

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО  
Проректор по учебной работе  
А. А. Воронов  
17 июня 2024 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: **Квантовая механика**

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: **ФРКТ**

кафедра: **теоретической физики им. Л.Д. Ландау**

курс: 4

семестр: 7

лекции – 30 часов

Экзамен – 7 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа  
– 45 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., доц.  
А. В. Дорофеенко

Программа принята на заседании  
кафедры теоретической физики им. Л.Д. Ландау  
25 мая 2024 года

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н.

Э. Т. Ахмедов

## **1. Стационарная теория возмущений**

Первое и второе приближения стационарной теории возмущений. Критерий применимости теории. Стационарное возмущение вырожденных уровней дискретного спектра. Секулярное уравнение. Правильные волновые функции нулевого приближения. Эффект Штарка в атоме водорода. Функция Грина стационарного уравнения Шрёдингера и теория возмущений для непрерывного спектра.

## **2. Нестационарная теория возмущений**

Представление взаимодействия. Оператор эволюции в представлении взаимодействия. Вероятность перехода. Переходы под влиянием возмущения, действующего в течение конечного времени. Переходы под влиянием периодического возмущения в состоянии дискретного и непрерывного спектра. “Золотое правило” Ферми. Переходы под влиянием постоянного возмущения. Адиабатические и внезапные возмущения. Квазистационарные состояния.

## **3. Релятивистская квантовая механика. Частица в магнитном поле**

Уравнение Клейна–Гордона. Уравнение Дирака для свободной релятивистской частицы. Плотности вероятности и потока вероятности для дираковской частицы. Спин и полный момент количества движения. Состояния с положительными и отрицательными энергиями. Уравнение Дирака для заряженной частицы в электромагнитном поле. Градиентная инвариантность уравнения Дирака. Нерелятивистское приближение, уравнение Паули. Собственный магнитный момент электрона. Спин-орбитальное взаимодействие. Движение заряженной частицы в постоянном и однородном магнитном поле, уровни Ландау.

## **4. Сложение моментов**

Сложение моментов. Коэффициенты Клебша–Гордана.

## **5. Тождественные частицы**

Перестановочная симметрия волновой функции системы тождественных частиц. Бозоны и фермионы. Детерминант Слэтера. Принцип Паули. Разделение координатной и спиновой частей волновой функции системы тождественных частиц. Связь симметрии координатной части волновой функции системы с полным спином.

## **6. Атом гелия**

Атом гелия. Пара- и ортосостояния. Обменное взаимодействие.

## 7. Сложный атом

Вариационный принцип в квантовой механике. Вариационный метод расчета уровней энергии и волновых функций. Метод Хартри-Фока. Атомные оболочки и термы. Правило Хунда. Сложный атом в магнитном поле. Эффект Зеемана.

## 8. Теория рассеяния

Постановка задачи рассеяния. Упругое рассеяние. Амплитуда и сечение рассеяния. Функция Грина задачи рассеяния. Интегральное уравнение задачи рассеяния. Приближение Борна. Критерии применимости борновского приближения. Особенности рассеяния тождественных частиц.

## 9. Основы теории излучения

Вторичное квантование. Квантование электромагнитного поля. Сведение гамильтониана электромагнитного поля к системе гамильтонианов гармонического осциллятора. Фотоны. Взаимодействие атома с квантовым полем: оператор взаимодействия, описание процессов спонтанного и вынужденного излучения и поглощения.

## Литература

### Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — Москва : Физматлит, 2008, 2016.
2. Белоусов Ю.М. Курс квантовой механики. — Москва : МФТИ, 2006.
3. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. — Москва : Наука, 1981.
4. Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И. Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2013.

### Дополнительная

1. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. — Москва : Наука, 1979.
2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. — Москва : Наука, 1976.
3. Киселев В.В. Квантовая механика. — Москва : МЦНМО, 2009.
4. Тернов А.И. Основы релятивистской квантовой механики: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2002.
5. Аллилуев С.П. Квантовая теория сложного атома и квантовая теория излучения: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 1984.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Разложите в ряд по степеням  $\lambda$  оператор  $\hat{G} = (\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$ .
2. Вычислите следующие матричные элементы для атома водорода:

$$\langle 2p|\hat{x}|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{y}|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{z}|1s\rangle.$$

Какие правила отбора они определяют?

3. То же, но для матричных элементов

$$\langle 2p|\hat{p}_x|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{p}_y|1s\rangle, \quad \langle 2p|\hat{p}_z|1s\rangle.$$

4. Найдите функцию Грина свободной частицы в одномерном случае. Используя эту функцию, найдите энергию связанного состояния частицы в потенциале  $V(x) = -(\hbar^2 \alpha_0/m)\delta(x)$ .
5. Покажите, что уравнение Дирака инвариантно относительно калибровочного преобразования электромагнитного поля. Как при этом преобразуется волновая функция?
- 6.\* Выведите формулу для плотности тока вероятности электрона в магнитном поле.
7. Вычислите средние значения операторов  $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}})$ ,  $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{j}})$  и  $(\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{s}})$  в состоянии  $|l, s, j, m_j\rangle$ .
8. Используя понижающий оператор  $\hat{S}_-$ , постройте собственные функции операторов  $\hat{\mathbf{S}}^2$  и  $\hat{S}_z$  двух бозонов со спинами  $s_1 = s_2 = 1$  ( $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$ ,  $\hat{S}_- = \hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-}$ ).

## ЗАДАЧИ

### ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

- 1.<sup>c</sup> Используя стационарную теорию возмущений, найдите поправки к уровням энергии линейного гармонического осциллятора под действием следующих возмущений:

$$(a) \hat{V} = \alpha x, \quad (б) \hat{V} = Ax^3 + Bx^4.$$

2. Найдите смещение уровня энергии основного состояния атома водорода, обусловленное конечным размером ядра. Примите, что ядро представляет собой равномерно заряженный по объему шар радиуса  $r_0$ .

