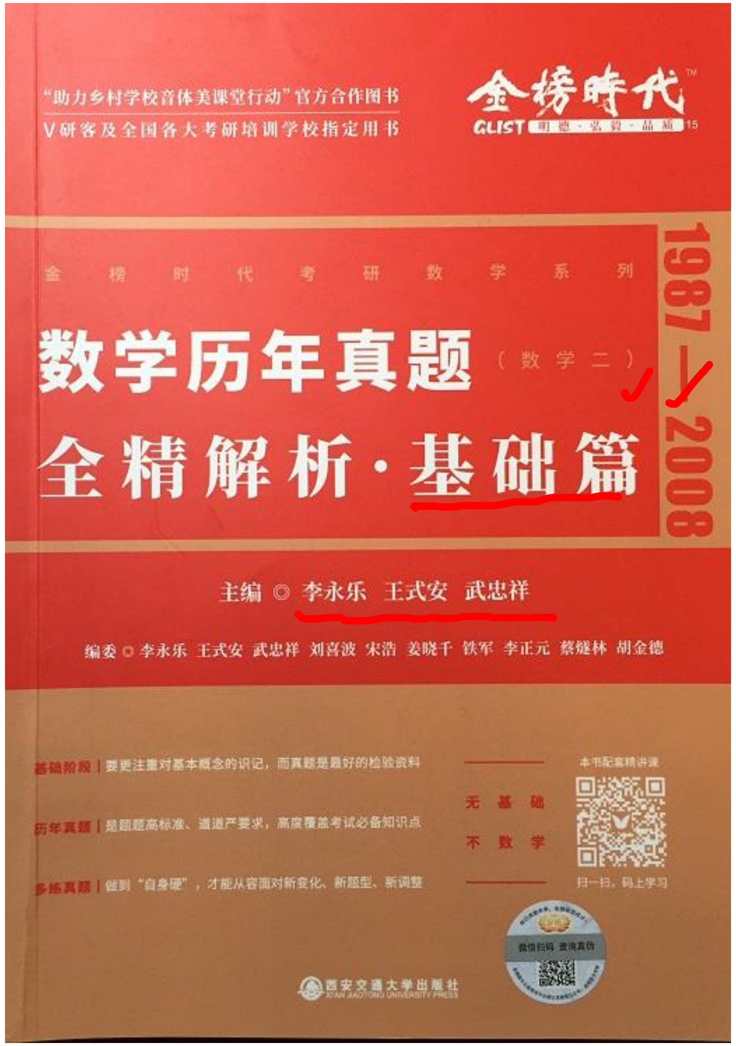
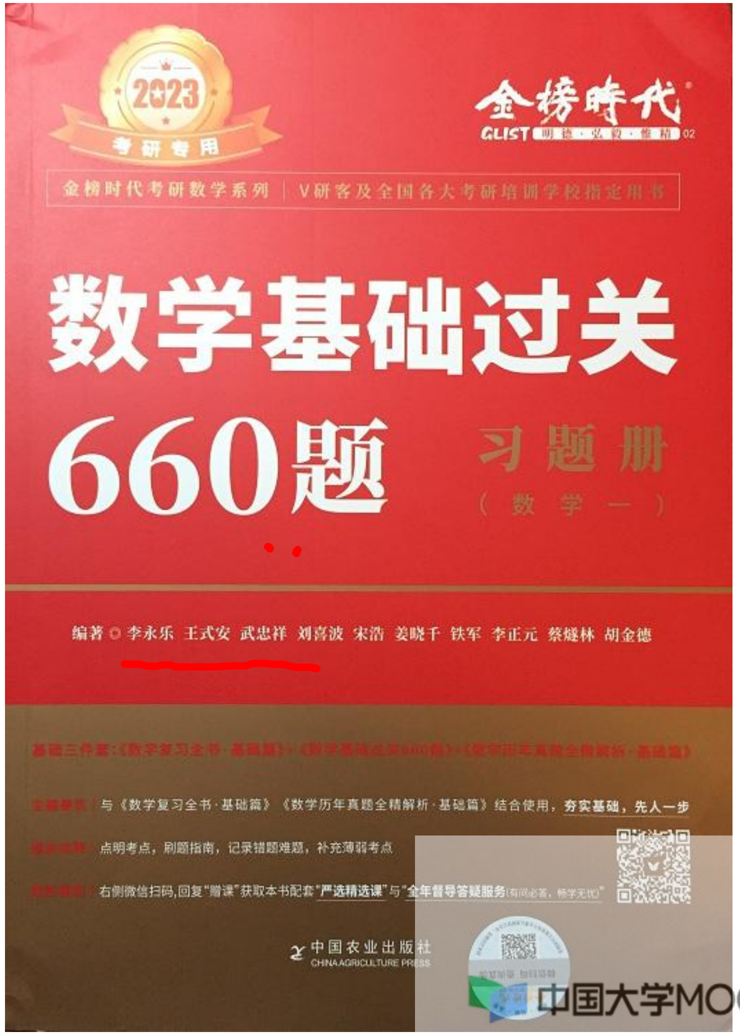
2023年考研
数学基础班

