

## Лабораторная работа №4 «Цифровой осциллограф»

Данная лабораторная работа посвящена работе с цифровым осциллографом в режиме анализатора спектра. Целью работы является практическое изучение основ спектрального анализа сигналов методом ДПФ. Лабораторная работа состоит из двух частей, каждая из которых рассчитана на одно занятие (4 ак. часа). Задания по моделированию выполняются с помощью библиотек языка программирования Python 3 (NumPy, SciPy, Matplotlib).

Студентам, выполняющим данную лабораторную работу в качестве первой по курсу «Радиофизическая лаборатория», рекомендуется для прочтения краткое теоретическое введение, приведенное в приложении 2.

### Содержание

Содержание .....	1
Задание к допуску .....	3
Модуль 1. Оценка спектра сигнала с помощью ДПФ.....	3
Теоретическая часть .....	3
Краткое описание осциллографа Signal 6501.....	3
Вычисление спектра дискретизованного сигнала с помощью ДПФ .....	4
Оценка спектра исходного сигнала с помощью ДПФ .....	5
Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ. ....	8
Эффект наложения спектров («aliasing»).....	10
Шум квантования АЦП .....	10
Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна.....	13
Влияние соседних спектральных компонент.....	16
Паразитная амплитудная модуляция спектра.....	18
Эффекты растекания спектральных компонент и утечки спектра через боковые лепестки окна (для дискретизованного сигнала) .....	19
Примеры оконных функции .....	22
Прямоугольное окно .....	23
Окно Ханна .....	23
Окно с плоской вершиной .....	25
Задания к выполнению .....	25
Задачи к сдаче работы .....	27
Модуль 2. Субдискретизация полосовых радиосигналов .....	29
Теоретическая часть .....	29
Условия на частоту дискретизации полосового радиосигнала.....	29

Случай целочисленных полос .....	30
Случай нецелочисленных полос .....	31
Задания к выполнению .....	34
Задачи к сдаче работы .....	35
Список литературы.....	36
Приложение 1. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.....	37
Приложение 2. Теоретическое введение: преобразование Фурье, ДВПФ и ДПФ.....	37
Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые.....	37
Преобразование Фурье.....	38
Свойства преобразования Фурье .....	40
Спектры гармонических сигналов.....	41
Эффект растекания спектральных компонент при ограничении длительности сигнала.....	41
Спектр пачки равноотстоящих импульсов .....	44
Спектр дискретизованного сигнала .....	45
Эффект наложения .....	47
Теорема Котельникова во временной области .....	47
Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов .....	50
Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов. ДВПФ. ....	51
Различные формы записи ДВПФ.....	52
Свойства ДВПФ.....	54
Линейность.....	54
Теорема запаздывания .....	54
Теорема смещения.....	54
Равенство Парсеваля.....	55
Умножение на $k$ и дифференцирование по частоте .....	55
Изменение масштаба .....	56
Теоремы о свертке .....	57
ДВПФ периодических последовательностей.....	57
ДПФ последовательностей конечной длительности .....	59
Форма записи ДПФ .....	59
Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $\nu = n / N$ .....	59
Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding).....	60
Приложение 3. Описание и работа осциллографа Signal–6501USB61	

## Задание к допуску

**№1.** Сформулировать, в чем заключается разница между аналоговым, дискретным и цифровым сигналами.

**№2.** Записать формулы анализа и синтеза (прямого и обратного преобразования) для

- а) преобразования Фурье,
- б) дискретного во времени преобразования Фурье,
- в) дискретного преобразования Фурье.

**№3.** Объяснить, в чем при ДПФ-анализе заключается

- а) эффект наложения,
- б) эффект растекания спектральных компонент,
- в) эффект утечки спектра через боковые лепестки окна,
- г) паразитная амплитудная модуляция спектра,
- д) влияние шума квантования АЦП.

**№4.** Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами  $f_1 = 20$  кГц и  $f_2 = 80$  кГц при их дискретизации с частотой  $f_d = 60$  кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения?

**№5.** Пусть имеется  $N = 10$  точечное ДПФ некоторой последовательности отсчетов конечной длительности. Частота дискретизации  $f_d = 1$  кГц. Указать, сколько дополнительных нулей нужно добавить к этой последовательности, чтобы расстояние между отсчетами стало равным  $\Delta f = 10$  Гц.

**№6.** Определить отношение «сигнал/шум» ( $SNR$ ) и относительный уровень шумов квантования для а) 8-разрядного АЦП, б) 10-разрядного АЦП, в) 16-разрядного АЦП.

## Модуль 1. Оценка спектра сигнала с помощью ДПФ

### Теоретическая часть

#### Краткое описание осциллографа Signal 6501.

В данной работе цифровой осциллограф реализован на основе блока «PV6501», действующего совместно с персональным компьютером (ПК). Блок «PV6501» по существу является интерфейсом для ПК и включает в себя:

- аналого-цифровой преобразователь (АЦП);
- буферное запоминающее устройство;
- генератор синусоидальных и импульсных сигналов на основе цифро-аналогового преобразователя (ЦАП);
- свип-генератор для получения полосовых радиосигналов;
- программы для ПК для изображения на экране ПК рабочей панели осциллографа со всеми органами управления (с помощью мыши) и наблюдаемых сигналов, и их спектров;

- программы быстрого преобразования Фурье (БПФ) для вычисления на ПК дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Отличие данного цифрового осциллографа от аналогового в том, что обрабатываемый сигнал представлен с помощью выборок исходного сигнала. Подаваемые на вход усилителя вертикального отклонения сигналы нормируются и усиливаются до необходимой величины. Усиленные сигналы поступают на вход АЦП (аналого-цифрового преобразователя), где происходит их дискретизация и преобразование в эквивалентный цифровой код. Данные после АЦП накапливаются в буферном ОЗУ. Для этого предназначена опция **Sampling** в меню **Options**. Размер памяти задаётся в отсчётах и может быть по желанию установлен равным 1000, 2500, 5000, 8000. В этом же окне должен быть установлен режим **Normal**. Частота дискретизации  $f_d$  уменьшается при увеличении длины развёртки во избежание переполнения буферной памяти. Сам АЦП работает с постоянной тактовой частотой 100 МГц. Уменьшение частоты дискретизации осуществляется путём прореживания в целое число раз отсчётов АЦП. Однако нужно следить за тем, чтобы в спектре входного сигнала не было компонент с частотами выше частоты Найквиста  $f_d/2$ . В противном случае возникает *эффект наложения*, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для синусоидальных входных сигналов это приводит к парадоксальным результатам.

Для работы осциллографа в режиме анализатора спектра необходимо выбрать опцию **FFT** (в переводе БПФ – быстрое преобразование Фурье) в меню **View**. Осциллограф одновременно покажет наблюдаемый сигнал и модуль его спектра (тип спектра – амплитудный dBV – спектр амплитуд в децибелах относительно 1В). Полезно установить разные цвета изображений сигнала и его спектра. В цифровых системах дискретно и время, и частота. Адекватным этому является *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ). При этом БПФ – эффективный алгоритм для вычисления ДПФ. В данном осциллографе дискретность по частоте при изображении спектра принудительно устраняется путём соединения соседних отсчётов ДПФ прямолинейными отрезками. Индикация спектра выполняется в диапазоне  $[0, f_d/2]$ . Это связано с симметрией на отрезке  $[0, f_d]$  модуля спектра дискретизованных действительных сигналов. Параметры FFT устанавливаются в окне **FFT Settings** (меню **Options**, опция **FFT**). Размер БПФ может по желанию выбран равным 1024, 2048, 4096, 8192. Рекомендуемые окна при выполнении задания – прямоугольное и Ханна. Полезно включить в меню **View** индикацию частоты дискретизации, частоты спектрального пика и других измерений (подобрать разные цвета для удобства наблюдений).

### Вычисление спектра дискретизованного сигнала с помощью ДПФ

Спектр дискретизованного сигнала  $X_d(f)$  определяется с помощью ДВПФ через выборки  $x[k]$ :

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Отметим, что сигнал в рассматриваемом нами случае дискретизованной сигнал представлен конечным числом отсчетов  $x[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Как правило, мы можем определить ДВПФ лишь в  $N$  точках на оси частот  $f_n = n \frac{f_d}{N} = n \Delta f$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  на одном периоде по оси частот, например на  $[0; f_d)$ . Тогда мы вычисляем

$$X_d(n \Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Заметим, что мы получили формулу прямого ДПФ, т.е.  $X[n] = X_d(n \Delta f)$  и ДПФ представляют собой выборки спектра дискретизованного сигнала, взятые с шагом  $\Delta f = \frac{f_d}{N}$ . Шаг по частоте  $\Delta f$  определяет разрешение по частоте.

Если частотное разрешение недостаточно для анализа, то мы можем его увеличить дополнив рассматриваемую последовательность нулевыми отсчетами. Добавление нулевых отсчетов никак не изменяет сам дискретный сигнал, однако увеличивает размерность ДПФ, а значит и число точек, в которых мы вычисляем спектр. Пусть сигнал дополнен нулями до  $M$  отсчетов,  $M > N$ . Тогда

$$X_d(n \Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right), \text{ для } n = 0, 1, \dots, M-1.$$

### Оценка спектра исходного сигнала с помощью ДПФ

Отсчету  $N$  – точечного ДПФ с номером  $n$  в случае сигнала конечной длительности соответствует значение ДВПФ в точке  $v = n/N$  по оси нормированных частот:

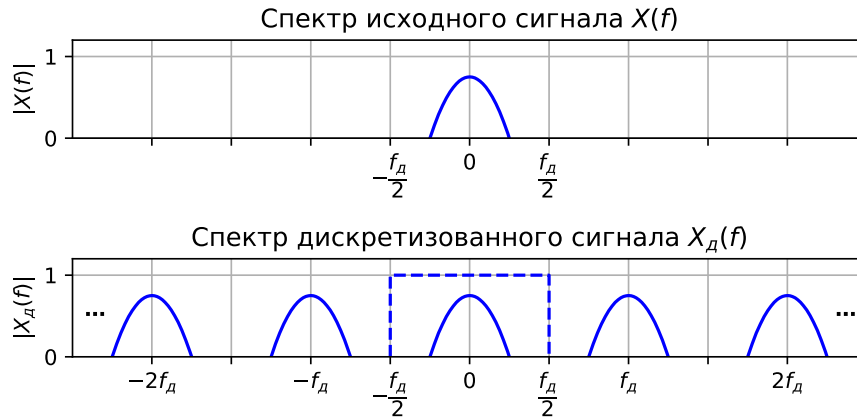
$$X(v) \Big|_{v=n/N} = X[n].$$

Учитывая, что  $v = f / f_d = f \Delta t$ , где  $f_d$  – частота дискретизации,  $\Delta t$  – шаг дискретизации, получаем, что отсчету с номером  $n$  соответствует частота  $f = n f_d / N = n / (N \Delta t)$  Гц. Разрешение по оси частот при ДПФ анализе составляет  $f_d / N$  Гц.

В таблице ниже рассмотрены основные способы введения частотной оси для отсчетов ДПФ.

Частотная переменная и ее размерность	Связь частотной переменной с номером отсчета ДПФ	Разрешение по частоте	Диапазон изменения частоты, соответствующий отсчетам $[0, N)$
$f$ , [Гц]	$f = \frac{n f_d}{N}$	$\Delta f = \frac{f_d}{N}$	$[0, f_d)$
$\omega$ , [рад/с]	$\omega = \frac{n \omega_d}{N}$	$\Delta \omega = \frac{\omega_d}{N}$	$[0, \omega_d)$
$v$ , безразмерная	$v = \frac{n}{N}$	$\Delta v = \frac{1}{N}$	$[0, 1)$
$\theta$ , [рад]	$\theta = 2\pi \frac{n}{N}$	$\Delta \theta = \frac{2\pi}{N}$	$[0, 2\pi)$

Заметим, что  $f = nf_d / N$  Гц – это частота в спектре дискретизированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогового сигнала с периодом, равным частоте дискретизации ( $f_d$  в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером  $n$  будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте  $f \in [-f_d/2; f_d/2]$ , такой, что  $f = (n + mN)f_d / N$ , где  $m$  – целое число.



**Пример.** Рассмотрим для  $f_0 = 5$  Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad 0 \leq t < 1.$$

Выберем частоту дискретизации  $f_d = 20$  Гц ( $\Delta t = 0,05$  с).

Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

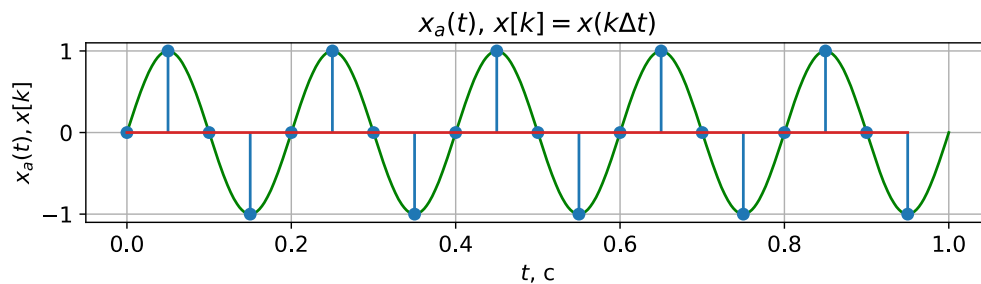
$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k\right).$$

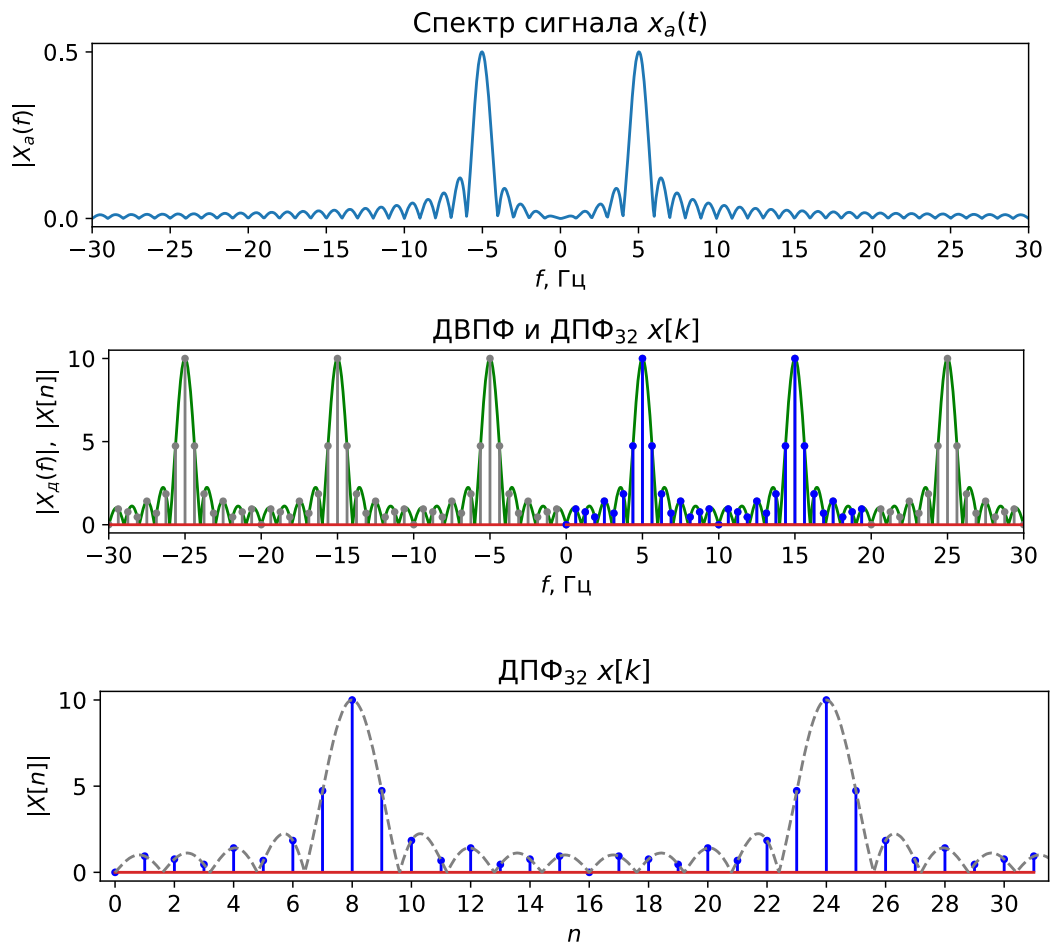
Спектр  $X_d(f)$  дискретизованного сигнала связан со спектром  $X_a(f)$  аналогового сигнала соотношением

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

где  $T$  определено соотношением  $x[k] = Tx_a(k\Delta t)$ . Если бы эффекта наложения не было, то  $X_d(f)$  и  $X_a(f)$  совпадали бы на интервале  $[-f_d/2, f_d/2]$ , т.е. от  $-10$  Гц до  $10$  Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности  $N = 32$  для  $n = 0, 1, \dots, N-1$  находятся на полуинтервале  $[0, f_d)$ .



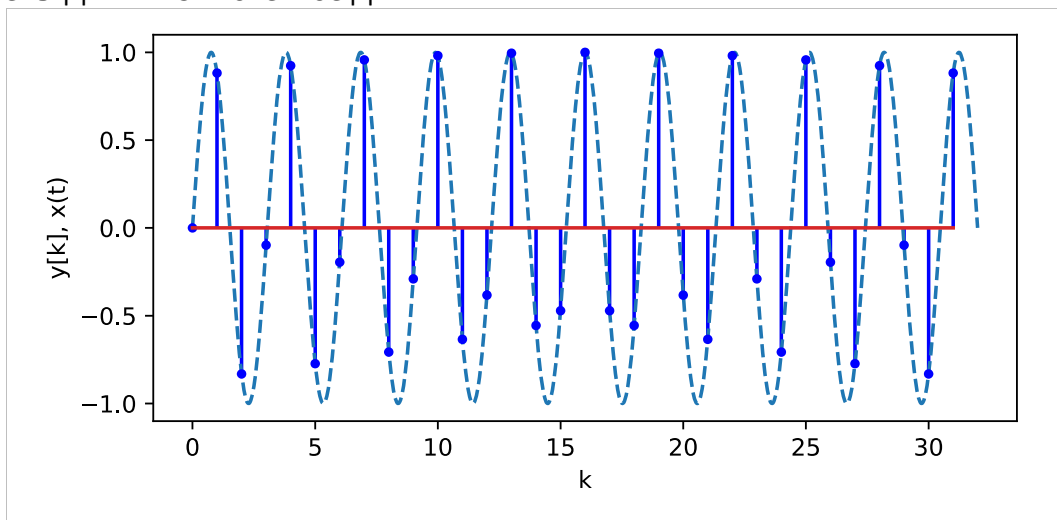


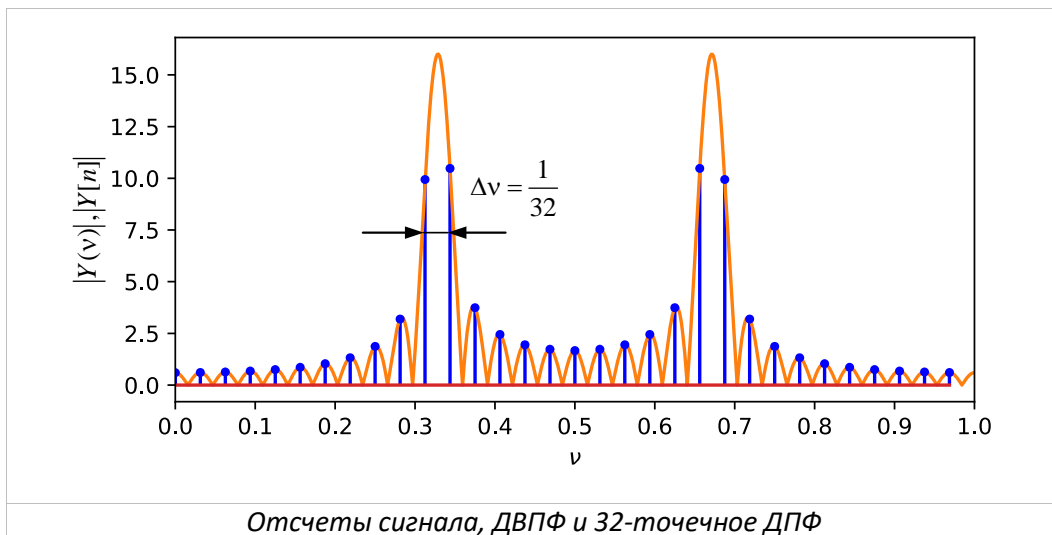
**Пример. Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов.**

Предположим, что после дискретизации некоторого аналогового сигнала  $x(t)$  и умножения на прямоугольное окно длиной  $N=32$  получилась последовательность отсчетов

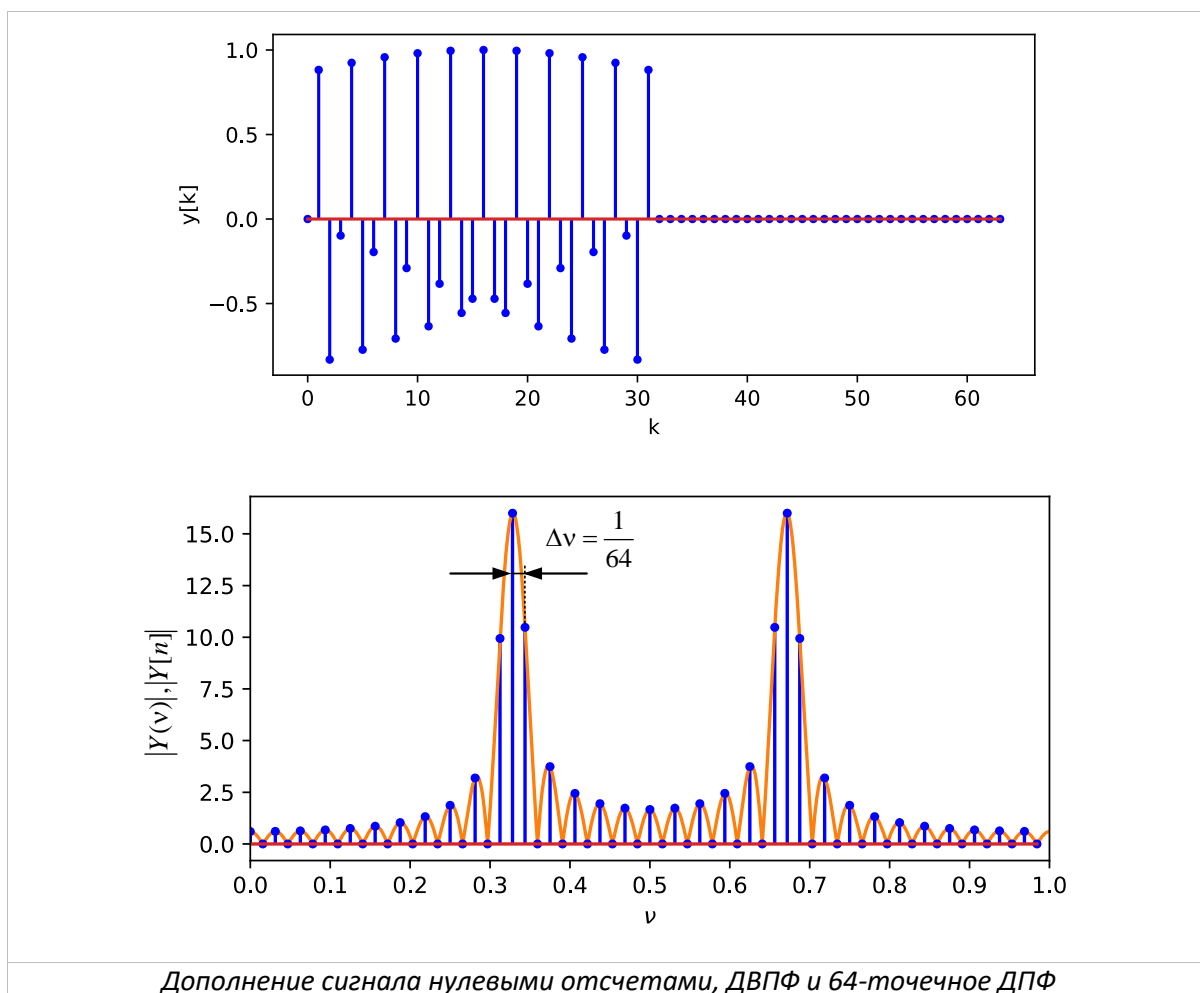
$$y[k] = \sin\left(2\pi \frac{10.5}{32} k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

На рисунке ниже показан процесс взятия отсчетов сигнала, а также на одном графике построены ДВПФ и 32-точечное ДПФ.





