ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ THUẬT TOÁN

Sơ đồ thuật toán cơ bản

NỘI DUNG

- Đệ quy
- Đệ quy có nhớ
- Đệ quy quay lui
- Thuật toán nhánh và cận
- Thuật toán tham lam
- Thuật toán chia để trị
- Thuật toán quy hoạch động

ĐỆ QUY

- Hàm được định nghĩa đệ quy
  - Bước cơ sở: định nghĩa giá trị hàm với tham số cơ sở (nhỏ nhất)
  - Bước đệ quy: giá trị hàm phụ thuộc vào giá trị của hàm với tham số nhỏ hơn

$$F(n) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } n = 1 & \text{(bước cơ sở)} \\ F(n-1) + n, \text{ với } n > 1 & \text{(bước đệ quy)} \end{cases}$$

ĐỆ QUY

- Hàm được định nghĩa đệ quy
  - Bước cơ sở: định nghĩa giá trị hàm với tham số cơ sở (nhỏ nhất)
  - Bước đệ quy: giá trị hàm phụ thuộc vào giá trị của hàm với tham số nhỏ hơn

$$F(n) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } n = 1 & \text{(bước cơ sở)} \\ F(n-1) + n, \text{ với } n > 1 & \text{(bước đệ quy)} \end{cases}$$

- Tập hợp được định nghĩa đệ quy
  - Bước cơ sở: xác định các phần tử đầu tiên của tập hợp
  - Bước đệ quy: Luật để xác định các phần tử khác thuộc tập hợp từ những phần từ đã thuộc tập hợp từ trước

Bước cơ sở: $3 \in S$

Bước đệ quy: nếu $x \in S$ và $y \in S$ thì $x + y \in S$

ĐỆ QUY

- Một chương trình con (thủ tục/hàm) đưa ra lời gọi đến chính nó nhưng với dữ liệu đầu vào nhỏ hơn
- Tình huống cơ sở
  - Dữ liệu đầu vào nhỏ đủ để đưa ra kết quả một cách trực tiếp mà không cần đưa ra lời gọi đệ quy
- Tổng hợp kết quả
  - Kết quả của chương trình còn được xây dựng từ kết quả của lời gọi đệ quy và một số thông tin khác

Ví dụ: tổng 1 + 2 + … + n

```
int sum(int n) {
  if (n <= 1) return  1;
  int s = sum(n-1);
  return n + s;
}
```

ĐỆ QUY

- Ví dụ: hằng số tổ hợp

$$C(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

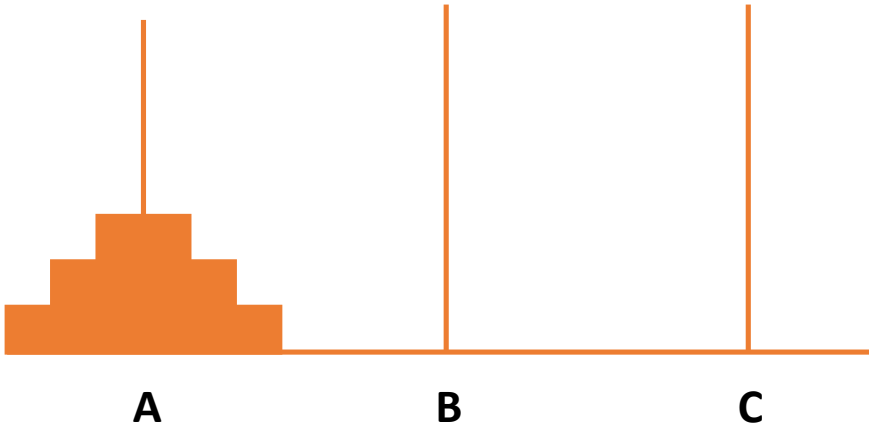
- $C(k, n) = C(k\text{-}1, n\text{-}1) + C(k, n\text{-}1)$
- Trường hợp cơ sở:

$$C(0, n) = C(n, n) = 1$$

```
int C(int k, int n) {
  if (k == 0 || k == n)
    return  1;
  int C1 = C(k-1,n-1);
  int C2 = C(k,n-1);
  return C1 + C2;
}
```

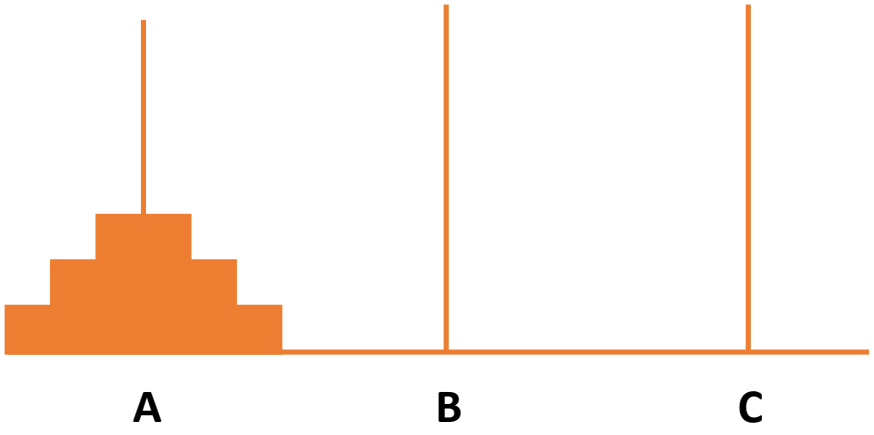
THÁP HÀ NỘI

- Bài toán tháp Hà Nội
  - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
  - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới



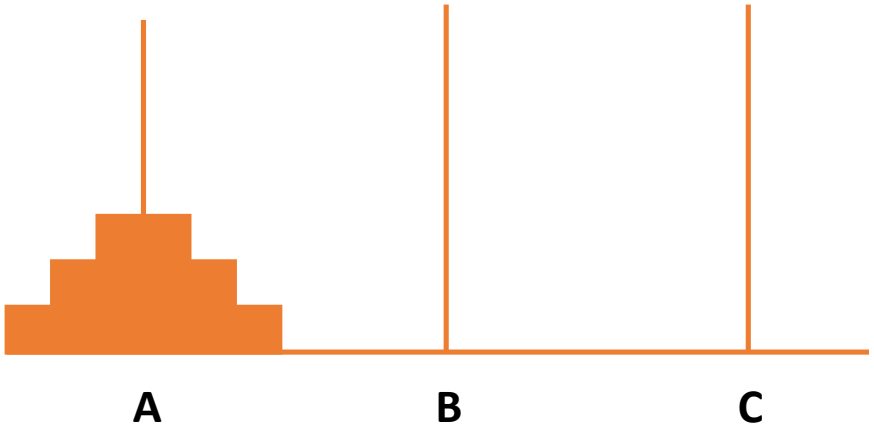
THÁP HÀ NỘI

- Bài toán tháp Hà Nội
  - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
  - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới
  - Tìm cách chuyển n đĩa này từ cọc A sang cọc B, sử dụng cọc C làm trung gian theo nguyên tắc
    - Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa trên cùng từ 1 cọc sang cọc khác
    - Không được phép để xảy ra tình trạng đĩa to nằm bên trên đĩa nhỏ



