方法4 利用洛必达法则求极限

洛必达法则

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

若 1) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0\ (\infty)$;

2) $f(x)$ 和 $g(x)$在 x_0的某去心邻域内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞ ）;

则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. 存在

$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ —— $0\cdot\infty$

注：1）适用类型： $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0}.

$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty} \Leftarrow \begin{cases} 0\cdot\infty \Leftarrow \begin{cases}1^{\infty}\\ \infty^{0}\\ 0^{0}\end{cases} \\ \infty-\infty \end{cases}$

① $1^{\infty}=\alpha(1+\alpha)^{\beta}$

② $\alpha\beta\to A$

③ 原式$=e^{A}$

【例30】求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$. $\dfrac{0}{0}$

$\tan x \sim x$

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}\overset{①}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\tan(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}$ （洛必达法则） $\dfrac{0}{0}$

$\ast$ $=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$ $\underline{(\tan(x-1)\sim x-1)}$

$\overset{②}{=}\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ （洛必达法则）

$=-\dfrac{4}{\pi^2}$

【例31】（1988年3）求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$.

$0\cdot\infty$

1

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\overset{2}{(1+x)}(1-x)\dfrac{\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}x}}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$\overset{*}{=}2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}\qquad \dfrac{0}{0}$

$=2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{4}{\pi}$

化简 ① 等价

② 非: $f(x)=A\neq 0$

③ 有理化

【例32】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

∞^0

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = 0$（洛必达法则）

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$? $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}$ $=\dfrac{f''(0)}{2}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ 存 　 $f''(x)$ 连续

【解1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}$ 　 $\dfrac{0}{0}$ 　（洛必达法则）

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$

$=\dfrac{f''(0)}{2}$ 　（导数定义）

$=1$

$\dfrac{0}{0}$

① $f(x)$ n阶可导, 　 $f^{(n-1)}(x)$

② $f(x)$ n阶连续导数 　 $f^{(n)}(x)$

【例33】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$

【解2】 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

即 $f(x)=x+x^2+o(x^2)$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$

方法5 利用泰勒公式求极限

定理（泰勒公式） 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则

x_0

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

几个常用的泰勒公式

若 $\alpha(x)\sim\beta(x)\Rightarrow\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\boxed{\tan x-x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$

$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

【例34】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. $\left[-\dfrac{1}{12}\right]$

$\dfrac{0}{0}$ 4次

$f(x) - g(x)$.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$

【解1】 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$, $e^x = 1 + x + \cdots$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$

【解2】 原式 $\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x + x e^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3} \overset{等}{=} \dfrac{1}{4}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right)}{x^3}\right]$

$x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$

$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\right]$

$= -\dfrac{1}{12}$

【例35】（1994年3）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（ ）.

$\dfrac{0}{0}$

（A）$a=1, b=-\dfrac{5}{2}$

（B）$a=0, b=-2$

（C）$a=0, b=-\dfrac{5}{2}$

（D）$a=1, b=-2$

【解1】 泰

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$

$2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overset{=0}{(1-a)}x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}$ $\Rightarrow a=1,\ -\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$

【解2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x}=0$ $\quad a=1$ $\qquad x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

个个击破.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}-b=2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}-b=2$ $\qquad -\frac{1}{2}-b=2$ $\quad b=-\frac{5}{2}$

【解3】 代入 $a=0$，不对. $\Rightarrow a=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}-b=2$

【例36】（2000年2） 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ $=0$

（A）0　　（B）6　　（C）36　　（D）∞

【解1】

$\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3} + \lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)}{x^3} = 0$

【例36】（2000年2） 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

（A）0 （B）6 （C）36 ✓ （D）∞

$\lim f(x)=A$

$\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$

【解2】

$0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}$

【解3】

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3}$

$\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}-36$

$f(x)=$

方法6 利用夹逼原理求极限

【例37】（1995年3） $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\frac{\overset{0}{1}}{n^2+n+1}}_{小}+\underbrace{\frac{\overset{0}{2}}{n^2+n+2}}+\cdots+\underbrace{\frac{\overset{0}{n}}{n^2+n+n}}_{大}\right]=\frac{1}{2}$

$$\underset{\downarrow\atop\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}} \le [\quad\quad] \le \underset{\downarrow\atop\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}}$$

【例38】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n} = 3$

1^0

[解1] 原式 $= 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$= 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad |x|<1$

[解2] $\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{1^n+2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 3^n}$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$3 \qquad\qquad\qquad 3$ ✓

$\sqrt[n]{a} \to 1$

$\sqrt[n]{3}$

$\downarrow$

1

【例39】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$， 其中 $a_i>0,(i=1,2,\cdots m)$

$=\max\limits_{1\le i\le m}\{a_i\}=a$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3$

$\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{m\,a^n}$

$\downarrow$ a $\qquad$ $\downarrow$ a

【例40】（2008年4）设 $0 < a < b$，则 $\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$