На следующем рисунке показана последовательность отсчетов, дополненная до 64 отсчетов нулями, ДВПФ и 64-точечное ДПФ. Во втором случае расстояние по оси частот между соседними отсчетами ДПФ в два раза меньше.

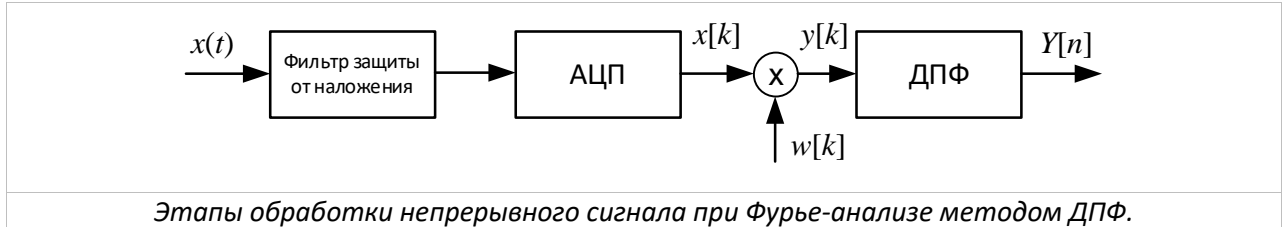


### Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.

Основные этапы обработки непрерывного сигнала при спектральном анализе на основе ДПФ обозначены на рисунке ниже. Аналоговый фильтр защиты от наложения ослабляет компоненты сигнала  $x(t)$  выше частоты Найквиста  $f_d / 2$ . Следующий за ним аналого-



цифровой преобразователь (АЦП) выполняет операции дискретизации по времени и квантования выборок сигнала по уровню. На выходе АЦП будет цифровой сигнал  $x[k]$ , представленный последовательностью отсчетов. Во многих случаях длительность сигнала  $x(t)$  велика, поэтому перед вычислением ДПФ последовательность отсчетов  $x[k]$  умножается на временное окно  $w[k]$  длительностью  $N$ .



*Этапы обработки непрерывного сигнала при Фурье-анализе методом ДПФ.*

В результате получается конечная последовательность  $y[k] = x[k]w[k]$ , которой в частотной области соответствует периодическая свёртка

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v}.$$

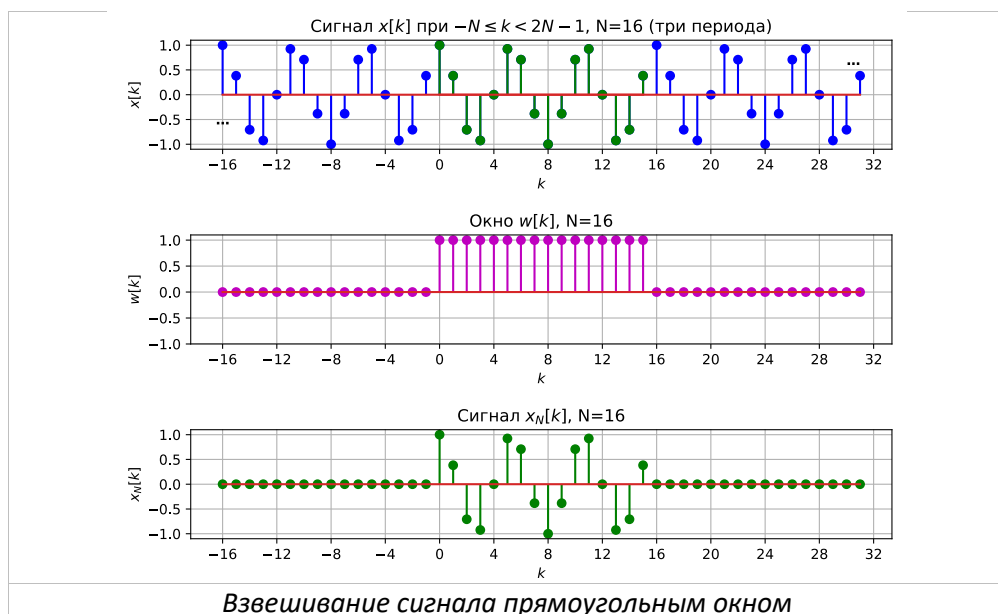
Здесь  $v = f\Delta t = f / f_d$  – нормированная частота (доли частоты дискретизации),  $X(v)$  – ДВПФ (спектр) сигнала  $x[k]$ ,  $W(v)$  – ДВПФ оконной функции  $w[k]$

$$W(v) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]e^{-j2\pi vk}.$$

Заметим, что действие прямоугольного окна эквивалентно ограничению сигнала по длительности.

При проведении ДПФ анализа мы получаем выборки спектра (ДВПФ) сигнала  $y[k]$ :

$$Y[n] = Y(v)|_{v=n/N}.$$



*Взвешивание сигнала прямоугольным окном*

Здесь  $Y[n]$  – ДПФ последовательности  $y[k]$ , вычисленное по формуле без нормирующего множителя  $1/N$  в прямом преобразовании. В данном случае размерность ДПФ (число отсчетов на одном периоде) будет в точности равна длине окна.

При дополнении последовательности  $y[k]$  нулевыми отсчетами до длины  $M$ ,  $M > N$ , размерность ДПФ, а значит и число выборок спектра можно увеличить, не изменяя формы и ДВПФ самого сигнала:

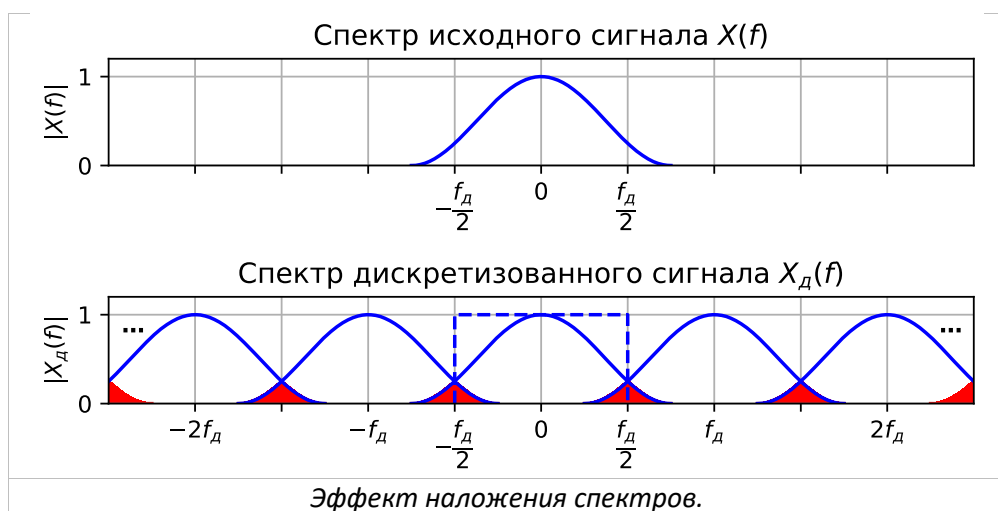
$$Y[n] = Y(v) \Big|_{v=n/M},$$

где обычно выбирают  $n = 0, \dots, M-1$ . При проведении спектрального анализа указанным методом необходимо учитывать ряд эффектов, возникающих на этапе дискретизации и на этапе взвешивания сигнала временным окном.

- Эффект наложения спектров («aliasing»).
- Шумы квантования.
- Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна
- Влияние соседних спектральных компонент.
- Паразитная амплитудная модуляция спектра.

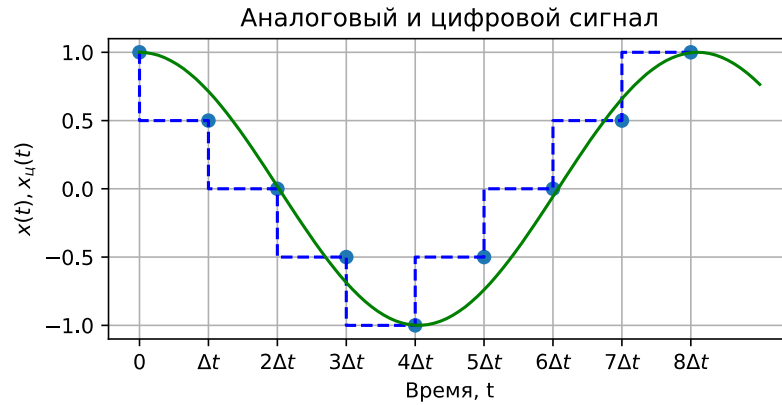
### Эффект наложения спектров («aliasing»)

Дискретизация сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению исходного спектра  $X(f)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d = 1/\Delta t$ . Полезная информация содержится в полосе  $[-f_d/2, f_d/2]$ . Если не принять специальных мер, возникает *эффект наложения*, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна  $f_c = 1/2\Delta t$ . Частота  $f_d/2$  в зарубежной литературе называется *частотой Найквиста*.



### Шум квантования АЦП

Шумы квантования неизбежно проявляются, поскольку, как правило, разрядность чисел для представления отсчетов, ограничена. Не рассматривая ошибки округления при вычислении ДПФ и взвешивании окном, остановимся на неизбежно возникающих шумах квантования АЦП.



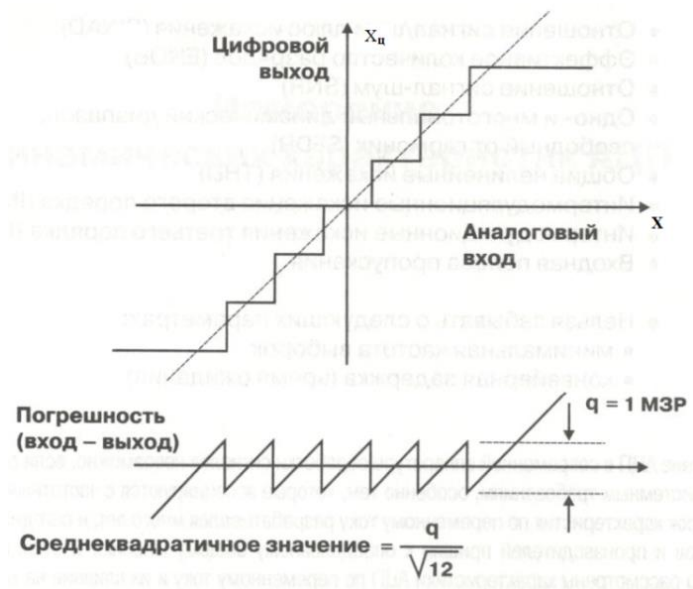
Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП). В результате дискретизации взятием отсчетов мы получаем выборки аналогового сигнала  $x_a(t)$ :

$$x[k] = x_a(k\Delta t),$$

где  $\Delta t$  – шаг дискретизации. После квантования по уровню, мы получаем цифровой сигнал:

$$x_{\text{ц}}[k] = x[k] - e[k],$$

где  $e[k] = x[k] - x_{\text{ц}}[k]$  – это погрешность квантования – некоторая реализацию шума квантования. Обычно число уровней квантования  $2^n$ , где  $n$  – разрядность АЦП. АЦП осциллографа PV6501 8 битное (восьмиразрядное). Каждый отсчет в буфере описывается одним из  $2^8 = 256$  состояний.



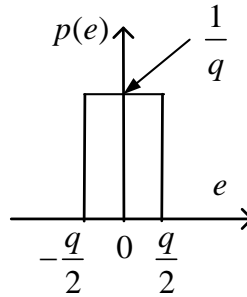
Определим шум квантования  $n$ -разрядного АЦП. Рассмотрим погрешность квантования для стандартного АЦП

$$e[k] = x[k] - x_{\text{ц}}[k].$$

Максимальная по модулю погрешность квантования составляет половину единицы младшего значащего разряда (шага квантования)  $q$  :

$$-\frac{q}{2} \leq e[k] \leq \frac{q}{2}$$

Заметим, что для каждого момента времени все возможные значения погрешности равновероятны. Шум квантования не коррелирован с входным сигналом и имеет равномерное распределение на отрезке. Плотность вероятности  $p(e)$  ошибки квантования изображена на рисунке.



Для плотности вероятности должно быть выполнено:

$$\int_{-q/2}^{q/2} p(e) de = 1.$$

Ошибка квантования имеет нулевое среднее и дисперсию

$$M[e] = \int_{-q/2}^{q/2} e p(e) de = 0,$$

$$\sigma_e^2 = M[e^2] - (M[e])^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e) de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}.$$

Среднеквадратичное значение шума квантования

$$\sigma_e = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Заметим, что пилообразная погрешность создаёт гармоники, лежащие дальше полосы  $[0, f_d / 2]$ . Однако все высшие гармоники должны переноситься (эффект наложения) в эту полосу и, затем суммируясь, произвести шум с действующим значением  $\sigma_e = q / \sqrt{12}$ .

Пусть на входе АЦП с диапазоном напряжения входного сигнала  $\left[ -\frac{q \cdot 2^n}{2}, \frac{q \cdot 2^n}{2} \right]$

действует полномасштабная синусоида

$$x(t) = \frac{q \cdot 2^n}{2} \sin 2\pi f t.$$

Среднеквадратичное значение входного сигнала

$$\sigma_x = \frac{q \cdot 2^n}{2\sqrt{2}}.$$

Отношение «сигнал/шум» ( $SNR$  —Signal to Noise Ratio)

$$SNR = 20\lg\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_e}\right) = 20\lg\left(\frac{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}}{q / 2\sqrt{3}}\right) = 20\lg 2^n + 20\lg \sqrt{2/3}$$

$$SNR = 6,02n + 1,76 \text{ (дБ)}$$

Относительный уровень шума квантования

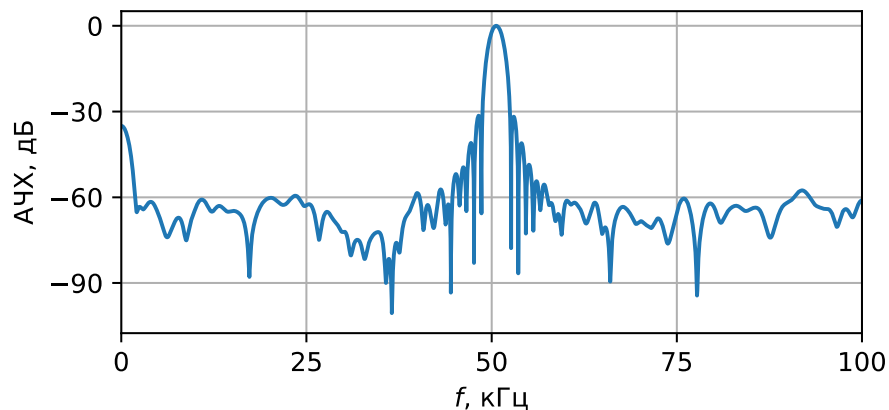
$$\gamma = 20\lg\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_x}\right) = 20\lg\left(\frac{q / 2\sqrt{3}}{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}}\right) = 20\lg \frac{1}{2^n \sqrt{1,5}}$$

$$\gamma = -6,02n - 1,76 \text{ (дБ)}$$

**Пример.** На рисунке приведена оценка спектра сигнала, состоящего из отрезка синусоиды, полученная цифровым осциллографом PV6501 с  $n=8$  битным АЦП с использованием окна Ханна. Относительный уровень шума квантования в дБ будет

$$\gamma = -(6,02n + 1,76) \text{ дБ} \approx -50 \text{ дБ}.$$

Проводить измерения сигналов и их спектров ниже этого уровня бессмысленно.



### Эффекты растекания спектральных компонент («leakage») и утечки спектра через боковые лепестки окна

Эффект растекания спектральных компонент неизбежно возникает при умножении последовательности на оконную функцию. Рассмотрим этот эффект на следующем примере. Предположим, что имеется периодическая последовательность

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right).$$

ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta\left(v - \frac{3}{16} - n\right) + \frac{1}{2} \delta\left(v + \frac{3}{16} - n\right).$$

$X(v)$  содержит две  $\delta$ -функции с площадями  $1/2$  на каждом периоде. Предположим, что используется прямоугольное окно длиной в  $N=15$  отсчетов и для дальнейшего

спектрального анализа используется сигнал  $y[k] = x[k]w[k]$ . Для прямоугольного окна

$$w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m] \text{ спектр } W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}.$$

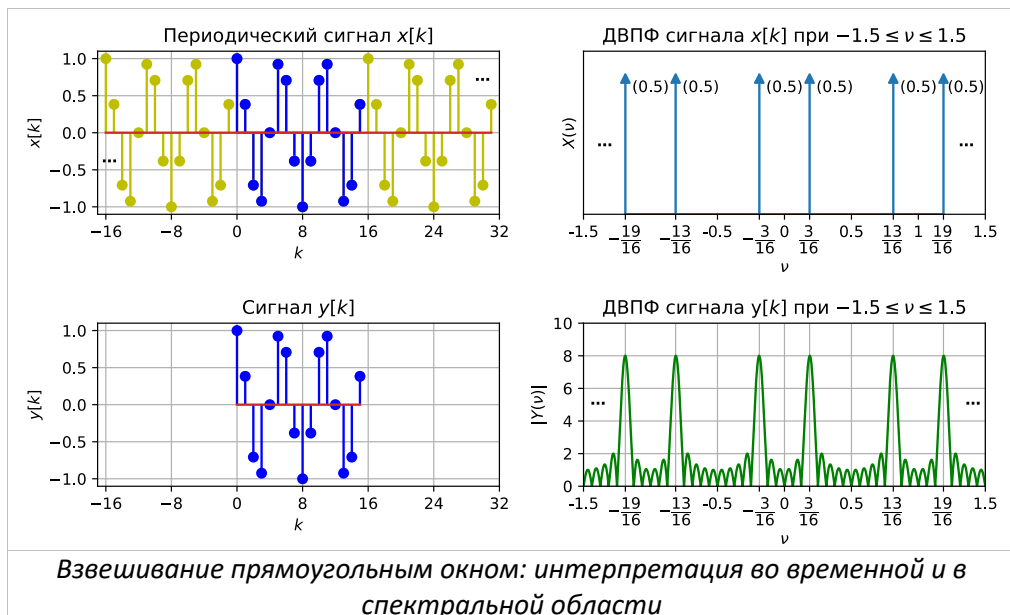
ДВПФ последовательности  $Y(\nu)$  может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})W(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{\nu})X(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu - \nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1), & a < \nu_1 < b, \\ 0.5W(\nu_1), & (\nu_1 = a) \cup (\nu_1 = b), \\ 0, & (\nu_1 < a) \cup (\nu_1 > b), \end{cases}$$

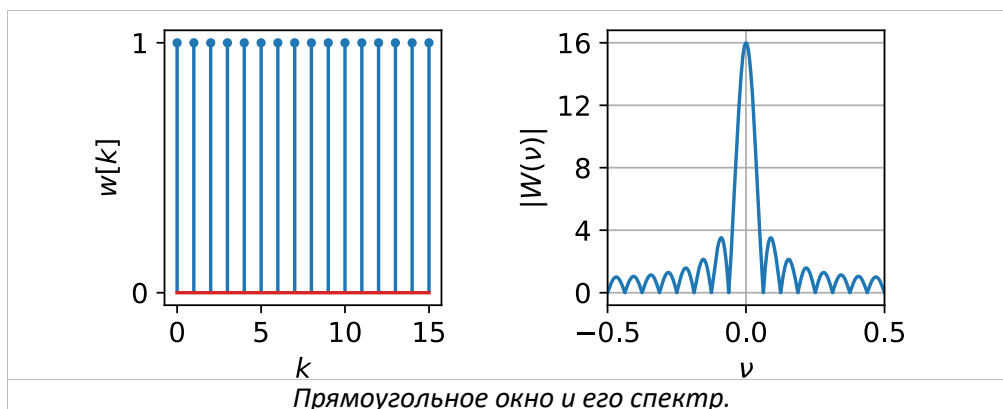
получаем, что  $Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16})$ .



Эффект растекания спектральных компонент заключается в том, что гармоники (дельта-функции) в спектре сигнала «размываются» в спектральные максимумы.

Помимо этого, наблюдается эффект утечки спектра через боковые лепестки прямоугольного окна, который приводит к появлению боковых выбросов.

Как видно из приведённого примера, из-за ограничения длительности сигнала мы наблюдаем не только размытые спектральные максимумы, но и боковые выбросы, вызванные влиянием боковых лепестков окна.

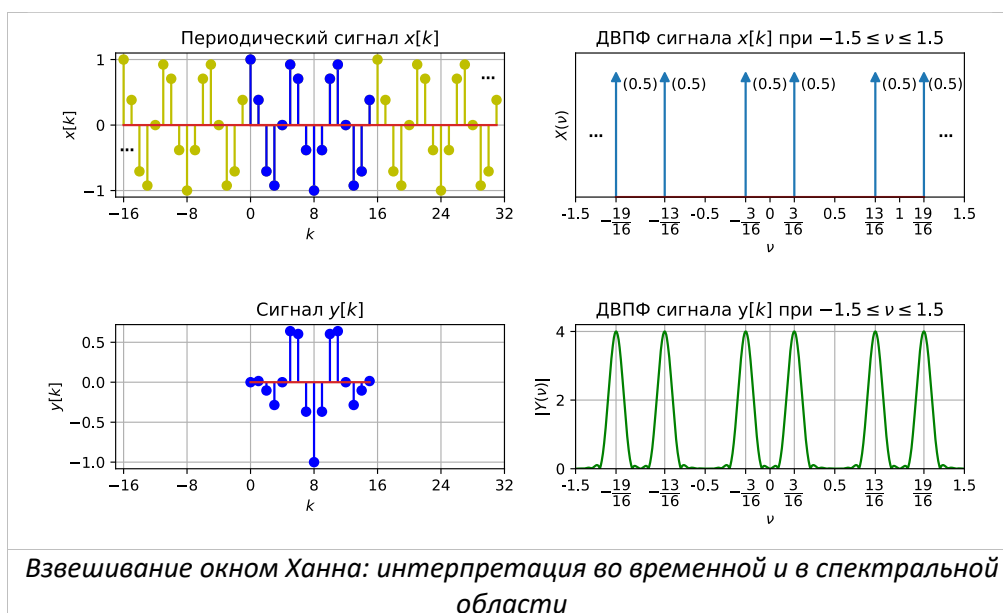


*Примечание.* Физик Франц Артур Фридрих Шустер (нем. Franz Arthur Friedrich Schuster; 1851—1934), называл их "ложными периодичностями". Многие исследователи его времени ошибочно утверждали, эти максимумы обусловлены скрытыми периодичностями в сигнале. Шустер увидел здесь аналогию с дифракционными полосами в оптическом спектрографе, которые возникали из-за ограниченной апертуры прибора.

