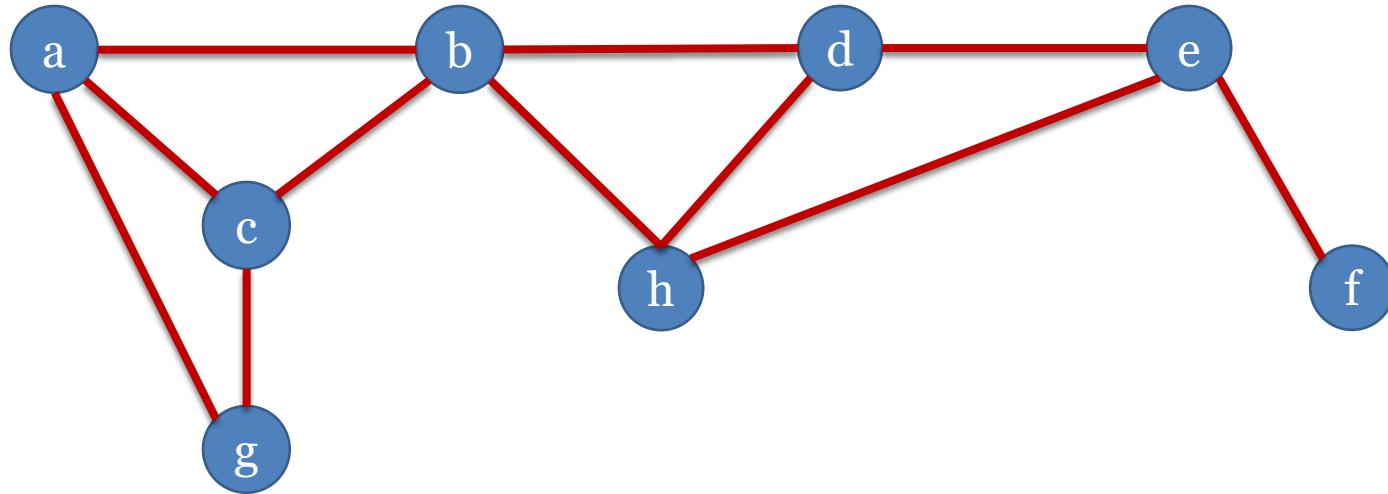
- a) K_3
- b) K_4
- c) $K_{2,3}$
- d) C_5

CÁC PHÉP DUYỆT ĐỒ THỊ

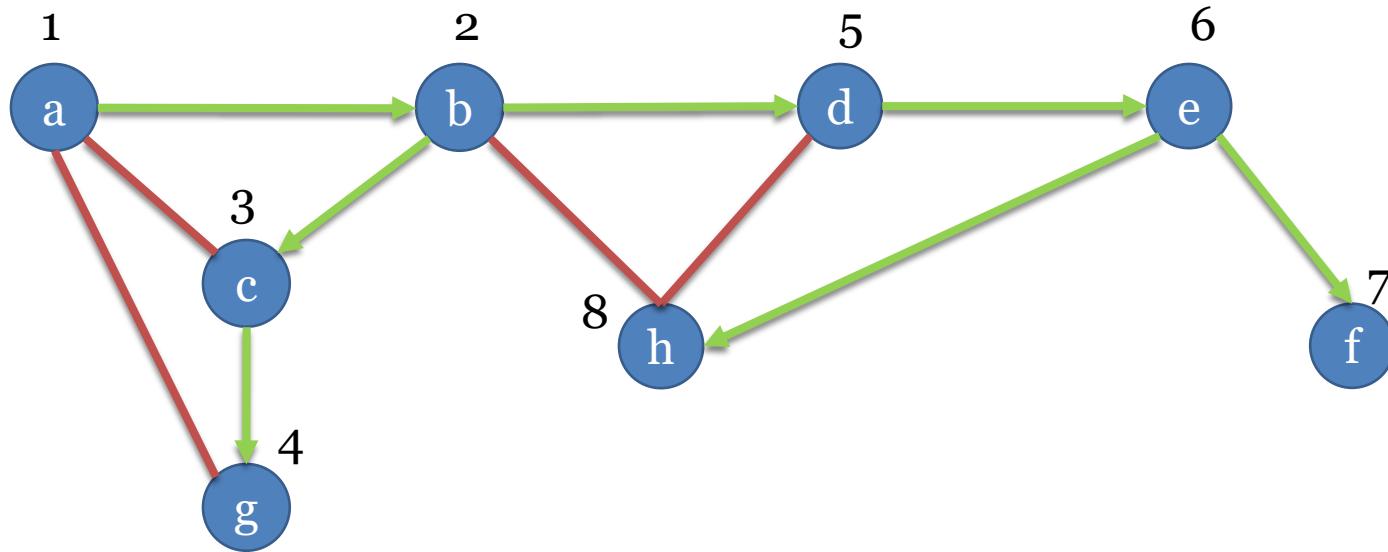
Duyệt theo chiều sâu

- Depth First Search (DFS)
- **Nguyên lý:** Khởi từ một đỉnh, đi theo các cạnh (cung) xa nhất có thể. Trở lại đỉnh sau của cạnh xa nhất, tiếp tục duyệt như trước cho đến đỉnh cuối cùng.

