05. ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ BÀI TOÁN TÔ MÀU

Bài giảng Lý thuyết đồ thị

Bài toán ba nhà máy

- **Bài toán:** Trong một thị trấn có ba biệt thự và ba nhà máy cung cấp: điện, nước và khí đốt.

  Mỗi biệt thự đều muốn mắc đường cáp điện ngầm, đường ống cấp nước, đường ống cấp khí đốt riêng từ nhà mình đến ba nhà máy mà không gặp đường ống của các biệt thự khác.

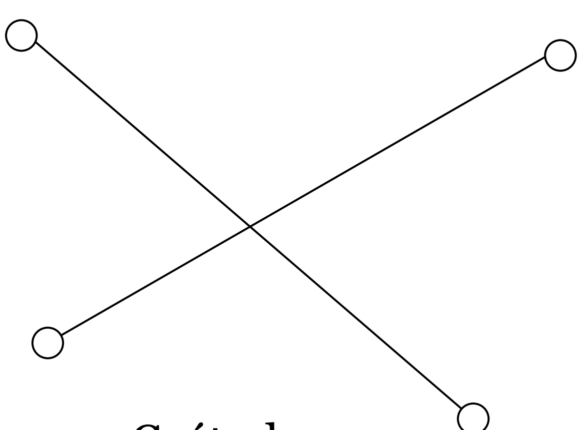
  Hỏi rằng có làm được những đường đi như thế hay không?

Định nghĩa

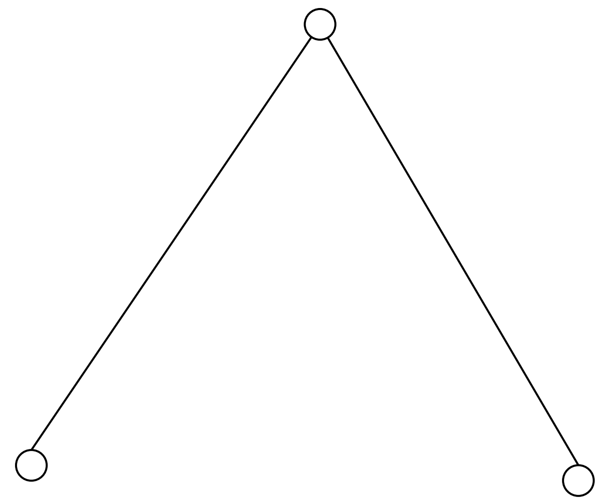
- (1) **Đồ thị phẳng**
  - Một đồ thị vô hướng G được gọi là phẳng nếu tồn tại một cách vẽ G trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau.
  - Khi G là một đồ thị phẳng thì mỗi cách vẽ G trong mặt phẳng (sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau) được gọi là một biểu diễn phẳng của G.