主讲 武忠祥 教授

还不关注，你就慢了


2023
考研专用
金榜时代
GLIST 明德·弘毅·惟精
金榜时代考研数学系列 | V研客及全国各大考研培训学校指定用书
高等数学
·基础篇·
主编◎武忠祥（西安交通大学）
方向 学习高数不迷路 深度分析大纲考点与要求，先学基础不犹豫
方法 培养思维破套路 多角度多层次解析例题，打破解题固有模式
训练 避免"经典的错误" 勤思考巧练题，不犯经典错误就是快人一步
中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

"助力乡村学校音体美课堂行动"官方合作图书
V研客及全国各大考研培训学校指定用书
金榜时代
GLIST 明德·弘毅·品质
金榜时代考研数学系列
数学历年真题（数学二）
全精解析·基础篇
1987—2008
主编◎李永乐 王式安 武忠祥
编委◎李永乐 王式安 武忠祥 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德
无基础 不数学
西安交通大学出版社

2023
考研专用
金榜时代
GLIST 明德·弘毅·惟精
金榜时代考研数学系列 | V研客及全国各大考研培训学校指定用书
数学基础过关
660题
习题册
（数学一）
编著◎李永乐 王式安 武忠祥 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德
中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

高等数学基础班教学计划

第一章　函数 极限 连续 (10学时)

第二章　导数与微分（3学时)

第三章　微分中值定理及其应用（4学时)

第四章　不定积分（3学时)

第五章　定积分及反常积分（4学时)

第六章　定积分的应用（2学时)

第七章　微分方程（3学时)

第八章　多元微分及其应用（6学时)

第九章　二重积分（3学时)

第十章　无穷级数（5学时)

第十一章　空间解析几何及其应用（1学时)

第十二章　三重积分及线面积分（4学时)

共计 48 学时

数二　前9章　38学时

数三　前10章　43学时

绪　论

《高等数学》

核心内容：《微积分》
- 微分学（导数）
- 积分学（积分）

概念，理论，方法，应用

一。微积分研究的主要内容

主要研究： 事物运动中的数量变化规律

两种变化：
- 均匀变化 ✓
- 非均匀变化 ✓

初等
高等

两个侧面：
- ✓ 微观（局部）
- 宏观（整体） ✓

【例1】 质点沿直线运动

微观：已知位移 $s = s(t) \quad (a \le t \le b)$ 求瞬时速度．

(1) 均匀变化 $\quad v = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ 　速度　除法．

(2) 非均匀变化

t

$t_0 \quad t_0+\Delta t$

① $\quad \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 　平均速度　除法

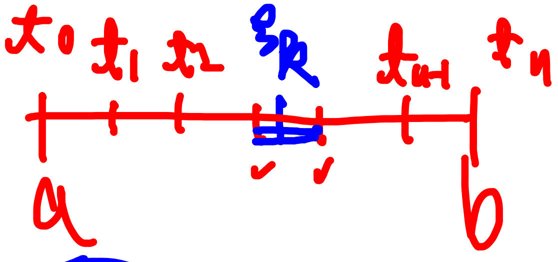
$$v(t_0) \approx \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

② $\quad v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 　瞬时速度　极限

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

【例2】 质点沿直线运动

宏观: 已知速度 $v = v(t)$ $(a \le t \le b)$ 求位移 .