Эффект утечки спектра можно ослабить путем применения оконной функции, отличной от прямоугольной. В качестве примера рассмотрим окно Ханна. Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности  $x[k] = \cos\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$ , т.е. для последовательности  $y[k] = x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$ , где

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Результаты, к которым приводит взвешивание окном Ханна данной последовательности приведены на рисунке ниже.



Минимальная ширина спектральных пиков взвешенной окном последовательности определяется шириной главного лепестка функции  $W(v)$  и не зависит от исходных

данных. Увеличение частоты дискретизации позволяет ослабить этот эффект. Боковые максимумы могут также маскировать присутствие слабых сигналов и, следовательно, препятствовать их обнаружению. Применение окна Ханна позволило снизить уровень боковых лепестков по сравнению с уровнем в случае прямоугольного окна. Однако это даётся ценой расширения главного лепестка спектрального окна  $W(\nu)$ , что приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, должен выбираться компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков.

### Влияние соседних спектральных компонент.

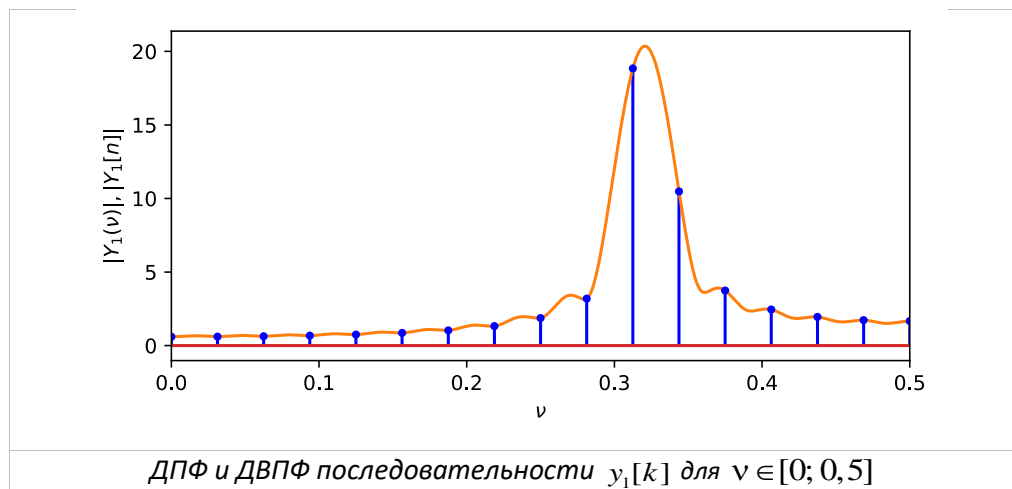
В этом пункте мы рассмотрим, как эффекты растекания спектральных компонент и утечки спектра через боковые лепестки окна могут повлиять на результат анализа сигнала с несколькими спектральными компонентами.

#### Пример. Различимость соседних гармоник.

Предположим, что с помощью прямоугольного окна осуществляется ДПФ-анализ гармонической последовательности

$$x[k] = \sin\left(2\pi \frac{10,5}{32} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{10}{32} k\right). \quad ()$$

Относительные частоты входящих в ее состав синусоид  $\nu_1 = 10,5/32$ ,  $\nu_2 = 10/32$ , расстояние между ними равно  $\nu_{12} = 1/64$ . Рассмотрим ДПФ и ДВПФ последовательности  $y_1[k] = x[k]w_1[k]$ , где  $w_1[k]$  – 32 точечное прямоугольное окно.

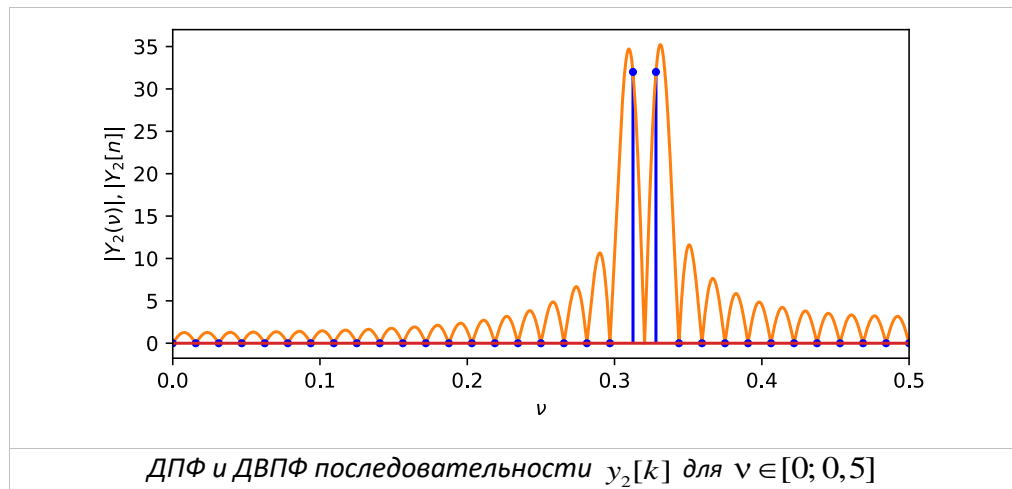


На рисунке выше соседние спектральные компоненты не различимы в спектре сигнала (в ДВПФ): два главных лепестка слились в один. Это означает, что дополнением последовательности нулевыми отсчетами мы не сможем добиться различения двух гармоник в спектре. Заметим, что ширина главного лепестка прямоугольного окна на нулевом уровне  $\Delta\nu = 1/16$  в четыре раза больше  $\nu_{12}$ .

Возьмем прямоугольное окно, для которого половина ширины главного лепестка на нулевом уровне равна  $\nu_{12} = 1/64$ , т.е. окно  $w_2[k]$  длиной в 64 отсчета. Получим последовательность  $y_2[k]$ . Спектральные компоненты различимы в спектре, но не различимы в ДПФ. Однако в данном случае различимость в ДПФ уже можно обеспечить,



например, дополнив анализируемую последовательность отсчетов нулями до длины 128. В таком случае расстояние между соседними отсчетами ДПФ будет равно  $\nu_{12} / 2 = 1 / 128$ .



### Пример. Влияние боковых лепестков соседних компонент.

Боковые лепестки спектрального окна  $W(\nu)$  будут также изменять амплитуды соседних спектральных пиков, что может привести к дополнительному смещению по частоте. Вклад определяется степенью «просачивания» «лишних» спектральных компонент через боковые лепестки и зависит от амплитуды и фазы каждой гармоники, ее положения на сетке частот ДПФ, а также от АЧХ и ФЧХ фильтра. Рассмотрим сумму двух гармонических компонент:

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t), \quad -\infty \leq t \leq \infty.$$

Предполагая дискретизацию без наложения спектров, получаем дискретный сигнал:

$$x[k] = A_1 \cos(2\pi f_1 k \Delta t) + A_2 \cos(2\pi f_2 k \Delta t), \quad -\infty \leq k \leq \infty.$$

Последовательность  $y[k]$ , вырезаемая из этого сигнала окном  $w[k]$ , записывается как

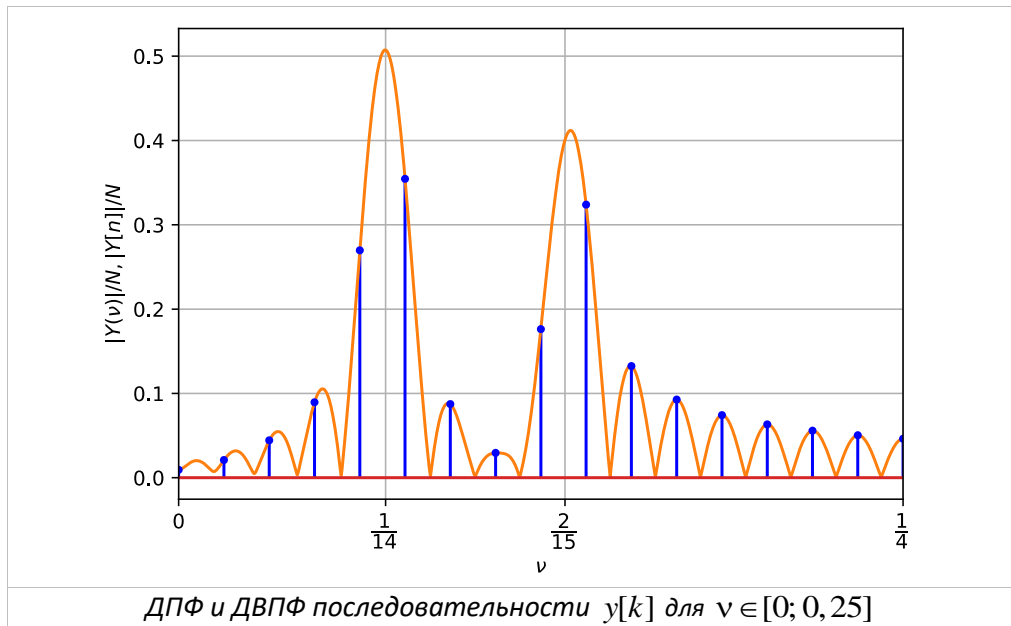
$$y[k] = A_1 w[k] \cos(2\pi f_1 k \Delta t) + A_2 w[k] \cos(2\pi f_2 k \Delta t).$$

Поскольку нас интересует влияние соседних спектральных компонент, выберем амплитуды и частоты косинусов достаточно близкими:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0,8, \quad \nu_1 = f_1 \Delta t = 1/14, \quad \nu_2 = f_2 \Delta t = 2/15.$$

Пусть  $w[k]$  – прямоугольное окно длины 64. В результате получается

$$y[k] = \begin{cases} \cos 2\pi \frac{1}{14} k + 0,8 \cos 2\pi \frac{2}{15} k, & 0 \leq k \leq 63, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



На рисунке приведен фрагмент графика модуля ДВПФ  $y[k]$ . Хотя на графике отчётливо видны два всплеска модуля ДВПФ, амплитуда гармоники с частотой  $\nu_1 = 1/14$  ( $A_1/2 = 0,5$ ) влияет на амплитуду гармоники с частотой  $\nu_2 = 2/15$  ( $A_2/2 = 0,4$ ) и наоборот. Это взаимодействие гармоник при спектральном анализе из-за «размазывания» спектра, вносимого окном, называется *рассеянием*. При этом нормированная частота  $\nu_1 = 1/14$  попадает между четвёртым и пятым бинами ДПФ, а частота  $\nu_2 = 2/15$  попадает между восьмым и девятым бинами, т.е. для ДПФ анализа спектра требуется дополнение сигнала нулевыми отсчетами.

### Паразитная амплитудная модуляция спектра.

Паразитная амплитудная модуляция  $K_{\text{мод}}$  характеризует амплитуду гармонического сигнала, которую можно оценить с помощью ДПФ анализатора с оконной функцией. В самом неблагоприятном случае частота сигнала находится между соседними бинами ДПФ. Пусть спектр (ДВПФ) оконной функции  $W(v)$ . Величина  $K_{\text{мод}}$ , выраженная в децибелах, определяется как

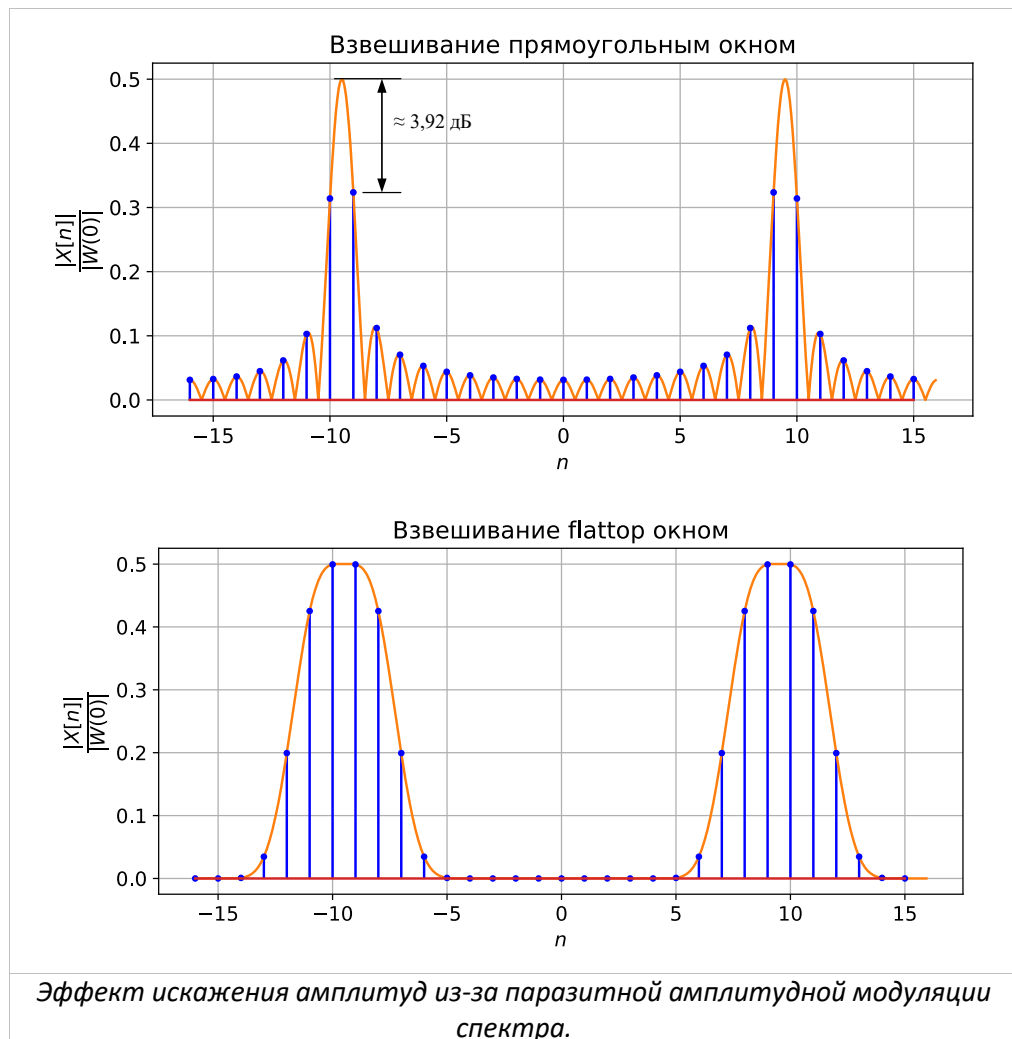
$$K_{\text{мод}} = 20 \lg \left| \frac{W(0,5/N)}{W(0)} \right|.$$

Для прямоугольной функции  $K_{\text{мод}} = -3,92$  дБ, для окна Бартлетта  $K_{\text{мод}} = -1,82$  дБ, для окна Хэмминга  $K_{\text{мод}} = -1,78$  дБ. При этом для окна с плоской вершиной (flattop)  $K_{\text{мод}} = -0,02$  дБ. Заметим, что для снижения этой погрешности можно также воспользоваться методом дополнения нулями анализируемой последовательности.

На рисунке ниже проиллюстрировано, как выбор оконной функции влияет на результат анализа амплитуд косинусоид, относительные частоты которых не совпадают с бинами ДПФ и лежат посередине между отсчетами. Оранжевым цветом показан спектр (ДВПФ), а

синим — отсчеты ДПФ. Спектральный анализ производился для последовательности  $x[k] = \cos(2\pi k 9,5/16)$ ,  $0 \leq k \leq 15$ .

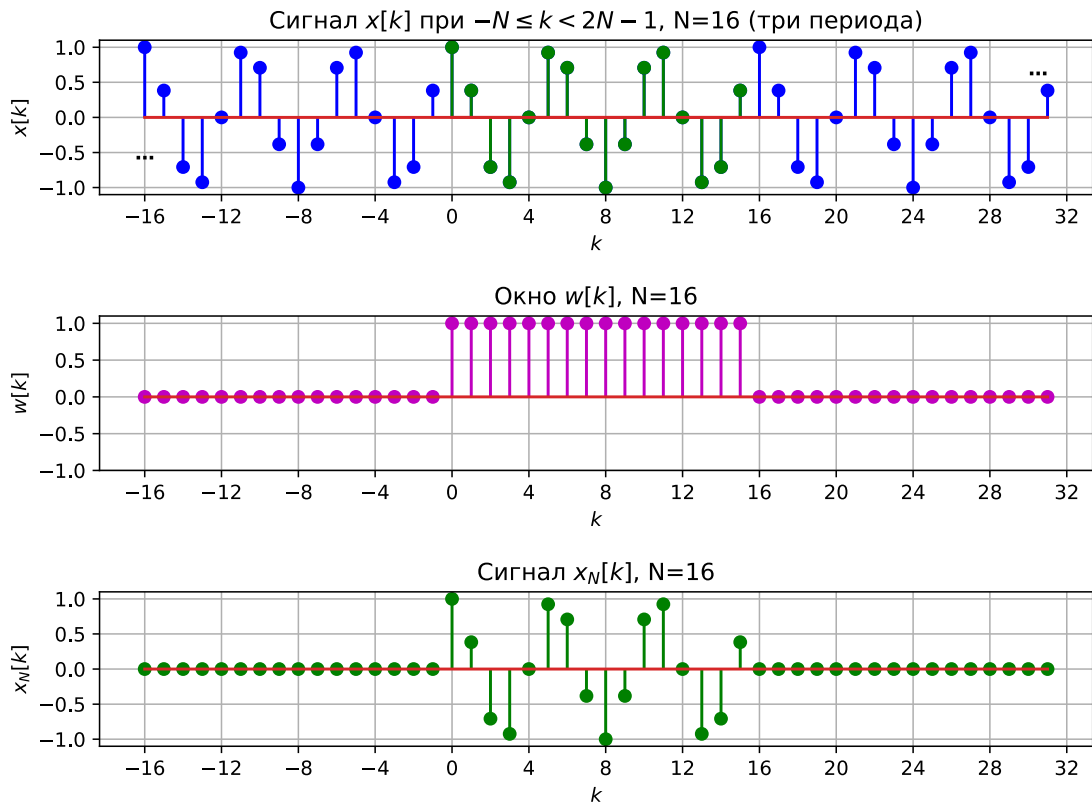
Поскольку анализ проводился не по целому числу периодов, максимумы в спектре не попали на бины ДПФ. Это мешает оценить амплитуду гармоники в случае прямоугольного окна. Использование окна с плоской вершиной, обладающего низким коэффициентом паразитной амплитудной модуляции, позволяет минимизировать искажения амплитуд при ДПФ анализе.



### Эффекты растекания спектральных компонент и утечки спектра через боковые лепестки окна (для дискретизованного сигнала)

Эффект растекания спектральных компонент неизбежно возникает при умножении последовательности на оконную функцию. Даже ограничение сигнала по длительности — умножение на прямоугольную оконную функцию — приводит к тому, что гармоники в спектре сигнала «размываются» в спектральные максимумы.

**Пример.**



Предположим, что имеется периодическая последовательность  $x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$ .

ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(v - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(v + \frac{3}{16} - n).$$

$X(v)$  содержит две  $\delta$ -функции с площадями  $1/2$  на каждом периоде.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности

$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$ , т.е. для последовательности  $x_N[k] = x[k]w[k]$ , где  $w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m]$ .

Заметим, что

$$W(v) = e^{-j(N-1)\pi v} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)},$$

$$X(v) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v + \frac{3}{16} - m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности  $Y(v)$  может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{v})X(v - \tilde{v})d\tilde{v}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(v)\delta(v - v_1)dv = \begin{cases} W(v_1), & a < v_1 < b, \\ 0.5W(v_1), & (v_1 = a) \cup (v_1 = b), \\ 0, & (v_1 < a) \cup (v_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

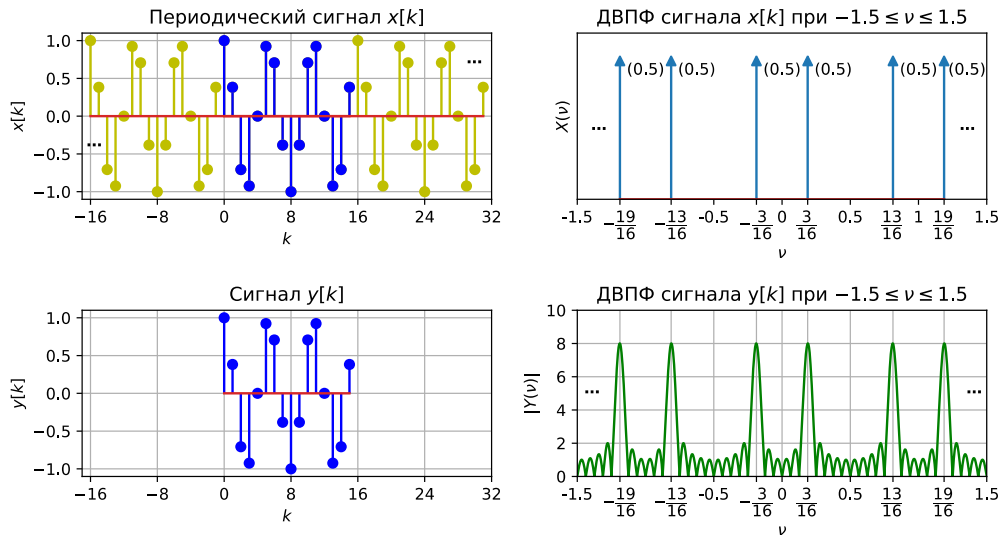
$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

$$y[k] = \left( \frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

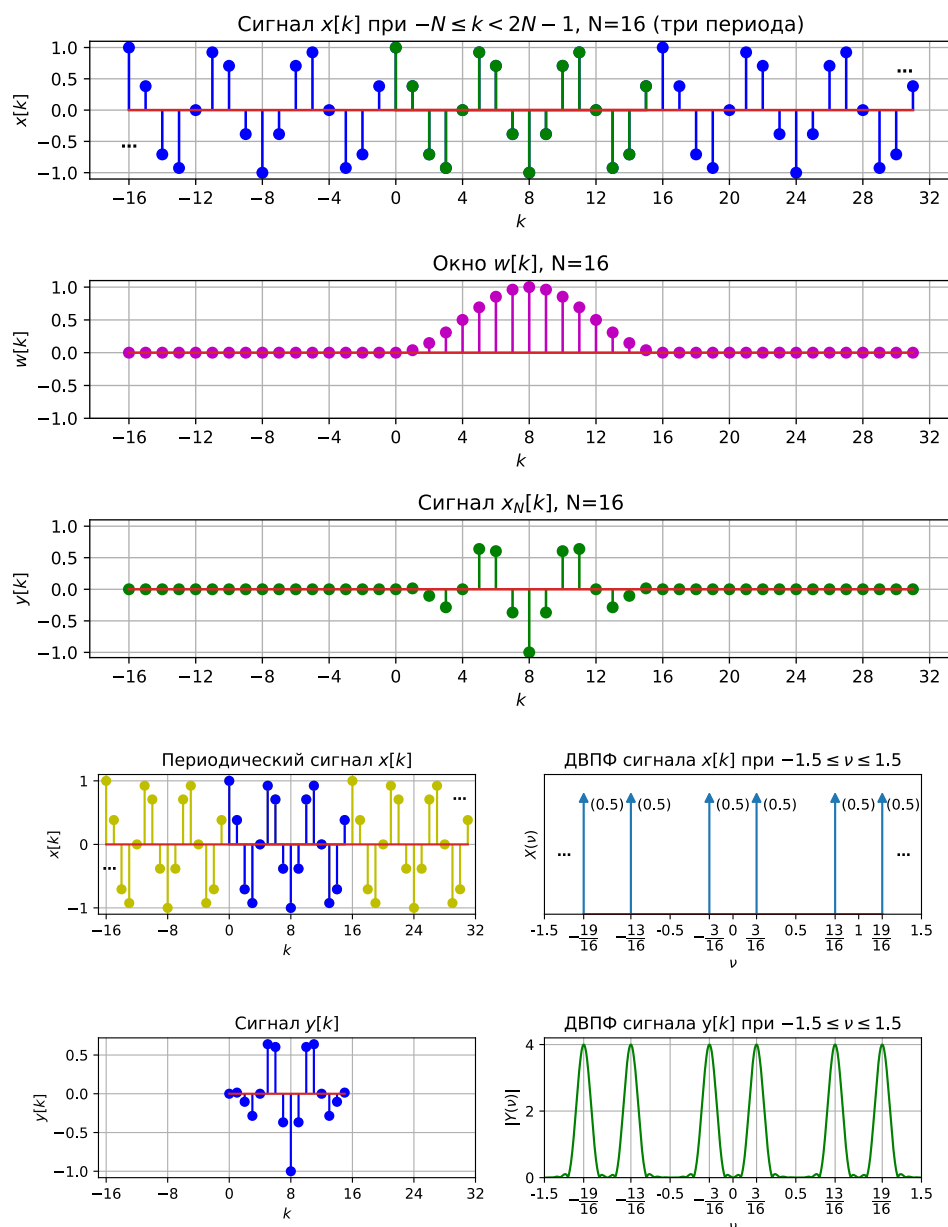
$$Y(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v - \frac{3}{16}))} + \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v + \frac{3}{16}))}.$$



Как видно из приведённого примера, из-за ограничения длительности сигнала мы наблюдаем не только размытые спектральные максимумы, но и боковые выбросы, вызванные влиянием боковых лепестков окна.