THÁP HÀ NỘI

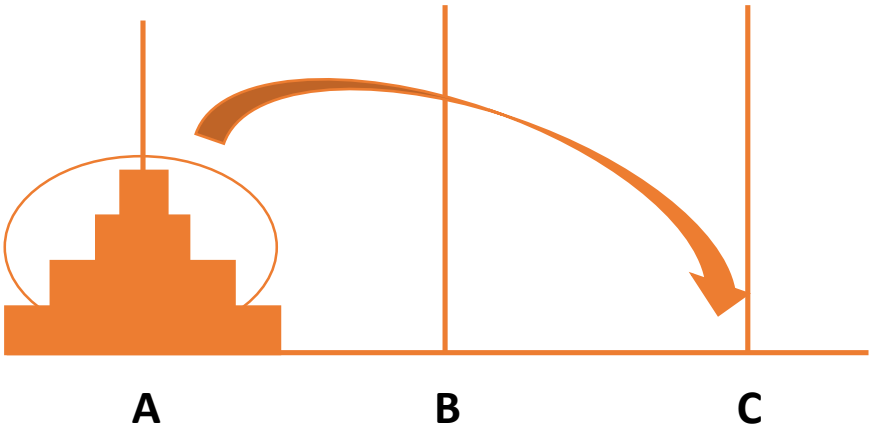
- Bài toán tháp Hà Nội
  - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
  - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới
  - Tìm cách chuyển n đĩa này từ cọc A sang cọc B, sử dụng cọc C làm trung gian theo nguyên tắc
    - Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa trên cùng từ 1 cọc sang cọc khác
    - Không được phép để xảy ra tình trạng đĩa to nằm bên trên đĩa nhỏ

