Bộ Giáo dục và Đào tạo
Đại học Huế
Trường Đại học Sư phạm

?HUỳNH Kỳ ANH

?MặT BLW
Và BàI TOáN BJÖRLING

?Chuyên ngành: ?hình học và tôpô

?Mã số: ?60 46 10

?LUậN VĂN THạC Sĩ TOáN HọC

?Người hướng dẫn khoa học: ?PGS. TS. ĐOàN THế HIếU

Huế, năm 2006

Lời cam đoan

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu nêu trong luận văn là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Huỳnh Kỳ Anh

Lời cám ơn

Tôi vô cùng biết ơn

Phó Giáo sư ĐOÀN THẾ HIẾU đã định hướng tôi nghiên cứu Hình học trên không gian Hyperbolic, một nhánh phát triển rất năng động của Hình học Vi phân; Phó Giáo sư là người trực tiếp hướng dẫn tôi thực hiện luận văn này;

Giáo sư JOSÉ ANTONIO GÁLVEZ đã khuyến khích tôi giải Bài toán Björling cho mặt BLW, đã cung cấp cho tôi các tài liệu tham khảo; Giáo sư đã dành nhiều thời gian giải thích cho tôi các sự kiện cơ bản của Hình học Vi phân và các chi tiết trong [5], [7].

Tôi gửi lời cám ơn

NGUYỄN VĂN HẠNH, bạn đồng môn, đã chia sẻ niềm yêu thích Toán học, ý tưởng, tài liệu với tôi trong hai năm qua tại Đại học Huế, đã cùng tôi thực hiện các seminar liên quan đến luận văn này.

Tôi gửi lời tri ân đến

trường Cao đẳng Sư phạm Quảng Nam đã hỗ trợ kinh phí và tạo điều kiện thuận lợi để tôi thực hiện đề tài;

các thầy giáo đã hướng dẫn tôi nghiên cứu Toán học trong khóa học 2004 - 2006 tại Đại học Huế;

gia đình và các bạn bè đã hiểu, chia sẻ cảm xúc trong quá trình tôi thực hiện đề tài.

HUỲNH KỲ ANH

Mục lục

trang

Quy ước. Ký hiệu

Trong luận văn này, các thuật ngữ tiếng Anh được định dạng với kiểu chữ `typewriter`, các đa tạp đều liên thông, và các ký hiệu, chữ viết tắt được cho trong bảng sau đây.

S	: đa tạp hai chiều, liên thông, có hướng
I, J	: khoảng mở trong $\mathbb{R}$
I, II	: dạng cơ bản thứ nhất, thứ hai
F^*	: liên hợp phức của ma trận F; $F^* = \overline{F}^t$
$\overline{\mathbb{C}}$	: mặt cầu Riemann, `compact` hóa của $\mathbb{C}$; $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$< \cdot, \cdot >$	: tích vô hướng trong $\mathbb{L}^4$
$z = s + it$	: tham số hóa với hai tọa độ s, t
$\partial_z, \partial_{\overline{z}}$	: toán tử Wirtinger; $\partial_z = (\partial_s - i\partial_t)/2$, $\partial_{\overline{z}} = (\partial_s + i\partial_t)/2$
$F_z, F_{\overline{z}}$	: tác động của toán tử Wirtinger lên F; $F_z = \partial_z F$, $F_{\overline{z}} = \partial_{\overline{z}} F$
$\mathrm{Re}\, F$	: phần thực của số phức F
ΔF	: tác động của toán tử Laplace lên hàm F
F_0, F_1, F_2, F_3	: các tọa độ của véc tơ $F = (F_0, F_1, F_2, F_3)$
BLW	: Linear Weingarten surface of Bryant type
`CMC1`	: Constant Mean Curvature One
`ELW`	: Elliptic Linear Weingarten

Chương 1

Giới thiệu

Bài toán Björling cổ điển được E. G. Björling giới thiệu năm 1844 và được H. A. Schwarz giải xong vào năm 1890, nội dung là tìm các mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^3$ khi biết trước một đường cong trắc địa trên mặt đó. Hệ quả quan trọng của sự tồn tại duy nhất nghiệm của Bài toán là các mặt cực tiểu Σ đối xứng qua bất kỳ mặt phẳng nào trực giao với Σ.