乘法

(1) 均匀变化 $s = v \times (b-a)$

(2) 非均匀变化

1）分 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

① 2）匀 $\Delta s_k \approx v(\xi_k) \times \Delta t_k$ 乘法

3）合 $s \approx \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k$

② 4）精 $s = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k = \int_a^b v(t) dt$ 极限

$= \int_a^b v(t) dt$

二。微积分研究的主要对象、思想方法与特征

1）微积分研究的主要对象

函数 $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ 的变化规律

微观（变化率）　　　　宏观（改变量）

2）微积分研究的思想方法

利用已知　　　未知

均匀变化　　　非均匀变化

① 局部均匀化求近似，② 利用极限得精确

3）导数与积分的本质

导数和积分分别是处理均匀量的商和积在处理非均匀量中的发展

第一章 函数 极限 连续

第一节 函 数

第二节 极 限

第三节 连 续

第一节　函　数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）函数的概念及常见函数

（二）函数的性质

二. 常考题型与典型例题

题型一　函数的性质

题型二　复合函数

第一节 函 数

考试内容概要

（一）函数概念及常见函数

1. 函数概念

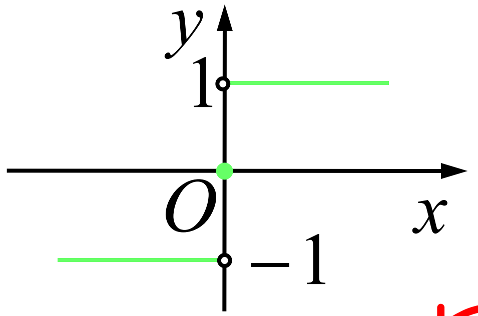
定义1 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有一个确定的 y 和它对应，则称 x 是 y 的**函数**，记为 $y=f(x)$. 常称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为**定义域**.

定义域 $D_f=D$.

值域 $R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$

【注】函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则.

【例1】函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为**符号函数**.



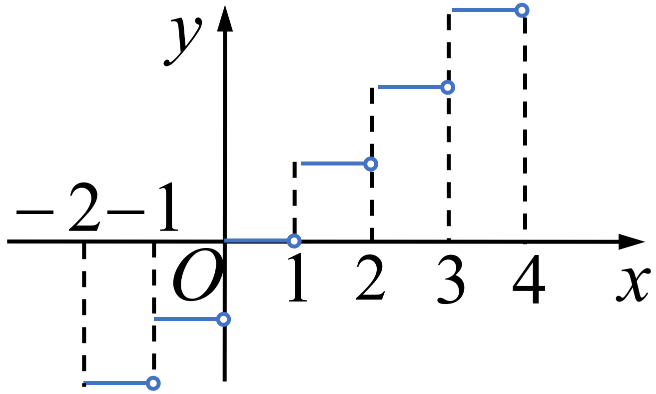
【例2】设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**.

$\boxed{x-1<[x]\leq x}$

✓

$[3.8]=3$,

$[-3.8]=-4$



2. 复合函数

定义2 设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, $u=g(x)$ 的定义域为 D_g 值域为 R_g, 若 $D_f\cap R_g\neq\phi$, 则称函数 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数. 它的定义域为

!!

外 内

$$\{x\mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

【注】 不是任何两个函数都可以复合，如

$$y=f(u)=\ln u, u=g(x)=\sin x-1,$$

$g(x)=\sin x$, $R_g=[-1,1]$

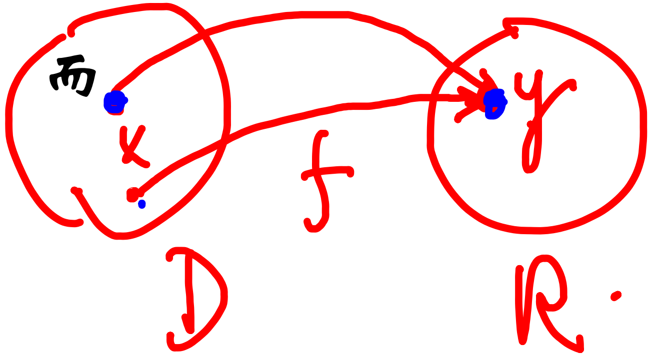
就不能复合，这是由于 $D_f=(0,+\infty), R_g=[-2,0],\ D_f\cap R_g=\phi.$

