高数基础班（24）

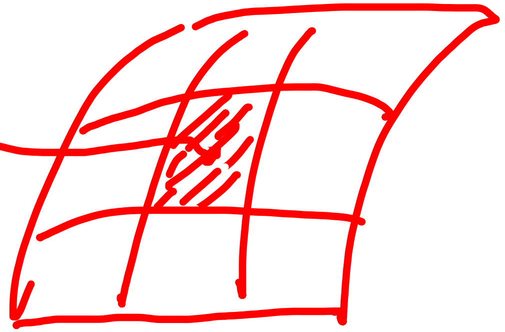
24	曲面积分计算举例；多元积分应用（质量、质心、形心、转到惯量，变力沿曲线做功，场论初步（散度，旋度）	P190-P200

武忠祥　教授

第三节 曲面积分

（一）对面积的面积分（第一类面积分）

1. 定义 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$



2. 性质 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{-\Sigma} f(x,y,z)dS$

（与积分曲面的方向无关）

3.计算方法

$x=x(y,z)$

$y=y(x,z)$

$x^2+y^2=1$

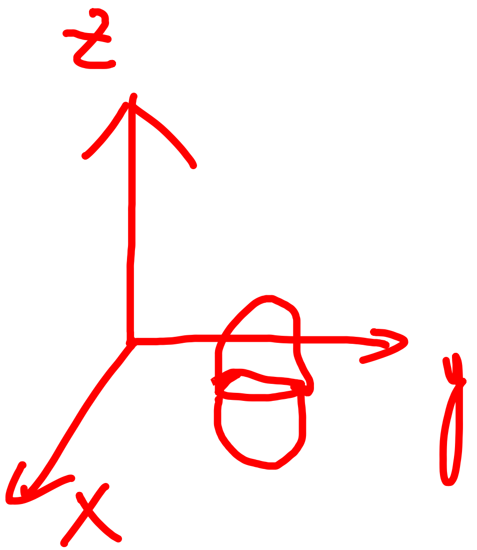
1． 直接法： $\Sigma: z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$

$$\boxed{\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}\sigma}$$

2. 利用奇偶性

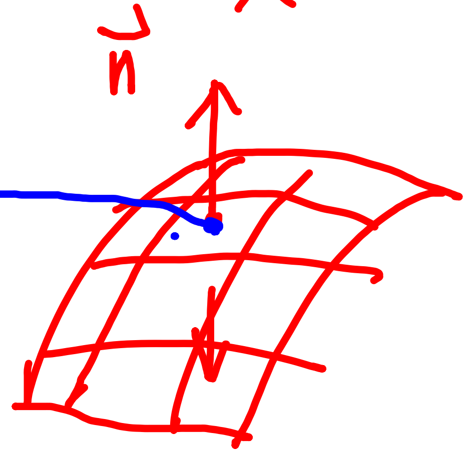
若曲面 $\sum$ 关于 xoy 面对称, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_{z\ge 0}} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}$$



3. 利用对称性

(二）对坐标的面积分（第二类面积分）



1. 定义

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

2. 性质

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint\limits_{-\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（与积分曲面的方向有关）