Bao hàm Bài toán Björling cho mặt `CMC1` [7] và mặt `flat` chính quy [6], luận văn này đặt ra và giải quyết Bài toán Björling cho mặt BLW là mặt có độ cong trung bình H và độ cong Gauss K_I thỏa mãn

$$2a(H-1) + bK_I = 0, \tag{1.1}$$

với a, b là hằng số thực, $a + b \neq 0$.

Nội dung của luận văn qua từng chương như sau:

Chương 1: Giới thiệu đề tài và tóm tắt nội dung các chương.

Chương 2: Chương này trình bày sơ lược các kiến thức, bổ đề cơ bản, cần thiết cho việc giải Bài toán Björling ở Chương **??**: không gian `hyperbolic` (Mục 2.1), lý thuyết địa phương của các mặt trong $\mathbb{H}^3$ (Mục 2.2), hàm (phản) phân hình trên mặt Riemann (Mục 2.3), tính chất bảo giác, các bổ đề cơ bản về mặt BLW (Mục 2.5) và về bài toán Cauchy cho phương trình Liouville (Mục 2.6). Trừ (**??**), (**??**), (**??**), các chi tiết khác có thể xem trong tài liệu được trích dẫn.

Mối liên quan giữa lý thuyết các mặt với phương trình Liouville thể hiện ở chỗ: nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$, thì ϕ thỏa mãn phương trình Liouville (2.9) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. Ta gặp lại mối quan hệ này trong Mục **??**. Từ đó, thấy sự khác biệt khi tìm nghiệm của Bài toán Björling cho mặt cực tiểu (`minimal`) trong $\mathbb{R}^3$ và cho mặt BLW trong $\mathbb{H}^3$. Trường hợp đầu tiên chỉ đơn giản là lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực, bài toán sau lại cần đến các phương trình đạo hàm riêng.

Chương **??**: [import = Amain.Wchap.BJ]

Chương 4: Kết luận về đóng góp của luận văn; đề nghị một số bài toán mở.

Phụ lục A: [import = Amain.Wchap.BJ.list]

Phụ lục B: Các thủ tục `Maple` [10] để tính tích vô hướng $< \psi_z \wedge \psi_{\bar{z}}, \eta >$ ở (**??**) và (**??**).

Tài liệu tham khảo: Danh sách các tài liệu đã tham khảo.

Luận văn này được thực hiện dưới sự hướng dẫn của Phó Giáo sư Đoàn Thế Hiếu và sự giúp đỡ của Giáo sư José Antonio Gálvez, được hỗ trợ một phần kinh phí bởi trường Cao đẳng Sư phạm Quảng Nam. Mã nguồn LaTeX của luận văn có tại

`http://metakyanh.sarovar.org/index.php?cat=mthesis` .

Chương 2

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày sơ lược các kiến thức, bổ đề cơ bản, cần thiết cho việc giải Bài toán Björling ở Chương **??**: không gian `hyperbolic` (Mục 2.1), lý thuyết địa phương của các mặt trong $\mathbb{H}^3$ (Mục 2.2), hàm (phản) phân hình trên mặt Riemann (Mục 2.3), tính chất bảo giác, các bổ đề cơ bản về mặt BLW (Mục 2.5) và về bài toán Cauchy cho phương trình Liouville (Mục 2.6). Trừ (**??**), (**??**), (**??**), các chi tiết khác có thể xem trong tài liệu được trích dẫn.

