

高数基础班 (10)



还不关注，
你就慢了



第四章 不定积分

本节内容要点

一. 考试内容概要

- (一) 不定积分的概念与性质
- (二) 不定积分基本公式
- (三) 三种主要积分法
- (四) 三类常见可积函数的积分

二. 常考题型与典型例题

求不定积分（换元、分部）

第四章 不定积分

考试内容概要

(一) 不定积分的概念与性质

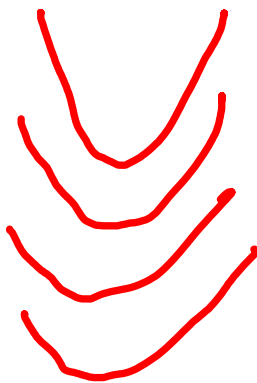
1. 原函数

$$F'(x) = f(x)$$

2. 不定积分

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

3. 不定积分几何意义



$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$F(x) + C$$

$$G'(x) = f(x)$$

$$G(x) - F(x) = C$$

$$G(x) = F(x) + C$$

4. 原函数存在定理

定理1 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数.

连续 \rightarrow 存在原函数

定理2 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

【例1】 下列函数在给定区间上是否有原函数?

$$1) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

连续

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(x)$$

$$2) \quad \underset{\checkmark}{g(x)} = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$x=0$ 处连续 (第一类)

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1, & x < 0 \\ x + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x + c, & x < 0 \\ x + c, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= |x| + c$$

$x=0$ 处可导,

$$\underline{F'(x) \equiv f(x)}$$

$x=0$?
!

$$3) \quad h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 不存在

$x=0$ 第二类. ✓

【解】 3) 易验证 $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 是 $h(x)$ 的原函数. 即

$F'(x) = h(x).$ ✓

$x \neq 0 \quad F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

$x = 0 \quad F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0$

5. 不定积分的性质

$$1) \left(\int \underset{\vee}{f(x)} dx \right)' = f(x)$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$
$$\underline{d} \int \underset{\vee}{f(x)} dx = f(x) dx$$

$$2) \int \underline{f'(x)} dx = f(x) + C$$

$$\int d f(x) = f(x) + C.$$

$$3) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

分项积分

$$4) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

(二) 不定积分的基本公式

$$1) \int 0 dx = C$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$5) \int e^x dx = e^x + C$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$13) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$15) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$18) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$2) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$\int f(x) dx = F(x) + C$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$12) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$14) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16) \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$19) \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C. \quad \checkmark$$

$$20) \int \csc x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C. \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

【例2】 求下列不定积分

1) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx;$

2) $\int \frac{x^4 - x^2}{1+x^2} dx;$

3) $\int \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} dx;$

【解】 1)
$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx &= \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2} dx \\ &= \int \left(x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 3x + 3 \ln|x| - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

【解】 2)
$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx = \int \frac{(x^4 - 1) - (1 + x^2) + 2}{1 + x^2} dx$$

$$= \int (\underbrace{x^2 - 1} - 1 + \frac{2}{1 + x^2}) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - 2x + 2 \arctan x + C$$

分子 + 分母.

【解】 3)
$$\int \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (\underbrace{\sec^2 x} - 2 \underbrace{\sec x \cdot \tan x} + \underbrace{\tan^2 x}) dx$$

$$= \tan x - 2 \sec x + \tan x - x + C$$

$$= 2 \tan x - 2 \sec x - x + C$$

(三) 三种主要积分法

1) 第一类换元法 (凑微分法)

$$\text{若 } \int f(u) \mathrm{d} u = F(u) + C$$

$$\text{则 } \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) \mathrm{d} x = \int f[\varphi(x)] \mathrm{d} \varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

分拆 / 分部
① $+$ $-$ \times \div
② 复合 — 换元

【例3】求下列不定积分

$$1) \int \sec^4 x dx \quad \text{red } \sec^2 x dx$$

$$2) \int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} dx$$

$$3) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad \text{red } = d \tan x$$

$$4) \int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$$

【解】 1) $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x d \tan x$

$$= \int (\tan^2 x + 1) d \tan x$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C$$

