Comment optimiser sa performance sportive à la course à pieds

Vignoud Alexis (32868), spécialité informatique

Plan

Introduction

But: pour une distance D donnée, trouver la courbe de vitesse minimisant le temps de parcours de D.

Contraintes: constantes physiologiques:

- Energie
- Force musculaire

Le modèle de Keller

PFD:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v(t) = f(t) \tag{1}$$

$\frac{1}{\tau} v(t)$: force de frottement

$f(t)$: force de propulsion, avec $f(t) \leq F_0$

Le modèle de Keller

Considérations énergétiques:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sigma - f(t)v(t) \tag{2}$$

$E(0) = E_0$
σ : apport en énergie (flux d'oxygène)
$f(t)v(t)$: puissance développée
En intégrant (2) et en remplaçant f(t):

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \int_0^t v(s)\left(\dot{v}(s) + \frac{1}{\tau}v(s)\right) ds \tag{3}$$

Phase 1 : accélération, action de la force maximale

$f(t) = F_0$ donc $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = f(t)$ devient $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = F_0$, donc la solution est:

$$v(t) = F_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{4}$$

En remplaçant v(t) dans l'expression de E(t), on a, vu E(t) $\geq$ 0:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \leq \frac{E_0}{F_0^2\tau^2} - \left(1 - \frac{\sigma}{F_0^2\tau}\right)\frac{t}{\tau}, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{5}$$

Phase 1 : accélération, action de la force maximale

$$e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \leq \frac{E_0}{F_0^2\tau^2} - \left(1 - \frac{\sigma}{F_0^2\tau}\right)\frac{t}{\tau}$$

- **1er cas :** $1 - \frac{\sigma}{F_0^2\tau} \leq 0 \iff \frac{\sigma}{\tau} \geq F_0^2$
  $\forall t, E(t) > 0$: Le coureur court à sa force de propulsion maximale indéfiniment: irréaliste

- **2e cas :** $1 - \frac{\sigma}{F_0^2\tau} \geq 0 \iff \sigma - F_0^2\tau \leq 0$
  Il existe un temps critique T_c tel que l'inégalité est satisfaite pour tout $t \in [0, T_c]$

Phase 1 : accélération, action de la force maximale

$$\underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}} - 1}_{f(t)} \leq \underbrace{\frac{E_0}{F_0^2 \tau^2} - \left(1 - \frac{\sigma}{F_0^2 \tau}\right)\frac{t}{\tau}}_{g(t)}$$

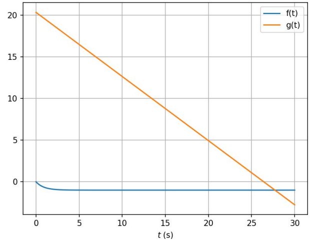


Figure: Existence de T_c

Phase 1 : accélération, action de la force maximale

Sachant $D = \int_0^T v(t)dt$, on a

$$D = F_0\tau^2\left(\frac{T}{\tau} + e^{-\frac{T}{\tau}} - 1\right) \tag{6}$$

Résolution numérique: $\begin{cases} T_c = 27,7 \text{ s} \\ D_c = 292 \text{ m} \end{cases}$

Conclusion de la phase 1

- Pour $D \leq D_c = 292$ m, courir à plein régime.

D (m)	T (s)
60	6,40
100	10,08
200	19,27

- Pour $D > D_c$, une deuxième phase qui n'est pas à force de propulsion maximale est à envisager.

Phase 2: vitesse constante

Phase majoritaire de la course faite à vitesse constante (preuve en annexe).

À la fin de la course, $E(T) = 0$. Notons :

- $t_1 < t_2$ l'instant à partir duquel $f(t) < F_0$
- $t_2 \leq T$ l'intant à partir duquel $E(t) = 0$

Phase 3: Décélération

Ainsi: $\forall t \in [t_2, T], \quad \mathrm{E(t)} = 0.$
Vu $\mathrm{E(t)} = \mathrm{E_0} + \sigma t - \int_0^t v(s)\left(\dot{v}(s) + \frac{1}{\tau}v(s)\right) ds$, en dérivant:

$$\frac{d}{dt}\left(v(t)^2\right) + \frac{2}{\tau}v(t)^2 = 2\sigma \qquad (7)$$

Dès lors:

$$v(t) = \left(\sigma\tau + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

avec $C = \left(v(t_2)^2 - \sigma\tau\right) e^{\frac{2t_2}{\tau}}$

Phase 3: Décélération

$$v(t) = \left(\sigma\tau + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad C = \left(v(t_2)^2 - \sigma\tau\right) e^{\frac{2t_2}{\tau}}$$