Эффект утечки спектра можно ослабить путем применения оконной функции, отличной от прямоугольной. В качестве примера рассмотрим окно Ханна. Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности  $x[k] = \cos\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$ , т.е. для последовательности  $y[k] = x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$ , где

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$



### Примеры оконных функции

Рассмотрим примеры оконных функций  $w[k]$  для ДПФ, которые часто используются. Для того, чтобы определить, к чему приводит умножение на ту или иную оконную функцию, для окон будем использовать следующие спектральные характеристики.

- Ширина  $\Delta\nu$  главного лепестка окна на нулевом уровне.
- Ширина  $\Delta\nu$  полосы на уровне половинной мощности (на уровне, который на 3 дБ ниже максимального уровня).
- Максимальный уровень боковых лепестков относительно главного в дБ.
- Асимптотическая скорость спада уровней боковых лепестков в дБ/октаву.

Программа управления осциллографом PV6501 поддерживает три вида оконных функций: прямоугольное, окно Ханна и окно с плоской вершиной. Рассмотрим их характеристики.

### Прямоугольное окно

Во временной области прямоугольное окно длительностью  $N$  задается формулой

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Умножение на прямоугольную оконную функцию эквивалентно ограничению сигнала по длительности.

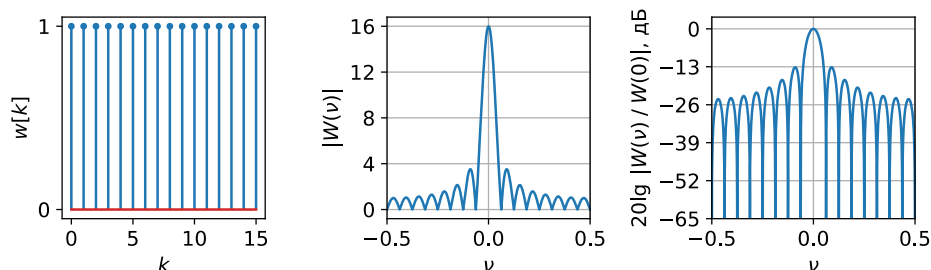
Вычислим ДВПФ оконной функции

$$\begin{aligned} W_{\text{пр}}(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{2j e^{-j\pi\nu N}}{2j e^{-j\pi\nu}} \frac{(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$$W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu)$$

АЧХ оконной функции

$$|W_{\text{пр}}(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$



Основные характеристики прямоугольного окна длиной  $N$  :

- \* ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta\nu = \frac{2}{N}$ ;
- \* полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta\nu = \frac{0,89}{N}$ ;
- \* уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-13,3$  дБ;
- \* скорость спада боковых лепестков  $6$  дБ / октава<sup>1</sup>.

### Окно Ханна

Окно Ханна для ДПФ во временной области описывается следующей формулой:

<sup>1</sup> Окта́ва — интервал частот, в котором соотношение граничных частот составляет один к двум. Например, расстояние между частотами  $\nu_1 = 0,1$  и  $\nu_2 = 0,2$  составляет одну октаву.

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить это окно в спектральной области, заметим, что

$$\cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi k}{N}} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi k}{N}}$$

Тогда по теореме смещения для ДВПФ, окно Ханна в спектральной области может быть записано через частотную характеристику прямоугольного окна:

$$W_{\text{Ханна}}(\nu) = \frac{1}{2} W_{\text{пр}}(\nu) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

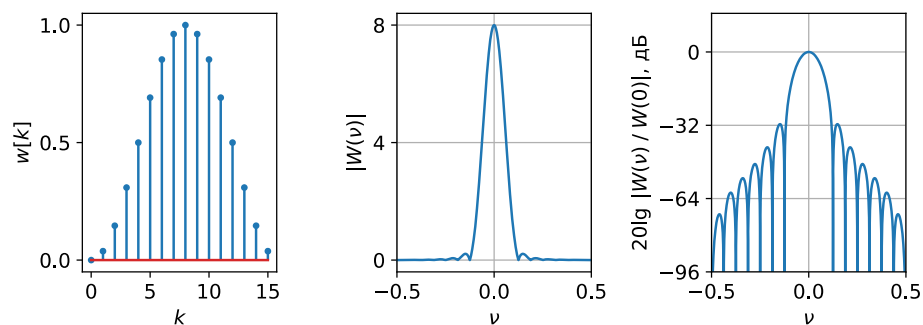
где

$$W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

Как нетрудно видеть, у окна Ханна всего три ненулевых отсчета ДПФ на одном периоде:

$$W_{\text{Ханна}}[n] = \begin{cases} 0,5, & \text{при } n = mN, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ -0,25, & \text{при } n = \pm 1 + mN, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Это окно названо в честь австрийского метеоролога Юлиуса фон Ханна. Ханн изобрел метод взвешенного скользящего среднего для объединения метеорологических данных из соседних регионов, используя веса  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ . Его также иногда ошибочно называют окном Хэннига из-за того, что в работе Блэкмана и Тьюки 1959 года [1] фраза "hanning a signal" означала взвешивание данных этим окном.



Основные характеристики окна Ханна длиной  $N$  :

- \* ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta\nu = 4/N$ ;
- \* полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta\nu = 1,44/N$ ;
- \* уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-31,5$  дБ;
- \* скорость спада боковых лепестков  $18$  дБ / октава.

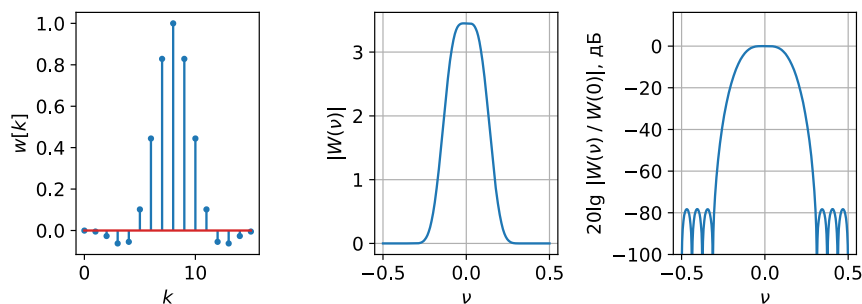


### Окно с плоской вершиной

Форма главного лепестка оконной функции приводит к искажению амплитуд гармоник, частоты которых не соответствуют бинам ДПФ. Если требуется уменьшить этот эффект, то следует использовать окно с плоской вершиной:

$$w_{\text{flatop}}[k] = \begin{cases} \sum_{r=0}^4 (-1)^r a_r \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k, \end{cases}$$

где  $a_0 = 0,21557895$ ,  $a_1 = 0,41663158$ ,  $a_2 = 0,277263158$ ,  $a_3 = 0,083578947$ ,  $a_4 = 0,006947368$ . Заметим, что временная функция  $w_{\text{flatop}}[k]$  может принимать отрицательные значения. Как было ранее отмечено, для окна с плоской вершиной  $K_{\text{мод}} = -0,02$  дБ. Это означает, что использование этого окна позволяет минимизировать эффект паразитной амплитудной модуляции.



### Задания к выполнению

#### Задание 1.1. Спектр отрезка синусоиды

##### Практическая часть

1) На генераторе установить синусоидальный сигнал  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$  с частотой  $f_0$ , соответствующей номеру варианта, и амплитудой  $A = 2B$  (в управляющей программе устанавливается удвоенная амплитуда).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_0$ , кГц	120	80	60	50	40	30	20	90	110	200	150	140
$f_1$ , кГц	700	650	750	850	800	625	675	825	725	775	625	700

Установить в управляющей программе осциллографа число выборок  $N = 1000$ , размерность ДПФ  $N_{\text{FFT}} = 8192$ . Выбрать временной диапазон так, чтобы частота дискретизации была равна  $f_d = 1$  МГц (диапазон 0.1 мс). Рекомендуется использовать режим закрытого входа осциллографа. Построить оценку спектра с помощью прямоугольного окна и окна Ханна. Сохранить осциллограмму сигнала в файл.

Произвести обработку данных на Python. Рекомендуемая размерность ДПФ для обработки в Python  $N_{\text{FFT}} = 2^{18}$ . Для анализа отсчетов синусоиды вычесть постоянный уровень  $A = 2B$ . Построить графики спектра дискретизованного сигнала (ДВПФ) для случая прямоугольного окна и окна Ханна. Сравнить

а) частоты максимумов в спектре с частотой синусоиды,

- б) ширину главного лепестка спектра на нулевом уровне с табличным значением для окна,
- в) ширину главного лепестка спектра на уровнях  $-3$  дБ и  $-6$  дБ от максимального в бинах ДПФ с табличным значением для окна,
- г) уровень максимального бокового лепестка спектра относительно главного с табличным значением для окна,
- д) относительный уровень шумов квантования в дБ с теоретическим значением для 8-разрядного АЦП.

**2)** Установить на генераторе частоту синусоидального сигнала  $f_1$  (сигнал  $x(t) = A \sin(2\pi f_1 t + \varphi)$ ). Для того же значения частоты дискретизации получить оценку спектра. Определить, совпадает ли положение главного максимума в спектре. Обосновать результат.

### Теоретическая часть

Получить спектры.

- а) периодического сигнала  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ ,
- б) отрезка сигнала  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ , наблюдаемого за время от 0 до  $\tau$  секунд,
- в) дискретизованной синусоиды  $x[k] = x(k\Delta t)$  (ДВПФ),
- г) прямоугольного окна длиной в  $N$  отсчетов

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k, \end{cases}$$

д) сигнала  $x[k]w_{\text{пр}}[k]$ ,

е) окна Ханна длиной в  $N$  отсчетов

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

ж) сигнала  $x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$ .

Сравнить с наблюдаемыми оценками спектра в эксперименте.

### Задание 1.2. Спектр последовательности прямоугольных импульсов.

#### Практическая часть

**1)** На генераторе установить сигнал в виде последовательности импульсов с длительностью  $\tau$  и периодом следования  $T$  (раздел «Импульсы»). Установить в управляющей программе осциллографа число выборок  $N = 1000$ , размерность ДПФ  $N_{\text{ФФТ}} = 8192$ . Выбрать временной диапазон так, чтобы частота дискретизации была равна  $f_d = 20$  МГц, а на осциллограмме наблюдалось несколько импульсов (примерный диапазон 5  $\mu$ с). Рекомендуется использовать режим открытого входа осциллографа.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau$ , мкс	1,5	2	2,5	3	3,5	1	1,5	2	1	1,5	3	2
$T$ , мкс	10	10	10	10	10	8	8	8	8	9	9	9

Произвести обработку данных на Python. Рекомендуемая размерность ДПФ для обработки в Python  $N_{\text{ФФТ}} = 2^{18}$ . Построить графики спектра дискретизованного сигнала

(ДВПФ) для случая прямоугольного окна. Сравнить АЧХ сигнала в линейном масштабе с теоретическим результатом.

2) Получить график АЧХ в линейном масштабе для инвертированной последовательности (с длительностью  $T - \tau$ ). Сравнить результаты.

#### Теоретическая часть

- 1) Получить выражение для спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов. Изобразить амплитудный спектр такой последовательности.
- 2) Получить выражение для спектра конечной последовательности из  $M$  прямоугольных импульсов. Изобразить амплитудный спектр такой последовательности.
- 3) Сравнить с наблюдаемыми оценками спектра.

### Задачи к сдаче работы

**№1.1.** Вычислить ДПФ  $W[n]$  и ДВПФ  $W(v)$  для следующих оконных функций длины  $N$ .

а) Прямоугольное окно

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

б) Окно Ханна

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

в) Окно Хэмминга

$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

г) Окно Блэкмана

$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

**№1.2.** Вычислите ДВПФ последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где  $x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$  и  $w[k] = \sum_{m=0}^{15} 1[k-m]$ .

**№1.3.** Вещественный сигнал  $x(t)$  с полосой  $2f_b = 10$  кГц ( $f_b$  – верхняя граничная частота) дискретизуется с минимально возможной частотой дискретизации в соответствии

с теоремой отсчетов. В результате получается последовательность  $x[k]$ . Обозначим через  $X[n]$  1000-точечное ДПФ последовательности  $x[k]$ .

а) Каким частотам (в Гц) в ДВПФ последовательности  $x[k]$  соответствуют отсчеты ДПФ с номерами  $n_1 = 100$  и  $n_2 = 850$ ?

б) Каким частотам (в Гц) в спектре исходного сигнала  $x(t)$  соответствуют индексы  $n_1 = 100$  и  $n_2 = 850$  в последовательности  $X[n]$ ?

**№1.4.** Последовательность  $x[k]$  из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала  $x(t)$  с частотой  $f_d = 20480$  Гц. Обозначим через  $X[n]$  1024-точечное ДПФ последовательности  $x[k]$  (дополненной нулевыми отсчетами). Определить расстояние (в Гц) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчетам ДПФ.

**№1.5.** Вещественный сигнал  $x(t)$  с полосой  $2f_b = 10$  кГц ( $f_b$  – верхняя граничная частота) дискретизируется с шагом  $\Delta t$ . В результате получается последовательность  $x[k] = x(k\Delta t)$ . Вычисляется  $N$ -точечное ДПФ, где  $N = 2^m$ ,  $m$  – натуральное число. Определить минимальное значение  $m$ , при котором анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот в герцах будет меньше 5 Гц. Для этого значения  $m$  определить допустимые пределы для частоты дискретизации  $f_{\min} < f_d < f_{\max}$ .

**№1.6.** Вычислить ДВПФ прямоугольного окна длины  $N = 8$ :

$$w[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Изобразить на одном графике:

а) ДВПФ и 8-точечное ДПФ для последовательности отсчетов данного окна;

б) ДВПФ и 16-точечное ДПФ для той же последовательности, но дополненной нулями справа до 16 отсчетов.

Указать, чему равно расстояние по оси частот между соседними отсчетами ДПФ в каждом из двух случаев.

**№1.7.** Вычислите ДВПФ последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где

$$x[k] = \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right), \text{ а } w[k] \text{ — окно Ханна для ДПФ длины } N = 16.$$

**№1.8.** Предположим, что требуется провести ДПФ-анализ сигнала  $x[k]$  с использованием окна Ханна  $w[k]$ . Размерность ДПФ, длина окна и длина сигнала равны  $N$ . Доказать, что для вычисления ДПФ  $Y[n]$  сигнала  $x[k]w[k]$  достаточно провести  $2N$

сдвигов на один двоичный разряд и  $2N$  сложений для коэффициентов ДПФ  $X[n]$  последовательности  $x[k]$ , т.е. показать, что

$$Y[n] = \frac{1}{2} \left( X[n] - \frac{1}{2} (X[n-1]_N + X[n+1]_N) \right).$$

**№1.9.** Вычислить ДВПФ и ДПФ последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где

$x[k] = \sin\left(2\pi \frac{3}{16} k\right)$ , а  $w[k]$  — окно Ханна для ДПФ длины  $N = 16$ . Построить графики действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ на одном периоде.

**№1.10.** Гармонический сигнал  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$  дискретизируется так, что на периоде  $[0; 1/f_0)$  образуется 8 отсчетов  $x[k] = x(k\Delta t)$ .

а) Изобразить последовательность  $x[k]$  и ее спектр.

б) Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ последовательности

$$y[k] = \sum_{m=0}^{15} x[m] \mathbf{I}[k-m].$$

## Модуль 2. Субдискретизация полосовых радиосигналов

В первой части лабораторной работы мы рассматривали эффект наложения как источник искажений результатов спектрального анализа. Однако, если при наложении спектров не происходит перекрытия отдельных копий спектра, то информация об исходном сигнале не искажается. Это обстоятельство позволяет использовать эффект наложения в целях понижения частоты дискретизации значительно ниже уровня  $2f_s$  для узкополосных радиосигналов.

### Теоретическая часть

#### Условия на частоту дискретизации полосового радиосигнала.

Рассмотрим *действительный* полосовой сигнал со спектром, изображенным на рис. 1.

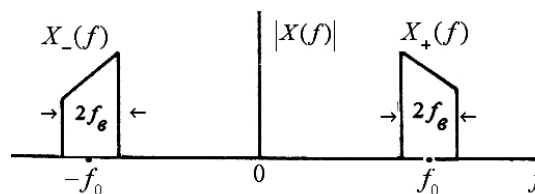


Рис. 1

Характерна чётная симметрия амплитудного спектра относительно оси ординат. Компонента  $X_+(f)$  носит название прямого спектра, а компонента  $X_-(f)$  — инверсного. В соответствии с теоремой отсчетов для такого сигнала необходимая частота дискретизации

$$f_d = 2(f_0 + f_s)$$

может оказаться очень высокой (за пределами быстродействия аналого-цифрового преобразователя). Равномерная дискретизация с шагом  $\Delta t = 1/2f_{\epsilon}$  оказывается недостаточной, т. к. составляющие  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  при периодическом продолжении с периодом  $f_d = 2f_{\epsilon}$  будут налагаться друг на друга, в результате частичные спектры будут отличаться от исходного и точное восстановление сигнала по его дискретным отсчетам становится невозможным. Тем не менее для полосовых сигналов существуют методы дискретизации с частотой  $4f_{\epsilon}$ , которые позволяют сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала.

*Субдискретизация* полосовых радиосигналов предполагает, что частота дискретизации должна быть в два раза выше не абсолютно наивысшей частоты  $(f_0 + f_{\epsilon})$ , а величины, характеризующей информационную полосу  $2f_{\epsilon}$ . Однако правильная субдискретизация налагает некоторые ограничения. Рассмотрим их подробнее.

### Случай целочисленных полос

Если граничные частоты спектра  $f_0 - f_{\epsilon}$  и  $f_0 + f_{\epsilon}$  кратны его ширине  $2f_{\epsilon}$ , т. е. если

$$f_0 - f_{\epsilon} = m(2f_{\epsilon}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

то минимальную частоту дискретизации можно взять равной  $f_{d\min} = 4f_{\epsilon}$ .

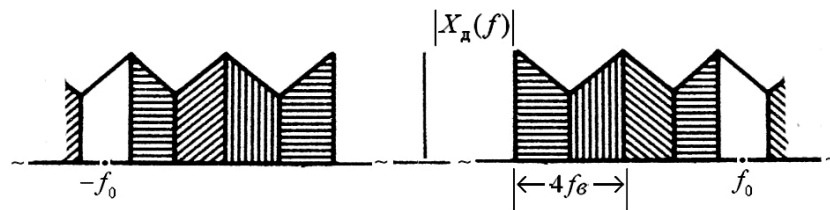


Рис. 2

Для этого случая периодическое повторение прямого и инверсного спектров, вызванное дискретизацией полосового сигнала, показано на рис. 2. Число  $m$  показывает сколько переносов прямого спектра нужно совершить, чтобы точка  $f_0 - f_{\epsilon}$  попала в начало координат. Чем больше это число, тем меньше частота дискретизации.

Такая плотная упаковка отображений спектров  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  практически может быть использована при условии, что компоненты  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  строго финитные функции.

В этом случае эффект наложения частичных спектров друг на друга будет отсутствовать. Этот метод дискретизации называется ещё *полосовой дискретизацией с недостаточной выборкой для целочисленных полос*. На рис. 3а в качестве примера показано устройство предварительной обработки данных приёмника многоканальной системы связи.

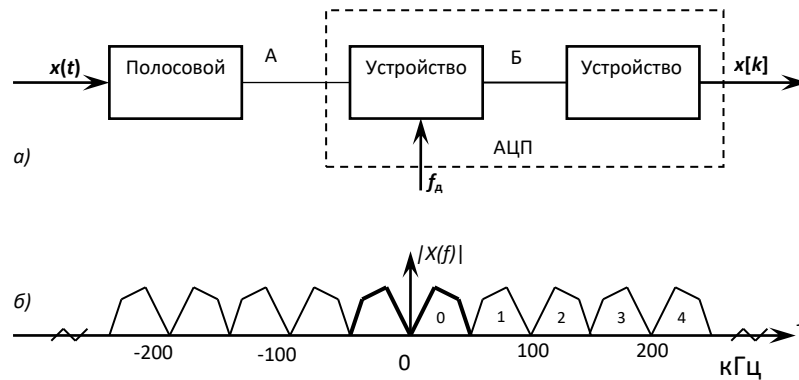


Рис. 3

Спектр принимаемого сигнала показан на рис. 3б с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале перед дискретизацией с наименьшей возможной частотой служит полосовой фильтр. Будем считать его идеальным (Рис. 4).

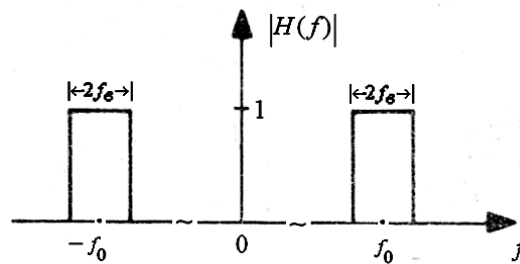


Рис. 4

### Случай нецелочисленных полос

Плотная упаковка отображений спектров  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  на рис. 2 может быть использована, если компоненты  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  строго финитные функции и выполняется условие (1) для целочисленных полос. В общем случае компоненты  $X_+(f)$  и  $X_-(f)$  имеют «хвосты» и нецелочисленные полосы.

Для нахождения частоты дискретизации  $f_d$  необходимо использовать условие, что  $m$  и  $m+1$  переносов  $X_-(f)$  не дают пересечений с  $X_+(f)$ . Ясно, что при этом пересечения отсутствуют везде. Пересечения отсутствуют, если выполнены неравенства (рис. 5):

$$\begin{aligned} -f_0 + f_\epsilon + m f_d &< f_0 - f_\epsilon, \\ -f_0 - f_\epsilon + (m+1) f_d &> f_0 + f_\epsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) получаем

$$m f_d < 2(f_0 - f_\epsilon), \quad (m+1) f_d > 2(f_0 + f_\epsilon) \quad (4)$$

или

$$\frac{2(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < f_d < \frac{2(f_0 - f_\epsilon)}{m}. \quad (5)$$

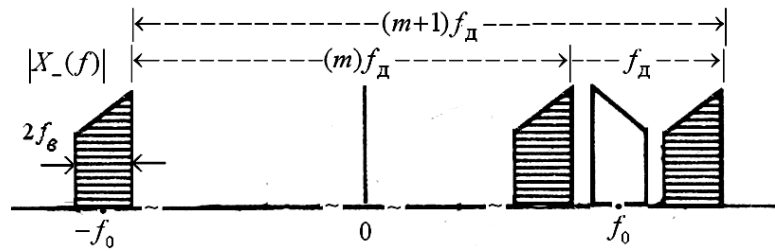


Рис. 5

Субдискретизация возможна, если

$$\frac{(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < \frac{f_0 - f_\epsilon}{m},$$

т. е.

