Capítulo 9 - exercício 6, 8

sexta-feira, 20 de novembro de 2020 10:56

6. Se $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, então X tal que $\log X = Y$ terá uma *distribuição log-normal*, com $E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$ e $\text{Var}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. Baseado nesta definição, prove que se $Y_t = \log Z_t$ e Y_t é Gaussiano, então

$$\hat{Z}_t(h) = e^{\hat{Y}_t(h)+\frac{1}{2}V_y(h)},$$
$$V_Z(h) = e^{2\hat{Y}_t(h)+V_y(h)}[e^{V_y(h)} - 1].$$

6- Y_t é Gaussiano, logo, $Y_{t+h} \sim N(\hat{Y}_t(h), V_y(h))$
e Z_{t+h} é log normal:

$$\hat{Z}_t(h) = E(Z_{t+h}) = e^{\hat{Y}_t(h) + \frac{1}{2} V_y(h)}$$
$$V_Z(h) = Var(Z_{t+h}) = e^{2\hat{Y}_t(h) + V_y(h)}[e^{V_y(h)} - 1]$$

8. Considere o problema de encontrar a previsão linear ótima (erro quadrático médio mínimo) de um processo estacionário de média zero, $\{Z_t\}$, baseado em um número finito de observações, $Z_t, \ldots, Z_{t-r}$. Em resumo, queremos encontrar os coeficientes a_i na fórmula de previsão

$$\hat{Z}_t(h) = a_0 Z_t + a_1 Z_{t-1} + \cdots + a_r Z_{t-r}$$

que forneçam erro quadrático médio mínimo.

(a) Mostre que

$$E\left[(Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h))^2\right] = \gamma_0 - 2\sum_{i=0}^{r} a_i \gamma_{i+h} + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} a_i a_j \gamma_{i-j}$$
$$= \gamma_0 - 2\mathbf{a}'\boldsymbol{\gamma}_r(h) + \mathbf{a}'\Gamma_{r+1}\mathbf{a}$$

8 - a)

$$E\left[(Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h))^2\right] = E\left[(Z_{t+h})^2\right] + E\left[(\hat{Z}_t(h))^2\right] - 2E\left[Z_{t+h}\hat{Z}_t(h)\right]$$

Resolvendo individualmente as parcelas:

$$E\left[(Z_{t+h})^2\right] = \gamma_0$$

$$E\left[(\hat{Z}_t(h))^2\right] = E\left[(a_0 Z_t + a_1 Z_{t-1} + \ldots + a_r Z_{t-r})^2\right] =$$

$$= a_0 a_0 \underbrace{E[Z_t Z_t]}_{\gamma_0} + a_0 a_1 \underbrace{E[Z_t Z_{t-1}]}_{\gamma_1} + \ldots + a_0 a_r \underbrace{E[Z_t Z_{t-r}]}_{\gamma_r} +$$

$$\vdots$$

$$+ a_r a_0 \underbrace{E[Z_{t-r} Z_t]}_{\gamma_{-r}} + a_r a_1 \underbrace{E[Z_{t-r} Z_{t-1}]}_{\gamma_{1-r}} + \ldots + a_r a_r \underbrace{E[Z_{t-r} Z_{t-r}]}_{\gamma_0} =$$

$$= \sum^{r} \sum^{r} a_i a_j \gamma_{i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} a_i a_j \gamma_{i-j}$$

$$E[Z_{t+h} \hat{Z}_t(h)] = E[Z_{t+h}(a_0 Z_t + a_1 Z_{t-1} + a_r Z_{t-r})] =$$

$$= a_0 \overbrace{E[Z_{t+h} Z_t]}^{\gamma_h} + a_1 \overbrace{E[Z_{t+h} Z_{t-1}]}^{\gamma_{h+1}} + \dots + a_r \overbrace{E[Z_{t+h} Z_{t-r}]}^{\gamma_{h+r}}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} a_i \gamma_{h+i}$$

Juntando os termos:

$$E[(Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h))^2] = \gamma_0 + \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} a_i a_j \gamma_{i-j} - 2 \sum_{i=0}^{r} a_i \gamma_{h+i}$$

$$= \gamma_0 + \vec{a}^T \Gamma_{r+1} \vec{a} - 2 \vec{a}^T \vec{\gamma}_r(h)$$

com $\vec{a} = [a_0, a_1, \dots, a_r]$, $\vec{\gamma}_r(h) = [\gamma_h, \gamma_{h+1}, \dots, \gamma_{h+r}]$

e $\Gamma_{r+1}(i,j) = \gamma_{i-j}$ com $0 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq r$

(b) Encontre os a_i que minimizam o EQM e mostre que as equações resultantes são $\Gamma_{r+1}\mathbf{a} = \boldsymbol{\gamma}_r(h)$, com solução $\mathbf{a} = \Gamma_{r+1}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_r(h)$.

b) $$E[(Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h))^2] = EQM(\vec{a}) = \gamma_0 + \vec{a}^T \Gamma_{r+1} \vec{a} - 2 \vec{a}^T \vec{\gamma}_r(h)$$

$$\frac{d\,EQM(\vec{a})}{d\vec{a}} = 2\Gamma_{r+1} \vec{a} - 2\vec{\gamma}_r(h) = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{r+1} \vec{a} = \vec{\gamma}_r(h) \Rightarrow \vec{a} = \Gamma_{r+1}^{-1} \vec{\gamma}_r(h)$$