De plus:

$$v(t_2)^2 - \sigma\tau = -(\sigma\tau \underbrace{-v(t_2)^2}_{\geq F_0^2\tau^2}) \geq -\tau(\underbrace{\sigma - F_0^2\tau}_{\leq 0}) \geq 0$$

Ainsi, la vitesse est décroissante.

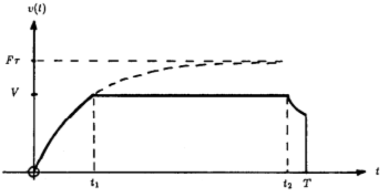
Synthèse du modèle de Keller

Succession de 3 phases:

- Phase 1: accélération à force de propulsion maximale
- Phase 2: vitesse de pointe constante
- Phase 3: décélération à énergie nulle

$$\text{avec } v(t) = \begin{cases} F_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & 0 \leq \ t_1 \leq t_2 \\ V & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \left(\sigma\tau + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} & t_2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Synthèse du modèle de Keller



Allure de la vitesse durant les 3 phases pour $D > D_c$

"the optimal strategy for running a race", Woodside

Détermination des paramètres F_0 et τ

Principe: optimiser la grandeur

$$S = \sum_i \left(\frac{T_i(F_0, \tau) - T_{r,i}}{T_{r,i}} \right)^2$$

avec $\begin{cases} \mathrm{T}_i(F_0, \tau) \text{ la durée du sprint i dans le modèle} \\ \mathrm{T}_{r,i} \text{ le record du monde du sprint i} \end{cases}$

Sachant $D(T) = F_0 \tau^2 \left(\frac{T}{\tau} + e^{-\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \approx F_0 \tau^2 \left(\frac{T}{\tau} - 1 \right)$, on a $T \approx \tau + \frac{D}{F_0 \tau}$

Détermination des paramètres F_0 et τ

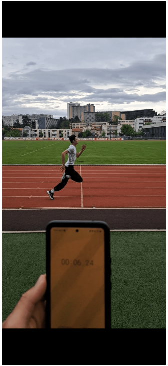
Ainsi, S est minimisée pour F_0, τ tels que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \tau} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial F_0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_i \frac{2}{T_{r,i}^2}(T_i - T_{r,i})(1 - \frac{D_i}{F_0 \tau^2}) = 0 \\ \sum_i \frac{2}{T_{r,i}^2}(T_i - T_{r,i})(-\frac{D_i}{F_0^2 \tau}) = 0 \end{cases}$$

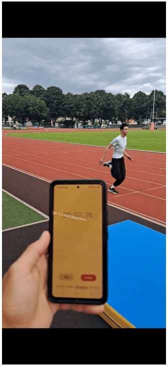
Athlètes professionels (gauche) pour 60 m, 100 m, 200 m et 100 yards
Mesures personnelles (droite) pour 60 m ,80 m et 100 m :

$$\begin{cases} \mathrm{F}_0 = 13.1 \ \mathrm{m}.s^{-2} \\ \tau = 0.846 \ \mathrm{s} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{F}_0 = 12.6 \ \mathrm{m}.s^{-2} \\ \tau = 0.653 \ \mathrm{s} \end{cases}$$

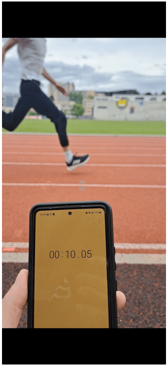
Mesures de nos performances



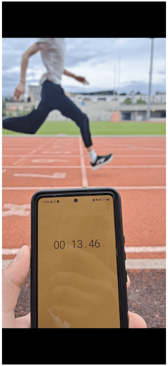
50m



60m

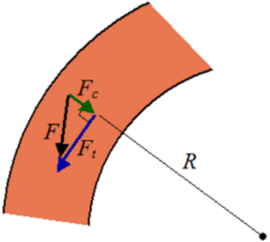


80m



100m

Influence de la courbe



Force de propulsion dans une courbe
"real-world-physics-problems.com"

