高数基础班（22）

22	傅里叶级数；向量代数与空间解析几何；方向导数，曲面切平面，曲线法线	P165-P178

还不关注，你就慢了

武忠祥　教授

第三节　傅里叶级数

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数

（二）收敛定理（狄利克雷）

（三）函数展开为傅里叶级数

二. 常考题型方法与技巧

题型一 有关收敛定理的问题

题型二 将函数展开为傅里叶级数

考试内容概要

（一）傅里叶系数与傅里叶级数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

（二）收敛定理（狄利克雷）

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

1） $S(x)=f(x)$ 当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

2） $S(x)=\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ 当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

3） $S(x)=\dfrac{f((-\pi)^-)+f(\pi^+)}{2}$ 当 $x=\pm\pi$.

（三）周期为 2π 的函数的展开

(1) $[-\pi,\pi]$ 上展开.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

(2) $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开.

i）$f(x)$ 为奇函数

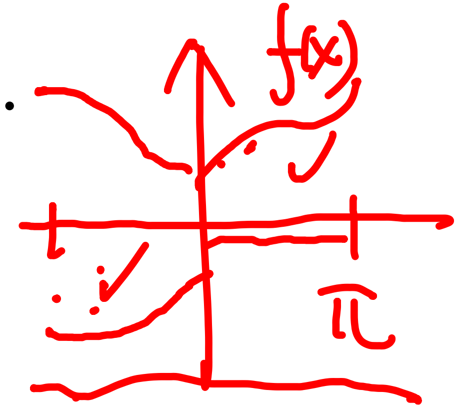
$$a_n=0, \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

ⅱ) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$



(3) 在 $[0,\pi]$ 上展为正弦或展为余弦.

ⅰ) 展为正弦.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

ⅱ) 展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

（四）周期为 $2l$ 的函数的展开

(1) $[-l,l]$ 上展开.

2l

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n=1,2\cdots$$

(2) $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开.

i） $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

✓ $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

ii) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

(3)在 $[0,l]$ 上展为正弦或展为余弦.

i）展为正弦.

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 1,2\cdots$$

ii）展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad n = 0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1,2\cdots$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 狄利克雷收敛定理

2. 将函数展为傅里叶级数

1.狄利克雷收敛定理

【例1】（1988年1）设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶（Fourier）级数在 $x=1$ 处收敛于 ______. $[\frac{3}{2}]$

$$\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

【例2】（1989年1）设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$，而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$$

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,3,\cdots$ 则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于（ ）

（A） $-\frac{1}{2}$ （B） $-\frac{1}{4}$

（C） $\frac{1}{4}$ （D） $\frac{1}{2}$

[B]

奇

$2l$

$l=1$

$2l=2$

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$

2.将函数展为傅里叶级数

【例3】（1993年1）设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$

的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为 ______.

$[\frac{2}{3}\pi]$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x\sin 3x\,dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}x\,d\cos 3x=-\frac{2}{3}x\cos 3x\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos 3x\,dx}_{=0}$$

$$=\frac{2}{3}\pi$$

【例4】(1991年1) 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和

【解】 由于 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 是偶函数, 所以

$2l=2$

$l=1$

① $b_n=0,\ n=1,2,\cdots \qquad a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5,$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$

$$=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\qquad n=1,2,\cdots$$

$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$

$f(x)$ $\quad -1$

② $$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

$-1\le x\le 1$

③ 当 $x=0$ 时, $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6}$

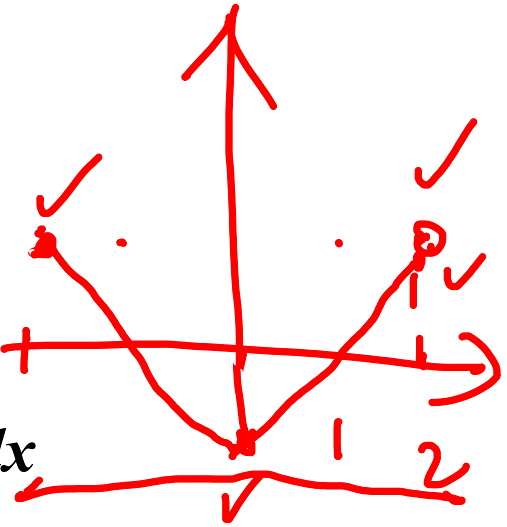
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

【例5】（1995年1）将 $f(x)=x-1\,(0\le x\le 2)$ 展开成周期为4的余弦级数.