Mối liên quan giữa lý thuyết các mặt với phương trình Liouville thể hiện ở chỗ: nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$, thì ϕ thỏa mãn phương trình Liouville (2.9) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. Ta gặp lại mối quan hệ này trong Mục **??**. Từ đó, thấy sự khác biệt khi tìm nghiệm của Bài toán Björling cho mặt cực tiểu (`minimal`) trong $\mathbb{R}^3$ và cho mặt BLW trong $\mathbb{H}^3$. Trường hợp đầu tiên chỉ đơn giản là lấy tích phân của các hàm không có chu kỳ thực, bài toán sau lại cần đến các phương trình đạo hàm riêng.

2.1 Không gian `hyperbolic` $\mathbb{H}^3$

Chi tiết về không gian `hyperbolic` $\mathbb{H}^3$ có thể xem trong [1], [5], [7].

Không gian Lorentz $\mathbb{L}^4$ là không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ được trang bị giả `metric` Lorentz

$$< \cdot, \cdot >= -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{2.1}$$

Các bộ phận

$$\mathbb{S}_1^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 :< x, x >= 1\}, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{N}_+^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 :< x, x >= 0,\ x_0 > 0\} \tag{2.3}$$

lần lượt được gọi là *không gian de-Sitter ba chiều* và *nón ánh sáng tương lai*. Bộ phận

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 :< x, x >= -1,\ x_0 > 0\} \tag{2.4}$$

được gọi là *mô hình Minkowski của không gian hyperbolic (ba chiều)*. Tại $p \in \mathbb{H}^3$, ta có không gian tiếp xúc

$$T_p\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 :< x, p >= 0\}. \tag{2.5}$$

2.2 Lý thuyết địa phương của mặt

Chi tiết về lý thuyết địa phương của các mặt có thể xem trong [3], [2].

Cho S là đa tạp hai chiều, liên thông, có hướng (ta gọi S là *mặt*) và ánh xạ $\psi : S \to \mathbb{H}^3$. Ta nói ψ *chính quy tại điểm* $z_0 \in S$ nếu tại đó hạng của $d\psi$ bằng 2. Trong tham số hóa $z = s + it$ của ψ tại z_0, điều kiện chính quy tương đương với $\{\psi_s \wedge \psi_t\}_{z_0} \neq 0$. Khi ψ chính quy tại mọi $z_0 \in S$, ta nói ψ là *chính quy*.

2.3 Mặt Riemann. Hàm (phản) phân hình

Mặt Riemann [8, 11] là đa tạp hai chiều $(X, \mathfrak{C})$, trong đó, $\mathfrak{C}$ là `atlas` gồm các bản đồ sao cho phép biến đổi tọa độ giữa hai bản đồ bất kỳ là chỉnh hình.

2.4 Tính chất bảo giác

Cho đa tạp M trên đó có các `metric` Riemann σ_1, σ_2. Ta nói σ_1 là bảo giác với σ_2 nếu có hàm χ dương, trơn sao cho $\sigma_1 = \chi\sigma_2$. ánh xạ chính quy $f : (M, \sigma_1) \to (N, < \cdot, \cdot >)$ giữa các đa tạp Riemann được nói là *bảo giác* nếu σ_1 bảo giác với `metric` σ_2 như sau (σ_2 là `metric` kéo từ N về M)

$$\sigma_2(u, v) :=< u, v >_M := \langle df(u), df(v)\rangle, \qquad u, v \in T_pM, \quad p \in M. \tag{2.6}$$

Bây giờ, giả sử M là đa tạp hai chiều. Xét tham số hóa $z = s + it$ tại điểm $p \in M$, sao cho z bảo giác, hay cũng vậy, sao cho $\{\partial_s, \partial_t\}$ là cơ sở trực giao của T_pM.