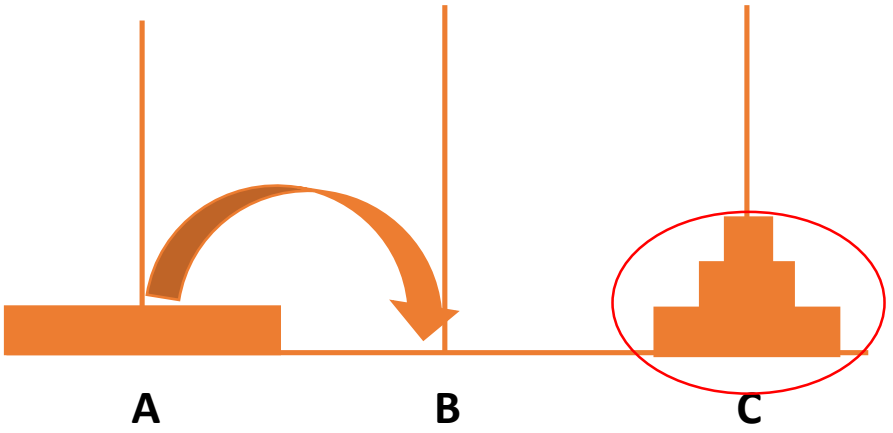


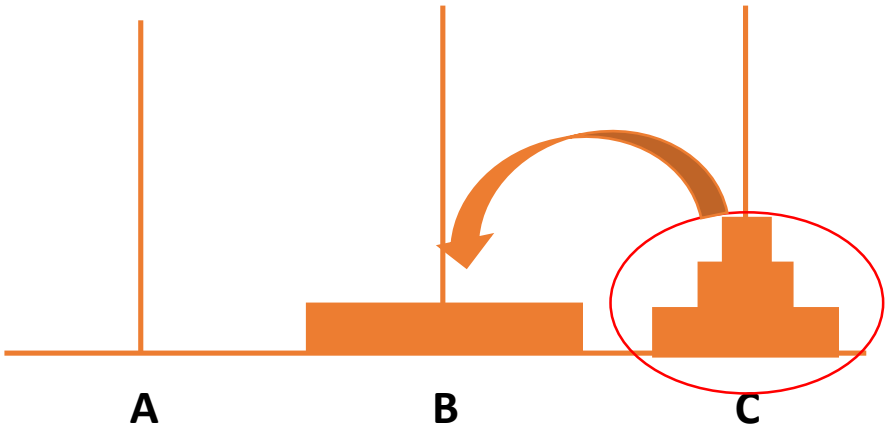
Lời giải

- B1: A → B
- B2: A → C
- B3: B → C
- B4: A → B
- B5: C → A
- B6: C → B
- B7: A → B

THÁP HÀ NỘI

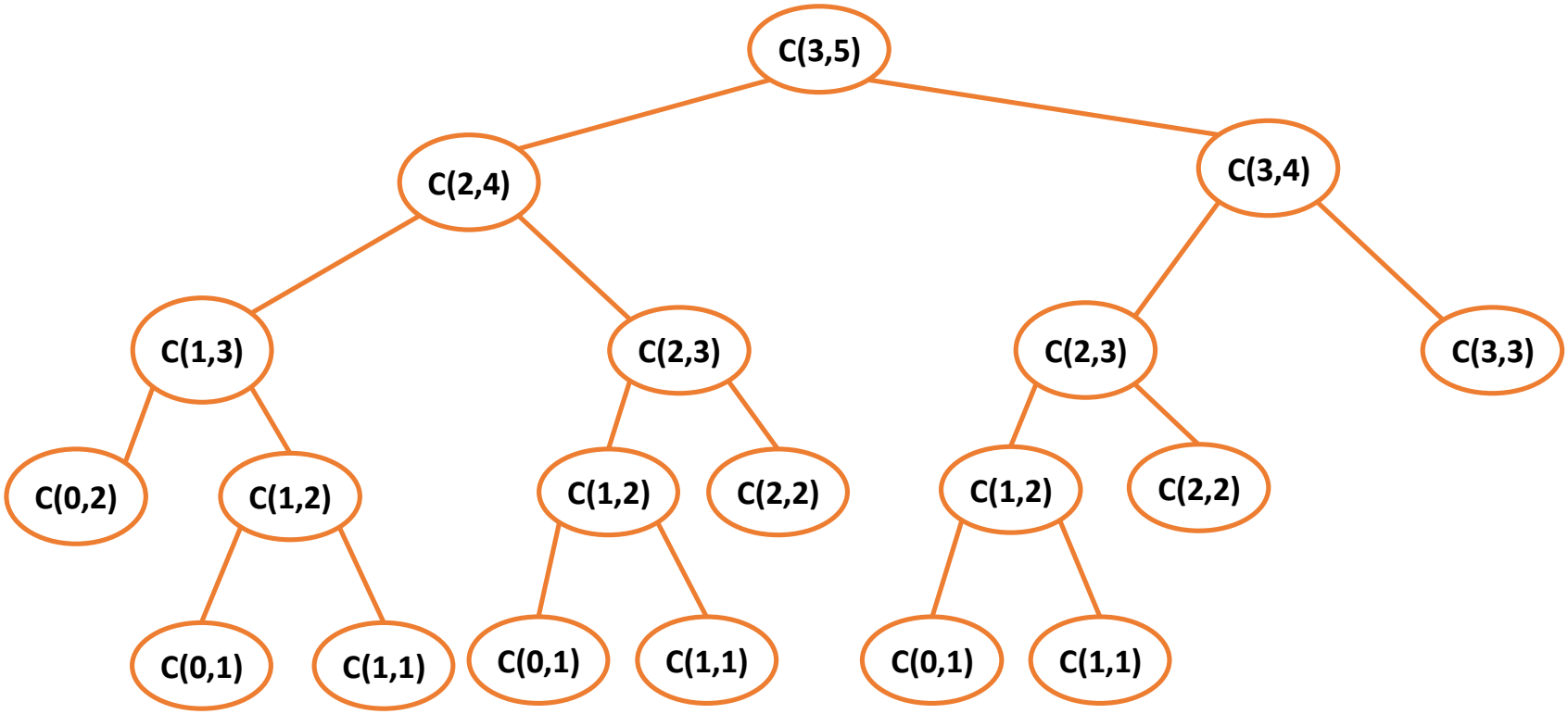







```
move(n, A, B, C) {
  if(n == 1) {
    print("Move 1 disk from A to B")
  }else{
    move(n-1, A, C, B);
    move(1, A, B, C);
    move(n-1, C, B, A);
  }
}
```

ĐỆ QUY CÓ NHỚ


C(3,5)
C(2,4)
C(3,4)
C(1,3)
C(2,3)
C(2,3)
C(3,3)
C(0,2)
C(1,2)
C(1,2)
C(2,2)
C(1,2)
C(2,2)
C(0,1)
C(1,1)
C(0,1)
C(1,1)
C(0,1)
C(1,1)

ĐỆ QUY CÓ NHỚ

- Khắc phục tình trạng một chương trình con với tham số xác định được gọi đệ quy nhiều lần
- Sử dụng bộ nhớ để lưu trữ kết quả của một chương trình con với tham số xác định
- Bộ nhớ được khởi tạo với giá trị đặc biệt để ghi nhận mỗi chương trình con chưa được gọi lần nào
- Địa chỉ bộ nhớ sẽ được ánh xạ với các giá trị tham số của chương trình con

```
int m[MAX][MAX];

int C(int k, int n) {
  if (k == 0 || k == n)
    m[k][n] = 1;
  else {
    if(m[k][n] < 0){
      m[k][n] = C(k-1,n-1) +
                C(k,n-1);
    }
  }
  return m[k][n];
}
int main() {
  for(int i = 0; i < MAX; i++)
    for(int j = 0; j < MAX; j++)
       m[i][j] = -1;
  printf("%d\n",C(16,32));
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI

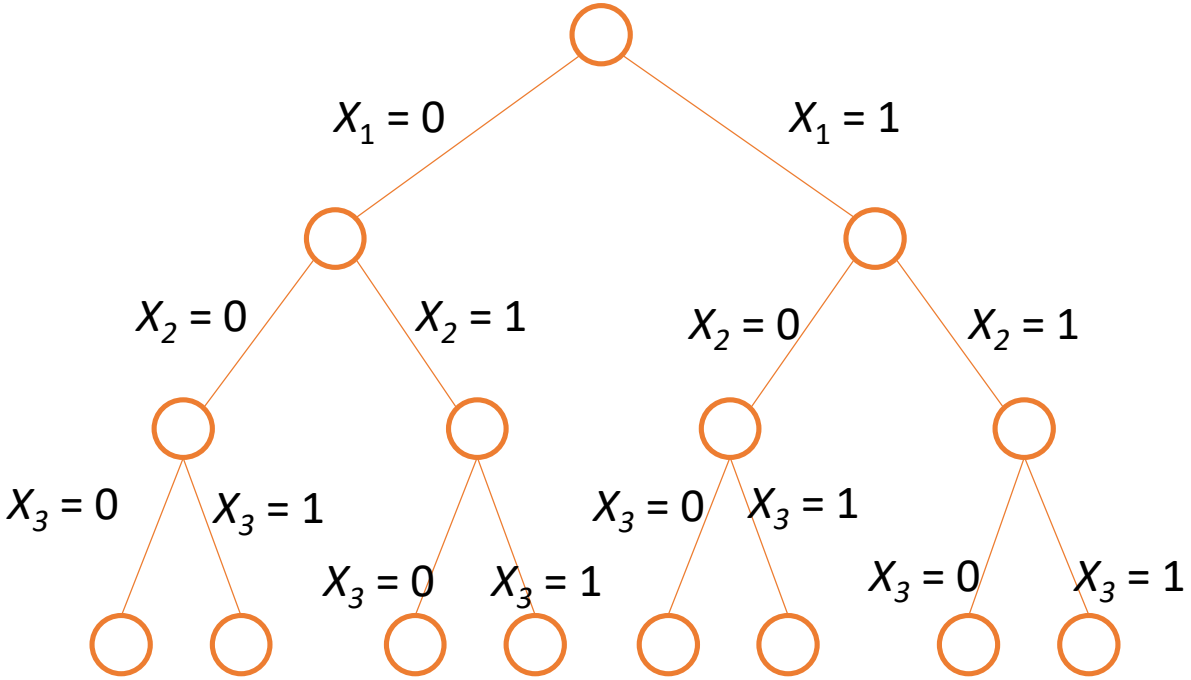
- Áp dụng để giải các bài toán liệt kê, bài toán tối ưu tổ hợp
- $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i, \forall\, i = 1,\ldots, n\}$
- Liệt kê tất cả các bộ $x \in A$ thoả mãn một thuộc tính P nào đó
- Thủ tục TRY(k):
  - Thử các giá trị v có thể gán cho x_k mà không vi phạm thuộc tính P
  - Với mỗi giá trị hợp lệ v:
    - Gán v cho x_k
    - Nếu $k < n$: gọi đệ quy TRY(k+1) để thử tiếp giá trị cho x_{k+1}
    - Nếu $k = n$: ghi nhận cấu hình

ĐỆ QUY QUAY LUI