Định nghĩa

- **Ghi chú**: hai cạnh có chung một đỉnh được qui ước là không cắt nhau



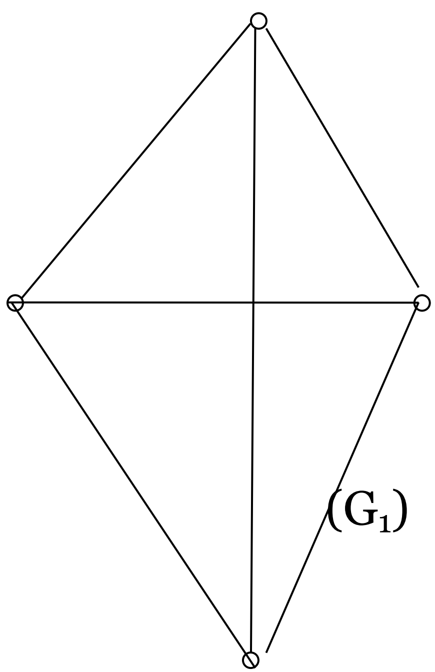
Caét nhau

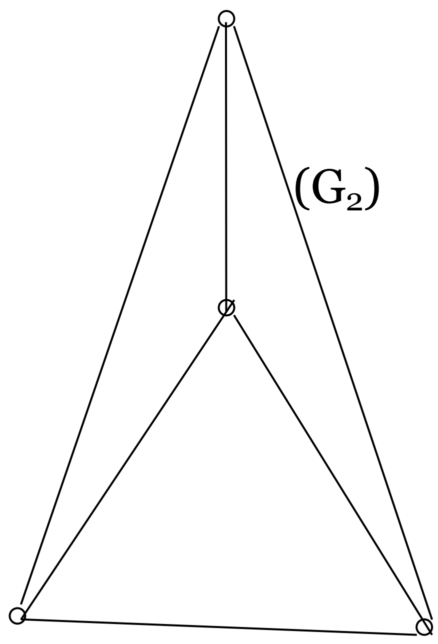


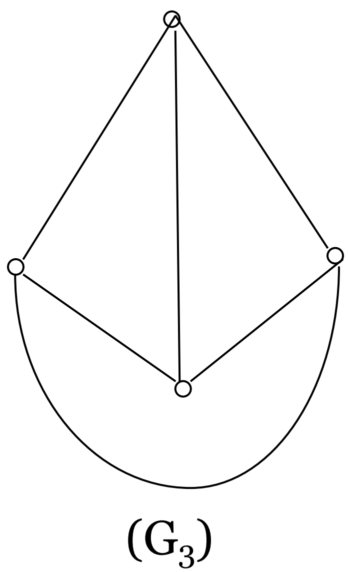
Khoâng caét nhau

Định nghĩa

- **<u>Ví dụ:</u>** Đồ thị (G_1) là đồ thị phẳng và các đồ thị (G_2), (G_3) là các biểu diễn phẳng của (G_1).

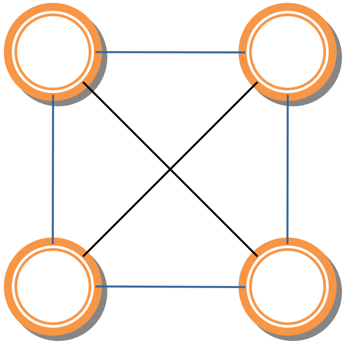


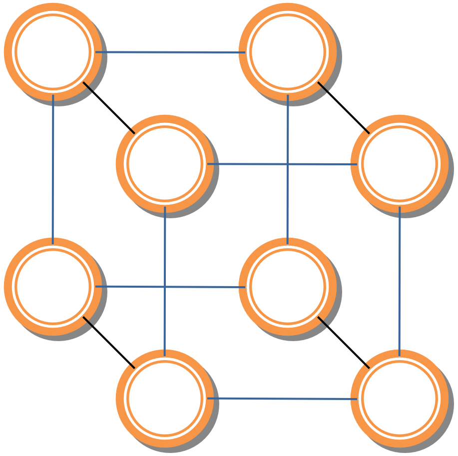




Một số ví dụ

- Các đồ thị sau có phải là đồ thị phẳng?