2.5 Các bổ đề cơ bản về mặt BLW

Định nghĩa 1 (Mặt BLW): Định nghĩa mặt BLW Mặt chính quy $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ được gọi là *BLW* nếu có các hằng số thực a, b sao cho

$$2a(H-1) + bK_I = 2a(H-1) + b(K-1) = 0, \tag{2.7}$$

với H là độ cong trung bình, $K_I = K - 1$ là độ cong Gauss và K là độ cong Gauss-Kronecker của ψ.

Trường hợp $a + b = 0$ được xét trong bài báo [4]. Kể từ lúc này, ta luôn giả sử $a + b \neq 0$. Nếu $b = 0$, ta có $a = \pm 1$ và mặt BLW bây giờ là mặt `CMC1`; Bài toán Björling tương ứng được giải trong [7]. Nếu $a = 0$, ta được các `flat surface` được xét trong [6].

Bổ đề 1 ([5, Lemma 1]): *`Metric` $\sigma = aI + bII$ trên mặt BLW Cho ψ là mặt BLW thỏa mãn* (2.7)*. Khi đó, có thể coi $|a + b| = 1$, với dấu của a, b được chọn sao cho*

$$\sigma = aI + bII \tag{2.8}$$

là metric xác định dương trên S; ở đây, $I =< d\psi, d\psi >$ và $II =< d\psi, -d\eta >$ lần lượt là dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của ψ.

Cho mặt BLW $\psi : S \to \mathbb{H}^3$ thỏa mãn (2.7). Khi nói đến a, b, ta ngầm hiểu $|a + b| = 1$ và dấu của chúng đã được chọn để $\sigma = aI + bII$ trở thành `metric` xác định dương. Ta coi S là mặt Riemann với cấu trúc bảo giác cảm sinh bởi `metric` σ.

2.6 Phương trình Liouville

Mục này trình bày về phương trình Liouville và bài toán Cauchy của phương trình đó. Các chứng minh chi tiết có trong [7], [9].

Cho miền phẳng $U \subset \mathbb{C}$ và hằng số thực c. *Phương trình Liouville* có dạng

$$(\ln \phi)_{z\bar{z}} = -\frac{c}{2}\phi, \tag{2.9}$$

có thể được xem như phương trình vi phân phức. Nếu $ds^2 = \phi|dz|^2$ là `metric` Riemann trên U thì ϕ thỏa mãn (2.9) khi và chỉ khi ds^2 có độ cong hằng c. (Có thể thấy được mối liên hệ này từ công thức biểu diễn độ cong K của U theo hệ số bảo giác của `metric` trên U; xem thêm trong [2].)

Khi giải Bài toán Björling ta sẽ đi đến bài toán Cauchy cho phương trình Liouville

$$\begin{cases} (\ln\phi)_{z\overline{z}} = -\dfrac{c}{2}\phi, \\ \phi(s,0) = a(s), \\ \phi_z(s,0) = b(s). \end{cases} \tag{2.10}$$

ở đây, a là hàm giải tích thực, không âm, và $b(s)$ là hàm giải tích phức sao cho

$$2\,\mathrm{Re}\{b(s)\} = a'(s). \tag{2.11}$$

Ký hiệu $\{f,z\}$ là *đạo hàm Schwarz* như sau

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \qquad \left(' = \frac{d}{dz}\right). \tag{2.12}$$

Ta cũng có định nghĩa $\{f,s\}$ tương tự cho hàm thực f và biến thực s.