```
TRY(k)
  Begin
    Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k) /* kiểm tra xem v có hợp lệ không */
       Begin
         x_k = v;
         if(k = n) ghi_nhan_cau_hinh;
         else TRY(k+1);
       End
  End
Main()
Begin
  TRY(1);
End
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng **x[n]** trong đó **x[i]** $\in$ {0,1} là bít thứ **i** của xâu nhị phân (**i= 1, . . ., n**)



ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng **x[n]** trong đó **x[i]** ∈{0,1} là bít thứ **i** của xâu nhị phân

    (**i= 1, . . ., n**)

```
void solution(){
   for(int i = 1; i<= n; i++)
          printf("%d ",x[i]);
    printf("\n");
}
int check(int v, int k){
    return 1;
}
void Try(int k){
    for(int v = 0; v <= 1; v++){
        if(check(v,k)){
            x[k] = v;
            if(k == n) solution();
            else Try(k+1);
        }
    }
}
int main() {
  Try(1);
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê xâu nhị phân

- Liệt kê các xâu nhị phân sao cho không có 2 bit 1 nào đứng cạnh nhau
- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng **x[n]** trong đó **x[i]** $\in$ {0,1} là bít thứ **i** của xâu nhị phân
    (**i= 1, . . ., n**)
  - Thuộc tính *P*: không có 2 bít 1 nào đứng cạnh nhau

```
int TRY(int k) {
  for(int v = 0; v <= 1; v++){
    if(x[k-1] + v < 2){
      x[k] = v;
      if(k == n)
        printSolution();
      else TRY(k+1);
    }
  }
}

int main() {
  x[0] = 0;
  TRY(1);
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê tổ hợp

- Liệt kê các tổ hợp chập *k* của 1, 2, …, *n*
- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng *x*[*k*] trong đó *x*[*i*] ∈{1, . . ., *n*} là phần tử thứ *i* của cấu hình tổ hợp (*i* = 1, . . ., *k*)
  - Thuộc tính *P*: *x*[*i*] < *x*[*i*+1], với mọi *i* = 1, 2, …, *k*-1

```
int TRY(int i) {
  for(int v = x[i-1]+1; v <= n-k+i;
          v++){
     x[i] = v;
     if(i == k)
        printSolution();
      else TRY(i+1);
     }
}

int main() {
  x[0] = 0;
  TRY(1);
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: liệt kê hoán vị

- Liệt kê các hoán vị của 1, 2, …, *n*
- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng *x*[1,. . . , *n*] trong đó *x*[*i*] ∈{1, . . ., *n*} là phần tử thứ *i* của cấu hình hoán vị (*i* = 1, . . ., *n*)
  - Thuộc tính *P*:
    - $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
  - Mảng đánh dấu *m*[*v*] = 1 (0) nếu giá trị *v* đã xuất hiện (chưa xuất hiện) trong cấu hình bộ phận, với mọi *v* = 1, …, *n*

```
void TRY(int i) {
  for(int v = 1; v <= n; v++){
    if(!m[v]) {
      x[i] = v;
      m[v] = 1; // đánh dấu
      if(i == n)
        printSolution();
      else TRY(i+1);
      m[v] = 0;// khôi phục
    }
  }
}

void main() {
  for(int v = 1; v <= n; v++)
     m[v] = 0;
  TRY(1);
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán xếp hậu

- Xếp n quân hậu trên một bàn cờ quốc tế sao cho không có 2 quân hậu nào ăn được nhau
- Mô hình hoá
  - $x[1, \ldots, n]$ trong đó $x[i]$ là hàng của quân hậu xếp trên cột i, với mọi $i = 1, \ldots, n$
  - Thuộc tính P
    - $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
    - $x[i] + i \neq x[j] + j$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
    - $x[i] - i \neq x[j] - j$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$

	1	2	3	4
1		X		
2				X
3	X			
4			X	

Lời giải $x = (3, 1, 4, 2)$

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán xếp hậu

```
int check(int v, int k) {
  // kiểm tra xem v có thể gán được
  // cho x[k] không
  for(int i = 1; i <= k-1; i++) {
    if(x[i] == v) return 0;
    if(x[i] + i == v + k) return 0;
    if(x[i] - i == v - k) return 0;
  }
  return 1;
}
```

```
void TRY(int k) {
  for(int v = 1; v <= n; v++) {
    if(check(v,k)) {
      x[k] = v;
      if(k == n) printSolution();
      else TRY(k+1);
    }
  }
}
void main() {
    TRY(1);
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

- Điền các chữ số từ 1 đến 9 vào các ô trong bảng vuông 9x9 sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi bảng vuông con 3x3 đều có mặt đầy đủ 1 chữ số từ 1 đến 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

0 1 2

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

- Mô hình hoá
  - Mảng 2 chiều $x[0..8, 0..8]$
  - Thuộc tính P
    - $x[i, j_2] \neq x[i, j_1]$, với mọi $i = 0,\ldots,8$, và $0 \leq j_1 < j_2 \leq 8$
    - $x[i_1, j] \neq x[i_2, j]$, với mọi $j = 0,\ldots,8$, và $0 \leq i_1 < i_2 \leq 8$
    - $x[3I+i_1, 3J+j_1] \neq x[3I+i_2, 3J+j_2]$, với mọi $I, J = 0,\ldots, 2$, và $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \{0,1, 2\}$ sao cho $i_1 \neq i_2$ hoặc $j_1 \neq j_2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

- Thứ tự duyệt: từ ô (0,0), theo thứ tự từ trái qua phải và từ trên xuống dưới

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	★			

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài toán Sudoku

