（一）极限的概念、性质及存在准则

【例14】（1999年2）“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$, 总存在正数 N, 当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 为

理解

（A）充分条件但非必要条件； ✓

（B）必要条件但非充分条件. 100ε

$\varepsilon<2\varepsilon$

✓（C）充分必要条件.

（D）既非充分条件又非必要条件.

给定

$$|x_n-a|<\varepsilon \;\overset{\longrightarrow}{\underset{?}{\longleftarrow}}\; |x_n-a|\le 2\varepsilon \qquad \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$$

【例15】（2015年3） 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$. ✓

（B）若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \overset{\checkmark}{x_{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\checkmark}{x_{2n+1}} = a}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， ✓

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$. ✓

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x_{3n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x_{3n+1}} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， X

✓

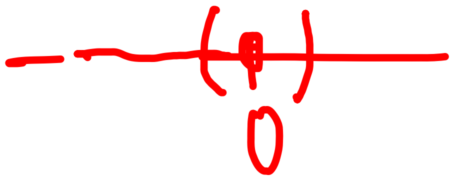
$$\lim_{n\to\infty} X_{3n+2} = a$$

【例16】(1993年3) 当 $x \to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（ ）

∞ ✓ ∞ ! 0 ! ✓

（A）无穷小 X（B）无穷大 X

（C）有界的，但不是无穷小； X（D）无界的，但不是无穷大 ✓



【解】 应选（D）

由于对任意给定的 $M>0$ 及 $\delta>0$，总存在

$$x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\ y_n = \frac{1}{2n\pi}, \to 0$$

$$\sin\frac{1}{x_n} = 1$$

$$\sin\frac{1}{y_n} = 0$$

使得 $0<x_n<\delta$，$0<y_n<\delta$，此时

$$\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n} = \left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2 > M, \qquad \frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n} = 0 < M,$$

$\to +\infty$ ✓

(二) 求 极 限

常用的求极限方法（8种）

- 方法1　利用基本极限求极限 ✓
- 方法2　利用等价无穷小代换求极限 ✓
- 方法3　利用有理运算法则求极限 ✓
- 方法4　利用洛必达法则求极限 ?
- 方法5　利用泰勒公式求极限 ?
- 方法6　利用夹逼原理求极限 ✓
- 方法7　利用单调有界准则求极限 ✓
- 方法8　利用定积分定义求极限（见第五章） ?

方法1 利用基本极限求极限

1）常用的基本极限

∞^0 $\lim_{x\to0^+}(1+\frac{1}{x})^x = $ ∞^0 $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=0$

$\lim_{x\to0^+}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

$=e^0=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to0}(1+\underset{0}{\underset{\downarrow}{x}})^{\frac{1}{x}\to\infty}=e;\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e;$$

$\boxed{1^\infty}$

$f(x)=$多项式$+R_n(x)$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ✓ 大

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ✓ 泰勒

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

✓ ✓ 大

$\lim_{x\to0}\frac{x^5+3x^2}{x^4+x^3+2x^2}=\frac{3}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在，} & x=-1.\end{cases}$$

e^∞

$$\lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

$(-1)^n$

2) “1^{∞}” 型极限常用结论

若 $\lim \alpha(x)=0,\ \lim \beta(x)=\infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$

则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$

$$1^{\infty}=\lim\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta}=e^{A}$$

可以归纳为以下三步:

1)写标准形式 原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2)求极限 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$;

3)写结果 原式 $=e^{A}$.

【例17】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\sin\dfrac{1}{n}$

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}n\sin\dfrac{1}{n}$ $\neq 1$ $=1$ ✗

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ ✓

$=\dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=1$ ✓ ✗

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

1^∞

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{(n+1)^p}=1$ ✓

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=1$

1^p

【例18】极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\overset{x}{}\;x^2\;\overset{x}{}}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ 2010 (一)

1^∞

(A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

【解1】直接法 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\overset{1^\infty}{\left(\dfrac{x}{x-a}\right)^x}\overset{1^\infty}{\left(\dfrac{x}{x+b}\right)^x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x}$$

$$=e^a\cdot e^{-b}=e^{a-b}$$

【例18】 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x =$ ✓

✗ (*A*) 1

✗ (*B*) e

(*C*) e^{a-b}　e^{-b}

✗ (*D*) e^{b-a}　e^{b}

【解2】排除法

$\boxed{a=0}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x = e^{-b} \quad ✓$$

【例19】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a>0,b>0,c>0.$

$\boxed{1^{\infty}}$

【解】 ① 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right]^n$ ✓

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)n$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\ln a$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\ln\sqrt[3]{abc}$$ ✓

③ 原式 $=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$

方法2　利用等价无穷小代换求极限

（1）代换原则：

✓ a）乘除关系可以换

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

$x\to0$

$\sin x+\tan x\sim x+x=2x$

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim\frac{\beta\left[\frac{\alpha}{\beta}-1\right]}{\beta_1\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1\right]}=1 \checkmark$$

$A-1$

$A-1\neq0$

b）加减关系在一定条件下可以换

不等价

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\boxed{\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq1}$, 则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$.