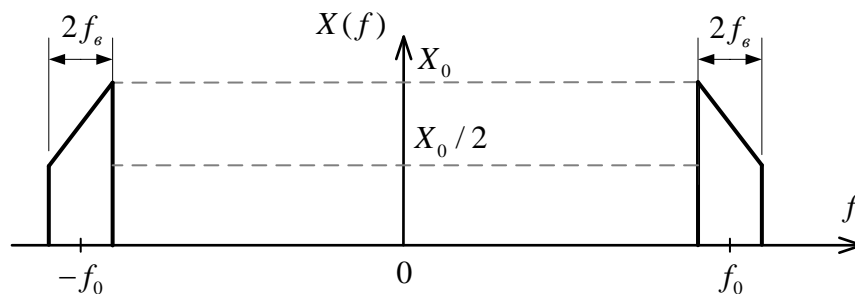
$$m < \frac{f_0 - f_\epsilon}{2f_\epsilon}. \quad (6)$$

Число  $m$  называется *порядком субдискретизации*.

Поскольку общая протяженность спектра  $X_-(f)$  и  $X_+(f)$  равна  $4f_\epsilon$ , то при отсутствии перекрытий должно быть выполнено неравенство

$$f_d > 4f_\epsilon \quad (7)$$

**Пример.** Спектр  $X(f)$  некоторого полосового сигнала  $x(t)$  изображен на рисунке ниже,  $f_0$  — несущая частота,  $f_0 \gg 2f_\epsilon$ ,  $2f_\epsilon = 9,5$  кГц.



Изобразить спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой  $f_d$ , обеспечивающей центрирование субдискретизируемого сигнала в полюсе Найквиста для случаев:

а)  $f_0 = 45$  кГц, б)  $f_0 = 35$  кГц.

**Решение для случая а)  $f_0 = 45$  кГц.**

Границы выбора частоты дискретизации определяются неравенством

$$\frac{2(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < f_d < \frac{2(f_0 - f_\epsilon)}{m}.$$

где  $m$  — порядок субдискретизации (натуральное число).  $f_d$  может быть выбрана в соответствии с этим неравенством при условии

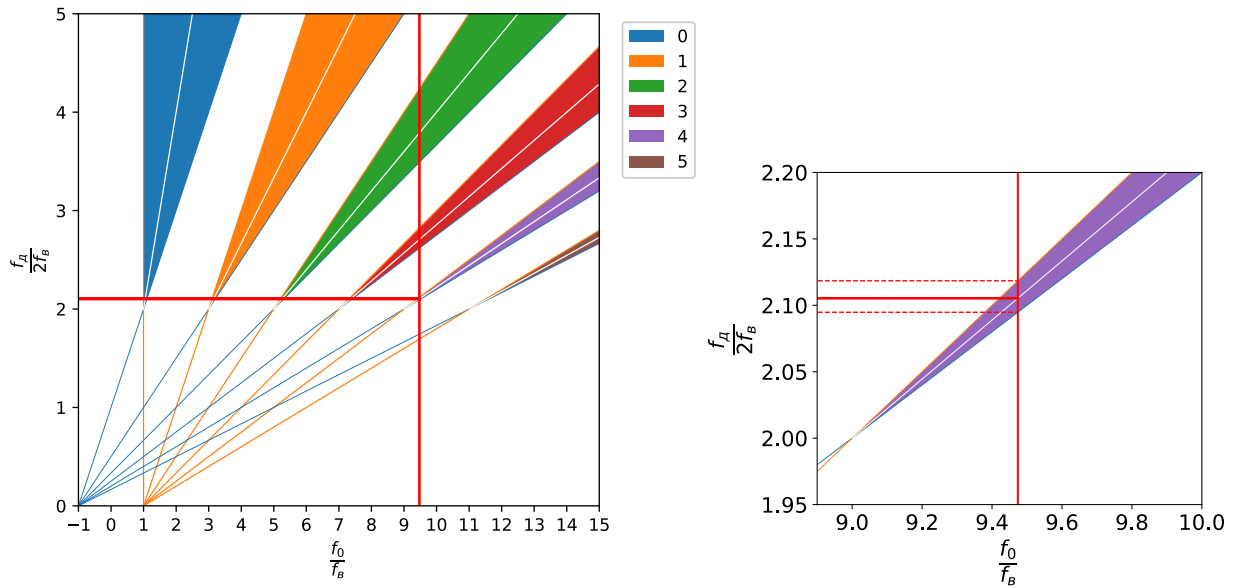
$$m < \frac{f_0 - f_\epsilon}{2f_\epsilon},$$

откуда  $m < 4,24$ . Максимально возможный порядок субдискретизации равен  $m = 4$ .



Для этого порядка субдискретизации условия выбора  $f_d$

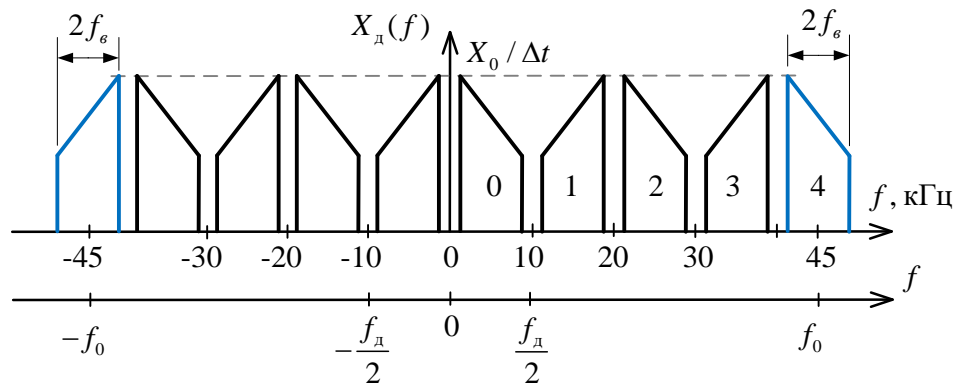
$$19,9 \text{ кГц} < f_d < 20,125 \text{ кГц}.$$



Область допустимых значений  $f_d$  для каждого порядка  $m$  может быть описана диаграммой, где случай центрирования субдискретизируемого сигнала в полосе Найквиста отвечает попаданием на биссектрису зоны выбора  $f_d$ :

$$f_d = \frac{4f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц}.$$

Построим график спектра сигнала после его дискретизации с частотой  $f_d = 20 \text{ кГц}$ . Правильный выбор частоты субдискретизации позволяет избежать (для реального сигнала – минимизировать) перекрытия отдельных копий спектра.



Порядок субдискретизации  $m=4$  означает, что прямой спектр сигнала и его несущая частота находятся в пятой зоне Найквиста (на рисунке обозначен как канал 4). На частотах от 0 до  $f_d/2$  находится копия прямого спектра  $X_+(f)$ . При  $f_d = 20 \text{ кГц}$  копии прямого и инверсного спектра оказываются центрованным в полосе Найквиста (между копиями одинаковые зазоры), что позволяет для реального сигнала минимизировать перекрытие неизбежно возникающих хвостов спектра вблизи границы полосы.

Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать  $f_d \geq 2(f_0 + f_g) = 99,5 \text{ кГц}$ , а при дискретизации аналитического сигнала  $f_d \geq 2f_g = 9,5 \text{ кГц}$ .

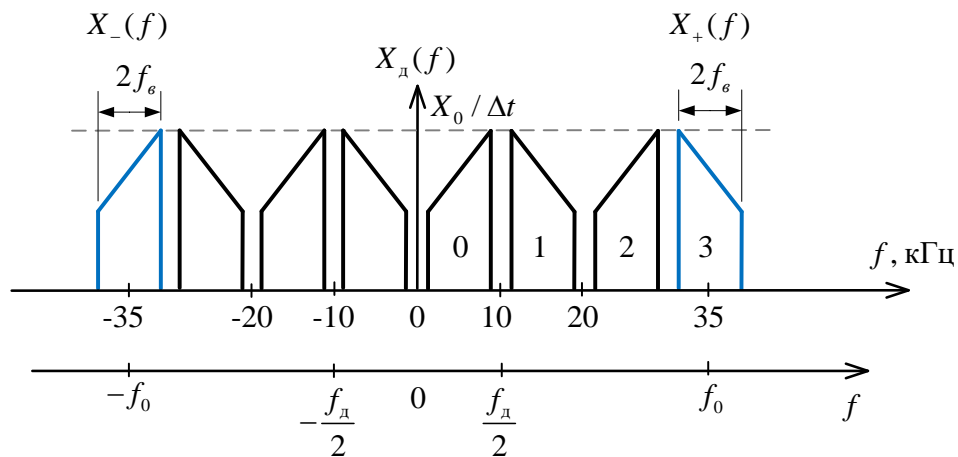
**Решение для случая б)  $f_0 = 35 \text{ кГц}$ .**

В соответствии с условием

$$m < \frac{f_0 - f_g}{2f_g},$$

находим, что  $m < 3,19$ . Наибольший возможный порядок субдискретизации  $m = 3$ . Наименьшая частота дискретизации, обеспечивающая центрирование субдискретизируемого сигнала в полосе Найквиста, равна

$$f_d = \frac{4f_0}{2m+1} = 20 \text{ кГц}.$$



То, что порядок субдискретизации  $m = 3$  является нечетным, означает, что частотах от 0 до  $f_d / 2$  находится копия инверсного спектра  $X_-(f)$ , а на частотах от  $-f_d / 2$  до 0 — копия прямого спектра  $X_+(f)$ .

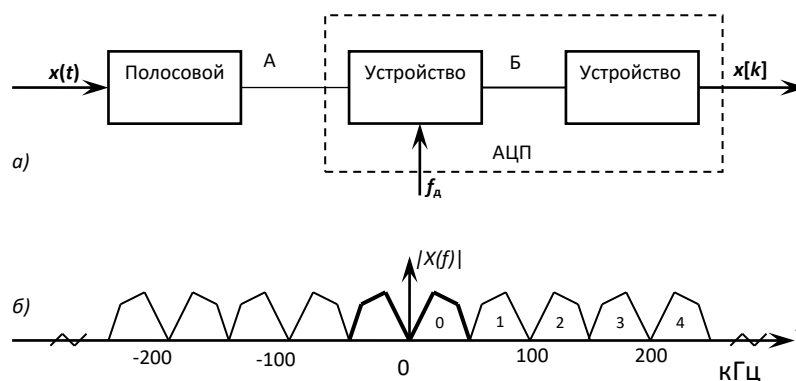
Отметим, что при дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов потребовалось бы выбрать  $f_d \geq 2(f_0 + f_g) = 79,5 \text{ кГц}$ , а при дискретизации аналитического сигнала  $f_d \geq 2f_g = 9,5 \text{ кГц}$ .

## Задания к выполнению

### Задание 2.1. Субдискретизация полосовых радиосигналов

#### Теоретическая часть

Найти минимальную частоту дискретизации  $f_{d \min}$  для канала 4 на рисунке. Изобразить спектр сигнала до дискретизации (точка А). Найти и изобразить спектр дискретного сигнала (точка Б) в полосе Найквиста  $[-f_d / 2, f_d / 2]$ .



### Практическая часть

1) С помощью встроенного в цифровой осциллограф генератора сигналов (в режиме синусоидального сигнала со свипированием частоты - ГКЧ) реализовать полосовой сигнал для каналов 0, 4, 5. Найти минимальную частоту дискретизации  $f_{d \min}$  для этих каналов. С использованием окна Ханна получить оценку спектра дискретного сигнала для каждого из этих каналов в полосе Найквиста  $[-f_d/2, f_d/2]$ .

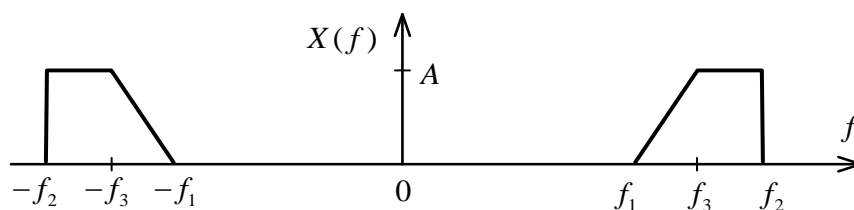
2) Повторить п. 1-2 для частоты дискретизации  $f_d = 2f_{d \min}$ . Объяснить результат.

### Задачи к сдаче работы

**№2.1.** Для полосового радиосигнала с шириной полосы  $2f_g = 4772$  Гц и несущей частотой  $f_0 = 102,43$  кГц, определить:

- минимальную частоту дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов,
- максимально возможный порядок субдискретизации  $m$  и границы для выбора частоты дискретизации для него.

**№2.2.** На рисунке изображён спектр узкополосного сигнала. Пусть полоса  $B = f_2 - f_1 = 10$  кГц и сигнал дискретизируется с частотой  $f_d = 2B$ .  $f_3 = (f_1 + f_2)/2$ .

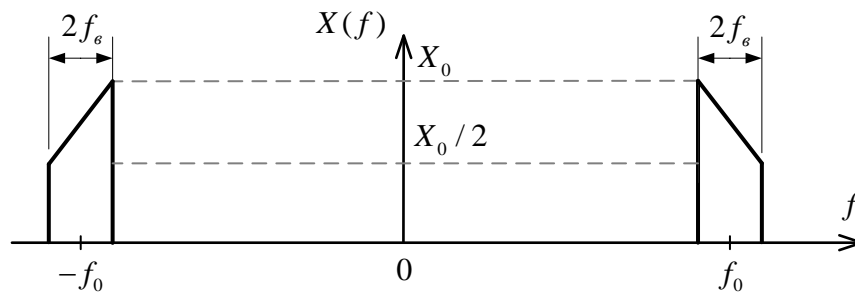


Изобразить спектр дискретизованного сигнала в диапазоне  $[-f_2; f_2]$  для каждого из трёх случаев:

$$1) \frac{f_2}{B} = 3, \quad 2) \frac{f_2}{B} = 4, \quad 3) \frac{f_2}{B} = 4,5.$$

Обосновать результаты.

**№2.3.** На рисунке изображен спектр непрерывного полосового сигнала,  $2f_g = 5$  МГц,  $f_0 = 20$  МГц.

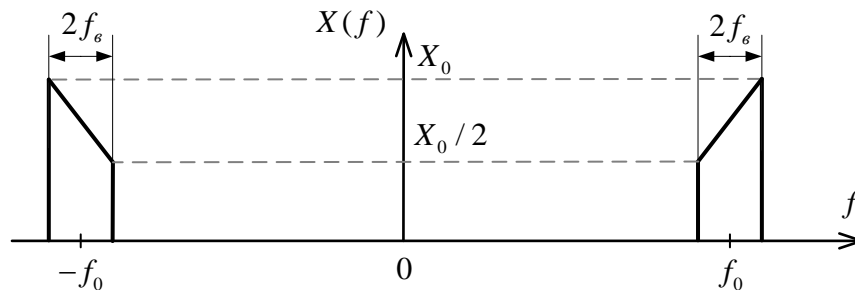


Изобразить спектр дискретизованного сигнала для значений частоты дискретизации  $f_d$ :

$f_{d1}=22,5$  МГц;  $f_{d2}=17,5$  МГц;  $f_{d3}=15$  МГц;  $f_{d4}=11,25$  МГц;  $f_{d5}=7,5$  МГц.

Обосновать выбор минимальной частоты дискретизации, при которой нет перекрытия отдельных копий прямого и инверсного спектра.

**№2.4.** Спектр  $X(f)$  некоторого полосового радиосигнала  $x(t)$  изображен на рисунке ниже,  $f_0$  — несущая частота,  $f_0 \gg 2f_g$ ,  $2f_g = 9,5$  кГц,  $f_0 = 55$  кГц.



Изобразить спектр сигнала после субдискретизации с наименьшей возможной частотой  $f_d$ , обеспечивающей центрирование спектра субдискретизируемого сигнала в полосе Найквиста.

**№2.5.** Показать, что спектр действительно цифрового сигнала  $x[k]$  можно инвертировать

$$Y(v) = X(v - 0,5)$$

путем изменения знака каждого второго отсчета сигнала  $x[k]$ :

$$y[k] = (-1)^k x[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Список литературы

В качестве литературы рекомендуются учебные пособия [1]–[3]. Эти книги есть в библиотеке МФТИ.

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-ч ч. 1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.
3. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.

## Приложение 1. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.

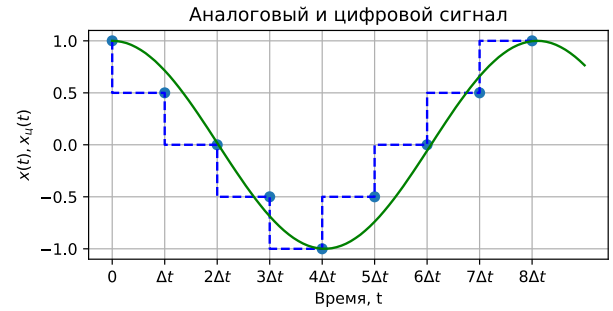
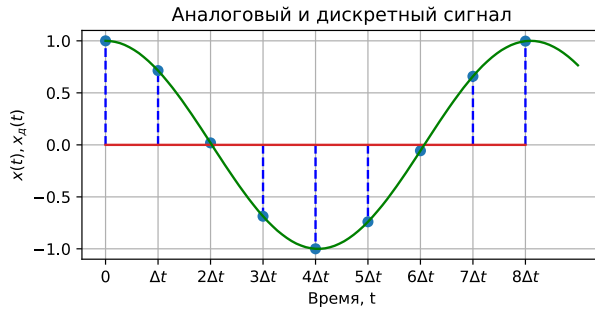
название окна	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)	скорость спада боковых лепестков (дБ / октава)	коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}}$ (дБ)
прямоугольное	2	-13,3	6	-3,92
Бартлетта	4	-26,5	12	-1,82
Ханна	4	-32	18	-1,42
Хэмминга	4	-42	6	-1,78
Блэкмана	6	-58,1	18	-1,10

название окна	полоса по уровню -3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню -6 дБ (в бинах ДПФ)	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	0,89	1,20	1
Бартлетта	1,28	1,78	0,5
Ханна	1,44	2,00	0,5
Хэмминга	1,33	1,82	0,54
Блэкмана	1,64	2,30	0,42

## Приложение 2. Теоретическое введение: преобразование Фурье, ДВПФ и ДПФ.

### Классификация сигналов: аналоговые, дискретные, цифровые

Под **сигналом** обычно понимают величину, отражающую состояние физической системы. Поэтому естественно рассматривать сигналы как функции, заданные в физических координатах. Примером могут служить одномерные сигналы, заданные как функции времени  $x(t)$ , двумерные сигналы заданные на плоскости  $I(x, y)$ . В качестве сигналов могут выступать различные величины. Пример одномерного сигнала — зависимость напряжения в сети от времени  $U(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ . Далее мы будем рассматривать в основном одномерные сигналы.



**Аналоговые** или континуальные сигналы  $x(t)$  описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями, причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

**Дискретные сигналы**, могут быть описаны в виде счетного набора отсчетов (значений) в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации. Частота дискретизации  $f_d$  (размерность в Гц) — это величина, обратная шагу дискретизации  $f_d = 1 / \Delta t$ .

**Цифровые сигналы**, помимо того, что они являются дискретными, могут принимать лишь конечное число значений, соответствующих уровням квантования. Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Обычно число уровней квантования  $2^m$ , где  $m$  — разрядность АЦП.

### Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если  $x(t)$  — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае  $x(t)$  — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции  $x(t)$  существует функция  $X(f)$  также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанная с  $x(t)$  соотношением:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left| X(f) - \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0.$$

Если функции  $x(t)$  и  $X(f)$  абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (ФТ), где частота  $f$  измеряется в Герцах (Гц). Для частоты циклической частоты  $\omega = 2\pi f$ , измеряемой в рад/с (радианы в секунду) пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй - интегралом Фурье. Далее будем использовать запись вида  $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$ , что означает, что для сигнала  $x(t)$  преобразование Фурье будет  $X(f)$ .

В общем случае  $X(\omega)$  – комплексная функция частоты:

$$X(\omega) = \operatorname{Re}[X(\omega)] + j \operatorname{Im}[X(\omega)] = A(\omega) - jB(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$\operatorname{Re}[X(\omega)] = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt,$$

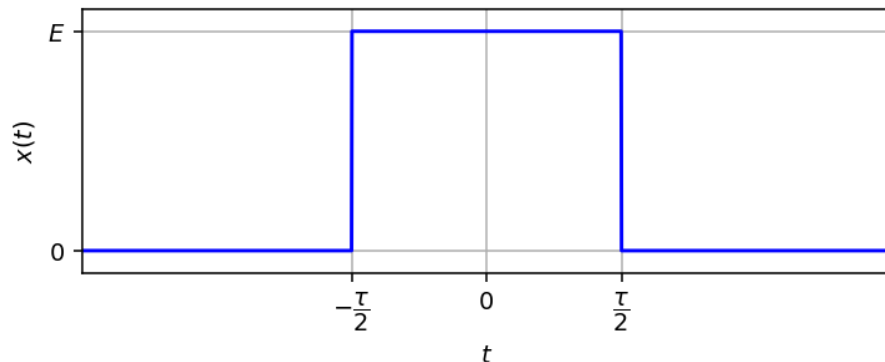
$$\operatorname{Im}[X(\omega)] = -B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt,$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} - \text{амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} - \text{фазочастотная характеристика (ФЧХ) сигнала}.$$

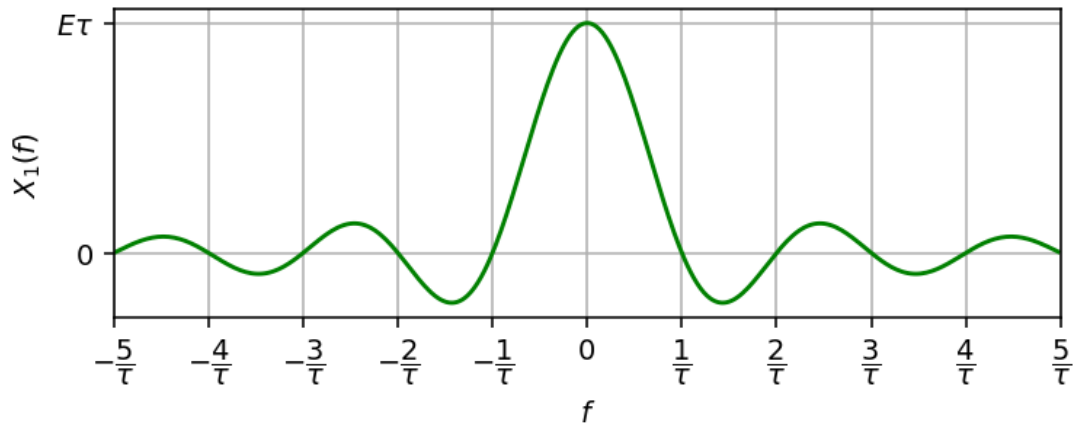
**Пример. Симметричный прямоугольный импульс длительностью  $\tau$**

$$x_1(t) = \begin{cases} E, & \text{если } |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$



Спектр

$$X_1(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{E}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = E \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$



### Свойства преобразования Фурье

Предположим, что  $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)$  и  $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(f)$ . Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

Для заданных чисел  $\alpha \in \mathbb{C}$  и  $\beta \in \mathbb{C}$   $\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{FT} \alpha X(f) + \beta Y(f)$ .