```
bool check(int v, int r, int c){
  for(int i = 0; i <= r-1; i++)
    if(x[i][c] == v) return false;
  for(int j = 0; j <= c-1; j++)
    if(x[r][j] == v) return false;
  int I = r/3;
  int J = c/3;
  int i = r - 3*I;
  int j = c - 3*J;
  for(int i1 = 0; i1 <= i-1; i1++)
    for(int j1 = 0; j1 <= 2; j1++)
      if(x[3*I+i1][3*J+j1] == v)
        return false;
  for(int j1 = 0; j1 <= j-1; j1++)
    if(x[3*I+i][3*J+j1] == v)
       return false;
  return true;
}
```

```
void TRY(int r, int c){
  for(int v = 1; v <= 9; v++){
    if(check(v,r,c)){
      x[r][c] = v;
      if(r == 8 && c == 8){
        printSolution();
      }else{
        if(c == 8) TRY(r+1,0);
        else TRY(r,c+1);
      }
    }
  }
}

void main(){
  TRY(0,0);
}
```

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài tập

Cho số nguyên dương M, N và N số nguyên dương A_1, A_2, …, A_N. Liệt kê các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_NX_N = M$$

ĐỆ QUY QUAY LUI: bài tập

1. Liệt kê tất cả các cách chọn ra *k* phần tử từ 1, 2, …, *n* sao cho không có 2 phần tử nào đứng cạnh nhau cũng được chọn
2. Liệt kê tất cả các cách chọn ra *k* phần tử từ 1, 2, …, *n* sao cho không có 3 phần tử nào đứng cạnh nhau cùng đồng thời được chọn
3. Liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài *n* trong đó không có 3 bit 1 nào đứng cạnh nhau
4. Liệt kê tất cả các cách phân tích số *N* thành tổng của các số nguyên dương
5. Giải bài toán Sudoku, xếp hậu sử dụng kỹ thuật đánh dấu
6. Giải bài toán Sudoku với 1 số ô đã được điền từ trước

Thuật toán nhánh và cận

- Bài toán tối ưu tổ hợp
  - Phương án $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong đó $x_i \in A_i$ cho trước
  - Phương án thoả mãn ràng buộc C
  - Hàm mục tiêu $f(x) \rightarrow$ min (max)

Thuật toán nhánh và cận

- Bài toán người du lịch
  - Có n thành phố 1, 2, …, n. Chi phí đi từ thành phố i đến thành phố j là $c(i, j)$. Hãy tìm một hành trình xuất phát từ thành phố thứ 1, đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố đúng 1 lần và quay về thành phố 1 với tổng chi phí nhỏ nhất
- Mô hình hoá
  - Phương án $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong đó $x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Ràng buộc C: $x_i \neq x_j, \forall\ 1 \leq i < j \leq n$
  - Hàm mục tiêu

$$f(x) = c(x_1, x_2) + c(x_2, x_3) + \ldots + c(x_n, x_1) \rightarrow \min$$

Thuật toán nhánh và cận

- Duyệt toàn bộ:
  - Liệt kê tất cả các phương án bằng phương pháp đệ quy quay lui
  - Với mỗi phương án, tính toán hàm mục tiêu
  - Giữ lại phương án có hàm mục tiêu nhỏ nhất

```
TRY(k)
  Begin
    Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k)
       Begin
         x_k = v;
         if(k = n)
           ghi_nhan_cau_hinh;
           cập nhật kỷ lục f*;
         else TRY(k+1);
       End
  End
Main()
Begin
  TRY(1);
End
```

Thuật toán nhánh và cận

- Duyệt nhánh và cận:
  - Phương án bộ phận (a_1,…, a_k) trong đó a_1 gán cho x_1,… a_k gán cho x_k
  - Phương án (a_1,…, a_k, b_{k+1},…,b_n) là một phương án đầy đủ được phát triển từ (a_1,…,a_k) trong đó b_{k+1} gán cho x_{k+1},…, b_n được gán cho x_n

```
TRY(k) {
  Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k) {
       x_k = v;
       if(k = n) {
            ghi_nhan_cau_hinh;
            cập nhật kỷ lục f*;
        } {
            if g(x1,…,x_k) < f*
              TRY(k+1);
        }
      }
}
Main()
{ f* = ∞;
  TRY(1);
}
```

Thuật toán nhánh và cận

- Duyệt nhánh và cận:
  - Phương án bộ phận (a_1,…, a_k) trong đó a_1 gán cho x_1,… a_k gán cho x_k
  - Phương án (a_1,…, a_k, b_{k+1},…,b_n) là một phương án đầy đủ được phát triển từ (a_1,…,a_k) trong đó b_{k+1} gán cho x_{k+1},…, b_n được gán cho x_n
  - Với mỗi phương án bộ phận (x_1,…, x_k), hàm cận dưới $g(x_1,…, x_k)$ có giá trị không lớn hơn giá trị hàm mục tiêu của phương án đầy đủ phát triển từ (x_1,…,x_k)

```
TRY(k) {
  Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k) {
       x_k = v;
       if(k = n) {
            ghi_nhan_cau_hinh;
            cập nhật kỷ lục f*;
        } {
            if g(x1,…,x_k) < f*
              TRY(k+1);
        }
      }
}
Main()
{ f* = ∞;
  TRY(1);
}
```

Thuật toán nhánh và cận

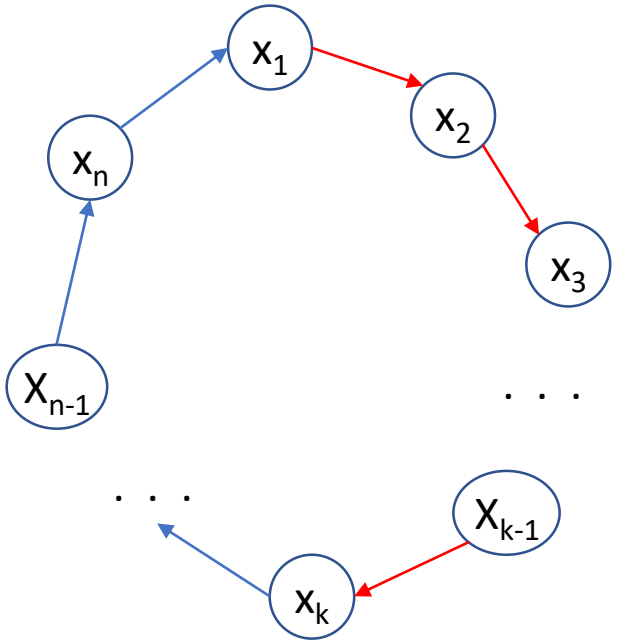
- Duyệt nhánh và cận:
  - Phương án bộ phận (a_1,…, a_k) trong đó a_1 gán cho x_1,… a_k gán cho x_k
  - Phương án (a_1,…, a_k, b_{k+1},…,b_n) là một phương án đầy đủ được phát triển từ (a_1,…,a_k) trong đó b_{k+1} gán cho x_{k+1},…, b_n được gán cho x_n
  - Với mỗi phương án bộ phận (x_1,…, x_k), hàm cận dưới $g(x_1,\ldots, x_k)$ có giá trị không lớn hơn giá trị hàm mục tiêu của phương án đầy đủ phát triển từ (x_1,…,x_k)
  - Nếu $g(x_1,\ldots,x_k) \geq f^*$ thì không phát triển lời giải từ (x_1,…,x_k)

