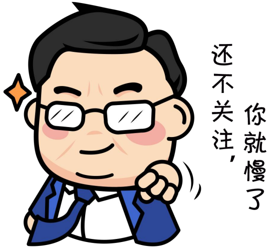
高数基础班（14）

14	微分方程概念，一阶方程，可降阶方程，高阶线性方程，	P106-P113



第七章　常微分方程

本章内容要点

一. 考试内容概要

（一）常微分方程的基本概念

（二）一阶微分方程

（三）可降阶的高阶方程（数三不要求）

（四）高阶线性微分方程

（五）差分方程（仅数三要求）

二. 常考题型与典型例题

题型一 微分方程求解

题型二 综合题

题型三 应用题

（一）常微分方程的基本概念

1. 微分方程
2. 微分方程的阶 ✓
3. 微分方程的解
4. 微分方程的通解
5. 微分方程的特解
6. 初始条件
7. 积分曲线

$y'=2x$ $\quad$ $dy=2xdx$

$y=x^2+C$ $\quad$ $y''+y'=e^x$

（二）一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad \frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

1）可分离变量的方程 $y'=f(x)g(y)$

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

【例1】（2006年1，2）微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 ______

$(y=Cxe^{-x})$

[解] $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1-x}{x}dx$

$\ln|y|=\ln|x|-x+c$

$|y|=|x|e^{c}e^{-x}$

$y=\pm e^{c}xe^{-x}=cxe^{-x}$

2）齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 令 $\boxed{u=\frac{y}{x}}$ $\Rightarrow y=xu$. $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$ 可分

【例2】（1993年1, 2）求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件

$y(1)=1$ 的特解.

【解】原方程为齐次方程 $y'=(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}$，令 $\boxed{u=\frac{y}{x}}$，则 $y=xu$, $y'=u+xu'$

$$xu'+u=u^2-u,\quad xu'=u^2-2u.$$

$$\frac{du}{u^2-2u}=\frac{1}{x}dx\qquad \frac{1}{2}[\ln|u-2|-\ln|u|]=\ln|x|+C_1,\quad \frac{u-2}{u}=Cx^2$$

$\int\frac{du}{u(u-2)}$

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2$$

由 $y(1)=1$，得 $C=-1$，即得所求的特解为

$$\frac{y-2x}{y}=-x^2,\text{ 即 } y=\frac{2x}{1+x^2}$$

3）线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

通解 $\boxed{y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]}$

【例3】（2008年2, 4）微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是______.

$y=x(C-e^{-x})$

[解] $(y+x^2e^{-x})-x\frac{dy}{dx}=0$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=xe^{-x}}$$

$$y=e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}\left[\int xe^{-x}e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+C\right]=x\left[\int e^{-x}dx+C\right]$$

$$=x\left[-e^{-x}+C\right]=x(C-e^{-x})$$

4）伯努利方程（仅数学一要求）

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1) \qquad (y^{1-\alpha} = u) \quad \text{线性}$$

5）全微分方程（仅数学一要求）

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad F(x,y) = C$$

y　　　　x

a) 判定: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

b) 解法:

1）偏积分　①　　2）凑微分　②　　3）线积分

（三）可降阶方程（数三不要求）

$y''=f(x,y,y')$

1） $y''=f(x)$

$y''=e^x+1$

$y'=e^x+x+C_1$

$y=e^x+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$

2） $y''=f(x,y')$ $\quad (y'=P, y''=\frac{dP}{dx})$

$\boxed{\frac{dp}{dx}=f(x,p)}$

【例4】（2000年1）微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 ________. $(y=C_1+\frac{C_2}{x^2})$

[解] 令 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}$

$x\frac{dp}{dx}+3p=0$ $\quad x\frac{dp}{dx}=-3p$ $\quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{-3}{x}dx$

$\ln|p|=-3\ln|x|+C$

$|p|=e^C e^{\ln\frac{1}{|x|^3}}=\frac{1}{|x|^3}e^C$ $\quad y'=p=\pm e^C\frac{1}{x^3}=\frac{C}{x^3}$

$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$

3) $y'' = f(y, y')$ $\quad (y' = P, y'' = P\dfrac{dP}{dy})$

$y' = p, \quad y'' = \dfrac{dp}{dx}$

$\dfrac{dp}{dx} = f(y, p)$

$p\dfrac{dp}{dy}$

【例5】(2002年1, 2) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1,\ y'|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$ 的特解是 ______ x. $(y = \sqrt{x+1})$