Định lý 2 ([7, Theorem 1]): *Bài toán Cauchy của phương trình Liouville ($c \neq 0$) Cho $c \neq 0$ và $T(s) : I \to \mathbb{C}$ là nghiệm bất kỳ của phương trình vi phân $\{T,s\} = \Upsilon(s)$, với*

$$2\Upsilon(s) = 2\left(\frac{b(s)}{a(s)}\right)' - \left(\frac{b(s)}{a(s)}\right)^2 + c\,a(s), \tag{2.13}$$

và định nghĩa

$$\overline{R(s)} = \frac{1}{c}\,\frac{T''(s) - \{b(s)/a(s)\}T'(s)}{2T'(s)^2 - T(s)T''(s) + \{b(s)/a(s)\}T(s)T'(s)}. \tag{2.14}$$

Ký hiệu $T(z)$ và $R(z)$ lần lượt là các thác triển phân hình của $T(s)$ và $R(s)$ trên tập hợp mở $D \subset \mathbb{C}$ chứa I. Khi đó,

$$\phi(s,t) = \frac{4T_z\overline{R_z}}{(1 + cT\overline{R})^2} \tag{2.15}$$

là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy (2.10)*.*

Chứng minh.
Nội dung của chứng minh

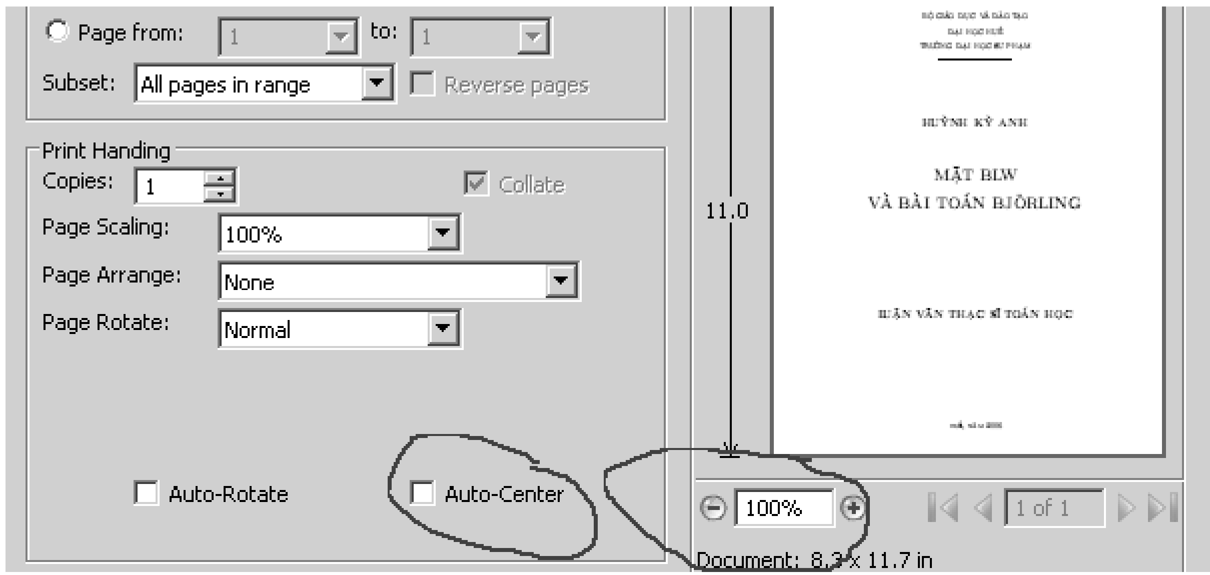
Chương 3

Hình ảnh minh họa

Dưới đây là vài hình ảnh minh họa

Hình 3.1: ViệtTUG, hình PNG

Hình 3.2: Thiên thần, hình JPG



Hình 3.3: Thiên thần, hình EOS

Chương 4

Kết luận

Luận văn này đặt ra và giải quyết Bài toán Björling cho mặt BLW. Định lý **??** khẳng định Bài toán Björling có nghiệm duy nhất. Biểu thức biểu diễn nghiệm không dùng đến biểu diễn bảo giác [5], và do đó, đưa ra *biểu diễn Björling* cho các mặt BLW.

Dưới đây là một số bài toán có liên quan đến đề tài:

1. khảo sát mặt BLW có `topo` của hình trụ (`cylinder`);

2. khảo sát mặt BLW đầy đủ với độ cong toàn phần kép (`dual`) hữu hạn đặc biệt;

Phụ lục A

Các bài toán Björling đã giải

Danh sách các bài tóan Björling đã giải.

