高数基础班（11）

11	不定积分举例；定积分的概念、性质及计算方法；变上限积分	P79-P87

常考题型与典型例题

常考题型　　求不定积分（换元、分部）

【例18】 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} =$ ________.

【解1】 令 $\sqrt{1-x} = t$， $1-x = t^2$， $x = 1-t^2$， $dx = -2t\,dt$

$$原式 = \int \frac{-2t}{(1+t^2)t}dt = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2\arctan t + C = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$$

【解2】

$$原式 = -2\int \frac{d\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2} = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$$

【例19】 设 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x \ge 0, \\ \cos x, & x < 0, \end{cases}$ 则 $\int f(x)dx =$ ________.

连续,

【解1】 $\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C_1, & x \ge 0 \\ \sin x + C_2 & x < 0 \end{cases}$

$\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C, & x \ge 0 \quad 1+C \\ \sin x + C, & x < 0 \quad C \end{cases}$

$1 + C_1 = C_2$, 令 $C_1 = C$, $C_2 = 1 + C$

原式 $= \begin{cases} e^x + C, & x \ge 0 \\ \sin x + 1 + C, & x < 0 \end{cases}$ ✓

【解2】 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 原函数,

$\int f(x)dx = F(x) + C$

$F(x) = \begin{cases} \int_0^x e^t dt, & x \ge 0 \\ \int_0^x \cos t dt & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x - 1 & x \ge 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$

【例20】（2016年1，2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C_2$

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\ge 1,\end{cases}$

$\ln x - 1 + 1 = \ln x$ -1 $x=1$? x 连续.

(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1,\end{cases}$

$\ln x + 1 + 1$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1,\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1,\end{cases}$

$x=1$?

【解1】$\int f(x)dx=\begin{cases}(x-1)^2+C_1 & x<1\\ x(\ln x-1)+C_2 & x\ge 1\end{cases}$ $C_1=C$, $C_1 = -1 + C_2$

$=\begin{cases}(x-1)^2+C\\ x(\ln x-1)+1+C\end{cases}$

【解2】验证 $F'(x)=f(x)$

【例21】计算 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\,(a>0)$.

【解1】令 $x = a\sin t$

原式 $= \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\, a\cos t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$

$\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

✓ ✓

【解2】$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int x\,d\sqrt{a^2-x^2}$

$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

分部

✓

原式 $= -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

✓

【例22】（2006年2）求 $\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}} \mathrm{d}x.$

$e^{-x}dx = -de^{-x}$

【解1】$\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}} \mathrm{d}x = -\int \arcsin e^{x} \mathrm{d}(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

$\int \frac{e^{-x}e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

在 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 中，令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{-t\,\mathrm{d}t}{1-t^{2}}$

t

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^{2}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + C$$

分部+换元

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C$$

$$\int \frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}} \mathrm{d}x = -\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$$

【解2】 令 $\arcsin e^{x}=t$，则 $x=\ln\sin t$，$\mathrm{d}x=\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t.$

$$\int\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\frac{1}{\sin t}$$

换元+分部

$$=-\frac{t}{\sin t}+\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{t}{\sin t}-\ln|\csc t+\cot t|+C$$

$$=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}-\ln\left|\frac{1}{e^{x}}+\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^{x}}\right|+C$$

$$=-\frac{\arcsin e^{x}}{e^{x}}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x+C.$$

【例23】（2011年3） 求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

分部+换元

$\frac{dx}{\sqrt{x}}$

【解】 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\,\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x) - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x) + \int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.$$

【例24】（2009年2, 3） 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) \mathrm{d}x \quad (x>0)$.

