

高数基础班 (18)

18	多元函数的极值（无约束极值；条件极值）；最大最小值	P134-P141
----	---------------------------	-----------



还不关注，
你就慢了



中国大学MOOC

×

有道考神

23武忠祥考研

第三节 多元函数的极值与最值

本节内容要点

一. 考试内容概要

(一) 无约束极值

(二) 条件极值与拉格朗日乘数法

(三) 最大最小值

二. 常考题型方法与技巧

题型一 求极值 (无条件)

题型二 求最大最小值

题型三 最大最小值应用题

考试内容概要

(一) 无约束极值

定义7 若在点 (x_0, y_0) 的某邻域内恒成立不等式

$$\underline{f(x, y) \leq f(x_0, y_0)} \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$$

则称 f 在点 (x_0, y_0) 取得**极大值** (极小值), 点 (x_0, y_0) 称为 f 的**极大值点** (极小值点), 极大值与极小值统称为**极值**, 极大值点与极小值点统称为**极值点**.

定理5 (极值的必要条件) 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) **存在**

偏导数, 且 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的**极值点** 则

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

可能极值点 $\begin{cases} \text{驻点} \checkmark \\ f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \text{ 不存在} \end{cases}$



驻点 $\xleftrightarrow{xy} \xleftrightarrow{|x|+|y|}$ 极值点



可导

中国大学MOOC

有道考神

23武忠祥考研

定理6 (极值的充分条件) 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$

的某邻域内有二阶连续偏导数, 又 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, ✓

记 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 有极值 $\begin{cases} \underline{A > 0} & \underline{\text{极小值}}; \\ A < 0 & \underline{\text{极大值}}. \end{cases}$

(2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 无极值.

(3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不一定(一般用定义判定).

(二) 条件极值与拉格朗日乘数法

1) 函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 条件下的极值.

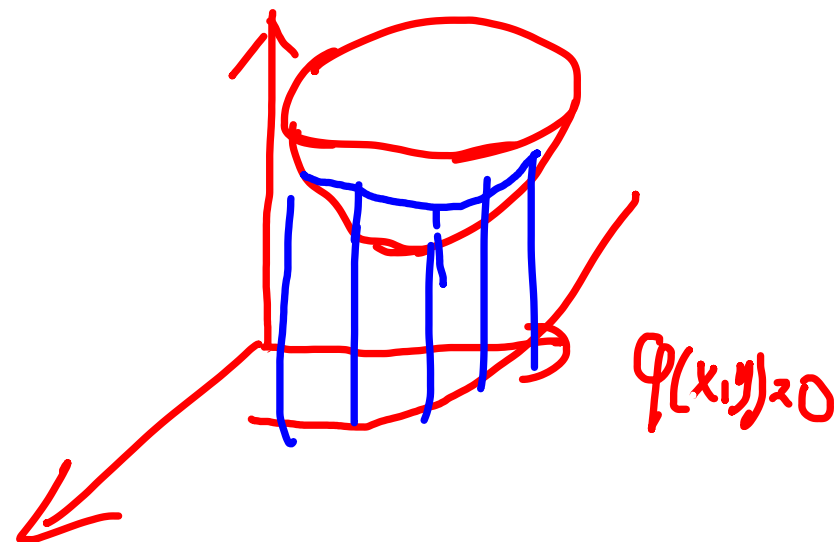
令 $\underline{F(x, y, \lambda)} = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

$$\begin{cases} F_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ F_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ F_\lambda = \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

2) 函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 条件下的条件极值.

令 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$

$z = f(x, y)$



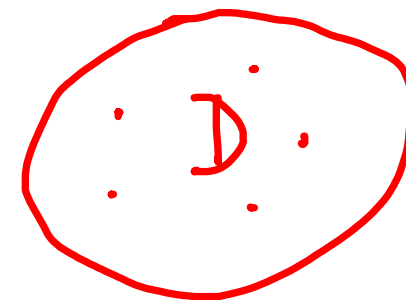
(三) 最大最小值

$f(x) [a, b]$



1. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值

- 1) 求 $f(x, y)$ 在 D 内部 可能的极值点.
- 2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上 的最大最小值. ~~(*)~~
- 3) 比较



2. 应用题

① $z = f(x, y)$

②

常考题型与典型例题

常考题型

1. 求极值(无条件)
2. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值
3. 最大最小值应用题.

【例1】(2003年, 3) 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极

小值 则下列结论正确的是

(A) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于零.

✓ (B) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零.

(C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零.

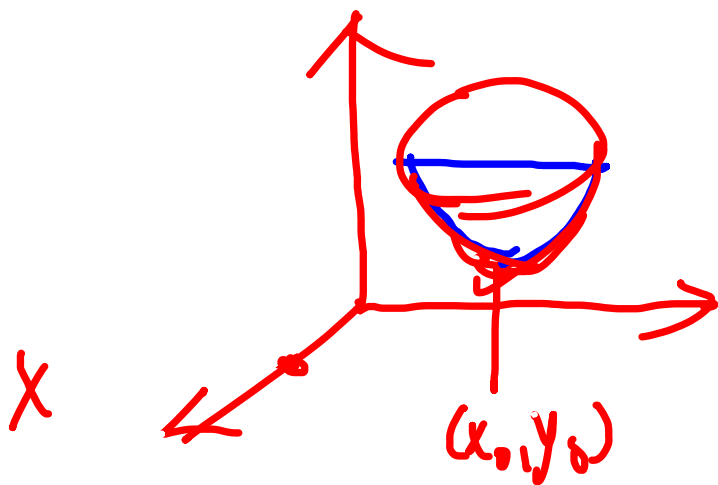
(D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数存在.