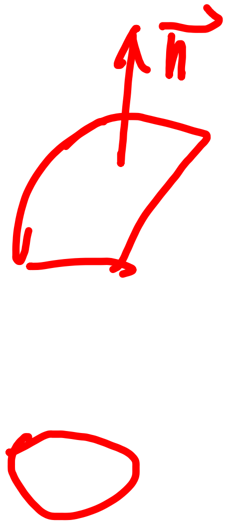
3. 计算方法

1） 直接法：

(1) 设曲面：$z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

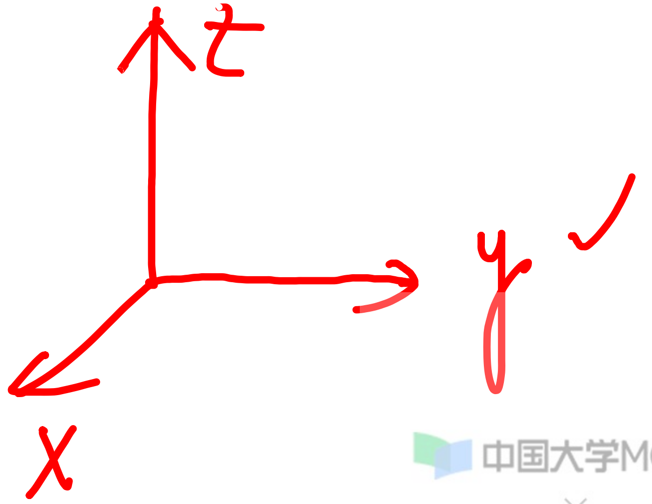
上 正
下 −



(2) 设曲面：$\Sigma: x=x(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

前 正
后 负



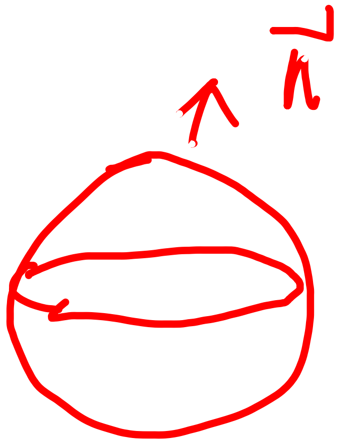
(3) 设曲面：$\Sigma: y=y(z,x)$, $(z,x)\in D_{zx}$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

右 +
左 −

2） 高斯公式:

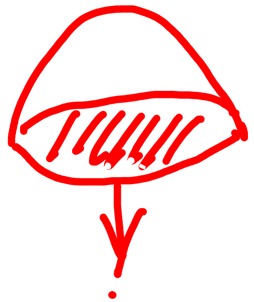
$$\oiint_{\Sigma_{外}} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$



3） 补面用高斯公式.

4.两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$



常考题型与典型例题

常考题型

曲面积分计算

一. 第一类曲面积分的计算

【例1】(2000年) 设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有（　　）

(A) $\overset{=0}{\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S} = 4\overset{>0}{\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S}$

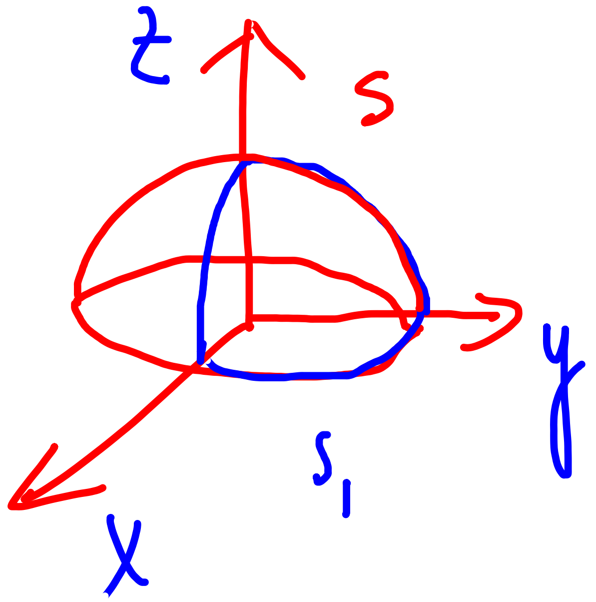
(B) $\overset{=0}{\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S} = 4\overset{>0}{\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S}$

(C) $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S$

奇.

$4\iint\limits_{S_1} z\,\mathrm{d}S$

(D) $\underset{0}{\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S} = 4\overset{}{\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S} > 0$