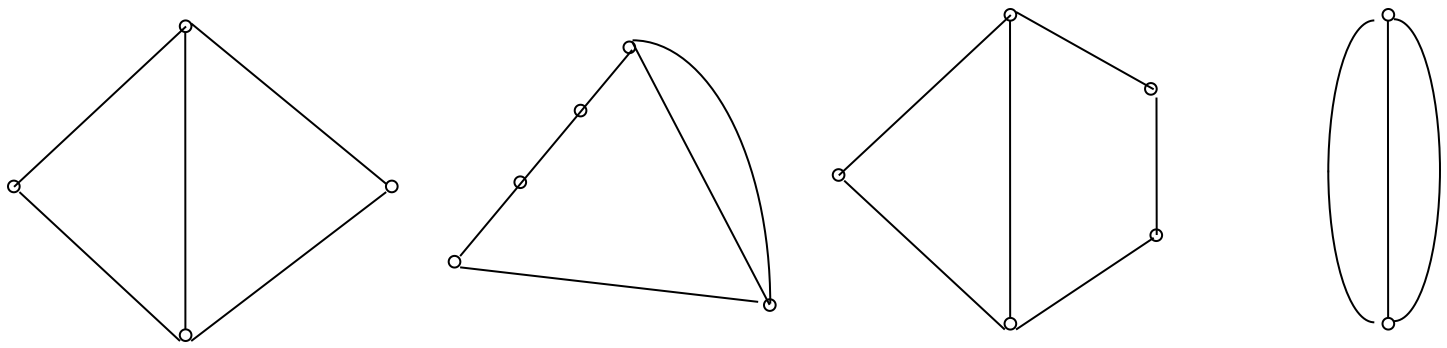


Định nghĩa

- (2) **<u>Phép biến đổi đồng phôi</u>**
  - Thêm vào 1 đỉnh nằm trên 1 cạnh hay gộp 2 cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành 1 cạnh.
- (3) **<u>Đồ thị đồng phôi</u>**
  - Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi.
- **<u>Định lý</u>:** Nếu G là một đồ thị phẳng thì ta có thể tìm một đồ thị G_1 đồng phôi với G sao cho có thể vẽ G_1 bằng cách chỉ dùng các đoạn thẳng.

Định nghĩa

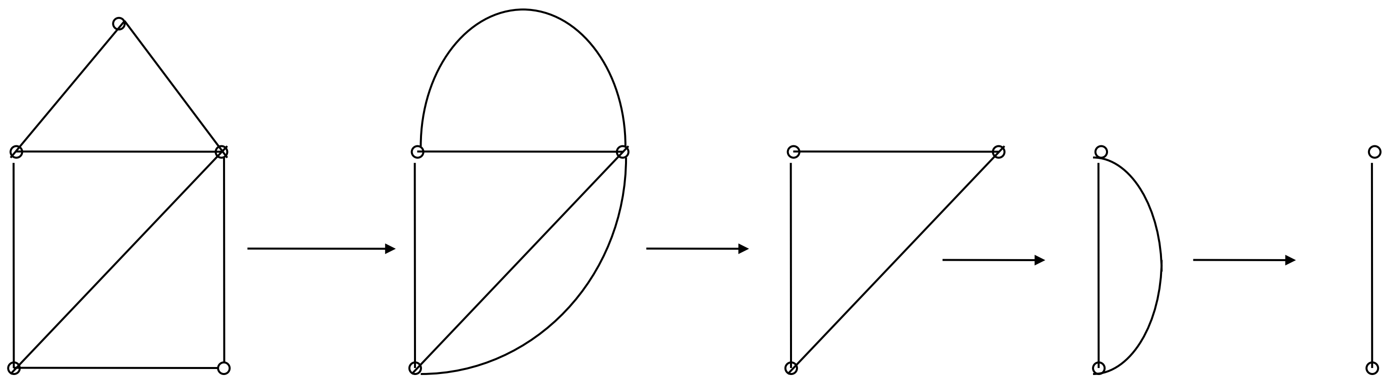
- Các đồ thị sau đây đồng phôi



Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị

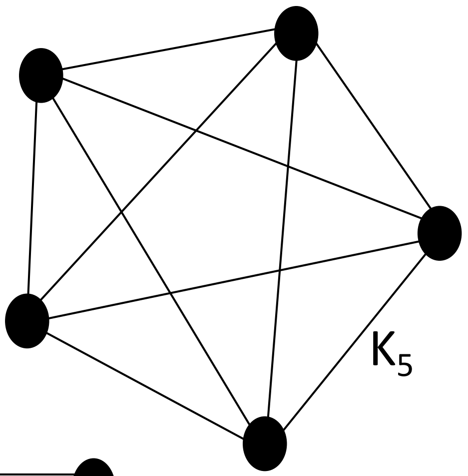
- Tính phẳng của một đồ thị không thay đổi nếu thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn sau đây:
  - Bỏ đi các khuyên
  - Bỏ bớt các cạnh song song (chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh).
  - Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị

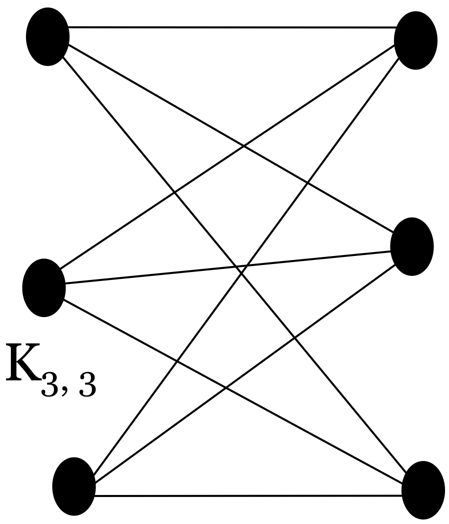


Định lý Kuratowski

- **<u>Định lý 1</u>**<u>: </u>Đồ thị đủ K_5 không phẳng.