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени  $\tau$  (или опережения в случае  $\tau < 0$ )

$$x(t - \tau) \xleftrightarrow{FT} e^{-j2\pi f\tau} X(f).$$

3. Теорема смещения.

$$x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(f + f_0);$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

5. Теорема о спектре произведения.

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f) \otimes Y(f),$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tilde{f})Y(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$x(t) \otimes y(t) \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} X(f)Y(f);$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j2\pi f X(f)$$

9. Теорема о производной спектра:

$$t \cdot x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}.$$



### Спектры гармонических сигналов

Вычислим обратное преобразование Фурье для  $X(f) = \delta(f - f_0)$ , т.е. от дельта-функции в точке  $f_0$  оси частот.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t}.$$

Тогда с учетом того, что  $\cos(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) / 2$  и  $\sin(2\pi f_0 t) = (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) / 2j$ , получаем

$$1 \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(f),$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0),$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0).$$

**Пример.** Определить спектр  $X(f)$  гармонического сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где  $f_1 = 100$  Гц,  $f_2 = 200$  Гц.

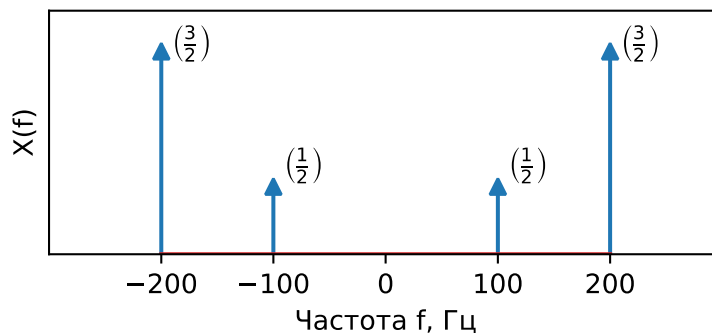
**Решение.** По свойствам преобразования Фурье

$$\exp(j2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \delta(f - f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0).$$

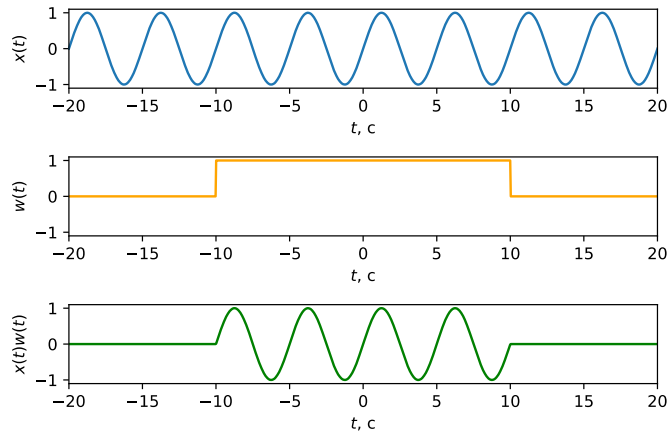
Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} \delta(f + f_1) + \frac{3}{2} \delta(f - f_2) + \frac{3}{2} \delta(f + f_2)$$



**Эффект растекания спектральных компонент при ограничении длительности сигнала.**

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию.



$$y(t) = w(t)x(t). \text{ Пусть } x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f), w(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f), y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f).$$

По теореме о свертке получаем

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f) \otimes X(f),$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

**Пример.** Гармонический сигнал имеет вид

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где  $f_1 = 100$  Гц,  $f_2 = 200$  Гц. Какой вид будет иметь спектр для  $x(t)w(t)$ , где  $w(t)$  — некоторая оконная функция.

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2).$$

$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f - \tilde{f})d\tilde{f}.$$

Спектр сигнала  $x(t)w(t)$  имеет вид

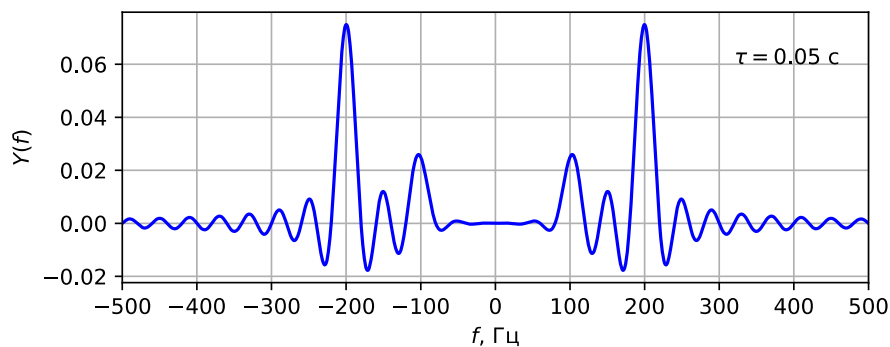
$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f - f_1) + \frac{1}{2}W(f + f_1) + \frac{3}{2}W(f - f_2) + \frac{3}{2}W(f + f_2).$$

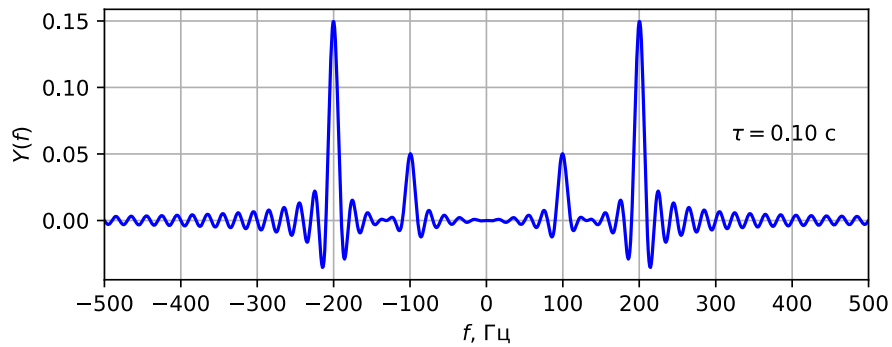
Рассмотрим частные случаи.

а) Симметричное относительно нуля прямоугольное окно.

Спектр прямоугольного окна длиной  $\tau$  соответствует спектру прямоугольного импульса длиной  $\tau$  с высотой  $E = 1$

$$W(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}.$$





Из приведенных примеров видно, что при ограничении сигнала по длительности дельта-функции спектра периодического сигнала

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2)$$

превращаются («размываются») в спектральные максимумы. В этом заключается *эффект растекания спектральных компонент* при ограничении длительности сигнала. Из формулы

$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f - f_1) + \frac{1}{2}W(f + f_1) + \frac{3}{2}W(f - f_2) + \frac{3}{2}W(f + f_2)$$

видно, что форма спектральных максимумов зависит от вида оконной функции. Так, например, ширина главных спектральных максимумов зависит от ширины главного лепестка оконной функции.

*б) Симметричное относительно нуля прямоугольное окно.*

Заметим, что помимо главных спектральных максимумов появляются боковые (побочные максимумы). Их можно ослабить, применив оконную функцию, отличную от прямоугольной.

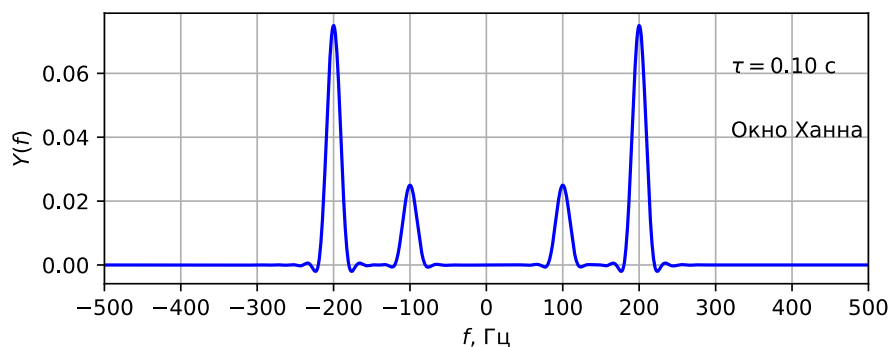
Окно Ханна во временной области

$$w_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right), & \text{если } |t| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{если } |t| \geq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Его спектр

$$W_H(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{2\pi f (1 - \tau^2 f^2)}.$$

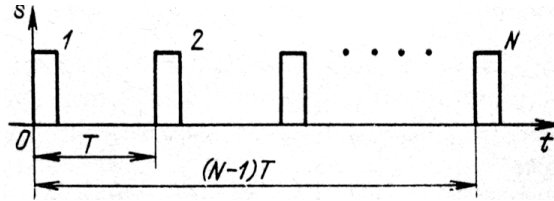
Ниже приведен график спектра сигнала после взвешивания окном Ханна.



Уровень боковых лепестков заметно ниже, чем для прямоугольного окна. Однако главный лепесток при этом шире.

### Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из  $N$  прямоугольных импульсов



Обозначим через  $X_1(\omega)$  спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из  $N$  равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания будем иметь

$$X(\omega) = X_1(\omega)[1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega(N-1)T}] = X_1(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

На частотах  $\omega = n2\pi/T$ , где  $n$  – целое, каждое слагаемое в квадратных скобках равно единице, следовательно:

$$X(\omega = n2\pi/T) = NX_1(\omega = n2\pi/T).$$

Таким образом, на частотах  $\omega = n2\pi/T$  модуль спектра пачки в  $N$  раз больше модуля спектра одиночного импульса. Это объясняется тем, что на частотах  $\omega = n2\pi/T$  спектральные компоненты различных импульсов складываются с фазовыми сдвигами, кратными  $2\pi$ .

Суммируя  $N$  членов геометрической прогрессии, получаем

$$X(\omega) = X_1(\omega) \frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega) \frac{e^{-j\omega NT/2} [e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2}]}{e^{-j\omega T/2} [e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}]} = X_1(\omega) e^{-j\omega(N-1)T/2} \frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

Видно, что на частотах  $\omega = m2\pi/NT$ , где  $m$  – целое,  $X(\omega) = 0$ . Подставляя сюда значение

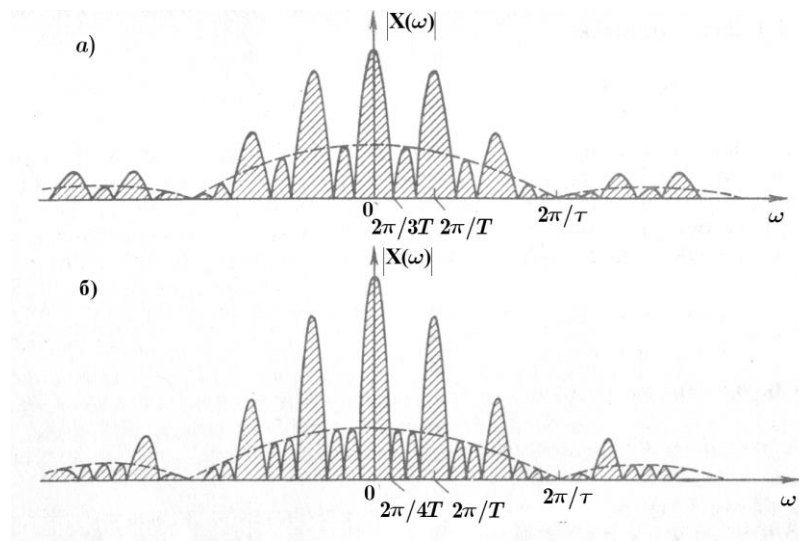
$$X_1(\omega) = E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2},$$

где  $\tau$  – длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из  $N$  равноотстоящих прямоугольных импульсов:

$$X(\omega) = e^{-j\omega[(N-1)T/2 + \tau/2]} E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

Для иллюстрации на рис. а изображён модуль спектра пачки из трёх прямоугольных импульсов, а на рис. б – из четырёх. При этом интервал между соседними импульсами  $T = 3\tau$ . Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса. С увеличением числа импульсов в пачке спектральная плотность  $X(\omega)$  при  $N \rightarrow \infty$  принимает дискретную структуру спектра

периодической функции. Нетрудно обобщить этот результат на произвольную форму одиночного импульса.



Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке

### Спектр дискретизованного сигнала

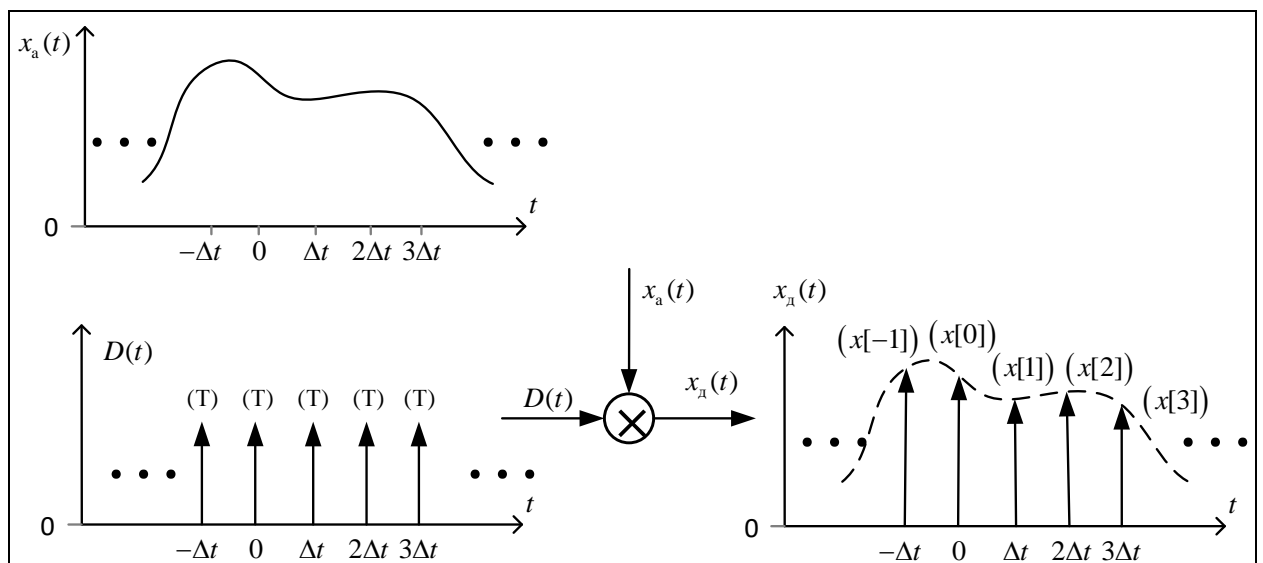
Для дискретных сигналов будем использовать следующие описания.

#### 1) Функция дискретного времени.

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов  $x[k]$  в заданные моменты времени  $k\Delta t$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , где  $\Delta t$  — шаг дискретизации:

$$x[k] = Tx(k\Delta t), T \in \{1; \Delta t\}$$

где  $T$  — константа с размерностью времени, равная единице или  $\Delta t$ . Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектром дискретизованного и исходного сигнала.



## 2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

В этой записи дискретизованного сигнала представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала  $x(t)$  на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями  $T$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами)  $x[k] = Tx(k\Delta t)$ :

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Tx(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t).$$

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t)$$

Определим спектр дискретизованного сигнала  $X_d(f)$ , зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации  $X(f)$ . Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - n\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

Таким образом,  $x_d(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t) x(t)$ . Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье:

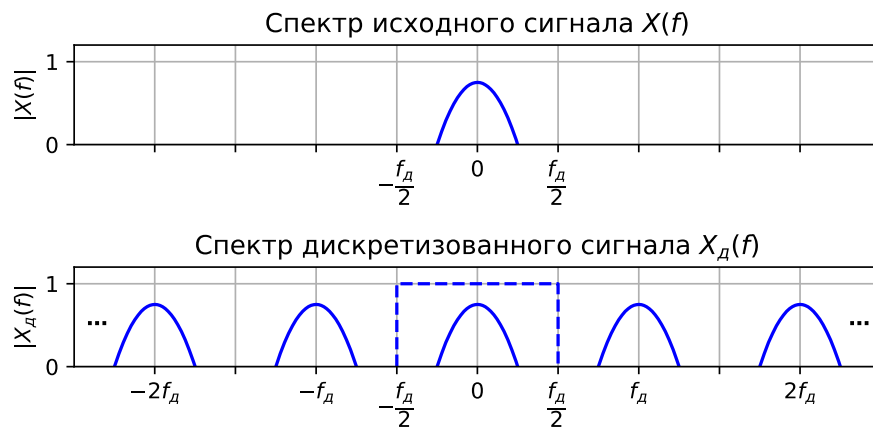
$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

При непосредственном взятии отсчетов  $x[k] = x(k\Delta t)$  константа  $T=1$ , и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

При  $T = \Delta t$  (когда  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ ) дискретизация аналогового сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации  $f_d = 1/\Delta t$

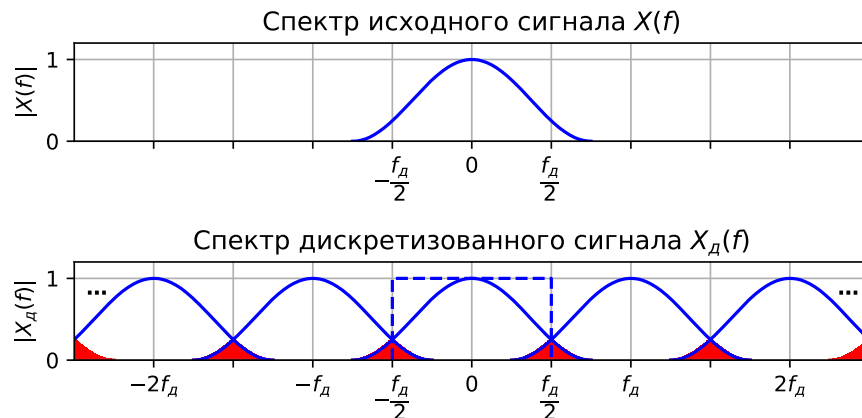
$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_d).$$

Заметим, что при этом интервал  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$  является одним периодом функции  $X_d(f)$ . Если спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения.



### Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом  $\left[-f_d/2, f_d/2\right]$ , то возникает **эффект наложения** (англ. **aliasing**, элайзинг, алиасинг). В таком случае спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза  $f_c = f_d/2$ , при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах  $|f| > f_c$  не сохраняется.



### Теорема Котельникова во временной области

**Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.).** Если сигнал  $x(t)$  имеет спектр, ограниченный интервалом  $[-f_B, f_B]$ , и не содержит

гармонических компонент на частотах  $\pm f_B^2$ , то он представим с помощью своих дискретных

отсчетов  $x(k\Delta t)$ , взятых с шагом  $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Приведем две различные интерпретации этой теоремы.

1) Если сигнал  $x(t)$  дискретизован с частотой  $f_d$ , а его спектр ограничен интервалом  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ ,

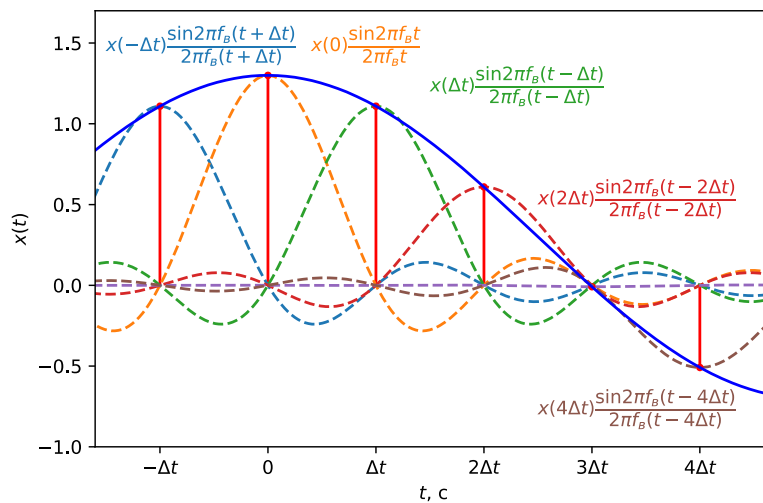
его можно представить с помощью дискретных отсчетов  $x(k\Delta t)$ . Частота  $f_d/2$ , равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.

2) Отсчеты  $x(k\Delta t)$  являются коэффициентами Фурье разложения сигнала  $x(t)$  по базису из функций отсчетов:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

В пространстве сигналов из  $L_2(-\infty, \infty)$  с спектром, ограниченным интервалом  $\left[-\frac{f_d}{2}, \frac{f_d}{2}\right]$ ,

система функций  $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  полна и ортогональна.



Для сигнала  $x(t)$  с финитным спектром  $X(f)$  запишем представление по функциям отсчетов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)},$$

где

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} dt$$

есть коэффициенты Фурье и  $\Delta t = 1/2f_B$ . Спектр функции отсчетов

<sup>2</sup> Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_B t) \text{ с шагом } \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

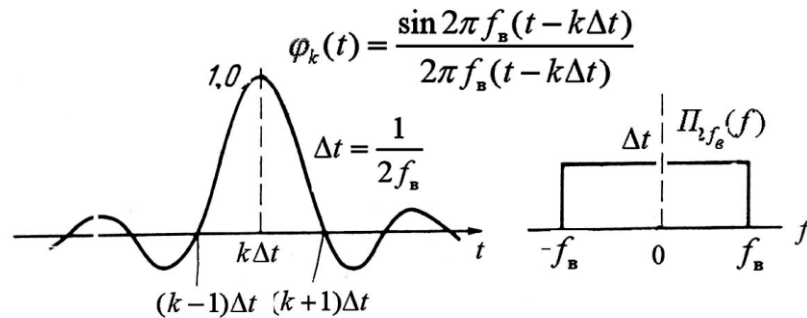


$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \Pi_{2f_B}(f) \exp(-j2\pi f k \Delta t)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на  $k\Delta t$ . Модуль этого спектра  $\Pi_{2f_B}(f)$  является прямоугольной функцией с единичной площадью. С учётом обобщённого равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

выражение для коэффициента  $c_k$  можем записать в виде



$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_g}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Произведение под интегралом при  $-f_g < f < f_g$

$$X(f) \Pi_{2f_g}(f) = X(f) \frac{1}{2f_g} = X(f) \Delta t,$$

Поэтому  $c_k = x(k\Delta t)$ . Отсюда вывод: если сигнал имеет спектр, ограниченный интервалом  $[-f_g, f_g]$  и шаг дискретизации  $\Delta t = 1/2f_g$ , то коэффициенты Фурье  $c_k$  разложения сигнала по функциям отсчётов  $\varphi_k(t)$  являются выборками сигнала  $x(k\Delta t)$  и для  $x(t)$  имеет место представление рядом Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_g(t - k\Delta t)}{2\pi f_g(t - k\Delta t)}.$$

**Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.**

- Взять отсчеты  $x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями  $\Delta t x(k\Delta t)$ .
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания  $[-f_g, f_g]$ , подавая на вход сформированные короткие импульсы

**Недостатки подхода.**

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.

