

高数基础班 (20)

20	常数项级数（定义、性质、敛散性的判别法及举例）	P149-P155
----	-------------------------	-----------



还不关注，
你就慢了



第十章 无穷级数

(数二不要求)

第一节 常数项级数 ✓

第二节 幂级数

第三节 傅里叶级数 (数三不要求)

第一节 常数项级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

(一) 级数的概念与性质

(二) 级数的审敛准则

二. 常考题型与典型例题

常数项级数敛散性的判定

考试内容概要

(一) 概念与性质

1. 级数的概念

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

无穷级数

部分和

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$

收敛 发散

① 存在性. — 收敛性 *
② 值. — 和

$$S \approx s_n$$

【例1】判定下列级数敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad \checkmark$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0). \quad \checkmark$$

【解】 (1) $s_n = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

$$(2) \quad \underline{s_n} = a + \underline{aq} + \underline{aq^2} + \cdots + \underline{aq^{n-1}}$$

$$= \begin{cases} \frac{a(1-\underline{q^n})}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

$$a \left(\underline{1-1+1-1-\cdots} \right)$$

0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & |q| < 1 \text{ 收敛} \\ \infty & |q| > 1 \\ \frac{a(1-(-1)^n)}{2} & q = 1 \\ & q = -1 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} |q| > 1 \\ q = 1 \\ q = -1 \end{matrix} \right\} \text{ 发散}$$

2. 级数的性质

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ . 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 $\overset{\checkmark}{\text{收敛}} \pm \overset{\checkmark}{\text{发散}} = \text{发散}; \quad \text{发散} \pm \text{发散} = \text{不确定}$

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项不影响级数的敛散性.

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1) 加括号收敛 $\xrightarrow{\times}$ 原级数收敛;

2) 加括号发散 \longrightarrow 原级数发散;

✓ ✓
 $(1-1)+(1-1)+\dots$
0 0
 S_n
发散

5) (级数收敛必要条件)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$\xleftarrow{\times}$
 $S_n - S_{n-1} = u_n$
↓ ↓
 S S
是发散

$$S_n = \sqrt{n}$$

(二) 级数的审敛准则

(1) 正项级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0)$

S_n ↗

基本定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 上有界

$S_n \rightarrow +\infty$

1) 比较判别法: 设 $\frac{S_n}{u_n} \leq S_{n+1}$, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\rightarrow S_n \rightarrow +\infty$

收
发

放大
 $u_n \leq v_n$ 收

$v_n \leq u_n$ 发

2) 比较法极限形式: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ (0 \leq l \leq +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

②若 $l = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

③若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

两个常用级数

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ✓ ✓

$p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad \checkmark$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \ (a > 0, q > 0)$ ✓ ✓

$q < 1$ 时收敛, 当 $q \geq 1$ 时发散.

3) 比值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{收敛,} & \underline{\rho < 1}, \\ \text{发散,} & \underline{\rho > 1}, \\ \text{不一定,} & \underline{\rho = 1}, \end{cases}$

4) 根值法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{收敛,} & \underline{\rho < 1}, \\ \text{发散,} & \underline{\rho > 1}, \\ \text{不一定,} & \underline{\rho = 1}, \end{cases}$

$$\frac{n^p \cdot e_n \cdot n!}{\sqrt[n]{a n^n}} \rightarrow e$$

$$\frac{a^n \cdot n! \cdot n^n}{n! \cdot n^n} \rightarrow e$$

3) 4).

$$n \geq \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

1) 2)

优
适用广

缺
不方便

适用范围

方便

3) 4)

1) 2)

* 5) 积分判别法: 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上 单调减, 非负 的 连续函数, 且 $a_n = f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散.

✓ 【例2】证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散. ✓

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n), \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

$p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散

✓ 【例3】判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 的敛散性. ✓

(证). $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$
 $[2, +\infty)$

$$a_n = \frac{1}{n \ln n} = f(n)$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

(2) 交错级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0)$

莱不尼兹准则: 若 (1) u_n 单调减; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

【注】 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛. $\Leftrightarrow u_n$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

【例】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛, 但 $u_n = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1-1}} = \frac{1}{2^n}$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

(3) 任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛概念

$\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ 收敛

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛, 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

① 绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 条件收敛的级数的所有正项 (或负项) 构成的级数一定发散. 即:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 发散.

正项 $u_n > 0$ 和 $u_n < 0$

常考题型与典型例题

常考题型

常数项级数敛散性判定

【例4】(2015年3) 下列级数中发散的是()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 收

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$ 收

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$ 发

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收

【解1】直接法

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

发 + 发 = 发

【解2】排除法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p} = 1$$

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$$(B) \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{发}$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \text{发}$$

$$\ln n < n \quad \text{发}$$

【例5】(2013年3) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ()

✗ (A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛;

✗ (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$;

✗ (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在;

✓ (D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

$\rightarrow 1$
 $a_n = (1 + \frac{1}{n})$ ✓

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ ✓

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n \ln^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{\ln^2 n} = +\infty$

✗ 【解1】直接法

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在 $A \neq 0$
 $= 0$

【解2】排除法

① $a_n < \frac{1}{n^p}$ ✓
 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ ✓

【例4】(09年1) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

- ✗ (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
- ✗ (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
- ✓ (C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛;
- ✗ (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$b_n = \frac{1}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$

$a_n \rightarrow 0$

$\sum b_n$ 收敛 $\rightarrow \sum b_n a_n$ 收敛
(反例)

$\sum \frac{1}{n^2}$

【解1】直接法

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$

$|b_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |b_n| < 1 \Rightarrow |b_n| > b_n^2$

【解2】排除法

$\sum b_n$ 收敛 $\nrightarrow b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$a_n \rightarrow 0 \quad |a_n| < 1 \quad a_n^2 < 1 \Rightarrow a_n^2 b_n^2 \leq b_n^2$

【例5】(2011年3) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是()

✓ (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. ✓

✗ (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

✗ (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

✗ (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$(1-1) + (1-1) + (1-1) - \dots$
 $0 \quad 0 \quad 0$
 $\neq 2$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$

$u_n = 1$

✗ 【解1】直接法

【解2】排除法

$\sum (u_{2n-1} - u_{2n})$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n})$
 $= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \dots \rightarrow +\infty$



还不关注，
你就慢了



中国大学MOOC

×

有道考神