3. 反函数

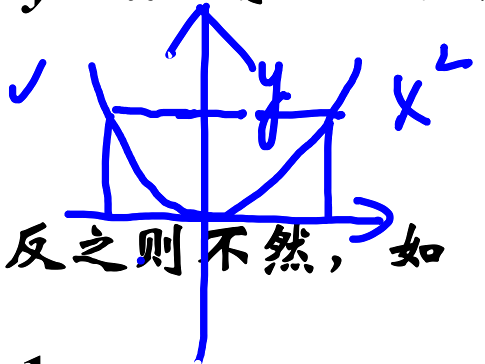
定义4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y. 若对任意 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

$[0,+\infty)$

f —— 映射.



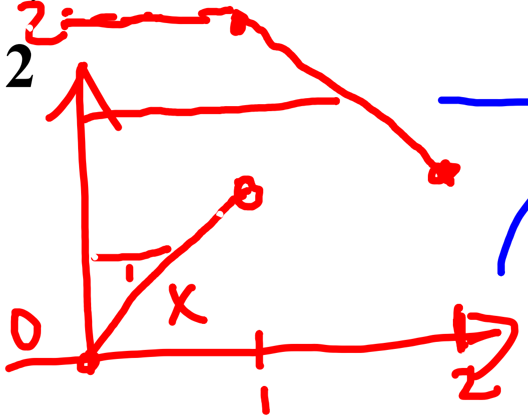
【注】（1）不是每个函数都有反函数.如 $y=x^3$ 有反函数，而 $y=x^2$ 没有反函数；

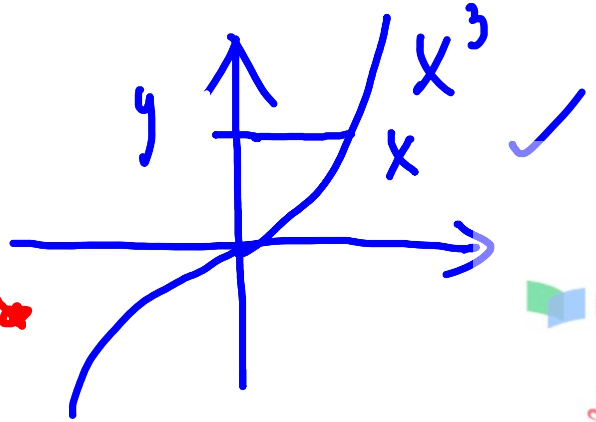


（2）单调函数一定有反函数，但反之则不然，如

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1,\\ 3-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

有反函数，但不单调.