Influence de la courbe

La force de propulsion $\overrightarrow{F_0}$ possède désormais une composante orthoradiale et une composante radiale en plus:

$$F_0^2 = \left(\underbrace{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau}}_{F_\theta}\right)^2 + \left(\underbrace{\lambda\frac{v(t)^2}{R}}_{F_r}\right)^2 \tag{9}$$

Ainsi:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{\tau} + \sqrt{F_0^2 - \frac{\lambda^2 v(t)^4}{R^2}} \tag{10}$$

Influence de la courbe

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{\tau} + \sqrt{F_0^2 - \frac{\lambda^2 v(t)^4}{R^2}}$$

numériquement, avec $R(p) = \left(\frac{100}{\pi} + 1,25(p-1)\right)$ m, p le numéro du couloir:

Couloir	1	2	3	4	5	6	7	8	Ligne droite
Temps (s)	10,05	10,04	10,03	10,02	10,01	10,00	9,99	9,98	9,87

Conclusion sur l'influence de la courbe

Couloir	1	2	3	4	5	6	7	8	Ligne droite
Temps (s)	10,05	10,04	10,03	10,02	10,01	10,00	9,99	9,98	9,87

- Différence maximale de 0,18 s sur 100 m, variation relative de 2%
- Couloirs extérieurs avantageux
- Dans les faits, les meilleurs couloirs sont ceux du milieu: bon compromis entre point de mire et “faible” force centrifuge

Optimisation du relais 4x100 m : passage du témoin

(a) Transmission sans gain de distance *lepoint.fr*

(b) Transmission avec gain de distance *auvio.rtbf.be*

Optimisation du relais 4x100 m : passage du témoin

Hypothèses: force de propulsion commune, continuité de la vitesse au passage du témoin.

Temps (s) en fonction du couloir :

```
37.36
37.33
37.30
37.28
37.25
37.23
37.22
37.20
```

(a) Sans enlever 1m

```
37.08
37.05
37.03
37.00
36.98
36.96
36.94
36.93
```

(b) En enlevant 1m

Optimisation du relais 4x100 m: ordre des coureurs

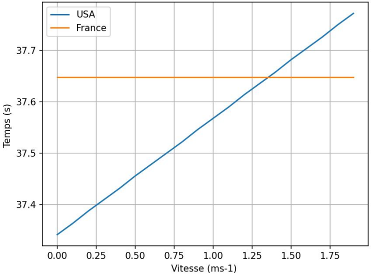
Hypothèses: Deux 'bons' coureurs, deux 'moins bons', gain de 1m au passage du témoin.

Temps (s) en fonction du couloir :

37.96	37.90
37.93	37.87
37.91	37.84
37.88	37.82
37.86	37.80
37.84	37.78
37.83	37.76
37.81	37.74

(a) Meilleurs coureurs en ligne droite. (b) Meilleurs coureurs en courbe.

Optimisation du relais 4x100 m: exemple du record mondial de 1990



Différence de vitesse entre les coureurs des Etats-Unis

Conclusion

- **Course optimale :** accélération $\rightarrow$ vitesse constante $\rightarrow$ décélération
- **Courbe :** les couloirs extérieurs sont théoriquement les plus avantageux
- **Relais :** la technique du passage de témoin et le placement des coureurs jouent une importance non négligeable

Annexe : preuve vitesse constante phase 2

Ayant $v(t)$ sur $[0, t_1]$ et sur $[t_2, T]$, pour trouver $v(t)$ sur $[t_1, t_2]$ on écrit:

$$D = \underbrace{\int_0^{t_1} F_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt}_{Phase1} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt}_{Phase2} + \underbrace{\int_{t_2}^{T}\left(\sigma\tau + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}}dt}_{Phase3}$$

On cherche v maximisant D, sachant $E(t_2) = 0 \longrightarrow$ théorème d'optimisation sous contrainte:

$$\exists\lambda \in \mathbf{R}; \quad d\left(D + \frac{\lambda}{2}E(t_2)\right) = 0$$

Annexe : preuve vitesse constante phase 2

Ainsi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{\lambda}{\tau} v(t)\right) \delta v(t) dt$$
$$+ v(t_2)\delta v(t2) \left(\int_{t_2}^{T} \left(\sigma\tau + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt - \frac{\lambda}{2} \right) = 0, \quad \forall \delta v$$