$0\le x<2$

$2l=4$

$l=2$



【解】 $a_0=\dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^2 (x-1)dx=0,$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots).$$

0

$x=2,$

$x=0$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\qquad x\in[0,2]$$

?

第十一章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

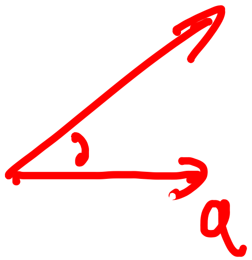
第一节 向量代数

1. 数量积

1

1）几何表示：　$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$ ✓

数



2）代数表示：　$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ ✓

2

3）运算规律：

i）交换律：　$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

ii）分配律：　$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$

3

4）几何应用：

i）求模：　$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$

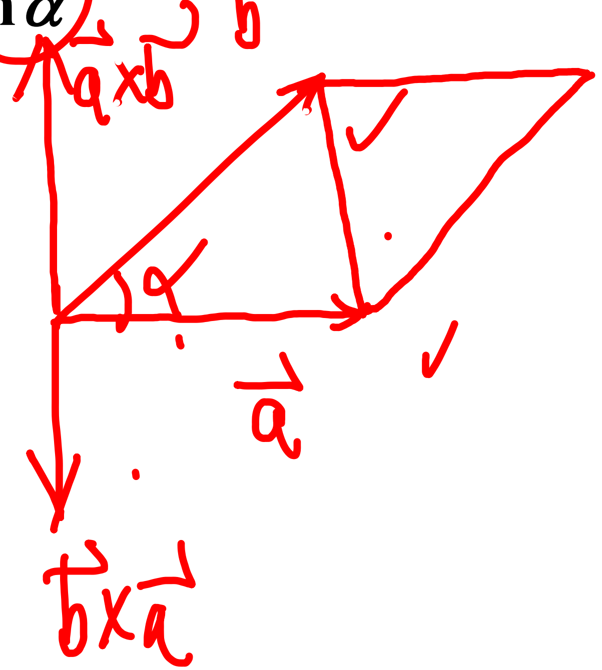
ii）求夹角：　$\cos\alpha=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

iii）判定两向量垂直：　$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

2. 向量积

① 1）几何表示： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 是一向量. 模：$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

方向：右手法则.



2）代数表示： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

② 3）运算规律

i）$a\times b=-(b\times a)$

ii）分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

4）几何应用：

i）求同时垂直于 a 和 b 的向量： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

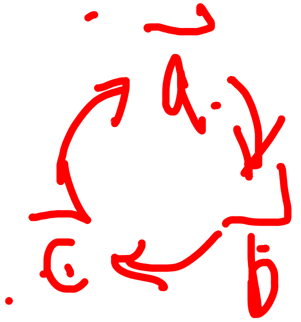
ii）求以 a 和 b 为邻边的平行四边形面积： $S=|a\times b|$

iii）判定两向量平行： $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}\Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$