Phụ lục B

Maple Worksheet

Phục lục này trình bày thủ tục `Maple` [10] để tính tích vô hướng $< \psi_z \wedge \psi_{\bar{z}}, \eta >$ ở (??) và (??). Các mã nhập vào chương trình `Maple` được bắt đầu bằng dấu lớn hơn (`>`), được định dạng với kiểu chữ `typewriter`; chú thích được *in nghiêng*. Thứ tự mã nhập vào đúng như thứ tự trình bày ở đây; các dòng mã được đánh số để tiện theo dõi.

B.1 Các thủ tục

Khởi động lại `Maple`*, nạp gói* `LinearAlgebra` *và xác định kiểu cho các biến sẽ dùng. ở đây,* `a`, `b` *là các hằng số thực như trong* (2.7)*;* `rho` *là* ρ *trong* (??)*. Biến số* `M_z` *chỉ tác động của toán tử Wirtinger* ∂_z *lên* `M`*. Biến* `Mx` *chỉ liên hợp phức của ma trận* `M`*.*

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> assume(a, real) : assume(b, real) :
> assume(rho, real) : assume(rho_z, complex) :
> assume(G_z, complex) : assume(Gx_z, complex) :
```

B.2 Trường hợp $a + b = 1$

Ma trận `Omega` *được cho bởi* (??)*,* `psi` *được tính theo công thức* `psi` $:= \psi = F\Omega F^*$*. Ta sử dụng* `U` *như ở* (??)*, còn* `B`*,* `C` *được tính nhờ* (??) *và* (??)*;* `Bx` $:= B^*$ *chỉ ma trận liên hợp phức của* B*. Để ý rằng, ta không triển khai* `A` *theo* ρ*,* G_z*, ...*

B.3 Trường hợp $a + b = -1$

Ta dùng các biến số `M2` *tương ứng với* `M` *trong trường hợp* $a + b = 1$*. Các bước tính toán hoàn toàn tương tự như ở Mục B.2 và ta không nhắc lại ở đây. Xem Mục* **??** *về cách* *tính cách đại lượng* `A2`, `B2`, ...

Tài liệu tham khảo

1. Carmo, Manfredo P. do (1993), *Riemannian Geometry*, Translated by Francis Flaherty, Boston, Base, Berlin, ISBN 0-8176-3490-8, chap. 8.
2. Fujimori, S. (2006), "Spacelike Mean Curvature One Surfaces in de Sitter 3-Space", PhD thesis, Kobe University, chap. A.
3. Fujimori, S., S. Kobayashi, and W. Rossman, *Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces*, chap. 1, URL: `http://arXiv.org/math.DG/0602570`.
4. Gálvez, J. A., and J. Aledo, *Complete Surfaces in the Hyperbolic Space with a Constant Principal Curvature*, to appear in Math. Nachr.
5. Gálvez, J. A., A. Martínez, and F. Milán (2004), "Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity", *Trans. Amer. Math. Soc.* **356**, 3405–3428.
6. Gálvez, J. A., and P. Mira (2005), "Embeded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space", *Calc. Var.* **24**, 239–260.
7. Gálvez, J. A., and P. Miro (2005), "The Cauchy problem for Liouville equation and Bryant surfaces", *Adv. Math.* **195**, 456–490.
8. Hitchin, N., (2004), *Geometry of Surfaces*, Lecture Notes, URL: `http://www.ma.utexas.edu/~hausel/hitchin/hitchinnotes/`.
9. Liouville, J. (1853), "Sur l'équation aux différences partielles $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$", *J. Math. Pures Appl.* **36**, 71–72.
10. *Maple 9.50*, Software, URL: `http://maplesoft.com/`.
11. *Riemann Surface*, URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_surface`.