- **<u>Định lý 2</u>**<u>: </u>Đồ thị lưỡng phân đủ $K_{3,3}$ không phẳng.



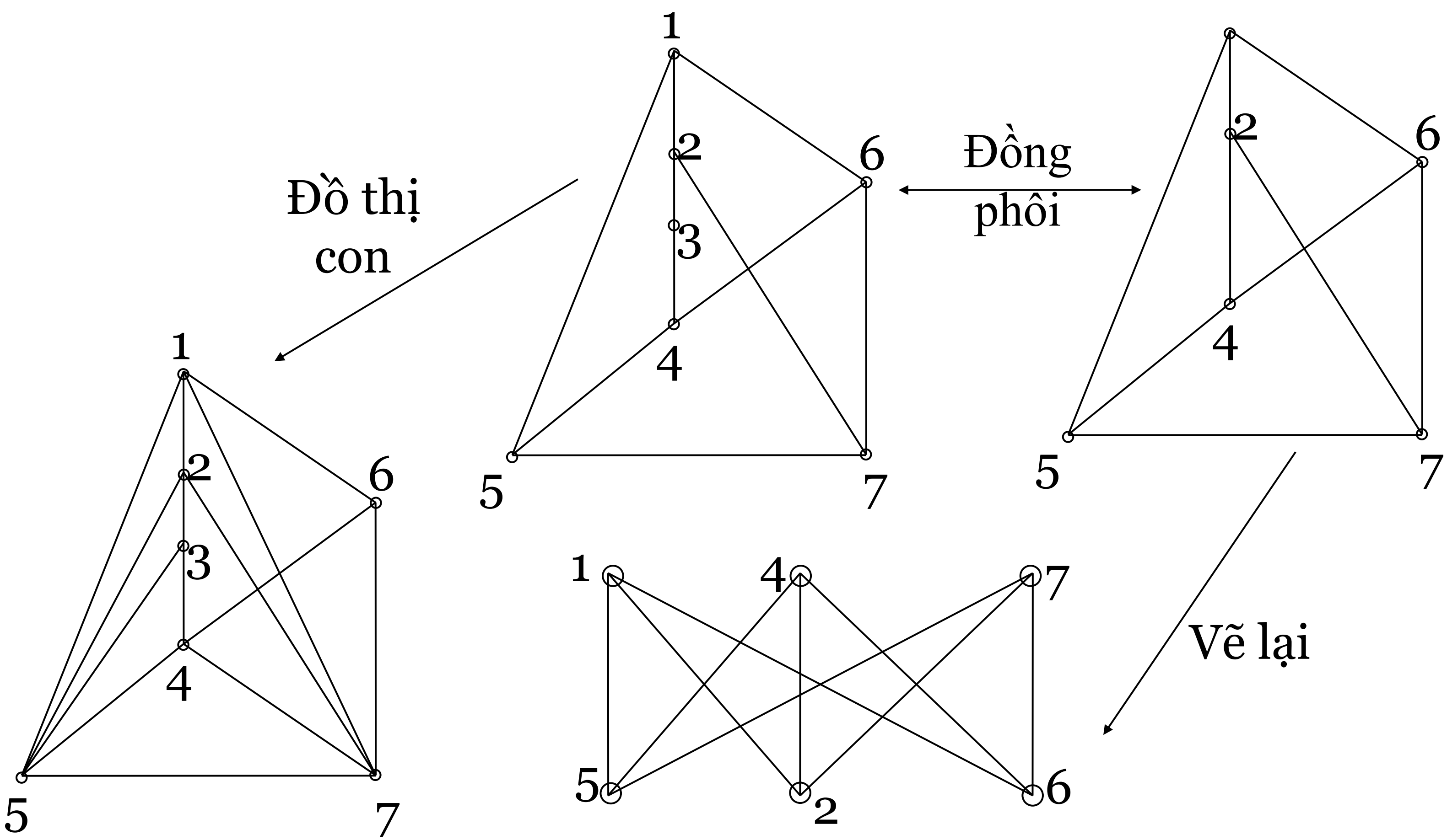
Định lý Kuratowski

- **Nhận xét**: hai đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất với các tính chất sau
  - Nếu xóa đi 1 đỉnh hay 1 cạnh của 2 đồ thị trên thì chúng ta sẽ có được đồ thị phẳng.
  - Đồ thị K_5 là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất.
  - Đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất.