3. 混合积: $(abc)=(a\times b)\cdot c$

1）代数表示： $(abc)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

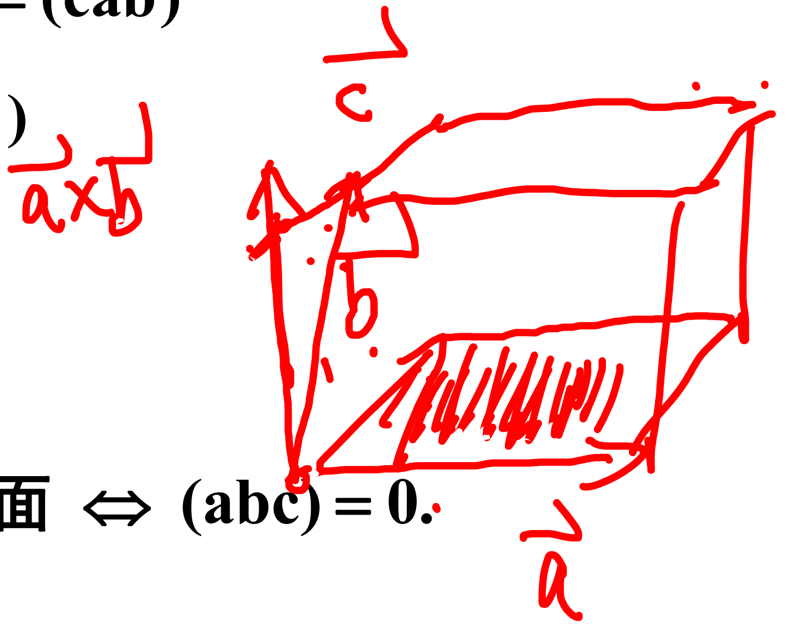
2）运算规律：



i）轮换对称性： $(abc)=(bca)=(cab)$

ii）交换变号： $(abc)=-(acb)$

3）几何应用



i）$V_{平行六面体}=|(abc)|$

ii）判定三向量共面：a, b, c 共面 $\Leftrightarrow$ $(abc)=0$.

常考题型与典型例题

常考题型

向量的计算

【例1】(1995年)设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则

$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a) =$ ________

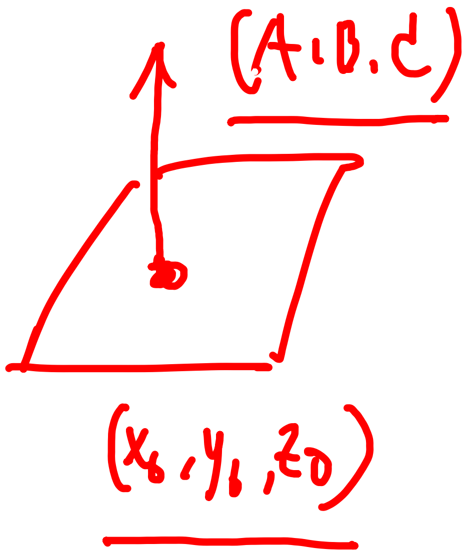
第二节 空间平面与直线

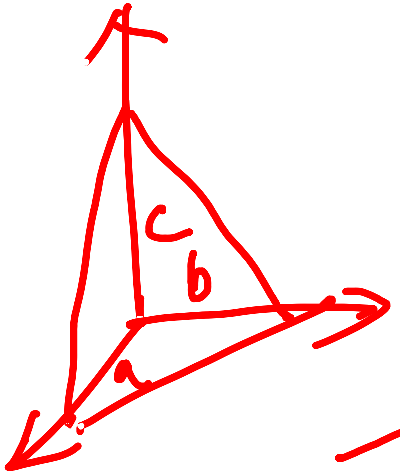
1. 平面方程

1）一般式： $Ax + By + Cz + D = 0.$　　$\mathbf{n} = \{A, B, C\}$

2）点法式： $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3）截距式： $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