【解】 2) $\int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} dx = \int (\ln x + 2)^2 d(\ln x + 2)$ $x = d(\ln x + 2)$

$$= \frac{1}{3}(\ln x + 2)^3 + C$$

【解】 3) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x} d\sqrt{x}$ $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$

$$= 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} = 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x}$$

$$= (\arctan \sqrt{x})^2 + C$$

【解】 4)
$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{(1-x)+1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$= \sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

$$2 - 2x = 2(1-x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

✓

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

【例4】 (1993年3) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C)$

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \int \frac{\sin x}{\cos^{\frac{3}{2}} x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos^{\frac{3}{2}} x} = 2 \cos^{-\frac{1}{2}} x + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C \end{aligned}$$

【例5】(1997年2) 计算积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{aligned} \text{[解1]} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \quad d(x-2) \\ &= \arcsin \frac{x-2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \text{[解2]} \int f(x) dx &= 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C \end{aligned}$$

2) 第二类换元法

定理3 设 $x = \varphi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t) \neq 0$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C,$$

$$\text{则 } \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C,$$

$$1) \sqrt{a^2 - x^2} \quad x = a \sin t (a \cos t)$$

$$2) \sqrt{a^2 + x^2} \quad x = a \tan t$$

$$3) \sqrt{x^2 - a^2} \quad x = a \sec t$$

【例6】求下列不定积分, 其中 $a > 0$.

$$1) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx \quad \checkmark$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$$

$$4) \int \sqrt{1 + e^x} dx$$

【解】 1) 令 $x = a \sin t$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \quad \checkmark$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$$

【解1】 2) 令 $x = a \tan t$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{\underline{x^2}} dx = \int \frac{a \sec t}{a^2 \tan^2 t} \cdot a \sec^2 t dt$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 t \cos t} dt = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cos t} dt$$

$$= \int \sec t dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \ln|\sec t + \tan t| - \frac{1}{\sin t} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$$

【解2】 2) $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = \int \frac{x^2 + a^2}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{a^2 dx}{x^3 \sqrt{1 + (\frac{a}{x})^2}}$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{d[1 + (\frac{a}{x})^2]}{\sqrt{1 + (\frac{a}{x})^2}}$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{1 + (\frac{a}{x})^2} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$$

【解】 3) 令 $x = a \sec t$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \int \frac{a \tan t}{\underbrace{a \sec t}} \cdot a \sec t \tan t dt$$

$$= a \int \tan^2 t dt = a \int (\sec^2 t - 1) dt$$

$$= a(\tan t - t) + C$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C$$

$$4) \int \sqrt{1 + e^x} dx$$

【解】4) 令 $t = \sqrt{1 + e^x}$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$,

$$\int \sqrt{1 + e^x} dx = \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt$$

$$= 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= 2\sqrt{1 + e^x} + \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} + C$$

3) 分部积分法

$$\int \underline{u} dv = uv - \int v du \quad (uv)'$$

“适用两类不同函数相乘”

① 何时用? ✓

② 如何用? ✓

$$\int p_n(x) e^{\alpha x} dx, \quad \int p_n(x) \sin \alpha x dx, \quad \int p_n(x) \cos \alpha x dx,$$

$$\int \underline{P_n(x)} \ln x dx; \quad \int \underline{P_n(x)} \arctan x dx; \quad \int \underline{P_n(x)} \arcsin x dx.$$

$$\int \underline{e^{\alpha x}} \sin \beta x dx; \quad \int \underline{e^{\alpha x}} \cos \beta x dx.$$

2次

$$= -\int x^2 dx$$

$$\int x e^x dx$$

$$\int x \sin x dx$$

$$\int e^x \sin x dx$$

$$\begin{aligned} &\int e^x \sin^2 x dx \\ &= \int \sin^2 x de^x \end{aligned}$$

【例7】求下列不定积分

$$1) \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int x de^{2x}$$

$$2) \int x^2 \sin x dx$$

$$3) \int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2$$

$$\begin{aligned} 4) \int e^x \sin^2 x dx \\ = \int \sin^2 x de^x \end{aligned}$$