Định lý Kuratowski

- <u>Định lý 3.</u>
  - Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông G có tính phẳng là G không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hay $K_{3,3}$.

Định lý Kuratowski



Công thức Euler

- **Định lý**: Cho G là đồ thị phẳng, liên thông gồm n đỉnh, e cạnh. Giả sử G chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức sau (công thức Euler):

$$f = e - n + 2$$

$$(n – e + f = 2)$$

- **Hệ quả**: Nếu G là đồ thị đơn, phẳng, liên thông, gồm n đỉnh và e cạnh (với e > 2). Giả sử G chia mặt phẳng ra thành f vùng. Ta có

$$e \geq (3/2)f$$

$$e \leq 3n - 6$$

Công thức Euler

- Ví dụ, áp dụng hệ quả nầy để chứng minh tính không phẳng của K_5.

  K_5 là đồ thị đơn và liên thông có n=5 và e=10, ta có e = 10 > 9 = 3n - 6 do đó K_5 không phẳng (chú ý rằng đảo lại nếu một đồ thị thỏa mãn $e \leq 3n – 6$ thì chưa chắc là đồ thị phẳng, $K_{3,3}$ là một ví dụ).

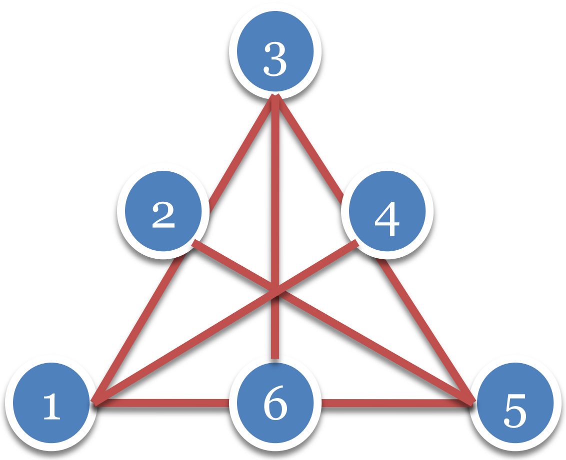
Công thức Euler tổng quát

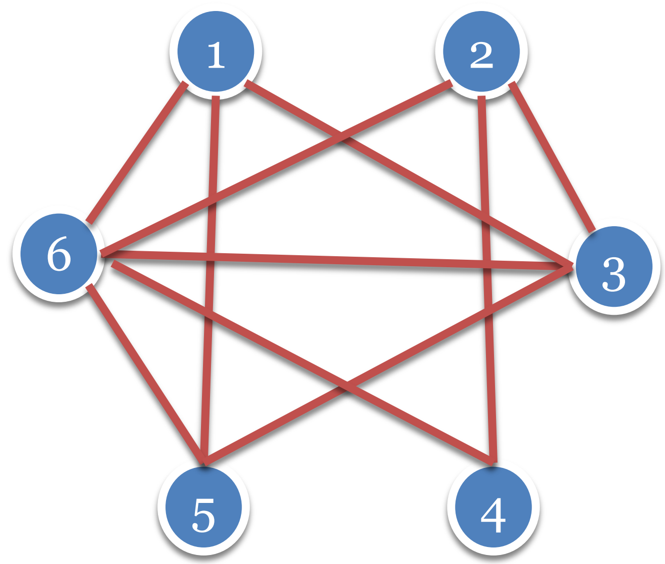
- Cho G là đồ thị phẳng, gồm n đỉnh, e cạnh, p thành phần liên thông. Giả sử G chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức sau (công thức Euler tổng quát):

$$n - e + f = p + 1$$

Bài tập

- Xác định các đồ thị sau đây có phẳng hay không? Nếu phẳng, hãy vẽ lại để các cạnh không cắt nhau.