## Эффект наложения спектров при дискретизации синусоидальных сигналов

Дискретизация сигнала  $x(t)$  по времени с шагом  $\Delta t$  приводит к периодическому повторению исходного спектра  $X(f)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d = 1/\Delta t$ . Полезная информация содержится в полосе  $[-f_d/2, f_d/2]$ . Если не принять специальных мер, возникает эффект наложения, в результате которого все частоты в спектре сигнала, превышающие половинную частоту дискретизации, как бы отражаются от этой частоты и переносятся на более низкие частоты, искажая исходный спектр. Для устранения этого эффекта сигнал перед дискретизацией предварительно пропускают через низкочастотный фильтр, частота среза которого равна  $f_c = 1/2\Delta t$ . Частота  $f_d/2$  в зарубежной литературе называется частотой Найквиста.

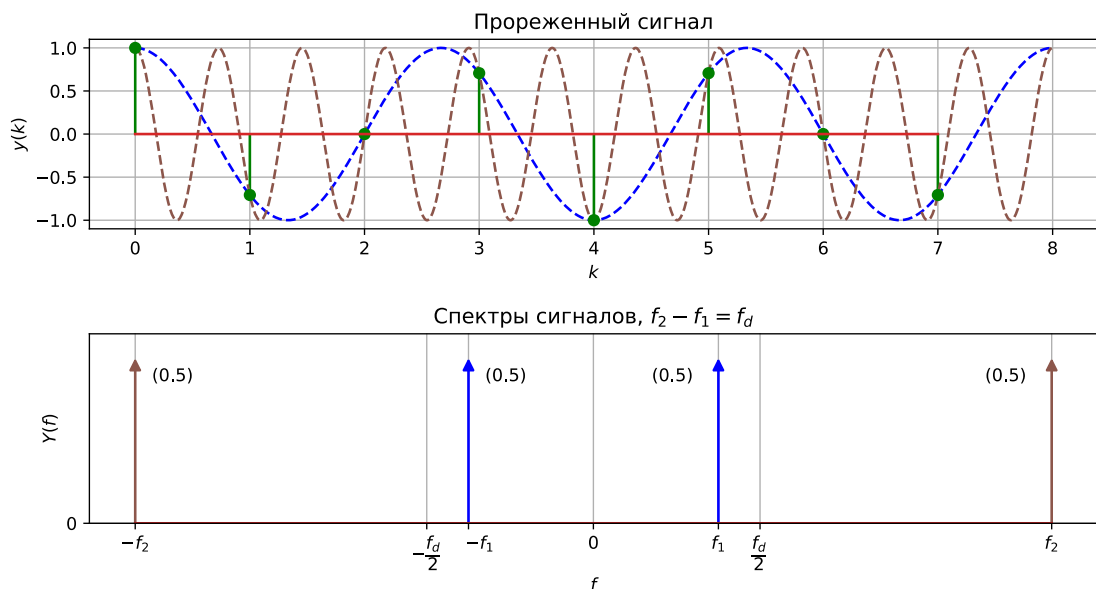
При дискретизации синусоидальных сигналов необходимо следить за тем, чтобы частоты синусоид не превосходили половину частоты дискретизации, как того требует теорема Котельникова. Несоблюдение этого условия приводит к парадоксальным результатам, например, при наблюдении восстановленных синусоид в цифровом осциллографе.

Пусть сигнал  $x(t) = \sin \pi f_0 t$  дискретизируется с частотой  $f_d$  отсчетов в секунду, т. е. через равные интервалы времени  $\Delta t = 1/f_d$ . Для последовательности отсчетов можем записать

$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin(2\pi f_0 k \Delta t + 2\pi m) = \sin 2\pi(f_0 + m/k \Delta t)k \Delta t.$$

Если выберем  $m$  кратным  $k$ ,  $m = nk$ , мы можем заменить отношение  $m/k$  целочисленной переменной  $n$ , так что

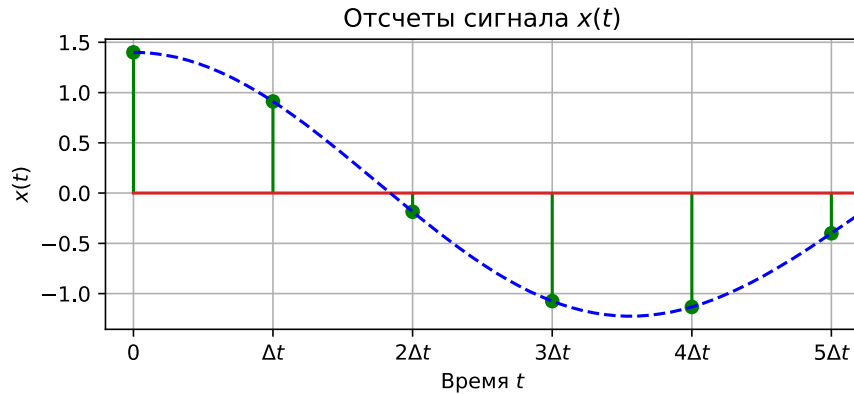
$$x[k] = \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin 2\pi(f_0 + n/\Delta t)k \Delta t = \sin 2\pi(f_0 + n f_d)k \Delta t.$$



Следовательно, частоты  $f_0$  и  $f_0 + n f_d$  дают одинаковый результат. Это выражение показывает, что последовательность цифровых отсчетов  $x(k)$ , представляющая синусоиду с частотой  $f_0$  Гц, точно так же представляет синусоиды с другими частотами  $f_0 + n f_d$ . Это одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов.

*Вывод. При дискретизации с частотой  $f_d$  отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизированные значения синусоиды частотой  $f_0$  Гц и синусоиды частотой  $(f_0 + n f_d)$  Гц, если  $n$  – любое положительное или отрицательное целое число.*

#### Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов. ДВПФ.



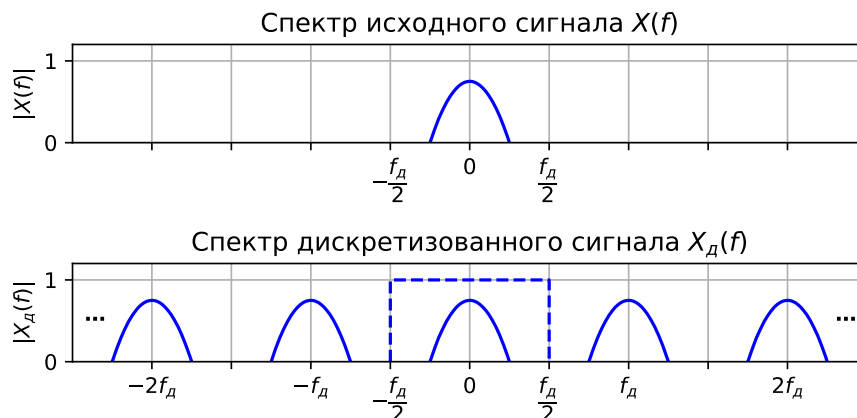
Пусть есть последовательность выборок  $x(k\Delta t)$ ,  $k \in Z$  некоторого аналогового сигнала  $x(t)$ , где  $\Delta t$  – шаг дискретизации – интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов,  $k \in Z$  – номер отсчета.  $f_d = 1/\Delta t$  – частота дискретизации – величина, обратная шагу дискретизации (размерность  $[Гц] = [с^{-1}]$ ). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом  $[-f_d/2; f_d/2]$ , а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ( $f_d > 2f_b$ ).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал)  $x[k]$ , которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = T x(k\Delta t),$$

где  $T = \Delta t$ . Как ранее было установлено, при  $T = \Delta t$  спектр дискретизованного сигнала  $x[k]$  представляет собой периодическое повторение исходного спектра  $X_a(f)$  аналогового сигнала  $x(t)$  с периодом, равным частоте дискретизации  $f_d$ :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - n f_d).$$



Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе  $[-f_d/2; f_d/2]$ . Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе. Континуальная запись дискретного сигнала  $x[k]$  в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (8)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (8) представляет собой ряд Фурье для периодической функции  $X_d(f)^3$ , получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (9)$$

В итоге получаем пару формул (8) и (9), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала  $x[k]$ , который на отрезке оси частот  $[-f_d/2; f_d/2]$  в отсутствие наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как  $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$ .

### Различные формы записи ДВПФ

Мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

<sup>3</sup> Напоминание. Для  $2l$ -периодической функции  $f(x)$ , абсолютно интегрируемой на интервале  $(-l; l)$  ряд Фурье по системе функций  $\phi_m(x) = \exp(jm \frac{\pi}{l} x)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm \frac{\pi}{l} x), \quad \text{где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm \frac{\pi}{l} x) dx$$

Введем нормированные частоты  $\nu = f / f_{\text{д}} = f \Delta t$ . Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu k) d\nu.$$

Если принять  $2\pi f = \omega$ , а частоту дискретизации взять в рад/с  $\omega_{\text{д}} = 2\pi / \Delta t$ , то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{д}}/2}^{\omega_{\text{д}}/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв  $\theta = 2\pi\nu$  (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	Основной период
$f$	Гц	$f_{\text{д}} = 1 / \Delta t$	$[-f_{\text{д}} / 2; f_{\text{д}} / 2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_{\text{д}} = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_{\text{д}} / 2; \omega_{\text{д}} / 2]$
$\nu = f / f_{\text{д}}$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_{\text{д}}$	рад	$2\pi$	$[-\pi; \pi]$

**Пример.** Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов  $x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1]$ , где  $\mathbf{1}[k]$  — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ такой последовательности

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-1}^1 x[k] e^{-j2\pi\nu k} = x[-1] e^{j2\pi\nu} + x[0] e^0 + x[1] e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu) \end{aligned}$$

## Свойства ДВПФ

### Линейность

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$  и  $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$ , то  $\alpha x[k] + \beta y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \alpha X(v) + \beta Y(v)$ , где  $\alpha, \beta$  — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

### Теорема запаздывания

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ , то  $x[k-l] \xleftrightarrow{DTFT} X(v) \exp(-j2\pi vl)$ .

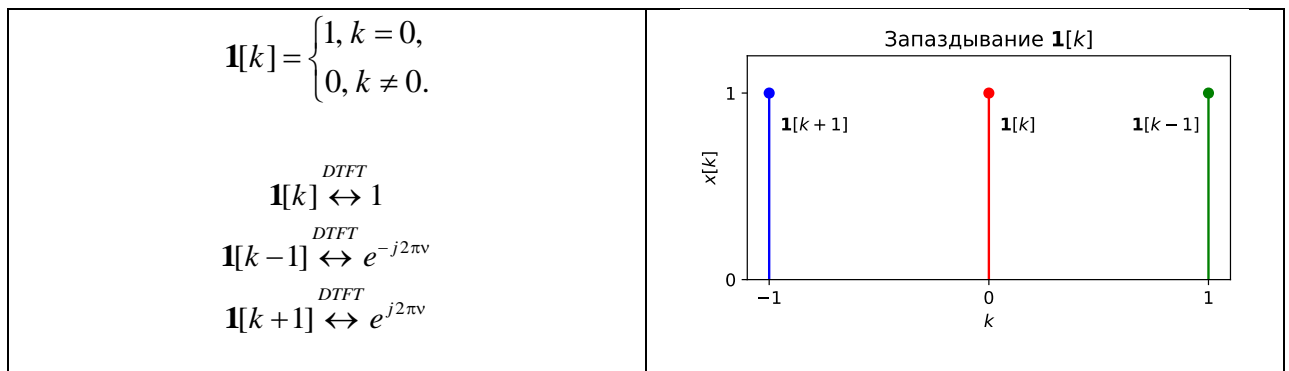
$x[k-l]$  — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала  $x[k]$  на  $l$  отсчетов в случае  $l > 0$  и опережающий сигнал  $x[k]$  на  $-l$  отсчетов в случае  $l < 0$ .

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(-j2\pi vl) \exp(j2\pi vk) dv = \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi v(k-l)) dv = x[k-l].$$

Стоит отметить, что  $|X(v)|$  для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

### Пример



### Теорема сдвига

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ , то  $x[k] \exp(j2\pi v_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(v - v_0)$

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида  $\exp(j2\pi v_0 k)$ ,  $v_0 \in R$  приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на  $v_0$  вправо в случае  $v_0 > 0$  и на  $-v_0$  влево в случае  $v_0 < 0$ .

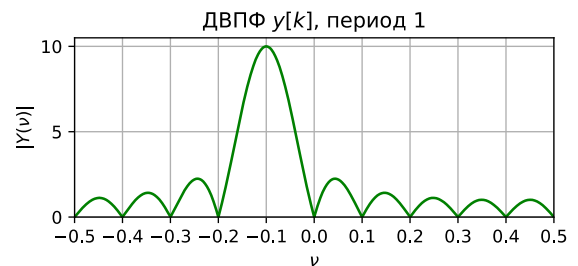
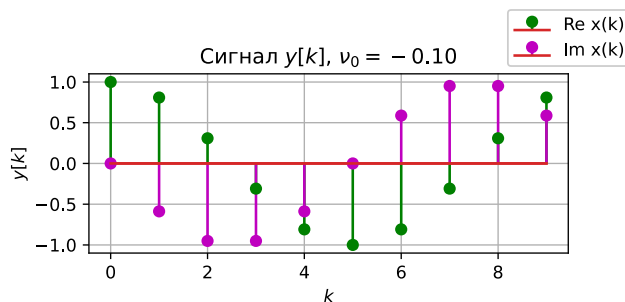
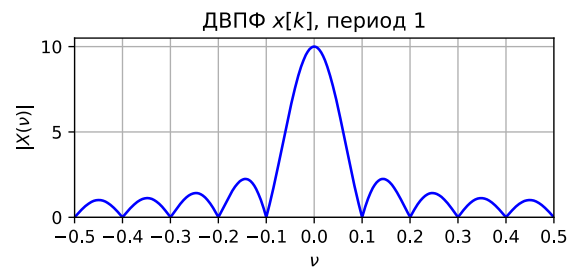
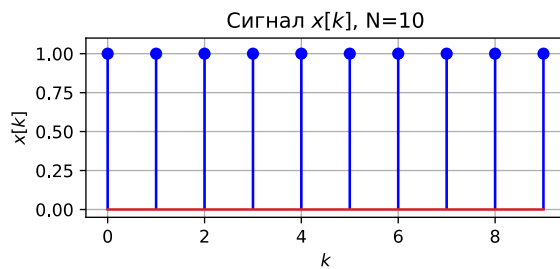
**Пример.**  $y[k] = x[k] \exp(j2\pi v_0 k)$ , где  $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$ .

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi vk) = \frac{1 - \exp(-j2\pi vN)}{1 - \exp(-j2\pi v)}$$

$$= \frac{2j e^{-j\pi v N}}{2j e^{-j\pi v}} \frac{(e^{j\pi v N} - e^{-j\pi v N})}{(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v})} = \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \exp(-j(N-1)\pi v).$$

$$|X(v)| = \left| \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \right|.$$

$$Y(v) = X(v - v_0) = \frac{\sin(N\pi(v - v_0))}{\sin(\pi(v - v_0))} \exp(-j(N-1)\pi(v - v_0)).$$



### Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(v) Y^*(v) dv$$

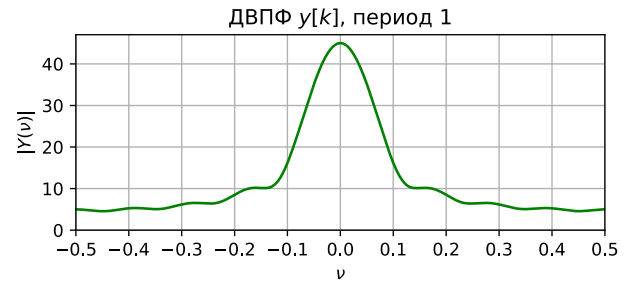
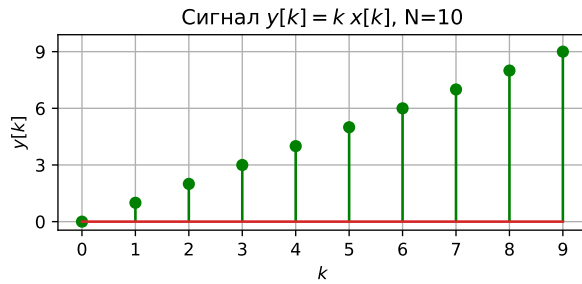
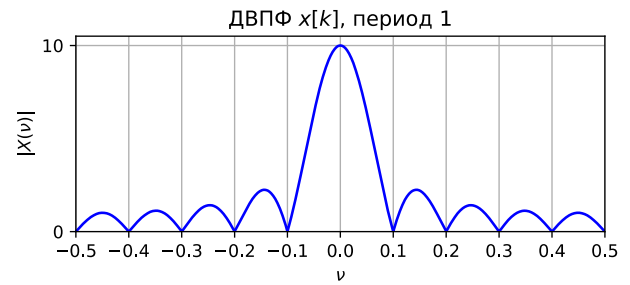
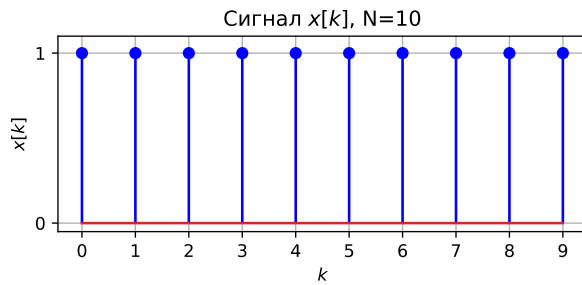
**Пример.** Предположим, что имеется финитная последовательность  $x[k] = \{1; 1; 1\}$ . Тогда  $k=0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 3. \text{ При этом } X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi v k} = x[-1] e^{j2\pi v} + x[0] e^0 + x[1] e^{-j2\pi v} = \\ = \exp(j2\pi v) + 1 + \exp(-j2\pi v) = 1 + 2 \cos(2\pi v).$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2 \cos(2\pi v)|^2 dv = 3.$$

### Умножение на $k$ и дифференцирование по частоте

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ , то  $kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}$ .



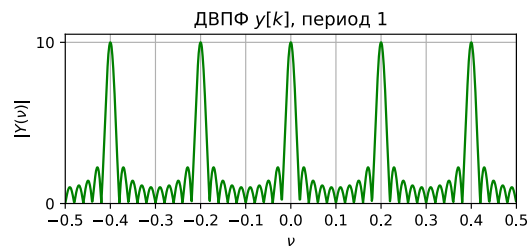
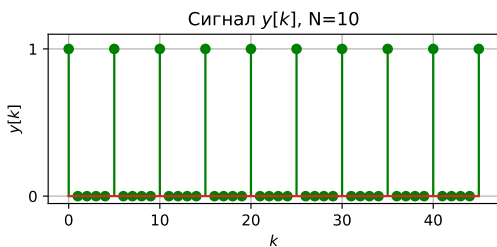
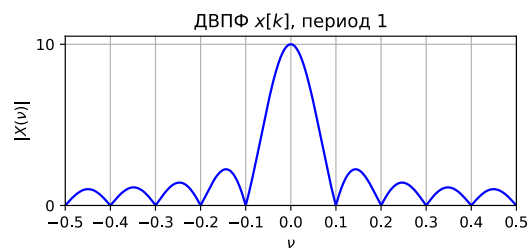
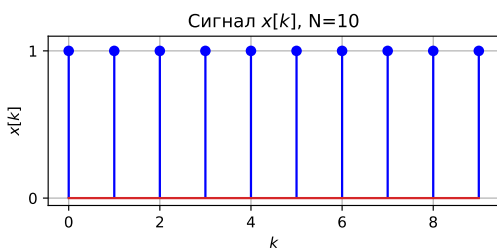
### Изменение масштаба

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ , то  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(vL)$ .

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi v k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi v k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi (vL)m) = X(vL). \end{aligned}$$

### Пример



Рассмотрим последовательность из 10 единичных импульсов. Между каждой парой отсчетов добавим  $L-1$  нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|Y(v)| = \left| \frac{\sin(10\pi v L)}{\sin(\pi v L)} \right|.$$



Для  $L=5$  результат показан на рисунке.

### Теоремы о свертке

#### а) Теорема о свертке во временной области.

Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$  и  $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$ , то  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)Y(v)$ .

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

#### б) Теорема о свертке в частотной области

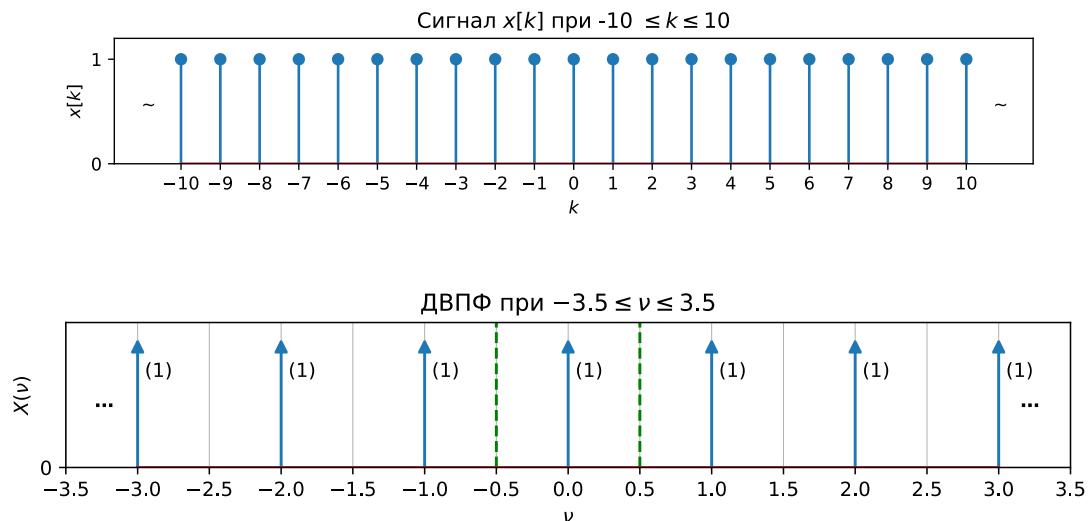
Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$  и  $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$ , то  $x[k]y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})Y(v-\tilde{v})d\tilde{v}$ .

В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.

### ДВПФ периодических последовательностей

#### а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$



Вычислим ДВПФ для последовательности  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1[k-m]$ .

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1[k-m] \right) \exp(-j2\pi vk) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1[k-m] \exp(-j2\pi vk).$$

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm).$$

Заметим, что  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm)$  — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности  $\delta$ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi v m),$$

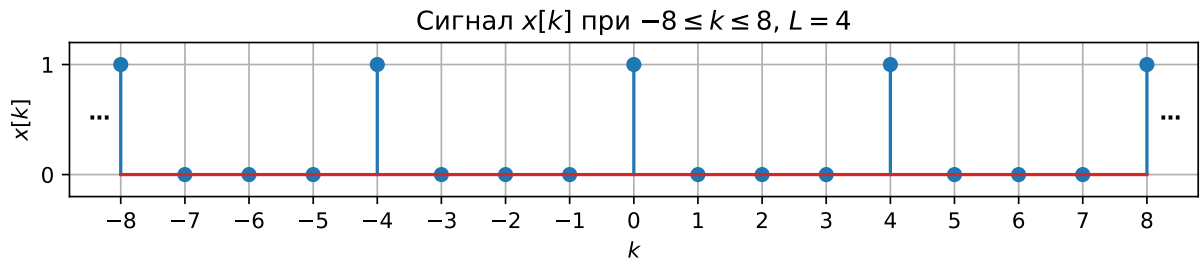
где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) \exp(j2\pi v m) dv = e^0 = 1. \text{ Тогда получаем, что } X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

**б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом  $L$ .**

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности  $x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL]$ .