【例8】 (1990年3) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

【解】 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx \neq \int \ln x d \frac{1}{1-x}$

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{dx}{x(1-x)}$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$= \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C.$$

【例9】(1998年2) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \ln \sin x d \cot x$

$$= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x dx$$
$$= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx$$
$$= \underline{-\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C.}$$

3 种

$\left\{ \begin{array}{l} \int e^{x^2} dx \\ \int \frac{\sin x}{x} dx \\ \int \frac{\cos x}{x} dx \end{array} \right.$

“
想不出”

(四) 三类常见可积函数积分

1) 有理函数积分 $\int R(x) dx$

(1) 一般法（部分分式法）；

* (2) 特殊方法（加项减项拆或凑微分降幂）；

【例10】(1999年2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

$2x-6$

【解】 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+2^2}$

$\frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{(x-3)^2+2^2}$

8

$= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C.$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

【例11】(1987年5) 求不定积分 $\int \frac{x dx}{\underline{x^4} + \underline{2x^2} + 5}$.

【解】
$$\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(\underline{x^2 + 1})^2 + 4}$$
$$= \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

【例12】(2019年2) 求不定积分 $\int \frac{3x+6}{\underbrace{(x-1)^2} \cdot \underbrace{(x^2+x+1)}} dx$

【解】 $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$ ✓

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx = \int \frac{-2}{\underbrace{x-1}} dx + \int \frac{3}{\underbrace{(x-1)^2}} dx + \int \frac{2x+1}{\underbrace{x^2+x+1}} dx$$

$$= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C$$

2) 三角有理式积分 $\int \underline{R(\sin x, \cos x)} dx$

(1) 一般方法(万能代换) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

* (2) 特殊方法 (三角变形, 换元, 分部)

i) 若 $R(\underline{-\sin x}, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则 令 $\boxed{u = \cos x;}$ $d \cos x$

ii) 若 $R(\sin x, \underline{-\cos x}) = -R(\sin x, \cos x)$, 则 令 $\boxed{u = \sin x;}$ $d \sin x$

iii) 若 $R(\underline{-\sin x}, \underline{-\cos x}) = R(\sin x, \cos x)$, 则 令 $\boxed{u = \tan x.}$ $d \tan x$

【例13】(1996年3) 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

【解1】 原式 $= \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$

【解2】 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C \\ &= -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

【例14】(1994年1, 2, 3) 求 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2\sin x}$.

【解】 原式 $= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)}$

$$= \int \frac{-\sin x dx}{2(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x)}$$

$\cos x = u$ $-\frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u)(1+u)^2}$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} \right) du = \frac{1}{8} \left[\ln \frac{1-u}{1+u} + \frac{2}{1+u} \right] + C$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1}{4(1 + \cos x)} + C.$$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

$$dx$$

$$\frac{1}{2} [(1-u) + (1+u)]$$

【例15】计算 $\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}$

[解] 原式 = $\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x (1+\sin x)} = \int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)}$

$d\sin x$

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

【例16】计算 $\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}$

[解] 原式 = $\int \frac{d\tan x}{\tan x (\tan x + 1)}$

$\tan x = u$ $\int \frac{(1+u)-u}{u(u+1)} du$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

$d\tan x$

3)简单无理函数积分 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

【例17】计算 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$.

【解1】令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2-1}, dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt$,

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = \int (t^2-1)t \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$= -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = -2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C$$

【例17】计算 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$. ✓

【解2】

$$\text{原式} = \int \frac{x+1}{x \sqrt{x^2+x}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}} + \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x}}} - d(\frac{1}{x}+1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$2 + 3 + 3$$

$$| \quad | \quad |$$
 两个概念 3 种方法 3 类人积分

① 重点: 3 种方法

② 尺度.



还不关注，
你就慢了



中国大学MOOC

×

有道考神