```
TRY(k) {
  Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k) {
       x_k = v;
       if(k = n) {
            ghi_nhan_cau_hinh;
            cập nhật kỷ lục f*;
        } {
            if g(x1,…,x_k) < f*
              TRY(k+1);
        }
      }
}
Main()
{ f* = ∞;
  TRY(1);
}
```

Thuật toán nhánh và cận: bài toán TSP

- c_m là chi phí nhỏ nhất trong số các chi phí đi giữa 2 thành phố khác nhau
- Phương án bộ phận $(x_1,\ldots, x_k)$
  - Chi phí bộ phận $f = c(x_1, x_2) + c(x_2, x_3) + \ldots + c(x_{k-1}, x_k)$
  - Hàm cận dưới

    $g(x_1,\ldots, x_k) = f + c_m \times (n-k+1)$



Thuật toán nhánh và cận: bài toán TSP

```
void TRY(int k){
  for(int v = 1; v <= n; v++){
    if(marked[v] == false){
      a[k] = v;
      f = f + c[a[k-1]][a[k]];
      marked[v] = true;
      if(k == n){
        process();
      }else{
        int g = f + cmin*(n-k+1);
        if(g < f_min)
          TRY(k+1);
      }
      marked[v] = false;
      f = f - c[a[k-1]][a[k]];
    }
  }
}
```

```
void process() {
  if(f + c[x[n]][x[1]] < f_min){
    f_min = f + c[x[n]][x[1]];
  }
}
void main() {
  f_min = 9999999999;
  for(int v = 1; v <= n; v++)
    marked[v] = false;
  x[1] = 1; marked[1] = true;
  TRY(2);
}
```

Thuật toán nhánh và cận: bài tập

- Bài toán dãy con tăng dần cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ (gồm các phần tử đôi một khác nhau)
  - Đầu ra: tìm dãy con (bằng cách loại bỏ 1 số phần tử) của dãy đã cho tăng dần có số lượng phần tử là lớn nhất (gọi là dãy con cực đại)

Thuật toán tham lam

- Được ứng dụng để giải một số bài toán tối ưu tổ hợp
- Đơn giản và tự nhiên
- Quá trình tìm lời giải diễn ra qua các bước
- Tại mỗi bước, ra quyết định dựa trên các thông tin hiện tại mà không quan tâm đến ảnh hưởng của nó trong tương lai
- Dễ đề xuất, cài đặt
- Thường không tìm được phương án tối ưu toàn cục

Thuật toán tham lam

- Lời giải được biểu diễn bởi tập S
- C biểu diễn các ứng cử viên
- select(C): chọn ra ứng cử viên tiềm năng nhất
- solution(S): trả về true nếu S là lời giải của bài toán
- feasible(S): trả về true nếu S không vi phạm ràng buộc nào của bài toán

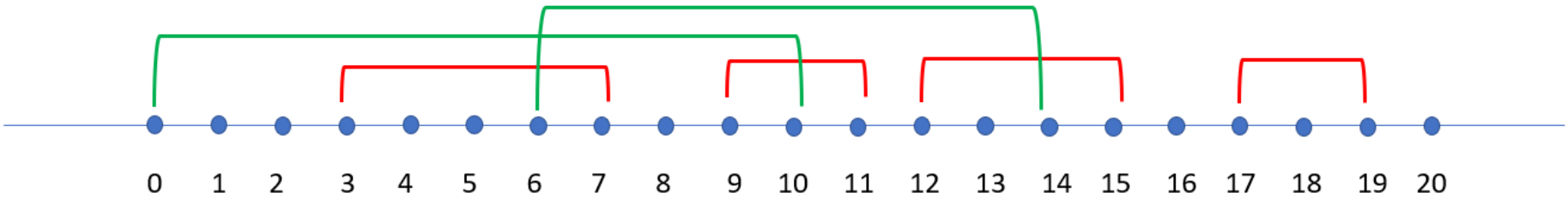
```
Greedy() {
  S = {};
  while C ≠ ∅ and
        not solution(S){
    x = select(C);
    C = C \ {x};
    if feasible(S ∪ {x}) {
      S = S ∪ {x};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam

- Bài toán tập đoạn không giao nhau
  - Đầu vào: cho tập các đoạn thẳng $X = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ trong đó $a_i < b_i$ là toạ độ đầu mút của đoạn thứ i trên đường thẳng, với mọi $i = 1, \ldots, n$.
  - Đầu ra: Tìm tập con các đoạn đôi một không giao nhau có số đoạn lớn nhất

Thuật toán tham lam

- Bài toán tập đoạn không giao nhau
  - Đầu vào: cho tập các đoạn thẳng $X = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ trong đó $a_i < b_i$ là toạ độ đầu mút của đoạn thứ i trên đường thẳng, với mọi $i = 1, \ldots, n$.
  - Đầu ra: Tìm tập con các đoạn đôi một không giao nhau có số đoạn lớn nhất