Ví dụ duyệt theo chiều sâu



Ví dụ duyệt theo chiều sâu



Thuật toán duyệt theo chiều sâu

```
procedure DFS (v)
begin
    ThămĐỉnh (v) ;
    chưaXét [v] = false;
    for u ∈ Kề (v) do
        if chưaXét [u] then
            DFS (u) ;
end
```

Thuật toán duyệt đồ thị

- Chương trình chính

BEGIN

for $v \in V$ **do**

 chưaXét [v] = **true**;

for $v \in V$ **do**

if chưaXét [v] **then**

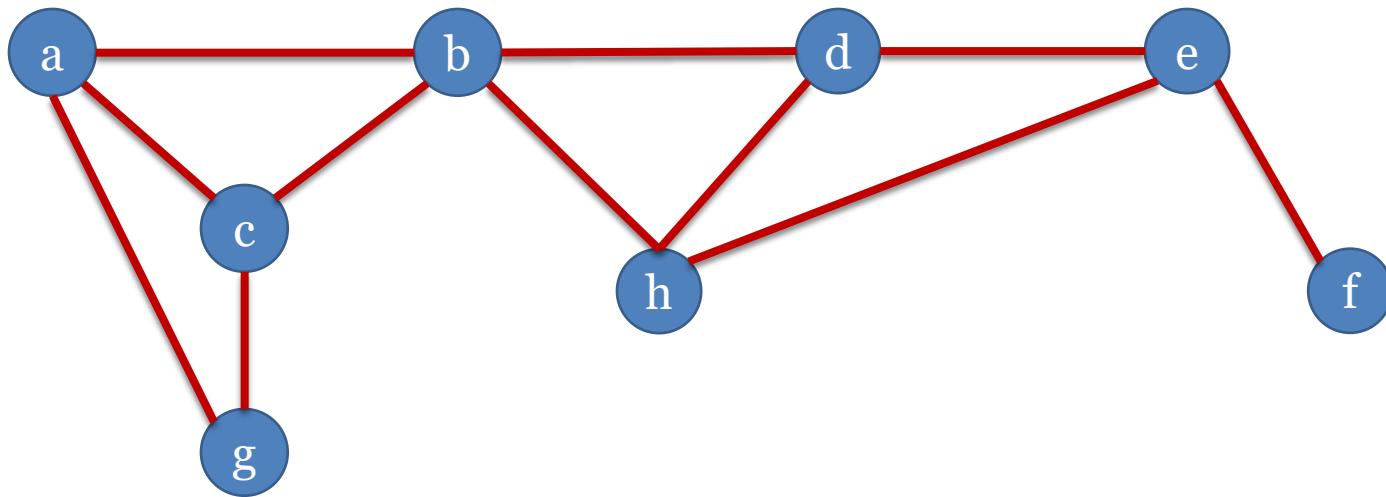
 DFS (v) ; //BFS (v)

END .

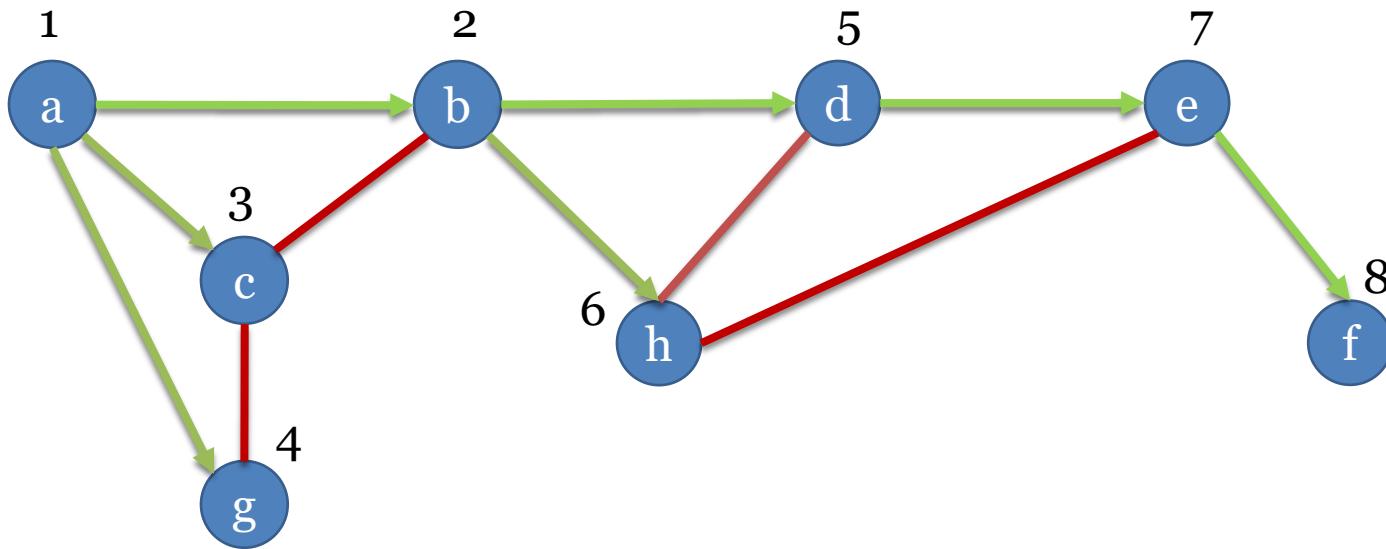
Duyệt theo chiều rộng

- Breadth First Search (BFS)
- **Ý tưởng:** Đỉnh “gần” ưu tiên thăm trước

Ví dụ duyệt theo chiều rộng



Ví dụ duyệt theo chiều rộng



Thuật toán duyệt theo chiều rộng

```
procedure BFS (v)
begin
    QUEUE =  $\emptyset$ ;
    QUEUE  $\leftarrow$  v; // Kết nạp v vào QUEUE
    chưaXét[v] = false;
    while QUEUE  $\neq \emptyset$  do
        p  $\leftarrow$  QUEUE;
        ThămĐỉnh(p);
        for u  $\in$  Kề(p) do
            if chưaXét[u] then
                QUEUE  $\leftarrow$  u;
                chưaXét[u] = false;
    end;
```

Hỏi & đáp