Bài tập

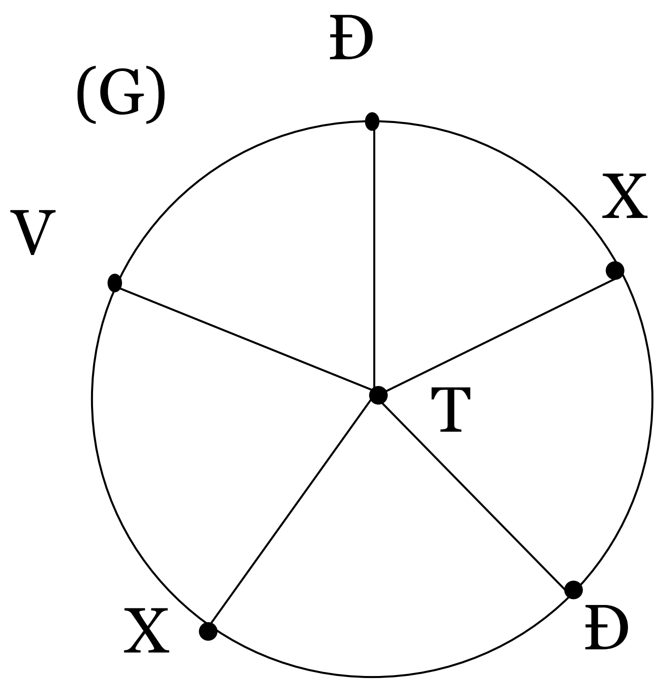
- 2. Giả sử đồ thị liên thông có 6 đỉnh, mỗi đỉnh đều bậc 4. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?
- 3. Đồ thị nào trong số các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: bỏ đi một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc vơí nó sẽ tạo ra đồ thị phẳng?
  - a) $K_{5;}$
  - b) $K_{6;}$
  - c) $K_{3,3}$
  - d) $K_{3,4}$

Tô màu đồ thị

- **Sắc số của đồ thị**
  - Một <u>phép tô màu</u> đồ thị là một cách đánh nhãn cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một màu sao cho 2 đỉnh kề nhau phải được đánh nhãn khác nhau.
  - <u>Sắc số</u> của một đồ thị G, ký hiệu $\gamma(G)$, là một số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một phép tô màu G chỉ sử dụng k màu.

Tô màu đồ thị

- $\gamma(G) = 4$
- $\gamma(K_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\gamma\left(K_{m,n}\right) = 2, \forall m, n \in \mathbb{N}$



Tô màu đồ thị

- **Một vài tính chất về sắc số**
  - Nếu đồ thị G có chứa ít nhất một cạnh không phải là khuyên thì $\gamma(G) \geq 2$.
  - Đồ thị đủ n đỉnh K_n có sắc số là n. Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đẳng cấu K_r thì $\gamma(G) \geq r$.
  - Nếu đồ thị G là một chu trình sơ cấp n đỉnh thì:
    - $\gamma(G) = 2$ nếu n chẳn, $\gamma(G) = 3$ nếu n lẻ;
    - $\gamma(G) = (n \bmod 2) + 2$.

Tô màu đồ thị

- Định lý 1.
  - Nếu T là một cây n đỉnh với $\mathrm{n} \geq 2$ thì $\gamma(\mathrm{T}) = 2$.
- Định lý 2 – Định lý Konig
  - Cho G là đồ thị liên thông có ít nhất 1 cạnh. Khi đó $\gamma(G) = 2$ khi và chỉ khi G không chứa chu trình sơ cấp có số cạnh lẻ.
- Định lý 3.
  - Cho đồ thị G=(V, E). Gọi $\mathrm{d}(\mathrm{G}) = \max\{\mathrm{d}(\mathrm{v}) | \mathrm{v} \in \mathrm{V}\}$. Ta có: $\gamma(G) \leq \mathrm{d}(\mathrm{G}) + 1$.