[解1] $f'_y(x_0, y_0) = 0$

[解2] $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 取极小值.

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 取极小值



【例2】(2009年, 2) 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \text{ 则点 } (0, 0)$$

✗ (A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

✓ (D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点.

【解1】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$

$$AC - B^2 = 1 - 0 > 0, \text{ 有. } A = 1 > 0 \text{ 极小}$$

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为

$dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$

✗ (A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

✓ (D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点.

【解2】

① 偏积分

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x$$

$$z = \int x dx = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = y$$

$$\varphi(y) = \int y dy = \frac{1}{2} y^2 + C$$

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$$

② 凑微分

$$dz = xdx + ydy$$

$$= d\frac{1}{2}x^2 + d\frac{1}{2}y^2$$

$$= d\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$$

$> C$

$\downarrow C$

✓

中国大学MOOC

有道考神

23武忠祥考研

【例2】(2009年, 2) 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为

$dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$

~~(A)~~ (A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点.

~~(B)~~ (B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

~~(C)~~ (C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点. ✓

【解3】排除法 $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

【例3】(2017年3) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是 ()

(A) (0,0), (B) (0,3), (C) (3,0), (D) (1,1). 

【解】由 $\begin{cases} z_x = y(3 - 2x - y) = 0 \\ z_y = x(3 - 2y - x) = 0 \end{cases}$ 驻点 (0,0), (0,3), (3,0), (1,1).

$$\underline{z_{xx} = -2y}, \underline{z_{yy} = -2x}, \underline{z_{xy} = 3 - 2x - 2y}.$$

在 (0,0) 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 (0,3) 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 (3,0) 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 (1,1) 点 $\underline{AC - B^2 = 3 > 0}$, 有极值;

【例4】(2009年, 1, 3) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$

的极值.

$$x=0$$

$$y=\frac{1}{e}$$

【解】① $f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2)$, $f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1. = 0$

令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. 由于

$$\textcircled{2} \quad A = f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2(2 + y^2)\Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right), \quad \checkmark$$

$$B = f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy\Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = 0, \quad \checkmark$$

$$C = f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = e, \quad \checkmark$$

所以 $AC - B^2 = 2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0$ $A > 0$. 极小值为 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

【例5】(2008年2) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $\boxed{z = x^2 + y^2} \geq 0$

和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

【解】① $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4).$

$$\text{令 } \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \checkmark \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0, \checkmark \end{cases}$$

$$x(1+\lambda) = y(1+\lambda)$$

$$(1+\lambda)(x-y) = 0, \quad \textcircled{1} \lambda = -1, \rightarrow \mu = 0, \Rightarrow z = -1$$

$$\textcircled{2} \boxed{x = y}$$

$$z = -\frac{1}{2}x$$

$$z = 2x^2$$

解方程组, 得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8).$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

中国大学MOOC

有道考神

23武忠祥考研

② 故所求的最大值为72, 最小值为6.

【例6】(2005年2) 已知 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx - 2y dy$

且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大最小值.

$$dx^2 - dy^2 = d(x^2 - y^2)$$

【解1】(1) 由 $dz = 2x dx - 2y dy$

可知 $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + C$.

化条件为无条件.

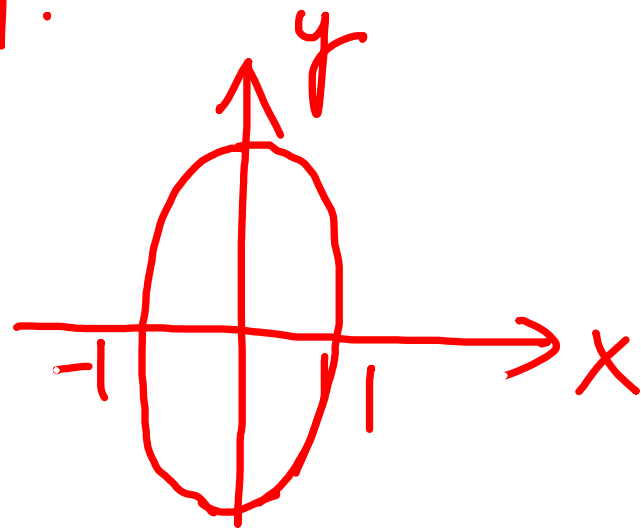
再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故 $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$, 解得驻点 $(0, 0)$

(2) 在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, $z = x^2 - (4 - 4x^2) + 2$

即 $z = 5x^2 - 2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$,

其最大值为 $z|_{x=\pm 1} = 3$, 最小值为 $z|_{x=0} = -2$. 再与 $f(0, 0) = 2$



(3) 比较, 可知 $f(x, y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为3, 最小值为 -2.

【解2】 同解法一，得驻点 (0,0)

拉格朗日

设 $L = \underline{x^2 - y^2 + 2} + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$

令
$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

2 (由) $x = 0$

$x = 0 \quad y = \pm 2$
 $y = 0 \quad x = \pm 1$

解得4个可能的极值点 (0,2), (0,-2), (1,0) 和 (-1,0)

又 $f(0,2) = \underline{-2}$, $f(0,-2) = \underline{-2}$, $f(1,0) = \underline{3}$, $f(-1,0) = \underline{3}$, 再与 $\underline{f(0,0) = 2}$ 比较, 得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

【解3】 同解法一，得驻点 (0,0)

椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = 2 \sin t$.

则 $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2 = \cos^2 t - 4 \sin^2 t + 2$
 $= 3 - 5 \sin^2 t$

故 $f_{\max} = 3, f_{\min} = -2$

$f(0,0) = 2$

① 求导

② 化条件为无条件.

i) 直导.

ii) 参数

*



还不关注，
你就慢了



 中国大学MOOC

×

 有道考神