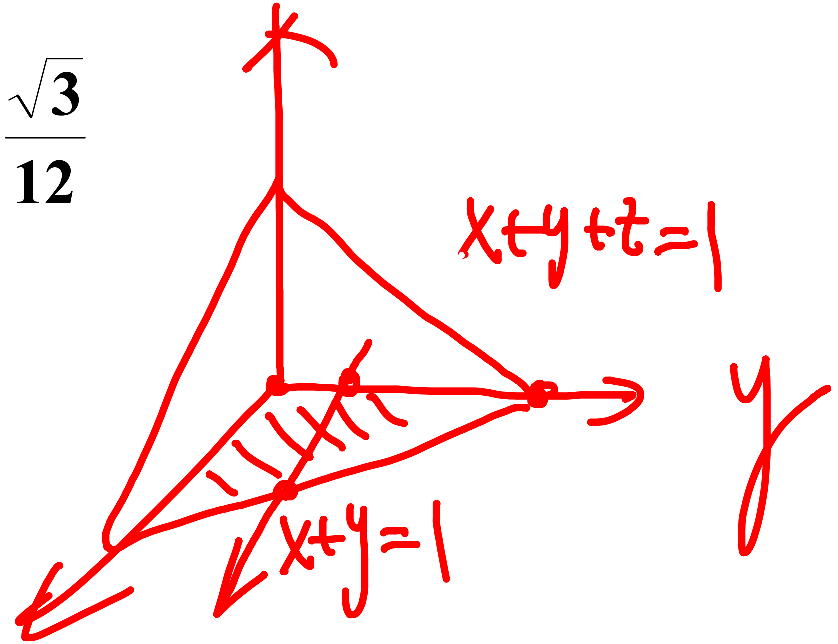
【例2】(2012年)设

$z=1-x-y$

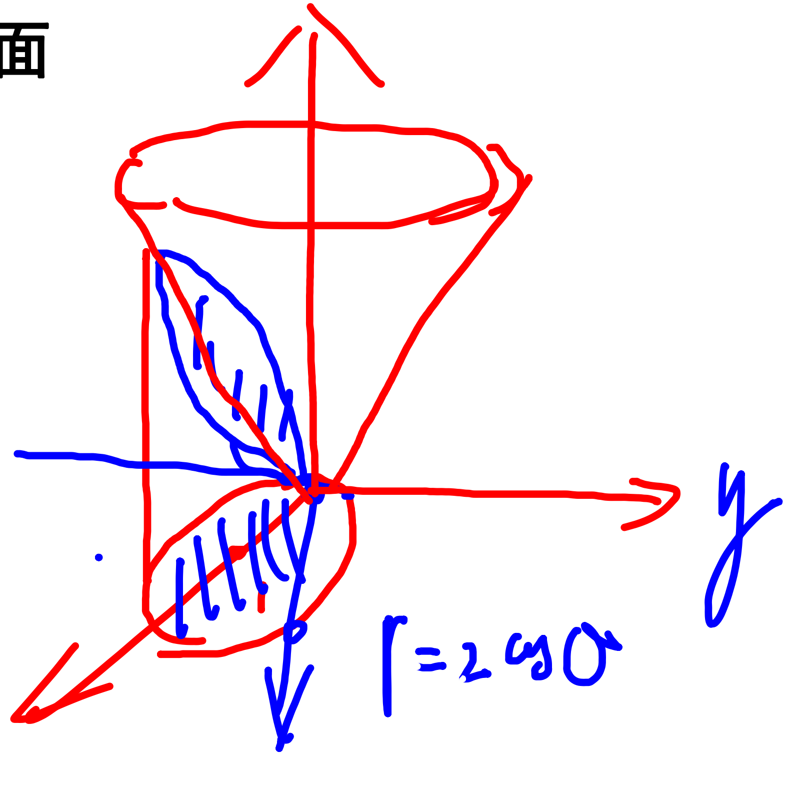
$dS=\sqrt{1+1+1}\,dxdy$

$\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS =$ ________.

【解】 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2 dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2 dx=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$



【例3】（1995年）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.



$r=2\cos\theta$

【解】 Σ 在 xOy 平面上的投影区域 $D: x^2+y^2\le 2x$.