D'où:

$$v(t) = \frac{\tau}{\lambda} = constante, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{11}$$

Annexe : résolution numérique F_0 et τ

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve

Ldist=[100,200,60,0.9114*100]
Lrecord=[9.58,19.19,6.34,9.07] # records 60, 100, 200 mètres et 100 yards

N=len(Ldist)

def S(x):
    F=x[0]
    tau=x[1]
    eq1=0
    eq2=0
    for i in range(N):
        Ti=tau+Ldist[i]/(F*tau)
        eq1+=(1/Lrecord[i]**2)*(Ti-Lrecord[i])*(1-Ldist[i]/(F*tau**2))
        eq2+=(1/Lrecord[i]**2)*(Ti-Lrecord[i])*(-Ldist[i]/(tau*F**2))
    return [eq1,eq2]
```

Annexe : résolution numérique F_0 et τ

```
# minimisation
root = fsolve(S, [10, 1])

F0=root[0]
tau0=root[1]

print('valeurs de F0 et tau :', root)

# durée des courses avec les paramètres retenus

Lt1=[]

for i in range(N):
    Lt1.append(tau0+Ldist[i]/(F0*tau0))

print('temps records :', Lrecord)
print('temps obtenus avec les paramètres déterminés :', Lt1)
```

Annexe : code courbe

```
import numpy as np
#import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# valeurs des paramètres obtenus avec les records actuels

F=13.1
tau=0.846


# valeur de lambda disponible dans l'article

lamb=np.sqrt(0.6)

# liste des temps de la simulation

N=10000

Lt=np.linspace(0,20,N)

```

Annexe : code courbe

```python
# équation différentielle vectorielle avec le numéro du couloir p en paramètre

def eq(Y,t,p):
    R=100/np.pi+1.25*(p-1)
    return [Y[1],-Y[1]/tau+np.sqrt(F**2-lamb**2*Y[1]**4/R**2)]

# calcul de la durée pour finaliser le virage du 200 m, c'est à dire les premiers 100 m

def resol(p):
    sol=odeint(eq,(0,0),Lt,args=(p,))
    d,v=sol.T # distance parcourue et vitesse
    i=0
    while d[i]<100: # indice i correspondant à la fin du virage
        i+=1
    print(Lt[i])

for p in range(1,9):
    resol(p)
resol(1000) # pour simuler l'absence    de virage, un rayon "infiniment" grand
```

Annexe : Code relais

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

tau=0.846
lamb=np.sqrt(0.6)
# liste des temps de la simulation
N=10000
Lt=np.linspace(0,20,N)

# équation différentielle avec p le numéro du couloir p

def eq(Y,t,p,F):
    R=100/np.pi+1.25*(p-1)
    return [Y[1],-Y[1]/tau+np.sqrt(F**2-lamb**2*Y[1]**4/R**2)]
```

Annexe : Code relais

```python
# calcul de la durée totale du 200 m en fonction du couloir

def resol1(p,F1,F2,F3,F4,d,v):
    sol=odeint(eq,(0,0),Lt,args=(p,F1)) # virage 1
    dc,vc=sol.T # distance parcourue et vitesse
    i=0
    while dc[i] < 100+d:
        i+=1
    t1=Lt[i]
    d1=dc[i]
    v1=vc[i] - v


    sol=odeint(eq,(0,v1),Lt,args=(1000,F2)) # ligne droite 1
    dd,vd=sol.T
    j=0
    while d1+dd[j]<200 +2*d:
        j+=1
    t2=Lt[j]
    d2 = dd[j]
    v2 = vd[j] - v
```

Annexe : Code relais

```
    sol=odeint(eq,(0,v2),Lt,args=(p,F3)) # courbe 2
    dc2,vc2 = sol.T
    k = 0
    while d1 + d2 + dc2[k] < 300 +3*d:
        k+=1
    t3=Lt[k]
    d3 = dc2[k]
    v3 = vc2[k] - v


    sol=odeint(eq,(0,v3),Lt,args=(1000,F4)) # ligne droite 2
    dd2,vd2 = sol.T
    l = 0
    while d1 + d2 + d3 + dd2[l] < 400+3*d:
        l+=1
    t4 = Lt[l]
    return(t1+t2+t3+t4)
```