Используя свойство об изменении масштаба  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k-mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(vL)$ , из

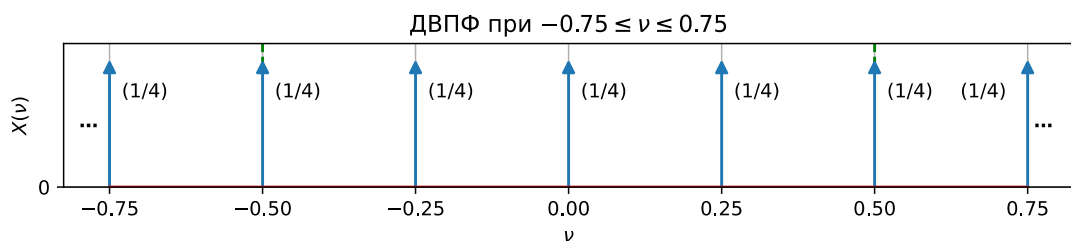
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) \text{ получаем } \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(vL-n)$$

Воспользовавшись свойством  $\delta$ -функции

$$\delta(av-b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(v - \frac{b}{a}\right),$$

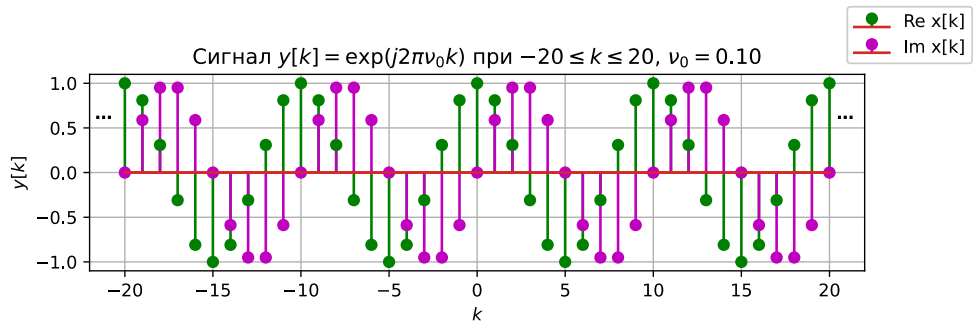
получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$



**в) Гармонические сигналы**

$$\exp(j2\pi v_0 k), -\infty < k < +\infty \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - v_0 - n).$$

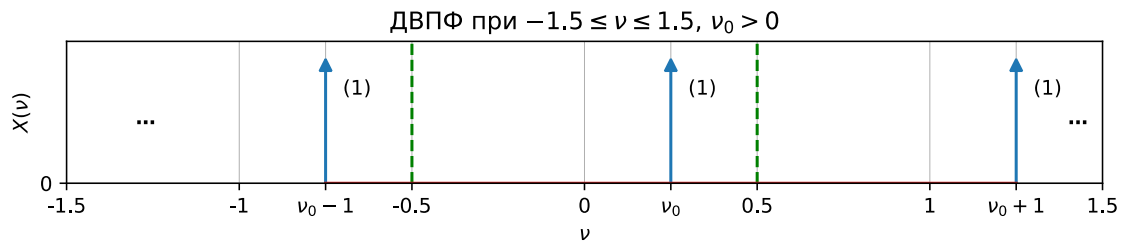


Если  $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ , то  $x[k] \exp(j2\pi v_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(v - v_0)$ . (теорема смещения для ДВПФ). При

этом  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$ . Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1[k-m] \exp(j2\pi v_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - v_0 - n).$$

$$\exp(j2\pi v_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - v_0 - n).$$



## ДПФ последовательностей конечной длительности

### Форма записи ДПФ

Пусть  $x[k]$  — последовательность отсчетов сигнала длиной в  $N$  отсчетов  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Функцию  $X[n]$  обычно рассматривают только для значений  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , при этом она является периодической с периодом  $N$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

В обратном преобразовании необходимо ограничить длительность восстанавливаемой последовательности отсчетов сигнала, т.е. рассматривать  $x[k]$  для значений  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Если длительность не ограничить, то будет восстановлена последовательность, являющаяся периодическим продолжением  $x(k)$ .

### Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $v = n/N$ .

Рассмотрим  $N$  – точечную последовательность  $x[k]$ . Ее ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi vk).$$

ДПФ для последовательности  $x(k)$ , имеет следующий вид:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{n}{N} k\right).$$

Сравнивая формулы, в точках  $v = n/N$  получаем равенство

$$X(v)\big|_{v=n/N} = X[n]$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ  $X[n]$  равны отсчетам функции  $X(v)$ , взятым в точках  $v = n/N$  (с шагом  $\Delta v = 1/N$ ).

### Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим  $M$  – точечную последовательность — добавим в исходную последовательность  $x[k]$   $M - N$  отсчетов, равных нулю:

$$y[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & N \leq k \leq M-1. \end{cases}$$

Ее ДПФ  $M$  – точечное и определяется формулой

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} y[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right).$$

При этом ДВПФ не изменяется:

$$Y(v) = \sum_{k=0}^{M-1} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi vk).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек  $v = n/N$  на одном периоде больше, чем в исходной последовательности.

**Пример.** Рассмотрим последовательность отсчетов

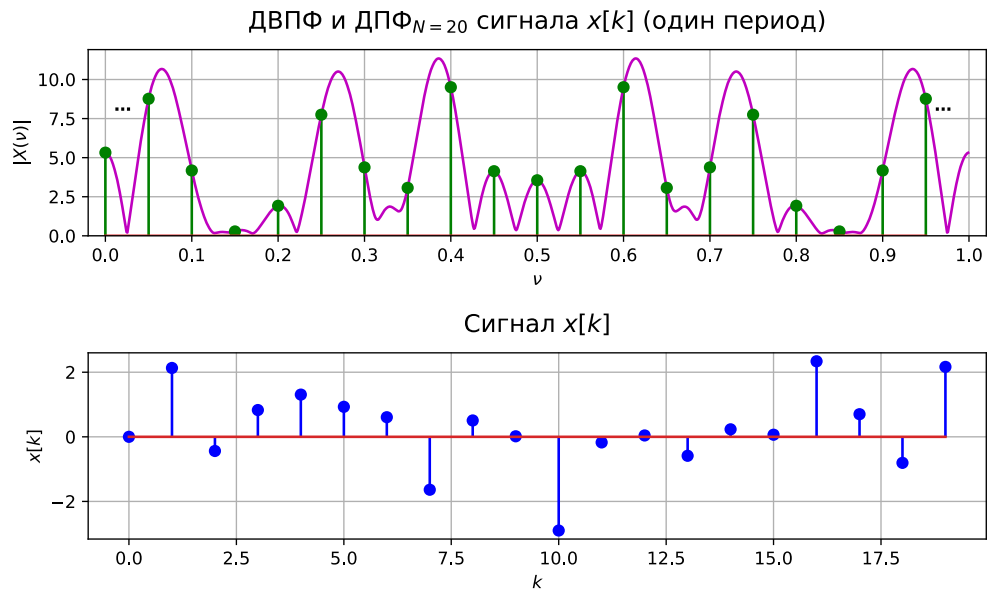
$$x[k] = \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{1,5}{20} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{5,4}{20} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{7,6}{20} k\right), & 0 \leq k < N, \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$

Заметим, что частоты синусоид в ней не совпадают с бинами ДПФ:

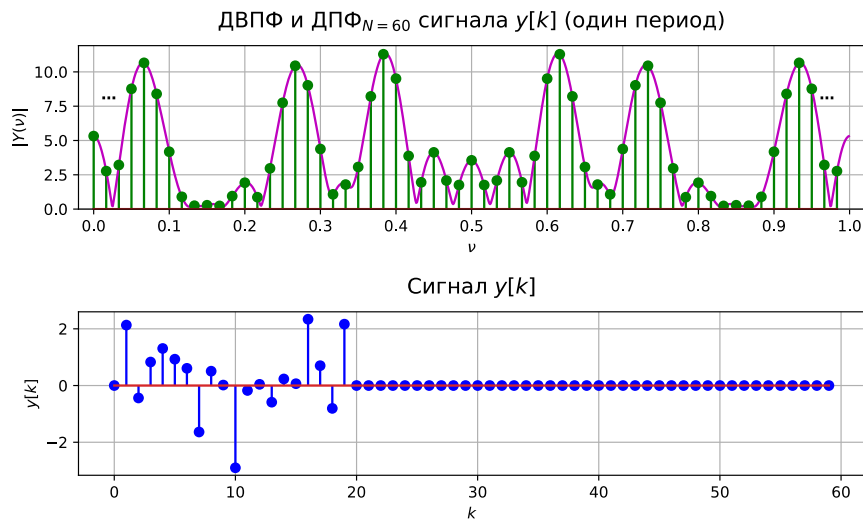
$$v_1 = \frac{1,5}{20}, \quad v_2 = \frac{5,4}{20}, \quad v_3 = \frac{7,6}{20}.$$

На рисунке изображен модуль ДВПФ этой последовательности для частот  $v \in [0; 1]$ . Приведено соответствие с 16–точечным ДПФ этой последовательности, вычисленным по формуле без нормирующего множителя  $1/N$ . В точках  $v = n/N$  значение ДВПФ совпадают с величиной отсчетов ДПФ в этих точках:

$$X(n\Delta\nu) = X[n], \Delta\nu = 1/N.$$



Теперь дополним рассматриваемый в ДПФ участок сигнала нулевыми отсчетами. ДВПФ при этом не изменится (мы даже не изменили сигнал  $x[k]$ ), а число отсчетов ДПФ на одном периоде станет больше. Таким образом улучшено качество визуализации ДВПФ с помощью отсчетов ДПФ.



### Приложение 3. Описание и работа осциллографа Signal–6501USB

Цифровой осциллограф предназначен для исследования периодических и однократных электрических сигналов путем их оцифровки, занесения в память компьютера, отображения на экране стандартного монитора и измерения амплитудных и временных параметров. Исследуемые сигналы могут быть подвергнуты дополнительной математической обработке и анализу с помощью программных средств осциллографа и компьютера..

Дополнительно осциллограф предоставляет: режимы генератора сигналов, цифрового вольтметра и частотомера; измерение с помощью курсоров; автоматическое измерение параметров входного сигнала; спектральный анализ сигналов; возможности протоколирования результатов измерений.

**Осциллограф** позволяет проводить измерения однократных и периодических сигналов в диапазоне напряжений  $\pm 16$  В, в диапазоне частот 0...20 МГц.

**Генератор** позволяет генерировать функциональные, импульсные и ГЧК сигналы в диапазоне 0...10 МГц.

**Частотомер** позволяет измерять частоту периодических сигналов диапазоне 2...30 МГц (со входа внешней синхронизации до 250 МГц).

**Режим анализатора спектра.**

**Экспорт результатов измерений в файл.**

Осциллограф является универсальным измерительным прибором широкого применения. Области его возможного использования — автоматизация научных исследований и диагностика в физике, биологии, медицине; настройка электронных схем, телевизионной и радиоаппаратуры; производственные нужды. Осциллограф представляет особую ценность при исследованиях быстропротекающих однократных и нестационарных сигналов.

Принцип работы осциллографа заключается в следующем. Подаваемые на вход усилителя вертикального отклонения сигналы нормируются и усиливаются до необходимой величины. Усиленные сигналы поступают на вход АЦП, где происходит их преобразование в эквивалентный цифровой код. Данные после АЦП накапливаются в буферном ОЗУ.

В режиме внутренней синхронизации сигнал с входа подается на усилитель синхронизации для формирования синхронизирующих импульсов.

Компьютер управляет всеми режимами работы осциллографа, осуществляет считывание информации из буферного ОЗУ, ее обработку и передачу в видеопамять компьютера для наблюдения на экране монитора.

Непосредственное управление работой осциллографа осуществляется в рамках соответствующего программного обеспечения посредством манипулятора «Мышь» и клавиатуры.

## **Технические характеристики.**

### **1. Осциллограф.**

#### **Характеристики.**

- 1) Максимальная частота дискретизации в реальном времени – 100 МГц.
- 2) Разрядность АЦП – 8 бит.
- 3) Полоса пропускания усилителя вертикального отклонения – 20 МГц.
- 4) Входное сопротивление – 1 МОм, входная емкость – 20 пФ.
- 5) Максимальное допустимое входное напряжение (сумма постоянной и переменной составляющих) – 150 В.
- 6) Режим открытого/закрытого входа<sup>4</sup>.
- 7) Режим регистрации выбросов (глитчей) и подавление эффекта наложения спектров «Peak detect».
- 8) Объем памяти – 8000 отсчетов.
- 9) Коэффициенты отклонения по вертикали – 50 мВ/дел ... 2 В/дел (6 калиброванных значений с шагом 1-2-5).
- 10) Коэффициенты развертки по горизонтали – 50 нс/дел ... 2 с/дел<sup>5</sup> (24 калиброванных значения с шагом 1-2-5).

<sup>4</sup> Для корректных измерений с закрытым входом значение постоянной составляющей должно быть от -20 до 20 В.

<sup>5</sup> На развертках 100 мс/дел...2 с/дел включается непрерывный циклический режим (без мертвой зоны) с непрерывной визуализацией.

- 11) Входное сопротивление входа внешней синхронизации – 1 МОм, входная емкость – 20 пФ.
- 12) Уровень срабатывания по входу внешней синхронизации – 1.3 В (триггер Шмидта с порогами 1.0 В и 1.6 В).
- 13) Максимально допустимое напряжение на входе внешней синхронизации (сумма постоянной и переменной составляющих) – 150 В.
- 14) Маркерные измерения, автоизмерения параметров сигнала, масштабирование сигнала (лупа времени), запись осциллограмм в файл (в графическом или текстовом виде).

#### **Синхронизация.**

- 1) Внутренняя и внешняя синхронизация.
- 2) По фронту/срезу входного сигнала.
- 3) Ждущая (запуск развертки при выполнении условия синхронизации), автоматическая (запуск развертки производится автоматически независимо от условия синхронизации)<sup>6</sup>.
- 4) Настраиваемый уровень - +/- 4 деления.
- 5) Настраиваемая длина предвыборки – 0...9 делений.
- 6) Настраиваемый уровень шумоподавления при синхронизации (гистерезис) – 0...2 дел.
- 7) Настраиваемый номер фронта/среза, вызывающий синхронизацию – 1...255.

#### **2. Генератор.**

- 1) Диапазон генерируемых частот – 0 Гц ... 10 МГц
- 2) Работа на основе прямого цифрового синтеза частоты (DDS).
- 3) Частота дискретизации – 100 МГц.
- 4) Разрядность ЦАП – 9 бит.
- 5) Разрядность аккумулятора фазы – 40 бит.
- 6) Форма генерируемого сигнала – синусоидальная, меандр, треугольная пилообразная (в диапазоне 1...10 МГц форма генерируемого сигнала только синусоидальная).
- 7) Шаг установки частоты – 5 значащих разрядов (но не менее 0.1 Гц).
- 8) Режим качания частоты синхронно с разверткой осциллографа (ГКЧ).
- 9) Режим генератора импульсов с произвольной скважностью. Диапазон – 10 нс ... 1 с.
- 10) Диапазон подстройки амплитуды – 1 В ... 4 В (значения от пика до пика)<sup>7</sup>.
- 11) Шаг подстройки амплитуды – 8 мВ.
- 12) Выходное сопротивление – 50 Ом.

#### **3. Электронно-счетный частотомер**

- 1) Принцип действия основан на одновременном измерении частоты и периода сигнала на интервале времени 1 сек.
- 2) Диапазон измеряемых частот со входа осциллографа – 2 Гц ... 30 МГц, со входа внешней синхронизации – до 250 МГц.
- 3) Чувствительность со входа осциллографа – не менее 20 мВ, со входа внешней синхронизации – триггер Шмидта с порогами 1.0 В и 1.6 В.
- 4) При работе со входа осциллографа частотомер работает по уровню синхронизации. При это возможна настройка уровня шумоподавления (гистерезис) – 0...2 дел × коэффициент отклонения по вертикали осциллографа.
- 5) Разрядность – 7 значащих цифр.

#### **4. Установка и подключение.**

<sup>6</sup> Возможен однократный или многократный запуск развертки.

<sup>7</sup> Выходной сигнал генератора имеет постоянную составляющую = ½ значения от пика до пика.

Программа не требует установки на компьютер, в ходе работы программа не изменяет содержимое системных файлов и не делает записей в системный реестр. В систему устанавливается только драйвер интерфейса USB.

- 1) Скопируйте директорию PV6501 в удобное Вам место на винчестере.
- 2) Подключите прибор к USB. Когда Windows обнаружит устройство, укажите «Установка из указанного места» на директорию .../PV6501/Driver.
- 3) Запустите файл PV6501.exe. При первом включении проведите калибровку уровня нуля устройства.

При работе создается файл PV6501.ini, в котором хранятся текущие настройки оболочки. Если вы хотите вернуться к значениям по умолчанию, удалите этот файл.

## **5. Удаление.**

Удалите директорию PV6501.

## **6. Управление оболочкой.**

### SCOPE

[Run] – многократный запуск развертки.

[Single] – однократный запуск развертки.

Time/D – кнопки установки Время/Дел.

Volts/D – кнопки установки Вольт/Дел.

[≡] – открытый/закрытый вход.

Trigger

[On] – включение синхронизации.

[ / ] – выбор синхронизации по фронту/срезу входного сигнала.

[ > | < ] – установка позиции отображения момента синхронизации в начало экрана.

[Ext.] – внешняя синхронизация.

### GENERATOR

Генератор включается кнопкой [On]. Генератор может работать в трех режимах: функциональный генератор, генератор импульсов, генератор качающейся частоты.

#### **Функциональный генератор.**

[10K] ... [10M] – выбор диапазона частоты.

Кнопки формы генерируемого сигнала – синусоидальная, меандр, треугольная, пилообразная (в диапазоне 10M – форма генерируемого сигнала только синусоидальная).

Верхний регулятор – установка частоты грубо.

Нижний регулятор – установка частоты точно.

Регулятор амплитуды выходного сигнала 1V...4V.

#### **Генератор импульсов – [Pulse]**

[1S]...[10uS] – выбор диапазона периода импульсов.

Верхний регулятор – длительность импульса.

Нижний регулятор – период повторения импульсов.

Регулятор амплитуды выходного сигнала 1V...4V.

#### **Генератор качающейся частоты (синхронной с разверткой осциллографа) – [Sweep]**

[10K] ... [10M] – выбор диапазона частоты.

Кнопки форму генерируемого сигнала – синусоидальная, меандр, треугольная, пилообразная (в диапазоне 10M – форма генерируемого сигнала только синусоидальная).

Верхний регулятор – начальная частота.

Нижний регулятор – конечная частота.

Регулятор амплитуды выходного сигнала 1V...4V.



## 7. Меню программы

### File

Data format – формат сохраняемого файла данных:

- Text – текстовый формат ASCII;
- Row binary – сохранение данных в двоичном виде, 1 байт соответствует одному отсчету.

Save data – сохранение файла данных.

Save image – сохранение графического файла (BMP).

Для сохранения файла остановите запуск программы.

### Options

Trigger – режимы синхронизации:

- Pre trigger – длина предвыборки – 0...9 делений;
- Noise reject – уровень шумоподавления при синхронизации (гистерезис) – 0...2 дел.;
- Trigger N – номер фронта/среза вызывающего синхронизацию – 1...255.

Sampling:

- Normal – частота дискретизации зависит от значения Time/D;
- Peak detect – режим регистрации выбросов (глитчей) и подавление эффекта наложения спектров. При всех значениях частоты горизонтальной развертки частота дискретизации максимальная (100 МГц), в память записываются минимальные и максимальные значения сигнала за период выборки.

Probe – установить в соответствии с типом подключенного пробника (1:1, 1:10).

Freq. meter – выбор источника сигнала для частотомера:

- Internal trig. – внутренняя синхронизация (от сигнала осциллографа);
- Ext. trig. – внешний вход синхронизации (от 2 Гц до 30 МГц);
- Ext. trig. HF – внешний вход синхронизации (от 16 Гц до 250 МГц).

Time calibrate – калибровка внутреннего источника частоты. Для калибровки необходим эталонный источник частоты (генератор) либо частотомер. 1 ppm =  $10^{-6}$ .

Zero calibrate – калибровка уровня нуля. Процедура калибровки:

- Отключить разъемы BNC осциллографа и генератора.
- Нажать кнопку [Start]. Процедура занимает 3-5 сек.
- По окончании нажмите [OK].

### View

Markers – включает маркеры.

Measure – выводит на экран результаты автоматических измерений:

- $V_{p-p}$  – амплитуда (значения от пика до пика);
- $V_{dc}$  – величина постоянной составляющей;
- $F_{in}$  – результат работы частотомера.

Ext. trig – включает отображение сигнала на входе внешнего триггера.

Vectors/Dots – способ отображения сигнала:

- Vectors – отсчеты соединяются с помощью векторов;
- Dots – при развертках 0,2 мкс – 50 нс сигнал отображается в виде точек, соответствующих выборкам АЦП.

Colors – установка цветов программы. [Default] – сброс в значения по умолчанию.

Always on top – окно программы отображается поверх других окон.

**Изменения в версии 1.31.**

**Добавлено:**

- 1) АМ и ЧМ модуляции в генераторе (Options/Generator Mod).
- 2) Уменьшена нестабильность внешней синхронизации.
- 3) Сохранение и открытие файлов данных (\*.pvd) и настроек (\*.pvs).

При сохранении данных автоматически сохраняется файл настроек. Данные и настройки можно сохранять и открывать независимо.

- 4) Настройка количества набираемых отсчетов (Options/Sampling – 1000. 2500. 5000. 8000).

В некоторых случаях бывает полезно изменить количество набираемых отсчетов. Например, можно повысить скорость обновления экрана, выставив меньшее число отсчетов.

- 5) Дополнительная информационная строка (View/Sampling Info). Состав строки:

- $F_{\text{smp}}$  – частота дискретизации снятого сигнала;
- SmpI – количество набранных отсчетов на одну осциллограмму;
- Div – количество клеток сетки по горизонтали, на которых отображается осциллограмма;
- FPS – скорость обновления экрана (осциллограмм в секунду).

- 6) Добавлены абсолютные маркерные измерения (1 верт. + 1 гориз. маркер) (View/Markers).

- 7) Time Calibrate – калибровка частотомера с дискретом 0.2 ppm.

- 8) В генераторе импульсов добавлено отображение скважности в процентах.

- 9) Добавлена надпись в верхней строке экрана “p.d.” – если осциллограмма снята с Peak Detect.

- 10) В функции FFT добавлен размер выборки 8192. Реализовано накрытие окном только существующего сигнала, недостающие отсчеты дополняются нулевыми значениями. Добавлен +1 разряд  $F_p$ .

- 11) Изменена иконка, изменена картинка на кнопке, убран синий цвет кнопок, добавлены пометки на кнопках непрерывных разверток.

- 12) Оформлены иконками все MessageBox.

#### **Исправлено:**

- 1) Устранена задержка при закрытии программы (долгая запись ini-файла). Особенно заметно при запуске с мобильных носителей (usb flash дисков).
- 2) Отображение dF при маркерных измерениях при sweep не переполняется после 1000 ГГц.

## **Меры предосторожности**

1. Подключение земли к питающей сети 220 В без трансформаторной развязки недопустимо.
2. Обратите внимание, что все земли разъёмов BNC соединены между собой.
3. Не превышайте максимально допустимые значения сигнала для входов осциллографа.
4. Избегайте подачи напряжения на выход генератора.
5. Проявляете осторожность, если вы подключаете землю (крокодил щупа) на высокий потенциал. Этот потенциал присутствует на всех BNC разъемах.
6. Подключайте и отключайте щупы и кабели от разъёмов BNC только когда они не подключены к измеряемой схеме.
7. Корпус устройства защищен от брызг (за исключением разъема USB), но без дополнительных мер безопасности не предназначен для работы во влажной среде.
8. Без дополнительных мер безопасности не предназначен для работы во взрывоопасной среде.
9. Не допускайте нагрева корпуса выше 60 С.