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

二. 第二类曲面积分的计算

【例4】（1988年）设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

① 曲面可代入

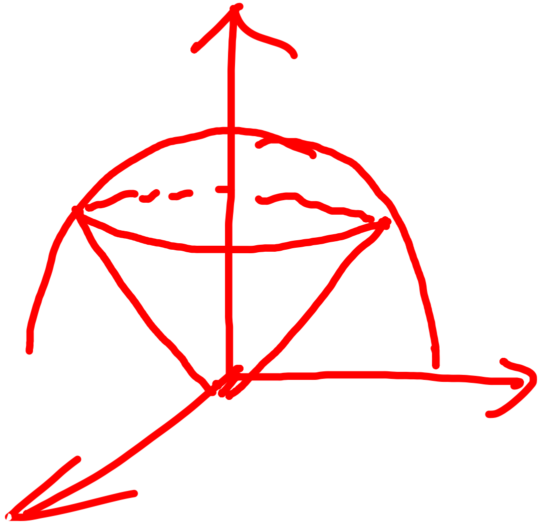
② 重积分不可代

【解】由高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，得

$$I=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v \;\cancel{\overset{\times}{=}\; 3\iiint\limits_{\Omega} 1\,\mathrm{d}V = 3\cdot\frac{4}{3}\pi = 4}$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi.$$

【例5】(2005年) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\oiint xdydz+ydzdx+zdxdy=$ ______.　　$[(2-\sqrt{2})\pi R^3]$



[解] 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dV$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{R}r^2\sin\varphi\,dr$

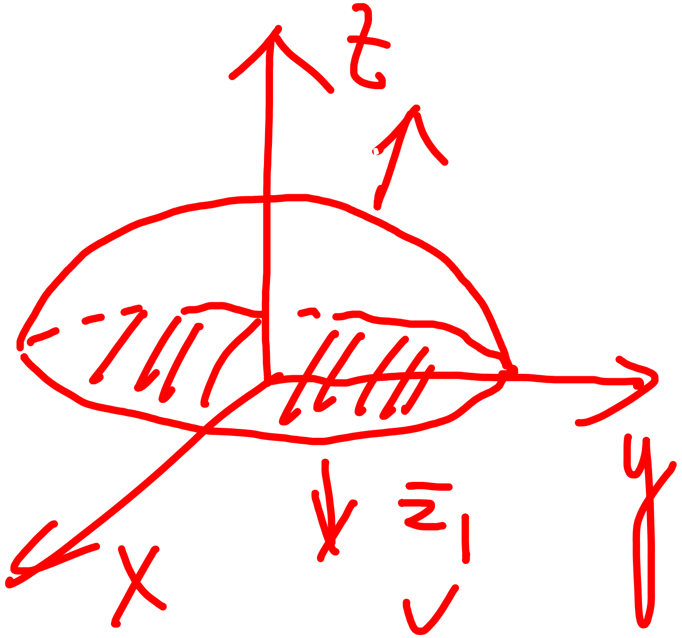
$=(2-\sqrt{2})\pi R^3$

【例6】（2008年） 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \underline{\qquad\qquad}.$$

【解】 设 Σ_1 是曲面 $z=0\ (x^2+y^2\le 4)$ 取下侧，

$$\iint\limits_{\Sigma} = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} = \iiint\limits_{\Omega} ydxdydz - \iint\limits_{\Sigma_1}.$$