Lời giải tối ưu là S = {(3,7), (9,11), (12,15), (17,19)}

Thuật toán tham lam

- Tham lam 1
  - Sắp xếp các đoạn theo thứ tự không giảm của a_i được danh sách L
  - Lặp lại thao tác sau cho đến khi L không còn phần tử nào
    - Chọn đoạn (a_c, b_c) đầu tiên trong L và loại nó ra khỏi L
    - Nếu (a_c, b_c) không có giao nhau với đoạn nào trong lời giải thì đưa (a_c, b_c) vào lời giải

```
Greedy1() {
  S = {};
  L = Sắp xếp các đoạn trong X
   theo thứ tự không giảm của ai;
  while (L ≠ ∅) {
    (ac,bc) = chọn đoạn đầu tiên
       trong L;
    Loại bỏ (ac,bc) khỏi L;
    if feasible(S ∪ {(ac,bc)}) {
      S = S ∪ {(ac,bc)};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam

- Tham lam 1 không đảm bảo cho lời giải tối ưu, ví dụ

$$X = \{(1,11), (2,5), (6,10)\}$$

  - Greedy 1 sẽ cho lời giải là {(1,11)} trong khi lời giải tối ưu là {(2,5), (6,10)}

Thuật toán tham lam

- Tham lam 2
  - Sắp xếp các đoạn theo thứ tự không giảm của độ dài b_i - a_i được danh sách *L*
  - Lặp lại thao tác sau cho đến khi *L* không còn phần tử nào
    - Chọn đoạn (a_c, b_c) đầu tiên trong *L* và loại nó ra khỏi *L*
    - Nếu (a_c, b_c) không có giao nhau với đoạn nào trong lời giải thì đưa (a_c, b_c) vào lời giải

```
Greedy2() {
  S = {};
  L = Sắp xếp các đoạn trong X
    theo thứ tự không giảm của
       bi- ai;
  while (L ≠ ∅) {
    (ac,bc) = chọn đoạn đầu tiên
       trong L;
    Loại bỏ (ac,bc) khỏi L;
    if feasible(S ∪ {(ac,bc)}) {
      S = S ∪ {(ac,bc)};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam

- Tham lam 2 không đảm bảo cho lời giải tối ưu, ví dụ

$$X = \{(1,5), (4,7), (6,11)\}$$

  - Greedy 1 sẽ cho lời giải là {(4,7)} trong khi lời giải tối ưu là {(1,5), (6,11)}

Thuật toán tham lam

- Tham lam 3
  - Sắp xếp các đoạn theo thứ tự không giảm của b_i được danh sách L
  - Lặp lại thao tác sau cho đến khi L không còn phần tử nào
    - Chọn đoạn (a_c, b_c) đầu tiên trong L và loại nó ra khỏi L
    - Nếu (a_c, b_c) không có giao nhau với đoạn nào trong lời giải thì đưa (a_c, b_c) vào lời giải
- Tham lam 3 đảm bảo cho lời giải tối ưu

```
Greedy3() {
  S = {};
  L = Sắp xếp các đoạn trong X
   theo thứ tự không giảm của bi;
  while (L ≠ ∅) {
    (ac,bc) = chọn đoạn đầu tiên
       trong L;
    Loại bỏ (ac,bc) khỏi L;
    if feasible(S ∪ {(ac,bc)}) {
      S = S ∪ {(ac,bc)};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam: bài tập

- Có n công việc 1, 2, ..., n. Công việc i có thời hạn hoàn thành là d[i] và có lợi nhuận khi được đưa vào thực hiện là p[i] (i=1,...,n). Biết rằng chỉ được nhiều nhất 1 công việc được thực hiện tại mỗi thời điểm và khi thời gian thực hiện xong mỗi công việc đều là 1 đơn vị. Hãy tìm cách chọn ra các công việc để đưa vào thực hiện sao cho tổng lợi nhuận thu được là nhiều nhất đồng thời mỗi công việc phải hoàn thành trước hoặc đúng thời hạn.

Thuật toán tham lam: bài tập

- Ví dụ: có 4 công việc với thời hạn hoàn thành d[i] và lợi nhuận là p[i] được cho như sau:
  - Công việc 1: 4 20
  - Công việc 2: 1 10
  - Công việc 3: 1 40
  - Công việc 4: 1 30
- Khi đó giải pháp tối ưu là chọn công việc 1 và 3 để thực hiện với thứ tư thực hiện là 3 trước rồi đến 1:
  - công việc 3 bắt đầu thực hiện tại thời điểm 0 và kết thúc tại thời điểm 1
  - tiếp đó, công việc 1 được bắt đầu thực hiện tại thời điểm 1 và kết thúc tại thời điểm 2
- tổng lợi nhuận thu được là 20 + 40 = 60

Thuật toán chia để trị

- Sơ đồ chung
  - Chia bài toán xuất phát thành các bài toán con độc lập nhau
  - Giải các bài toán con (đệ quy)
  - Tổng hợp lời giải của các bài toán con để xây dựng lời giải của bài toán xuất phát

Thuật toán chia để trị: tìm kiếm nhị phân

- Bài toán tìm kiếm nhị phân: cho dãy *x*[1..*n*] được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và 1 giá trị *y*. Tìm chỉ số *i* sao cho *x*[*i*] = *y*

```
bSearch(x, start, finish, y) {
  if(start == finish) {
    if(x[start] == y)
      return start;
    else return -1;
  }else{
    m = (start + finish)/2;
    if(x[m] == y) return m;
    if(x[m] < y)
      return bSearch(x, m+1,finish,y);
    else
      return bSearch(x,start,m-1,y);
  }
}
```

Thuật toán chia để trị: dãy con cực đại

- Bài toán dãy con cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$
  - Đầu ra: tìm dãy con bao gồm các phần tử liên tiếp của dãy đã cho có tổng cực đại

```
int maxSeq(int* a, int l, int r){
  if(l == r) return a[l];
  int max;
  int mid = (l+r)/2;
  int mL = maxSeq(a,l,mid);
  int mR = maxSeq(a,mid+1,r);
  int mLR = maxLeft(a,l,mid) +
            maxRight(a,mid+1,r);
  max = mL;
  if(max < mR) max = mR;
  if(max < mLR) max = mLR;
  return max;
}
```

Thuật toán chia để trị: dãy con cực đại

```
int maxLeft(int* a, int l, int r){
  int max = -9999999;
  int s = 0;
  for(int i = r; i >= l; i--){
    s += a[i];
    if(s > max) max = s;
  }
  return max;
}
int maxRight(int* a, int l, int r){
  int max = -99999999;
  int s = 0;
  for(int i = l; i <= r; i++){
    s += a[i];
    if(s > max) max = s;
  }
  return max;
}
```