$y=e^x$ $x=\ln y$ $y=\ln x$

(3) 有时也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$

在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形重和，

$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

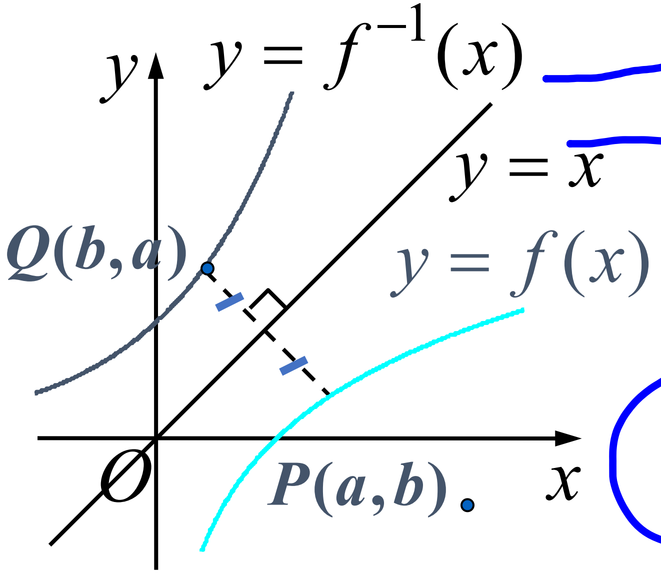
(4) $f^{-1}[f(x)]=x$,

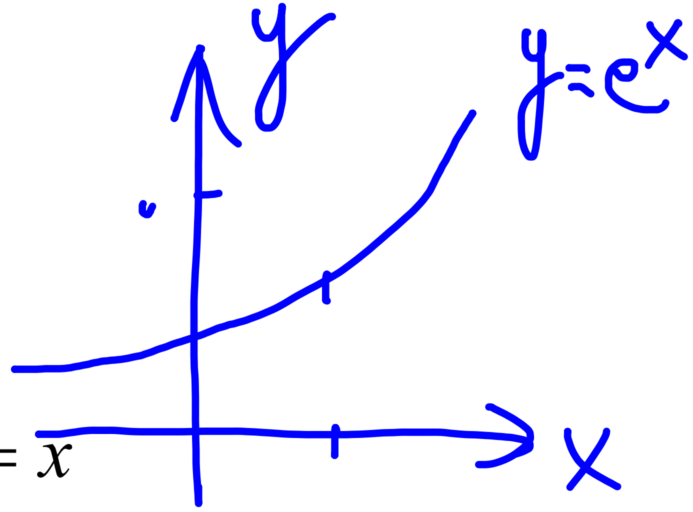
$f[f^{-1}(x)]=x$.

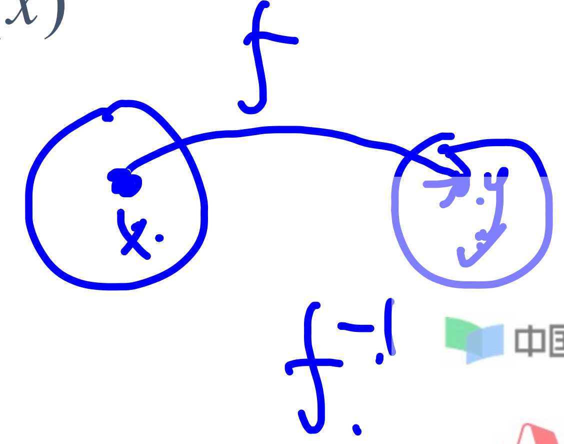
y y ?

$f^{-1}[f(x)]=x$

8:07







【例3】求函数 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

【解】由 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 知

$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0$$

解得 $e^{x}=y+\sqrt{1+y^{2}}$

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^{2}})$$

则函数 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$.

4. 初等函数

定义4　将幂函数，指数，对数，三角，反三角统称为**基本初等函数**. 了解它们的定义域，性质，图形.

幂函数　$y = x^{\mu}$　（μ 为实数）；

指数函数　$y = a^{x}$　（$a > 0,\ a \neq 1$）

对数函数　$y = \log_a x$　$(a > 0, a \neq 1)$

三角函数　$y = \sin x$　$y = \cos x$，$y = \tan x$　$y = \cot x$

反三角函数　$y = \arcsin x$　$y = \arccos x$　$y = \arctan x$，

$y = \sin \dfrac{x}{x^2+1}$

定义5　①由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且②能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

（二）函数的性质

1. 单调性

定义2 如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$ 恒有

$f(x_1) < f(x_2)$ **单调增加**

$f(x_1) > f(x_2)$ **单调减少**

2. 奇偶性

定义3 设 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，$\forall x \in D$

$f(-x) = f(x)$ **偶函数**

$f(-x) = -f(x)$ **奇函数**

【注】奇 $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln\dfrac{1-x}{1+x}, \ln(x+\sqrt{1+x^2}),$

$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}, f(x)-f(-x)$

偶 $x^2, |x|, \cos x, f(x)+f(-x)$

2）奇函数的图形关于原点对称，且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；偶函数的图形关于 y 轴对称.

3）奇+奇=奇；　偶+偶=偶；　奇 × 奇=偶

偶 × 偶=偶；　奇 × 偶= 奇；

$f(-x)=-f(x)$

$f(0)=-f(0)$

【例4】证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

【证】由于 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

（有理化）

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

则 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

3. 周期性

定义4 若存在实数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$

则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 使得上式成立的最小正数 T

称为**最小正周期**，简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

【注】（1）$\sin x, \cos x$ 周期 2π; $\sin 2x$, $|\sin x|$ 周期 π;

（2）若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期.

$\sin(-3x+2)$

$\dfrac{2\pi}{|-3|}=\dfrac{2\pi}{3}$

4. 有界性

∃ ✓

定义5 若存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\le M$

则称 $f(x)$ 在 X 上为**有界函数**.

如果对任意的 $M>0$，至少存在一个 $x_0\in X$，使得

$|f(x_0)|>M$， 则 $f(x)$ 为 X 上的**无界函数**.