[解] 令 $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$

$yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0 \qquad y\dfrac{dp}{dy} = -p$

$\int \dfrac{dp}{p} = \int -\dfrac{1}{y}dy, \qquad \ln|p| = -\ln|y| + c$

$|p| = e^{c}\dfrac{1}{|y|} \qquad p = \dfrac{c}{y}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{c}{1} \qquad y' = \dfrac{\frac{1}{2}}{y}$

$2yy' = 1$

$(y^2)' = 1 \qquad y^2 = x + c$

$y^2 = x + 1$

$y = \pm\sqrt{x+1}$

$y = \sqrt{x+1}$

$p = 0$

$y' = 0$

$\Rightarrow y = c$

（四）高阶线性微分方程

1) 线性微分方程的解的结构

齐次方程　$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$　（1）

非齐次方程　$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$　（2）

定理1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，那么

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \ne C$　无关

就是方程（1）的通解.

定理2 如果 y^* 是非齐次方程（2）的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程（1）的两个线性无关的特解，则

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)}$$

是非齐次微分方程（2）的通解.

定理3 如果 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$ 是非齐次方程（2）的两个特解，则

$$y(x)=y_2^*(x)-y_1^*(x)$$

是齐次微分方程（1）的解.

定理4 如果 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则

$$y_1^*(x)+y_2^*(x)$$

是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个特解.

2) 常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

1）不等实根： $r_1 \neq r_2$ $\qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2）相等实根： $r_1 = r_2 = r$ $\qquad y = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$ $\qquad e^{rx} \quad xe^{rx}$

3）共轭复根： $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\qquad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

【例6】(2013年3)微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 ________.

$(y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x))$

【解】 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$

$(r-\frac{1}{2})^2=0 \quad r_1=r_2=\frac{1}{2}$

$y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x)$

【例7】（1996年3）微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为

$y=$ ________.

$(y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x))$

[解] $r^2+2r+5=0$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

$$y=e^{-x}\left[C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right]$$

【例8】（2010年2）3阶常系数线性齐次微分方程

$y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$______.

$(y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x)$

[解] $r^3-2r^2+r-2=0$

$r^2(r-2)+(r-2)=0$ ✓ ✓

$(r-2)(r^2+1)=0$ $r_1=2$, $r_{2,3}=\pm i$

$y=C_1e^{2x}+(C_2\cos x+C_3\sin x)$

3) 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

λ

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 　　令 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$

2. $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_l^{(1)}(x)\cos\beta x + P_n^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$

令 $y^* = x^k e^{\alpha x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$. 　$m = \max\{l, n\}$

$\alpha + i\beta$

【例9】（1995年3） 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为 $y=$ ________.

$(y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x)$

【解】 $r^2+1=0$， $r_{1,2}=\underline{\pm i}$ ✓ $\quad \dfrac{(-2x)e^{0x}}{\pm i}$

令 $y^*=(ax+b)e^{0x}=ax+b$ $\qquad \lambda=0$

$ax+b=-2x \Rightarrow a=-2,\ b=0$

$y^*=\underline{-2x}$

$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)-2x$

【例10】（2007年1，2）二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ________.

$(y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-2e^{2x})$

【解】 $r^2-4r+3=0$　　$(r-3)(r-1)=0$

$r_1=3,\ r_2=1$

令 $y^*=ae^{2x}$　　$\lambda=2$

$ae^{2x}[2^2-8+3]=2e^{2x} \Rightarrow -a=2 \Rightarrow a=-2$

$y^*=-2e^{2x}$

$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-2e^{2x}$

4）欧拉方程（仅数一要求）

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

令 $x = e^t$，$\quad x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

$r \quad r$

$D = \frac{d}{dt}$

$Dy = \frac{dy}{dt}$

$D^2 y = \frac{d^2 y}{dt^2}$

【例11】（2004年1）欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x>0)$

的通解为 $y =$ ______.

$(y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2})$

【解】令 $x = e^t$

$D(D-1)y + 4Dy + 2y = 0$

$r(r-1) + 4r + 2 = 0$

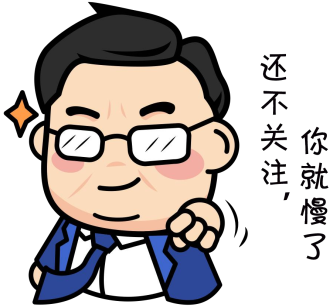
$r^2 + 3r + 2 = 0$

$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0$，$\quad (r+1)(r+2) = 0$

$r_1 = -1, r_2 = -2$

$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$


还不关注，
你就慢了