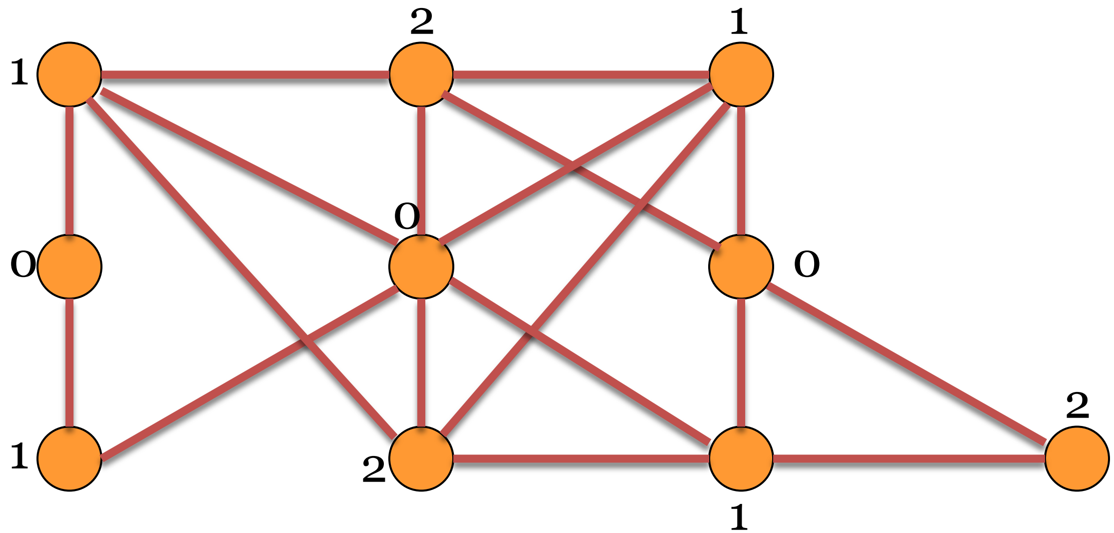
Thuật toán Tô màu

1. Liệt kê các đỉnh v_1 , *v_2 , ... , v_n của đồ thị theo thứ tự giảm dần của bậc: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$ để làm giảm các phép kiểm tra ở bước dưới.*

   Lần lượt tô màu các đỉnh theo thứ tự đã liệt kê:

2. Tô màu i = 0 cho đỉnh v_1 *cùng các đỉnh không kề với v_1 và không kề với các đỉnh đã tô màu 0.*
3. Lặp lại thủ tục tô màu *i+1 giống như thủ tục tô màu i cho đến khi tô màu hết các đỉnh của đồ thị.*