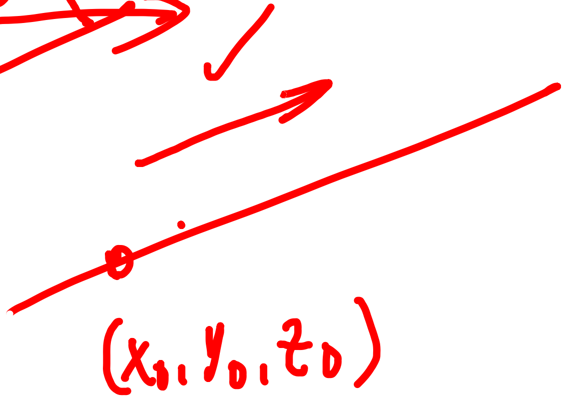




2. 直线方程

1）一般式： $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

2）对称式： $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t$



3）参数式： $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt.$

3. 平面与直线的位置关系（平行、垂直、夹角）

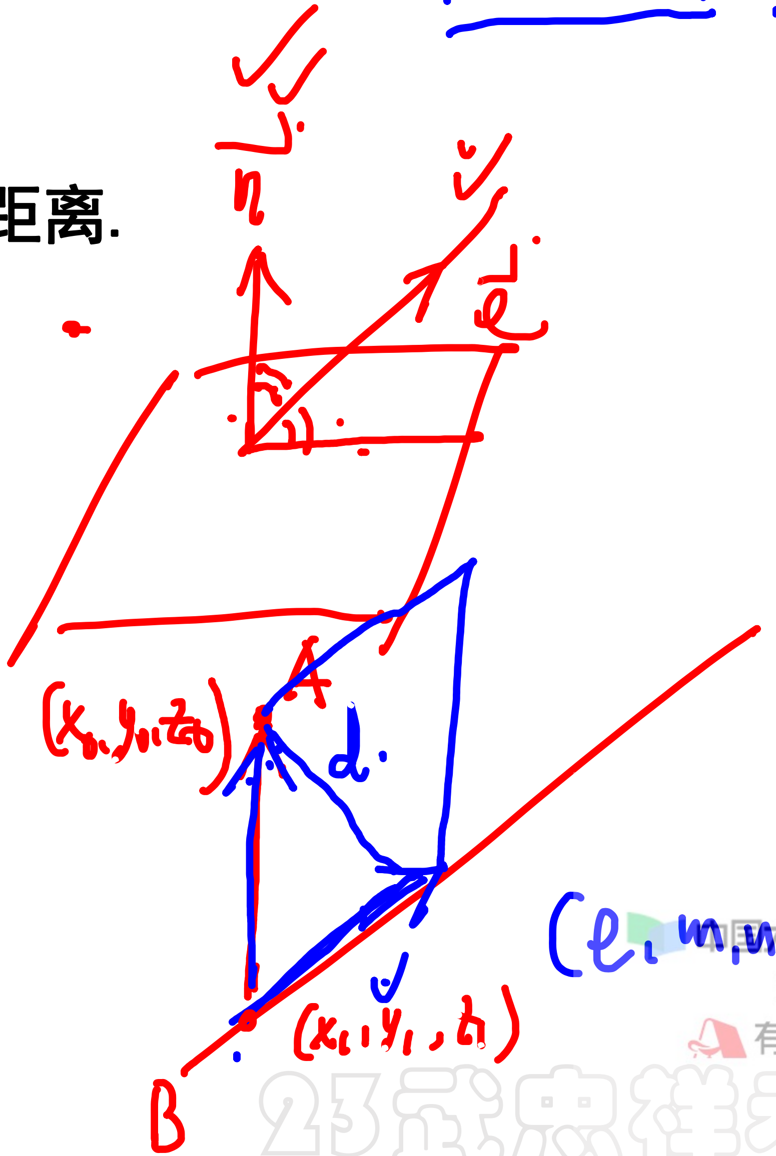
关键： 平面的法线向量，直线的方向向量。

$S = |\vec{BA} \times \vec{l}| = d \cdot |\vec{l}|$

4. 点到面的距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cy + D = 0$ 的距离.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



5. 点到直线距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到直线 $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$

$$d = \frac{|\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \times \{l, m, n\}|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$(l, m, n) = \vec{l}$

常考题型与典型例题

常考题型

建立平面和直线方程

【例1】(1987年1)与两直线 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ 都平行,且过原点的平面方程为 ________.

$[x - y + z = 0]$

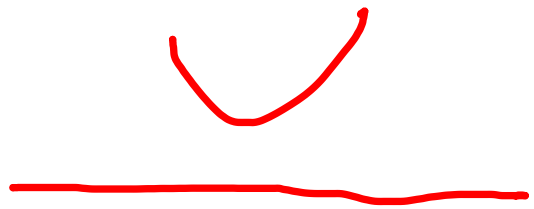
第三节 曲面与空间曲线

1. 曲面方程： 一般式 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$

2. 空间曲线：

i）参数式：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ ii）一般式：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

3. 常见曲面



1）旋转面： 一条平面曲线绕平面上一条直线旋转；

设 L 是 yoz 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，则

（1） L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

（2） L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$

2.柱面：平行于定直线并沿定曲线移动的直线L形成的轨迹；

（1）准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$;

（2）准线为 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $H(x,y)=0.$

动 定

3. 二次曲面

（1）椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2;$ 特别的：圆锥面 $x^2+y^2=z^2$

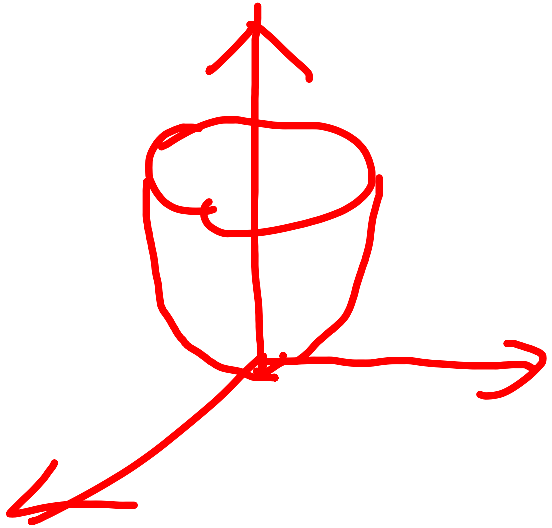
（2）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ 特别的：球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（5）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z;$