（A） a （B） a^{-1}

（C） b （D） b^{-1}

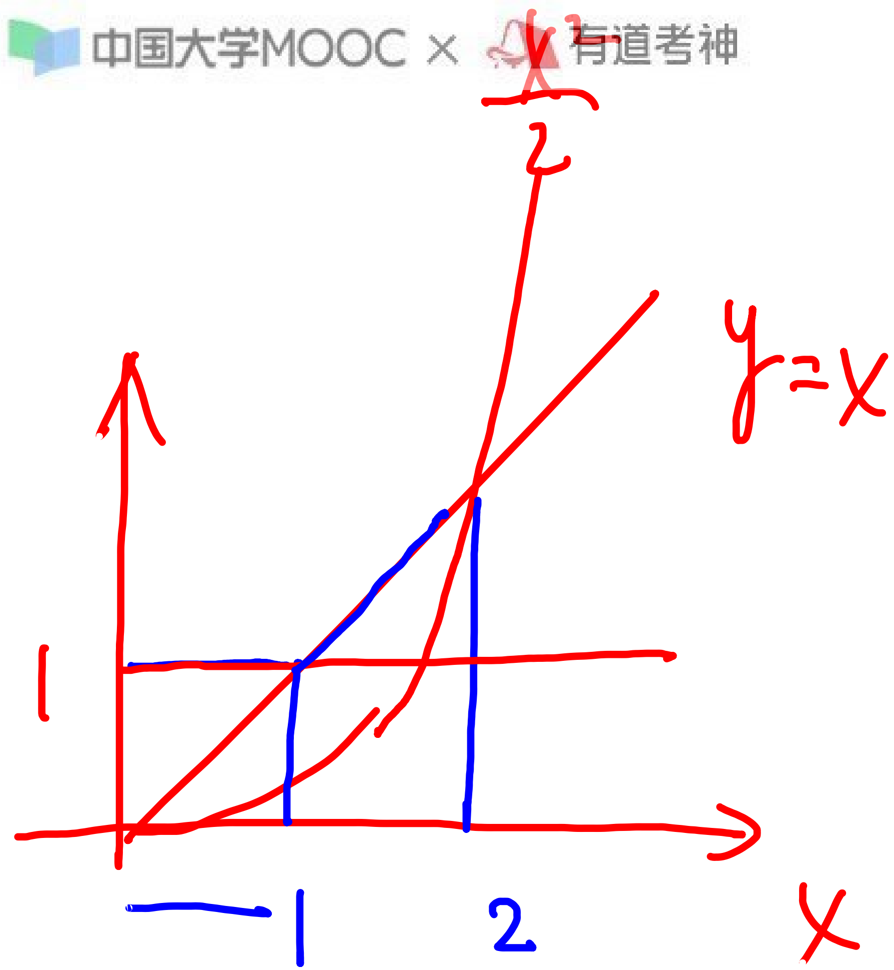
$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n} \to \frac{1}{a}$$

【例41】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\ (x>0).$

$1+1^n$ 100

【解】原式 $=\max\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right\}$

$$=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ x & 1<x\le 2\\ \frac{x^2}{2} & x>2\end{cases}$$



方法7 利用单调有界准则求极限

$x_{n+1}=f(x_n)$

① 证存在

② 求 $x_n = a$

【例42】设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】由题设知 $x_n>0$, 且

10分

①

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}=1$$

$2ab\leq a^2+b^2$

① $$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x_n^2}{x_n}\leq 0$$

x_n

1, 0, 1, 0, 1 — —

$\boxed{x_{n+1}\geq 1}$

② 或 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{x_n^2}\right]\leq\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1}\right]=1$$

$x_1=1$, $x_{n+1}=1-x_n$

$\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，② 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

$2a=a+\frac{1}{a}$

$a^2=1\Rightarrow a=\pm 1$

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

?

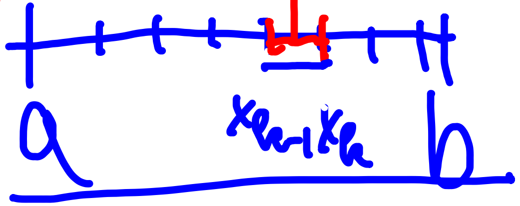
$\boxed{a=1-a}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

方法8 利用定积分定义求极限（见第五章）

【例】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\ln 2$

$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ $\quad \frac{1}{n}\cdot\frac{b-a}{n}$

$=\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{1}{n}\sum f(\xi_k)(b-a)$



n项和.

① 夹逼，

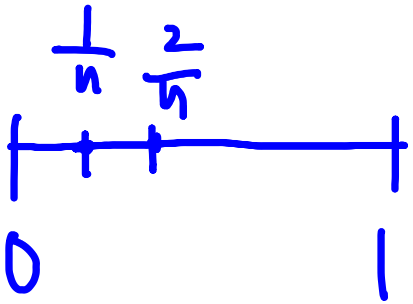
② 定积分定义

$\frac{n}{2n}\le\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]\le\frac{n}{n+1}$

$\frac{n}{2n}\to\frac{1}{2}$，$\frac{n}{n+1}\to 1$

【解】 原式 $=\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$ 提公因子

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 2$



三、无穷小量阶的比较

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\ln 2 \quad \checkmark$$

① $\sin x < x < \tan x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$

② $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ x\in(0,+\infty)$

$$\frac{1}{n+1}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+2}<\ln(n+2)-\ln(n+1)<\frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n}<\ln(2n)-\ln(2n-1)<\frac{1}{2n-1}$$

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln 2<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$\ln 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln 2 \quad \checkmark$$