$x\to0$　$\sin 2x-\tan x\sim 2x-x=x$

$\sin x-\tan x\sim x-x=0$ ✗

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq-1$. 则 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$.

$\alpha-(-\beta)$

(2) 常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时

一次 $\boxed{x} \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$;

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\overset{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

$\underline{a^x - 1 \sim x\ln a}$, ✓ $\underline{(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x}$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

3阶

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$　　$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$　　$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$ ✓ ✓

‖ t

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$　　$x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$

① $x = \frac{1}{t}$

② 泰勒

$$\arcsin t - t \sim \frac{1}{6}\arcsin^3 t \sim \frac{1}{6}t^3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\overset{\infty - \infty}{x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty} x^2\left[\frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

【例20】（2016年3） 已知函数 $f(x)$满足

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ ✓

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\overset{\checkmark}{\underline{f(x)\sin 2x}}}-1\to 0}{e^{3x}-1\to 0}=2,$$ 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$ __________.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\underline{f(x)\sin 2x}}-1}{e^{3x}-1}=2$ 及 $\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}-1)=0$ 知，

$$\lim_{x\to0}f(x)\sin 2x=0$$

则
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\underline{e^{3x}-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\underline{\lim_{x\to0}f(x)}=2$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6.$

【例21】（2015年, 1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\qquad\qquad}$.

$-\ln(\;)$

$$\frac{0}{0}$$

$$\underline{\ln(1+x)} \sim x$$

【解1】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+\underline{(\cos x-1)}]}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$f(x)=\underline{\ln x}$

$$\boxed{f(b)-f(a)} = f'(\xi)(b-a)$$

（等价无穷小代换）

【解2】 原式 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$

【解3】 原式 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)-\ln 1}{x^2} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\xi}(\cos x-1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

【例22】（2009年. 3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\overset{✓}{1}}-e^{\overset{✓}{\cos x}}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

$$\frac{0}{0}$$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$

$e^{x}-1\sim x$

【解1】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overset{e}{\boxed{e^{\cos x}}}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}$ ✓

$$=e\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}$$

$f(x)=e^{x}$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3e}{2}$$

【解2】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overset{x}{\boxed{\sin x}}\,e^{\cos x}}{\frac{2}{3}x}=\dfrac{3e}{2}$

【解3】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1}-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\xi}(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3e}{2}$

【例23】（2006年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$ $\frac{0}{0}$

1^0

【解1】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]$

$e^x-1\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$$

（等价无穷小代换） $\ln(1+x)\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

（等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

【例23】（2006年2） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\underline{\frac{2+\cos x}{3}}\right)^x-1\right]$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1\sim\frac{x^2}{\sin x}$$

∞

$$\downarrow$$

$$(1+x)^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)x\sim x$$

【解2】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(1+\underline{\frac{\cos x-1}{3}}\right)^x-1\right]$

x

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x(\cos x-1)}{3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x(-\frac{1}{2}x^2)}{3}}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

【注】 当 $x\to0$ 时，$\underline{(1+\underset{0}{x})^\alpha-1\sim\alpha x}$. 这个结论推广可得：

若 $\underline{\alpha(x)\to0},\underline{\alpha(x)\beta(x)\to0}$,

则 $\underline{(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1}\sim\underline{\alpha(x)\beta(x)}$

$$\underline{(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1}=e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}-1$$

$$\sim\underline{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}\sim\underline{\beta(x)\alpha(x)}$$

【例24】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overset{x}{\arcsin} x-\overset{x}{\sin} x}{\arctan x-\tan x}$. $[-\frac{1}{2}]$

$\dfrac{0}{0}$

【解】原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{[\arcsin x - x]}^{\frac{1}{6}x^3}-\overbrace{[\sin x - x]}^{-\frac{1}{6}x^3}}{\underbrace{[\arctan x - x]}_{-\frac{1}{3}x^3}-\underbrace{[\tan x - x]}_{\frac{1}{3}x^3}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{2}{3}x^3} = -\frac{1}{2}$