特别的：旋转抛物面 $z=x^2+y^2$



（6）双曲抛物面 （马鞍面） $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

4）空间曲线投影

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}.$$

常考题型与典型例题

常考题型

建立柱面和旋转面方程

【例1】求以曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面.

z

【解】将 $z=x^2+y^2$ 代入 $x^2+y^2+2z^2=1$ 得

$$x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1$$

即 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 为所要求的柱面.

【例2】求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

【解】 1）绕 x 轴： $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$

绕 y 轴： $2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$

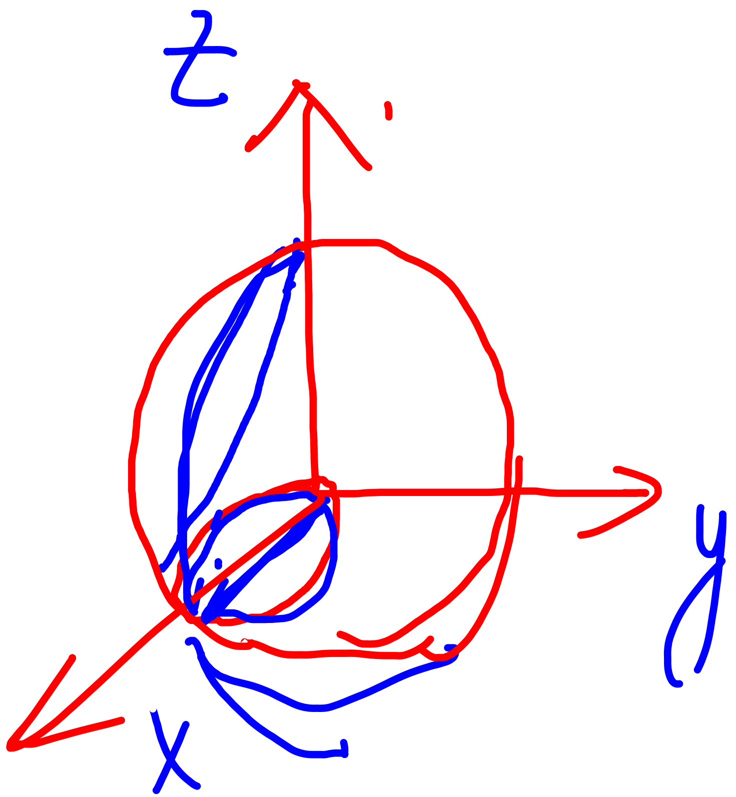
2）绕 y 轴： $x^2 + z^2 = y^4$

绕 z 轴： $z = y^2 + x^2$

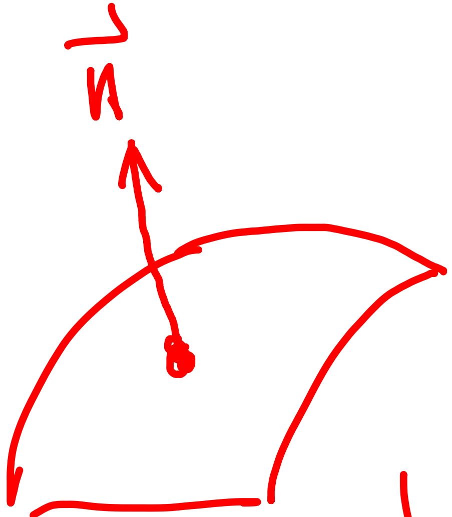
【例3】求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)\\ x^2+y^2=ax\end{cases}$ 在 xoy 面和 xoz 面上的投影曲线方程.