```
void main() {
  readData();
  int rs = maxSeq(a,0,n-1);
  printf("result = %d",rs);
}
```

Thuật toán chia để trị: định lí thợ

- Chia bài toán xuất phát thành *a* bài toán con, mỗi bài toán con kích thước *n*/*b*
- *T*(*n*): thời gian của bài toán kích thước *n*
- Thời gian phân chia (dòng 4): *D*(*n*)
- Thời gian tổng hợp lời giải (dòng 6): *C*(*n*)
- Công thức truy hồi:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n \leq n0 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + C(n) + D(n), & n > n0 \end{cases}$$

```
procedure D-and-C(n) {
1.  if(n ≤ n0)
2.    xử lý trực tiếp
3.  else{
4.    chia bài toán xuất phát
thành a bài toán con kích thước n/b
5.    gọi đệ quy a bài toán con
6.    tổng hợp lời giải
7.  }
}
```

Thuật toán chia để trị: định lí thợ

- Độ phức tạp của thuật toán chia để trị (định lí thợ)
- Công thức truy hồi:

$$T(n) = aT(n/b) + cn^k, \text{ với các hằng số } a \geq 1, b > 1, c > 0$$

- Nếu $a > b^k$ thì $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Nếu $a = b^k$ thì $T(n) = \Theta(n^k logn)$ với $logn = log_2 n$
- Nếu $a < b^k$ thì $T(n) = \Theta(n^k)$

Thuật toán quy hoạch động

- Sơ đồ chung
  - Chia bài toán xuất phát thành các bài toán con không nhất thiết độc lập với nhau
  - Giải các bài toán con từ nhỏ đến lớn, lời giải được lưu trữ lại vào 1 bảng
  - Bài toán con nhỏ nhất phải được giải 1 cách trực tiếp
  - Xây dựng lời giải của bài toán lớn hơn từ lời giải đã có của các bài toán con nhỏ hơn (truy hồi)
    - Số lượng bài toán con cần được bị chặn bởi đa thức của kích thước dữ liệu đầu vào
  - Phù hợp để giải hiệu quả một số bài toán tối ưu tổ hợp

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$
  - Đầu ra: tìm dãy con bao gồm các phần tử liên tiếp của dãy đã cho có tổng cực đại
- Phân chia
  - Ký hiệu P_i là bài toán tìm dãy con bao gồm các phần tử liên tiếp có tổng cực đại mà phần tử cuối cùng là a_i, với mọi $i = 1,\ldots, n$
  - Ký hiệu S_i là tổng các phần tử của lời giải của P_i, $\forall\ i = 1,\ldots, n$
  - $S_1 = a_1$
  - $S_i = \begin{cases} S_{i-1} + a_i, & \text{nếu } S_{i-1} > 0 \\ a_i, & \text{nếu } S_{i-1} \leq 0 \end{cases}$
  - Tổng các phần tử của dãy con cực đại của bài toán xuất phát là

$$\max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con tăng dần cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ (gồm các phần tử đôi một khác nhau)
  - Đầu ra: tìm dãy con (bằng cách loại bỏ 1 số phần tử) của dãy đã cho tăng dần có số lượng phần tử là lớn nhất (gọi là dãy con cực đại)

Thuật toán quy hoạch động

- Phân chia
  - Ký hiệu P_i là bài toán tìm dãy con cực đại mà phần tử cuối cùng là a_i, với mọi $i = 1,\ldots, n$
  - Ký hiệu S_i là số phần tử của lời giải của P_i, $\forall\ i = 1,\ldots, n$
  - $S_1 = 1$
  - $S_i = \max\{1, \max\{S_j + 1 \mid j < i \wedge a_j < a_i\}\}$
  - Số phần tử của dãy con cực đại của bài toán xuất phát là

$$\max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

```
void solve(){
  S[0] = 1;
  rs = S[0];
  for(int i = 1; i < n; i++){
    S[i] = 1;
    for(int j = i-1; j >= 0; j--){
      if(a[i] > a[j]){
        if(S[j] + 1 > S[i])
          S[i] = S[j] + 1;
      }
    }
    rs = S[i] > rs ? S[i] : rs;
  }
  printf("rs = %d\n",rs);
}
```

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con chung dài nhất
  - Ký hiệu $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$, một dãy con của X là dãy được tạo ra bằng việc loại bỏ 1 số phần tử nào đó của X đi
  - Đầu vào
    - Cho 2 dãy $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ và $Y = \langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \rangle$
  - Đầu ra
    - Tìm dãy con chung của X và Y có độ dài lớn nhất

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con chung dài nhất
  - Phân rã
    - Ký hiệu $S(i, j)$ là độ dài dãy con chung dài nhất của dãy $\langle X_1, \ldots, X_i \rangle$ và $\langle Y_1, \ldots, Y_j \rangle$, với $\forall\ i = 1, \ldots, n$ và $j = 1, \ldots, m$
    - Bài toán con nhỏ nhất
      - $\forall\ j = 1, \ldots, m$: $S(1, j) =$ 1, nếu X_1 xuất hiện trong $Y_1, \ldots, Y_j$; 0, ngược lại
      - $\forall\ i = 1, \ldots, n$: $S(i, 1) =$ 1, nếu Y_1 xuất hiện trong $X_1, \ldots, X_i$; 0, ngược lại
  - Tổng hợp lời giải

$$S(i, j) = \begin{cases} S(i-1, j-1) + 1, & \text{nếu } X_i = Y_j \\ \max\{S(i-1, j), S(i, j-1)\} \end{cases}$$

Thuật toán quy hoạch động

X	3	7	2	5	1	4	9

Y	4	3	2	3	6	1	5	4	9	7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2
3	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	0	1	2	2	2	2	3	3	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3	3	3	3
6	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
7	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5

Thuật toán quy hoạch động

```
void solve(){
  rs = 0;
  for(int i = 0; i <= n; i++) S[i][0] = 0;
  for(int j = 0; j <= m; j++) S[0][j] = 0;

  for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){
      if(X[i] == Y[j]) S[i][j] = S[i-1][j-1] + 1;
      else{
        S[i][j] = S[i-1][j] > S[i][j-1] ?
                  S[i-1][j] : S[i][j-1];
      }
      rs = S[i][j] > rs ? S[i][j] : rs;
    }
  }
  printf("result = %d\n",rs);
}
```

Thuật toán quy hoạch động: Bài tập

- Cho dãy $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$. Một dãy con của dãy a là một dãy thu được bằng cách loại bỏ 1 số phần tử khỏi a. Tìm dãy con của a là một cấp số cộng với bước nhảy bằng 1 có độ dài lớn nhất

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

Thank you for your attentions!