Ví dụ

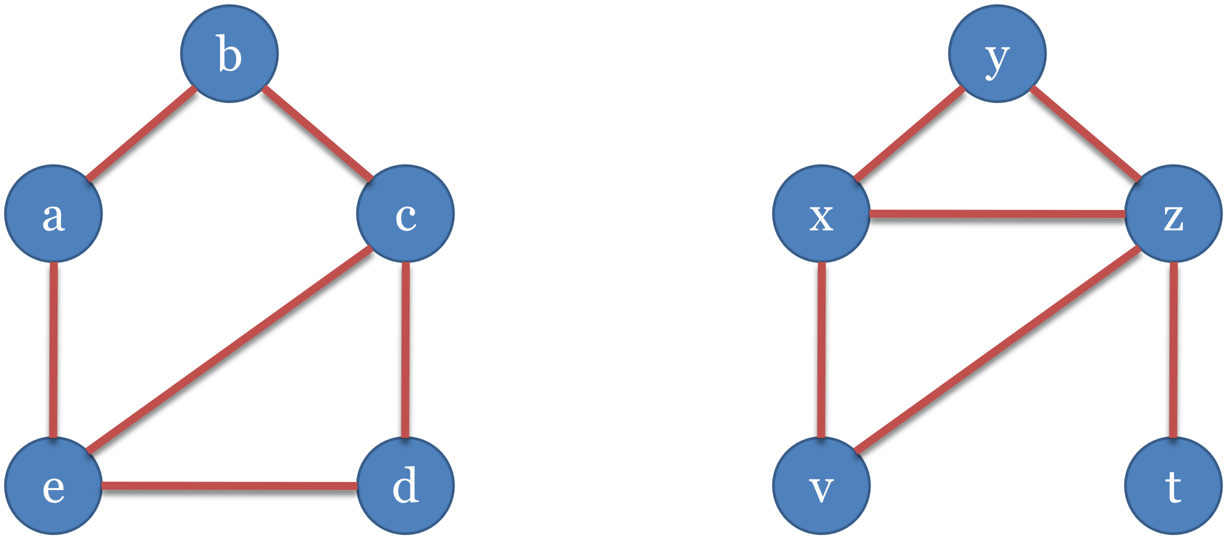


Bài toán sắc số của đồ thị phẳng

- Lịch sử về giả thuyết 4 màu
- Khoảng 10/1852, giáo sư De Morgan ở trường Đại học Luân Đôn viết thư cho đồng nghiệp của mình là ông Sir William Hamilton để bàn về bài toán: “Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước nằm kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau”.
- Sau đó có nhiều cố gắng của một số nhà toán học để giải bài toán nầy nhưng đều không đi đến kết quả cuối cùng. Đặc biệt có một lời giải bị sai (phải sau 10 năm mới phát hiện được chỗ không đúng trong lời giải), nhưng lý luận của lời giải nầy đúng cho “bài toán 5 màu”. Vào năm 1976, ...

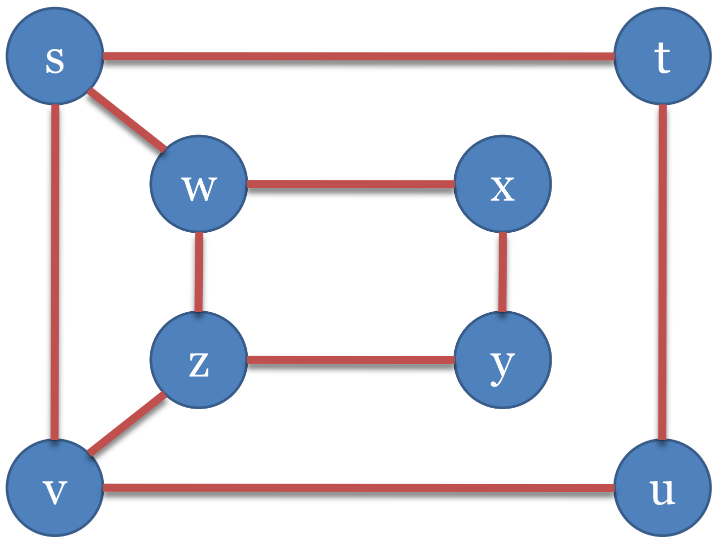
Bài tập

- Hãy tìm sắc số của các đồ thị đã cho



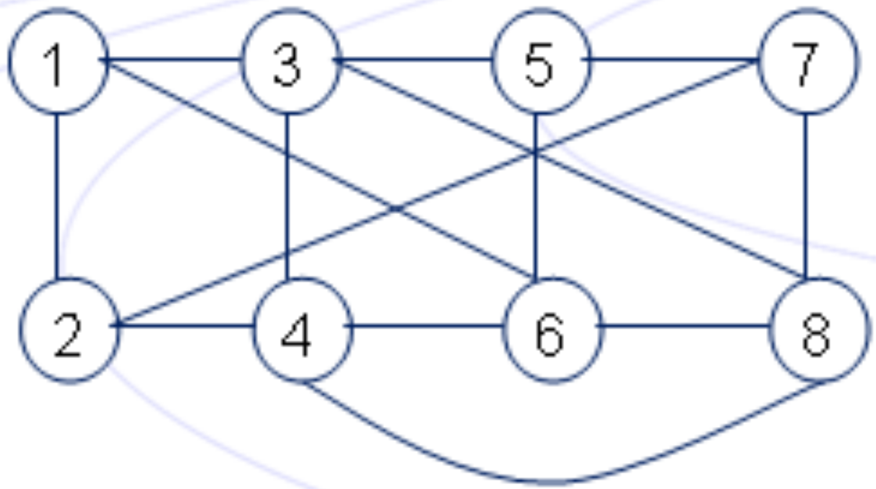
Bài tập

- Hãy tìm sắc số của các đồ thị đã cho



Bài tập

Cho đồ thị G:



1. Xét tính phẳng của G
2. Tô màu G

Hỏi đáp