【解】在 xoy 面上的投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=ax\\ z=0\end{cases}$

在 xoz 面上的投影为 $\begin{cases}z^2+ax=a^2,(0\le x\le a)\\ y=0\end{cases}$



第四节 多元微分在几何上的应用

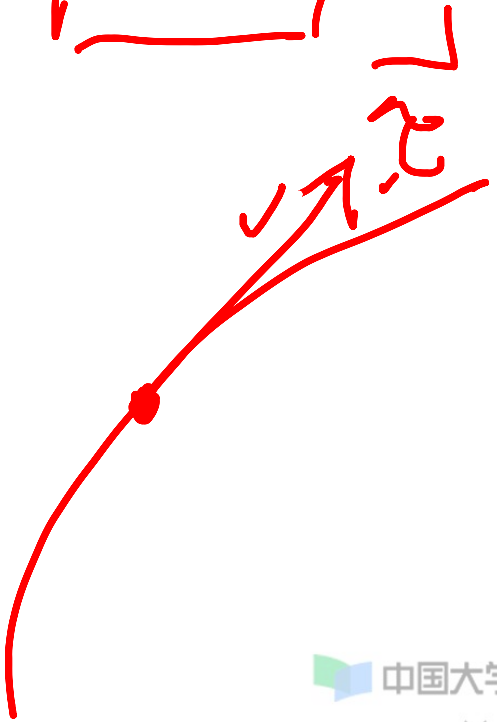


1. 曲面的切平面与法线

$f(x,y)-z=0$

1） 曲面 $F(x,y,z)=0$ 法向量: $\mathbf{n}=\{F_x,F_y,F_z\}$

2） 曲面 $z=f(x,y)$ 法向量: $\mathbf{n}=\{f_x,f_y,-1\}$



2. 曲线的切线与法平面

1) 曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 切向量: $\boldsymbol{\tau}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$

2) 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 切向量: $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$

其中 $\mathbf{n}_1=\{F_x,F_y,F_z\}$, $\mathbf{n}_2=\{G_x,G_y,G_z\}$

常考题型与典型例题

常考题型

建立曲面的切平面和法线及曲线的切线和法平面

【例1】（2013年）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

（A） $x-y+z=-2.$　　　　（B） $x+y+z=0.$

（C） $x-2y+z=-3.$　　　　（D） $x-y-z=0.$

A

F

$\vec{n}=(1,\ -1,\ 1)$

$1\cdot(x-0)-1\cdot(y-1)+1\cdot(z+1)=0$

$x-y+z=-2$

$F_x=2x-y\sin(xy)+1$

$F_y=-x\sin(xy)+z$

$F_z=y$

【例2】（1993年） 由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕轴 y 旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________.

$(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}})$

$F \quad 3x^2+3z^2+2y^2-12=0$

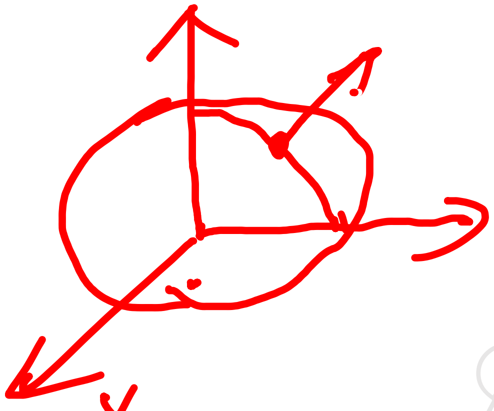
$6x \qquad 4y \qquad 6z$

$\vec{n}=(0,\ 2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2})$

$|\vec{n}|=\sqrt{12+18}=\sqrt{30}$

$(3x,2y,3z)=(0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$

$\vec{n}^0=(0,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}},\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}})$



【例3】（2003年）曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$

平行的切平面的方程是______________.

$2x + 4y - z = 5$

$\vec{n}_1 = (2, 4, -1)$

$x^2 + y^2 - z = 0$

$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$

$\vec{n} = (2x, 2y, -1)$

$\boxed{2x + 4y - z = 5}$

$\frac{2x}{2} = \frac{2y}{4} = \frac{-1}{-1} = 1$

$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 5$

【例4】求曲线 $x = t - \sin t$ $y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

$1-\cos t$ $\quad \sin t \quad$ $2\cos\frac{t}{2}$

$\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$

$\vec{\tau} = (1, 1, \sqrt{2})$

切线方程为 $\dfrac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

法平面方程为 $x + y + \sqrt{2}z - \dfrac{\pi}{2} - 4 = 0$

【例5】求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

$$\boxed{\vec{\tau}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2}$$

$$\vec{n}_1=(1,-2,1)$$

$$\vec{n}_2=(1,1,1)$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-3,0,3)$$

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{3}$

法平面方程为 $x-z=0$

$$-3(x-1)+0(y+2)+3(z-1)=0$$

$$-3x+3+3z-3=0$$

祝同学们

考研路上一路顺利！