【例25】（2009年2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\underset{\sim\sim\sim}{\sin^4 x}}$. $[\frac{1}{4}]$

$$\frac{0}{0}$$

【解】 $原式=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\overset{-\frac{1}{3}x^3}{[x-\tan x]}-\overset{-\frac{1}{2}\tan^2x\sim-\frac{1}{2}x^2}{[\ln(1+\tan x)-\tan x]}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\left(-\frac{1}{3}x^3\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

方法3 利用有理运算法则求极限

有理运算法则

存 存.

若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 那么:

$$\lim\left(f(x)\pm g(x)\right)=\underline{\lim f(x)}\pm\underline{\lim g(x)}$$

✓ ✓

$$\lim\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(B\neq 0)$$

【注】 1）存在 ± 不存在 = 不存在； ✓

$n \quad + \quad n$

2）不存在 ± 不存在 = 不一定. ✓

$n + (-n)$

3）存在×÷不存在 = 不一定；

4）不存在×÷不存在 = 不一定.

$(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$

1

$+$

n

① 极限， ✓

② 连续. ✓

③ 导数 ✓

④ 级数 ✓

相同

$f(x) + g(x) = F(x)$

存 不，

$g(x) = F(x) - f(x)$

存 存.

n

$x+|x|$

可导+不可

常用的结论： 1） $\lim f(x) = \underset{①}{A} \neq \underset{②}{0} \Rightarrow \underline{\lim f(x)g(x)} = A\lim g(x)$; ✓

即：极限非零的因子的极限可先求出来.

① $\lim g(x)$ 存在

② $\lim g(x)$ 不存在

$\lim f(x) = A \neq 0$ 不存在

2） $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \underline{\lim f(x) = 0}$;

3） $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$; ✓

$\rightarrow \lim f(x)g(x)$ 不存在

存 $= a$

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)$$

存 ↓ 0

$$g(x) = \frac{f(x) \to 0}{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \to A \neq 0} \to \frac{0}{A} = 0$$

$$\frac{f(x)g(x)}{f(x)} \to \frac{a}{A}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{\cos x(e^{x^2}-1)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1 \quad ✗$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad ✗$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos x - \cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$1 - \frac{1}{2}$

【例26】（2010年3）若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$，则 a 等于（　）

∞　∞　存 —

（A）0　　（B）1　　✓（C）2　　（D）3

【解】 应选（C）

✓

$$1=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-e^{x}}{x}\right]+\overset{存}{\underline{a\lim_{x\to0}e^{x}}}$$

✓

$e^{(f+g)}$ 存　　e^{f}　　$e^{g(x)}$ 存

$$=-1+a$$

则 $a=2$ 故应选（C）.

【例27】（2018年3） 已知实数 a,b 满足 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}[(\underset{\infty}{ax}+\underset{b}{\underline{b)e^{\frac{1}{x}}}}-\underset{\infty}{x}]}=2$,

求 a,b.

【解】 $2=\boxed{\overset{存}{\lim\limits_{x\to+\infty}}be^{\frac{1}{x}}}+\overset{存}{\lim\limits_{x\to+\infty}}(axe^{\frac{1}{x}}-x)$

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty}\underset{\infty}{x}(\underline{ae^{\frac{1}{x}}\overset{0}{-1}})$

a-1

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)\qquad(a=1)$ ✓

$=b+\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}$

$=b+1$

故 $a=b=1.$ ✓

【例28】(2004年3) 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\overbrace{\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)}^{\to 0}=\underset{\neq 0}{5}$，则

$\to 0$

$a=$____，$b=$____.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=\underline{5\neq 0}$

$1-a=0$　$\to 0$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0,$

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0,$　即　$a=1.$ ✓

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\underline{e^x-1}}(\cos x-b)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b$$

由 $1-b=5$ 得，$b=-4.$ ✓

【例29】(1997年2) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\overset{+\infty}{4x^2+x-1}}+\overset{-\infty}{x+1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

2 ∞

【解1】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}]}{(-x)\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$

$2-1-0$ 1

$\sqrt{x^2}=|x|=-x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$

1

【解2】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{2}{\sqrt{4x^2+x-1}}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{-1}{x}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overset{0}{1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}$ ✓

$=2-1+0=1$


还不关注，
你就慢了