【解】 设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$，则 $x = \frac{1}{t^2-1}$

$\int \ln(1+t)\, \mathrm{d}\frac{1}{t^2-1}$

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) \mathrm{d}x = \int \ln(1+t)\,\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

$$\int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{(t+1)-(t-1)}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + C,$$

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) \mathrm{d}x = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2(t+1)} + C$$

【例25】（1994年5）已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求

$$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

【解】 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$-3\int x^4 f(x)\,dx$$

$$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int x^3 df(x)=x^3 f(x)-3\int x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^3 f(x)-3\left[x^2\frac{\sin x}{x}-2\int \sin x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=x^3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x\sin x-6\cos x+C$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

【例26】(2002年3, 4) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

【解】 令 $u=\sin^2 x$，则有 $\sin x=\sqrt{u}$, $x=\arcsin\sqrt{u}$,

$$f(x)=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}(1-x)=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

第五章　定积分与反常积分

第一节　定积分

第二节　反常 积分

第一节　定积分

本节内容要点

一. 考试内容概要

（一）定积分概念

（二）定积分的性质

（三）积分上限的函数　*

（四）定积分的计算　*

二. 常考题型与典型例题

题型一　定积分的概念、性质及几何意义

题型二　定积分计算

题型三　变上限定积分

第一节 定积分

考试内容概要

（一）定积分的概念

可积 A.

①分 ②匀 ③和 ④精

1.定积分的定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

数

ξ_k

$a\ (x_0)\quad x_1\quad x_{k-1}\quad x_k\quad x_{n-1}\quad b\ (x_n)$

$f(\xi_k)\Delta x_k$ “可爱因子”

①存在性 一个积分
②值 一计算

【注】（1）$\lambda\to 0$ 与 $n\to\infty$ 不等价；

（2）$\int_a^b f(x)dx$ 仅与 $f(x)$ 和 $[a,b]$ 有关；$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

（3）极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 与 ξ_i 的取法和区间 $[a,b]$ 的分法无关.