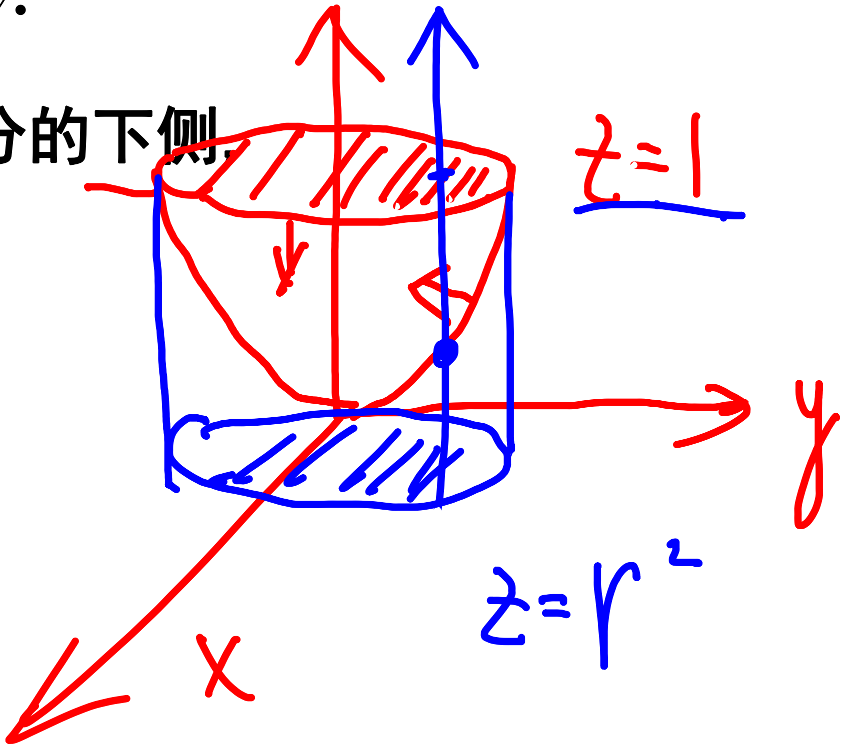
由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz = 0$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} = -\iint\limits_{\Sigma_1} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy = 4\pi$$

【例7】（2014年）设 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$.

补面+高斯

【解】设 S 为平面 $z=1$ 包含在曲面 $z=x^2+y^2$ 之内部分的下侧。



$$I=\oiint\limits_{\Sigma+S}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$-\iint\limits_{S}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dv-0$$

z=1

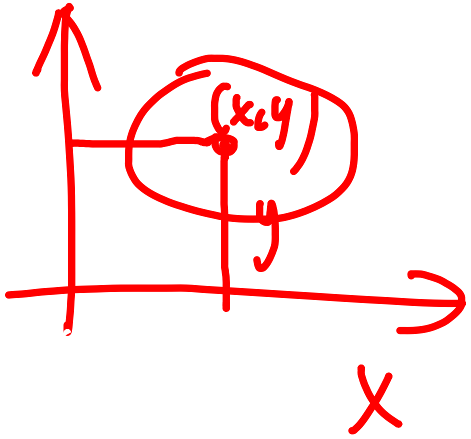
$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)dv+6\overset{=0}{\iiint\limits_{\Omega}xdv}+6\overset{=0}{\iiint\limits_{\Omega}ydv}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}xdv=\iiint\limits_{\Omega}ydv=0$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_{r^2}^1(3r^2+7)rdz=4\pi$$

第四节 多元积分应用

所求量 \ 几何形体	二重 平面板	三重 空间体	一型 曲线	一型 曲面
几何度量	$\iint_D 1 d\sigma$	$\iiint_\Omega 1 dV$	$\int_L ds$	$\iint_\Sigma ds$
质 量	$\iint_D \rho(x,y)d\sigma$			
质 心	$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$	$\bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$		形心
转动惯量	$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$			