$\sin x$

$\frac{1}{x}$

(1,2) 有界.

(0,1) 无界

【注】1） $f(x)$ 为有界函数 定义域

2）常见的有界函数

$$|\sin x|\le 1;|\cos x|\le 1;|\arcsin x|\le\frac{\pi}{2};|\arctan x|<\frac{\pi}{2},|\arccos x|\le\pi;$$

【例5】证明函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数.

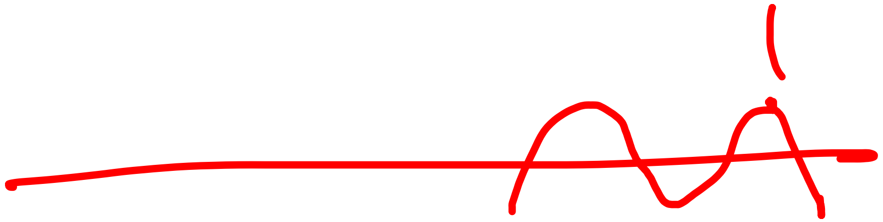
$(-\infty,+\infty)$

【证】由于 $f(2n\pi+\frac{\pi}{2})=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,

$|f(x_0)|>M.$

所以，对于任意的 $M>0$，只要正整数 n 充分大，

$\sin$



总有 $\left|f(2n\pi+\frac{\pi}{2})\right|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M$,

故函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数.

常考题型与典型例题

1. 函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定；

2. 复合函数；

（一）函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定

$\to +\infty$

【例6】（1990年4）设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

（A）偶函数. ✗　　　　✓（B）无界函数.　　$x \to \frac{\pi}{2}^-$

（C）周期函数　　　　（D）单调函数.

（二）复合函数

【例7】(2001年2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$，则 $f[f(x)]$ 等于（ ）.

（A）0 （B）1 （C）$\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ （D）$\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$$

$f(x)$: 0

【例8】（1988年1, 2）已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则

$\varphi(x)=$ ______ 的定义域为 ____.

$= \sin\varphi(x)$

【解】由 $f(x)=\sin x,\ f[\varphi(x)]=1-x^2$, 知

$$\sin\varphi(x)=1-x^2$$

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

这里 $|1-x^2|\le 1,$

由此解得 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}.$

第二节 极 限

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）极限的概念

（二）极限的性质

（三）极限存在准则

（四）无穷小

（五）无穷大

二. 常考题型与典型例题

题型一 极限的概念性质及存在准则

选择题.

证明题

题型二 求极限

计算

填空.

题型三 无穷小量阶的比较

第二节 极 限

考试内容概要

(一) 极限的概念

1. 数列的极限

定义1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

【注】(1) ε 与 N 的作用;

(2) 几何意义;

(3) 数列 $\{x_n\}$ 的极限与前有限项无关;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

邻域

有限: $x_1\ x_2 \cdots x_N$

$x_2 \cdots x_N\ x_{N+1}$

无穷多项

x_{N+1}

$a-\varepsilon\quad a\quad a+\varepsilon$

$b < a_n < c$

$b < a < c$

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$

$n \to \infty$

$x_1\ x_3 \cdots x \cdots$

$x_n \to a \longrightarrow x_{n+1} \to a$

$\longleftarrow\ x_{n+k} \to a$

$k > 0$

$(-1)^n$ $x_{2n} = 1 \to 1$

$x_{2n-1} = -1 \to -1$

【例1】(2006年3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} =$ ________.

【解1】当 n 为奇数时 $x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}=1$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

当 n 为偶数时 $x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$$

【例2】试证明：

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$，但反之不成立；

$|x_n| \to 1$

$\boxed{x_n = (-1)^n}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

?

$0 \le \left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \to 0$

√ 条 $\forall \varepsilon>0, \exists N$，当 $n>N$，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

$\dfrac{0}{0}$

√ 结论：$\forall \varepsilon>0, \exists N$，当 $n>N$，有 $\big||x_n|-|a|\big| < \varepsilon$

$\big||x_n|-|a|\big| \le |x_n - a| < \varepsilon$

e: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

$|x_n| < \varepsilon$， $|x_n| = \big||x_n| - 0\big| < \varepsilon$