$0\quad \frac{1}{n}\quad \frac{2}{n}\quad \frac{n-1}{n}\quad 1$

$\Delta x_k=\frac{1}{n}$

存在

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

2. 定积分存在的充分条件

（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

（2） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点；

（3） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅有有限个第一类间断点；

可积 $\longrightarrow$ 有界

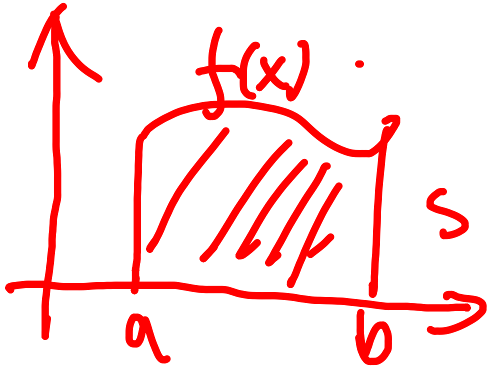
$\xleftarrow{\text{不}}$

$D(x)=\begin{cases}1 & \text{有} \\ 0 & \text{无}\end{cases}$

$\int_0^1 D(x)\,dx$

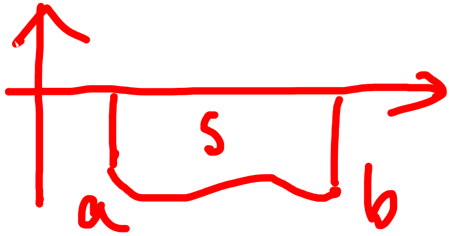
3. 定积分的几何意义

① $f(x)>0$



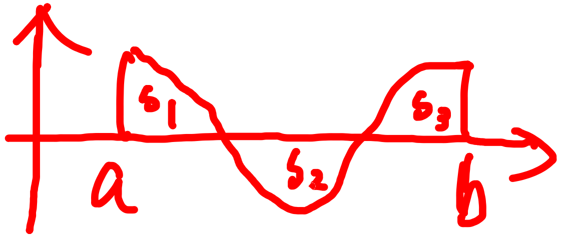
$\int_a^b f(x)dx = S$

② $f(x)<0$



$\int_a^b f(x)dx = -S$

③ f有正有负



$\int_a^b f(x)dx = S_1+S_3-S_2$

（二）定积分的性质

1) 不等式：

（1）若 $f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

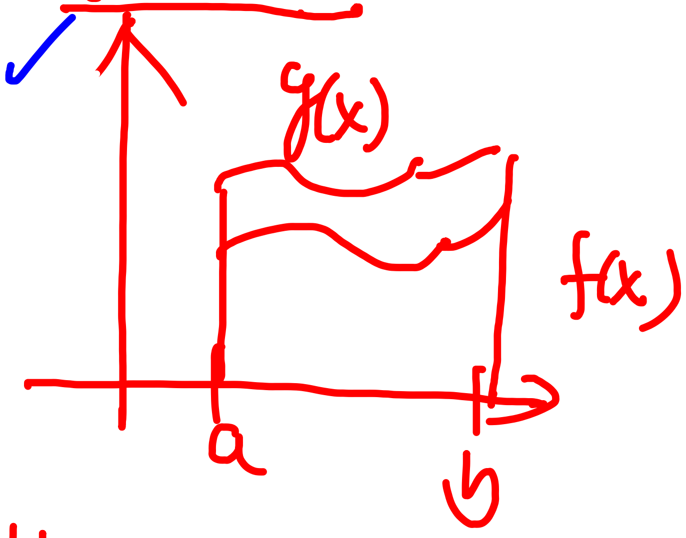
估值.

（3）$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

$|a+b| \le |a|+|b|$

[a≤b]

例 $\int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2}\,dx$



$m \le f(x) \le M$

2) 中值定理：

*（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad a<\xi<b$$

$F'(x)=f(x)$

$a \le \xi \le b$

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

$F(b)-F(a) \overset{拉}{=} F'(\xi)(b-a)$

$a<\xi<b$

（2）若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx, \quad a \le \xi \le b$$

$g(x) \ge 0$

$g(x)=1$

① 证明题
② 求极限

（三）积分上限的函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$

定理： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导且

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

① 积分 — 微分
② 原函数存在性.

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$\left(\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt\right)' = f(x^2)2x - f(e^x)e^x$

$\int_a^x = \int_a^0 + \int_0^x$

$\left(\int_0^{\sin x} f(t)dt\right)' = f(\sin x)\cos x$

$\left(\int_{\cos x}^1 f(t)dt\right)' = -f(\cos x)(-\sin x)$

定理： 设 $f(x)$ 连续，

（1）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数；

（2）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数；

[证] 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，　$\int_a^x$　X

$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \overset{t=-u}{=\!=} \int_0^x f(-u)(-du) = \int_0^x f(u)du = F(x)$

（四）定积分的计算

1） 牛顿-莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

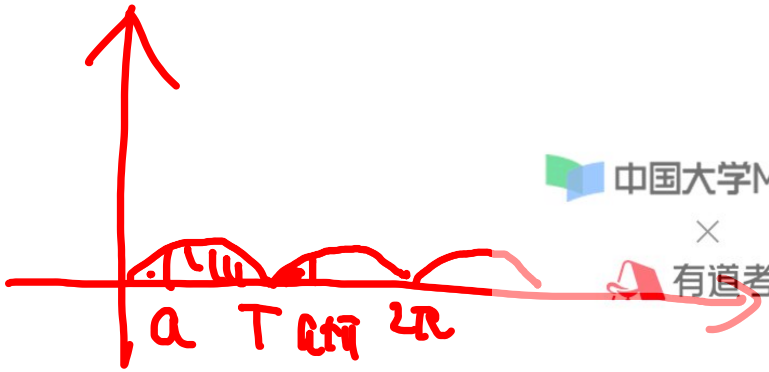
2） 换元法 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$ $x=\varphi(t)$

3） 分部积分法 $\int_a^b \underline{u\,\mathrm{d}v} = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$

4） 利用奇偶性，周期性

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x) \ \text{为奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x) \ \text{为偶函数}. \end{cases}$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$



5）利用公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{偶}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{奇}\end{cases}$$

f(x)连续，

$$(2)\ \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\arctan(\cos x)\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi^2}{4}$$