$\rho=c$

$\bar{x}=\frac{\iint_D x d\sigma}{S}$

$\bar{y}=\frac{\iint_D y d\sigma}{S}$

1. 变力作功: $W=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

2. 通量: $\Phi=\iint P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

常考题型与典型例题

常考题型

形心和变力做功的计算

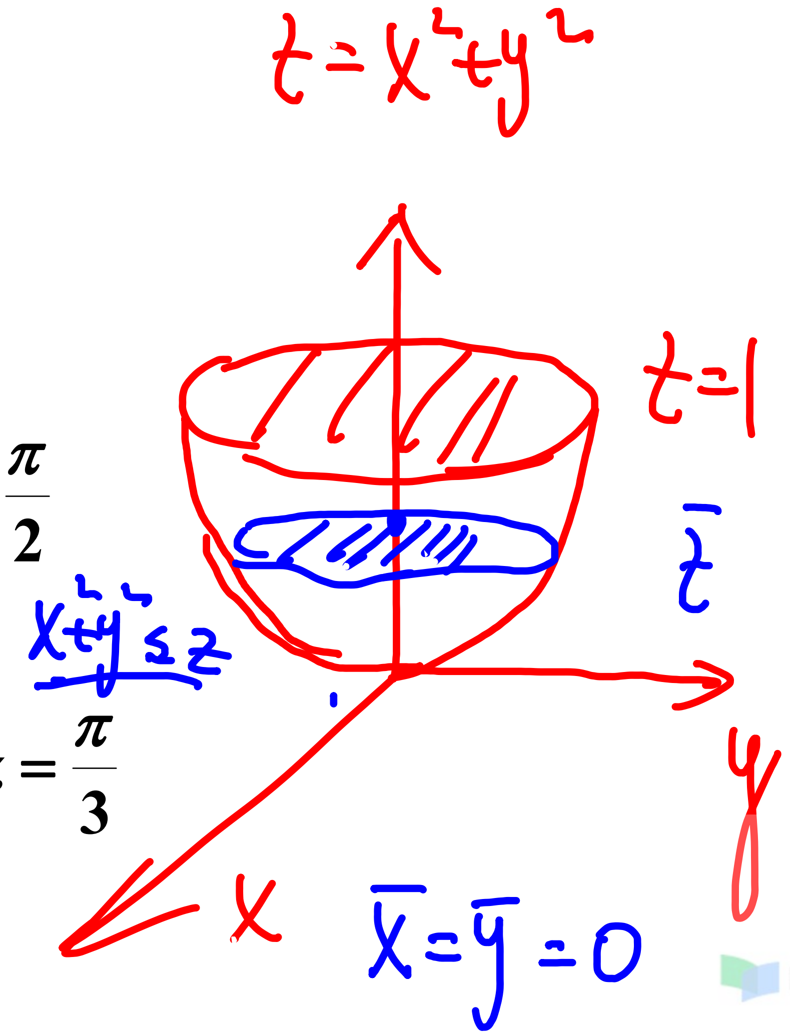
【例1】（2010年）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ________.

【解】 $\bar{z}=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V \Big/ \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\left(\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1 \pi z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\int_0^1\left(\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 \pi z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}$$

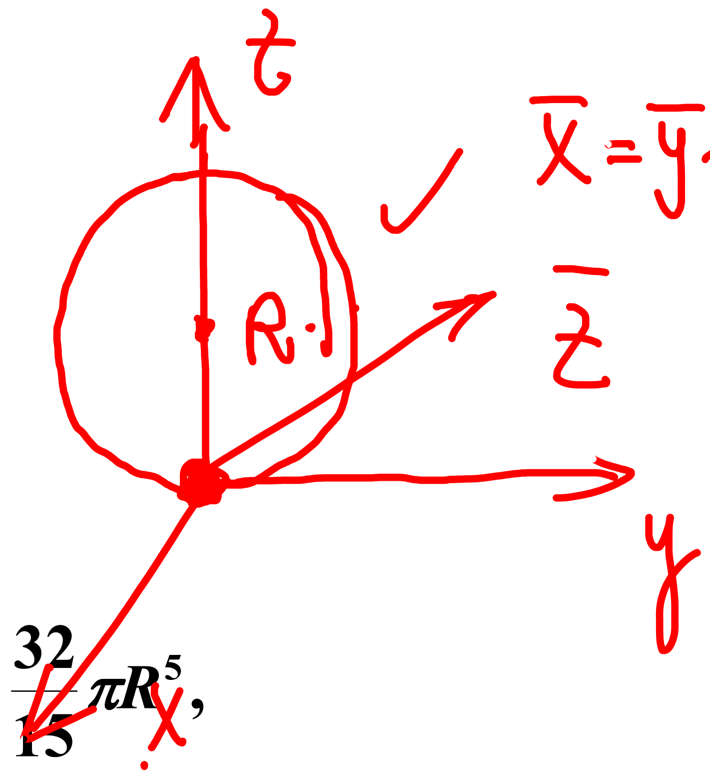
$$\bar{z}=\frac{2}{3}.$$



【例2】（2000年）设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置.

【解】 $x^2+y^2+z^2=2Rz.$

$r=2R\cos\varphi$



$\bar{x}=\bar{y}=0$

$\bar{z}$

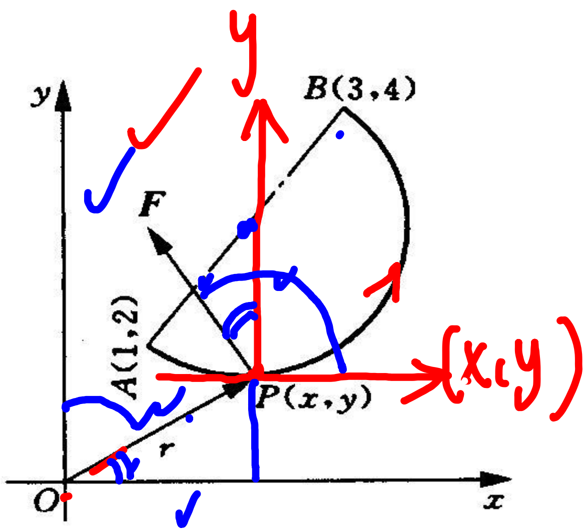
$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=0,\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi R^5,$$

【例3】（1990年）质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到变力 $\mathbf{F}$ 作用（见右图）$\mathbf{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于直线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$．求变力 $\mathbf{F}$ 对质点 P 所作的功.



$\overrightarrow{OP}=(x,y)$

$\vec{F}=(-y,x)$

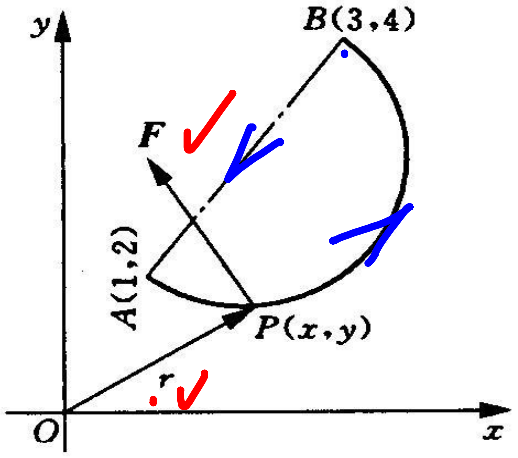
【解1】按题意，变力 $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$.

圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=2+\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases}$ $-\dfrac{3}{4}\pi\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$.

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta=2(\pi-1).$$

【例3】(1990年) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到变力 $\mathbf{F}$ 作用(见右图) $\mathbf{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于直线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\mathbf{F}$ 对质点 P 所作的功.



【解2】按题意，变力 $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}.$ $W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}-ydx+xdy-\int_{\overline{BA}}-ydx+xdy$$

1+1

$$=\iint_D 2dxdy-\int_3^1-(1+x)dx+xdx=2\pi-2$$

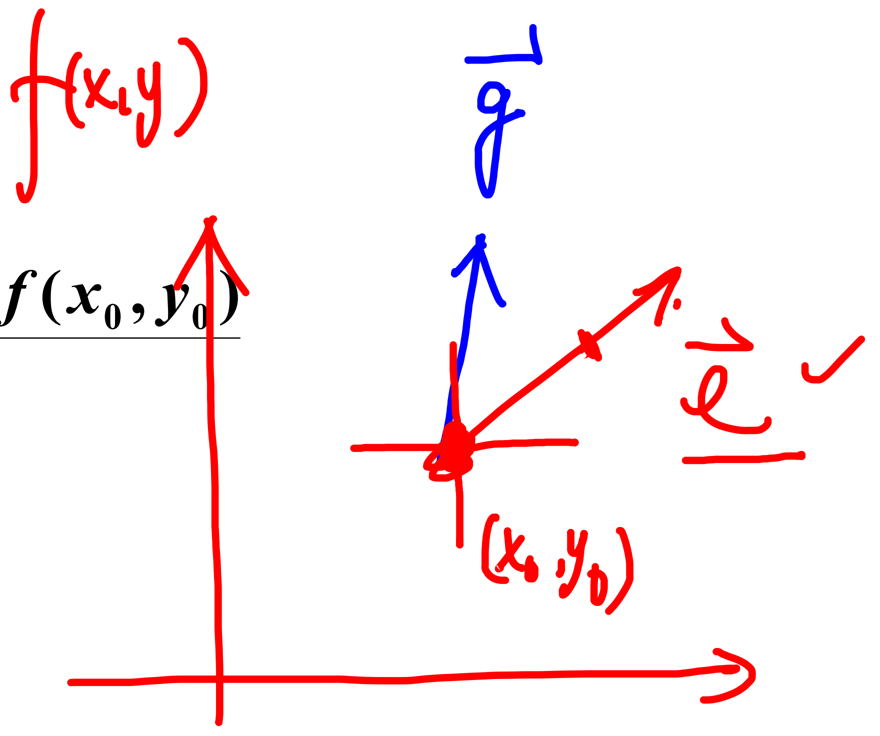
第五节 场论初步

1. 方向导数

1）定义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

2）计算：若 $z=f(x,y)$ 可微，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$



2. 梯度:

$|\vec{g}|$

定义：设 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 有连续一阶偏导数

$$\text{grad}\,u=f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j}$$

3. 散度: 设有向量场 $\mathrm{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

$$\mathrm{div}\mathrm{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

4. 旋度: 设有向量场 $\mathrm{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

$$\mathrm{rot}\mathrm{A}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

常考题型与典型例题

常考题型

梯度、旋度、散度的计算

【例1】(1996年) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 ________. $[\frac{1}{2}]$

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,0,1)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}$

$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,0,1)}$

$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$

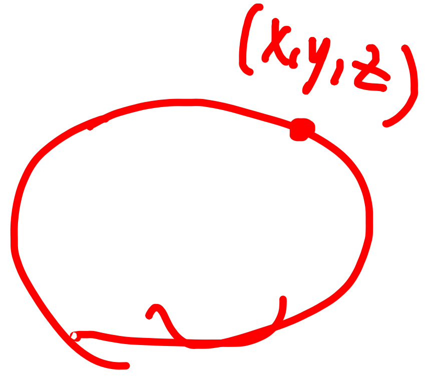
$A \longrightarrow B$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\overset{\cos\alpha}{\frac{2}{3}}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\overset{\cos\beta}{\frac{(-2)}{3}}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\overset{\cos\gamma}{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

【例2】 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $l=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大.

$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$



【解】 $\frac{\partial u}{\partial l} = 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2z\cdot 0$

$= \sqrt{2}(x-y)$

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$

$\boxed{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)}$

$F = x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

$-\sqrt{2}$

① $\lambda\neq 0$, $y=-x$

② $\lambda=0$ ✗

$$\begin{cases} F_x = 1+4\lambda x=0 \\ F_y=-1+4\lambda y=0 \\ F_z = 2\lambda z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \\ F_\lambda = 2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$\lambda x=-\lambda y$ $\quad \lambda(x+y)=0$

$4x^2-1=0$

$x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\mp\frac{1}{2}$

【例3】（2012年） $\mathrm{grad}(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$ ________.

（1, 1, 1）

y

$\frac{1}{y}$

$x-\frac{z}{y^2}$

$2-1=1$

$\vec{g}=(1,\ 1,\ 1)$

【例4】（1989年） 向量场 $\mathrm{u}(x,y,z)=xy^2\mathrm{i}+ye^z\mathrm{j}+x\ln(1+z^2)\mathrm{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\mathrm{u}=$ ________. (2)

$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{2xz}{1+z^2}=0$$

【例5】（2018年）向量场 $\vec{F}(x,y,z)=xyi-yzj+zxk$ 的旋度 $rot\vec{F}(1,1,0)=$ ________. $[i-k]$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix}_{(1,1,0)} = \vec{i}-\vec{k}$$

$$=(y,\ -z,\ -x)\Big|_{(1,1,0)} = (1,0,-1)$$

祝同学们

考研路上一路顺利！