3.<sup>C</sup> Вычислите электрическую поляризуемость атома водорода в основном состоянии.

4.<sup>C</sup> Исследуйте расщепление в однородном электрическом поле уровня энергии атома водорода с главным квантовым числом  $n = 2$  (эффект Штарка). Как зависит энергия расщепления от величины поля? Найдите правильные волновые функции нулевого приближения.

5. В результате  $\beta$ -распада ядра атома трития образуется ион  ${}^3\text{He}^+$ . Вычислите вероятности того, что этот ион окажется: (а) в основном состоянии; (б) на первом возбужденном уровне. Каково отношение этих вероятностей?

6. Найдите вероятность перехода между состояниями дискретного спектра под действием возмущений:

$$(a) V(t) = V_0 e^{-t^2/\tau^2}, \quad (б) V(t) = \frac{V_0}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{t}{\tau} \right).$$

7.<sup>C</sup> Уровни энергии невозмущенной системы зависят от параметра  $\lambda$  и при некотором значении  $\lambda_0$  два уровня энергии пересекаются:  $E_1^{(0)}(\lambda_0) = E_2^{(0)}(\lambda_0)$ . В начальный момент времени система находится на первом уровне в состоянии  $\psi_1^{(0)}$ . Определите вероятность найти систему в состоянии  $\psi_2^{(0)}$  в момент времени  $t$ , если на систему накладывается постоянное возмущение  $\hat{V}$ , причем  $V_{11} = V_{22} = 0$ , но  $V_{12} = V_{21}^* \neq 0$ .

8. Найдите сечение фотоэффекта на атоме водорода под действием плоской монохроматической волны с частотой  $\omega$  для случая  $\hbar\omega \gg I$ , где  $I$  – потенциал ионизации атома. Используйте классическое (не квантовое) описание электромагнитного поля.

9. Найдите решения уравнения Дирака для свободного электрона.

10.<sup>C</sup> На мюон, покоящийся в однородном магнитном поле  $\mathcal{H} \parallel z$ , падает циркулярно поляризованное радиочастотное поле  $\mathbf{h}(t) \perp \mathcal{H}$ . Найдите зависимость от времени спиновой функции  $|\chi(t)\rangle$  и поляризации мюона  $\mathbf{P}(t) = \langle \chi(t) | \hat{\boldsymbol{\sigma}} | \chi(t) \rangle$ , если в начальный момент  $|\chi(0)\rangle = |+\rangle$ .

11.\* Покоящийся мюон помещен в магнитное поле  $\mathcal{H}(t)$ , медленно прецессирующее вокруг оси  $z$ , составляя с ней постоянный угол

θ. Найдите зависимость от времени спиновой функции  $|\chi(t)\rangle$  и поляризации  $\mathbf{P}(t)$  мюона, если в начальный момент времени его состояние  $|\chi(0)\rangle$  определяется положительной проекцией спина на направление магнитного поля. Покажите, что  $\mathbf{P}(t)$  следует за направлением магнитного поля. Покажите, что за один полный оборот вектора магнитного поля спиновая функция приобретает фазу, пропорциональную телесному углу, который охватывает вектор  $\mathbf{H}(t)$  (фаза Берри).

12.<sup>C</sup> Исследуйте стационарные состояния бесспиновой частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  в постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Найдите уровни энергии (уровни Ландау) и кратности их вырождения, считая, что движение частицы ограничено большим объемом  $V$ . Решите задачу в декартовых и цилиндрических координатах.

13. Для системы двух частиц со спином  $1/2$  найдите состояния с заданным полным моментом.

14.<sup>C</sup> Найдите величину сверхтонкого расщепления основного состояния атома водорода. Вычислите длину волны излучения, испускающегося при переходе между расщепленными подуровнями.

15.\* Найдите величину тонкого расщепления состояния атома водорода с главным квантовым числом  $n$  и орбитальным квантовым числом  $l$ . Выразите величину этого расщепления в атомных единицах энергии. Нарисуйте схему расщепленных уровней с  $n = 3$ .

16.<sup>C</sup> Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний двух невзаимодействующих тождественных частиц в потенциальном ящике

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, \ x > a, \end{cases}$$

если этими частицами являются: (а) ферми-частицы со спинами  $s = 1/2$ ; (б) бозе-частицы со спинами  $s = 0$ ; (в) бозе-частицы со спинами  $s = 1$ . Чему равна в каждом из этих случаев энергия основного состояния  $N$  частиц?

#### ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

17.<sup>C</sup> Вычислите энергию основного состояния атома водорода из вариационного принципа. В качестве пробных функций возьмите:

- (а)  $\psi(r) \sim \exp(-r/a)$ ;  
 (б)  $\psi(r) \sim \exp(-r^2/2b^2)$ .

В каком из этих случаев получается точное решение задачи и по какой причине?

18. Найдите, пользуясь вариационным методом, энергию основного состояния гелиеподобного атома с зарядом ядра  $Z$ . В качестве пробной функции возьмите:

- (а)  $\psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha(r_1+r_2)}$ ;  
 (б)  $\psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha r_1 - \beta r_2} + e^{-\beta r_1 - \alpha r_2}$ .

В случае (б) воспользуйтесь численной процедурой минимизации среднего значения гамильтониана по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . Используя полученные результаты, установите, существует ли стабильный ион водорода  $H^-$ .

- 19.<sup>C</sup> Пользуясь правилами Хунда, определите значения квантовых чисел  $L$ ,  $S$  и  $J$  в основных состояниях следующих атомов: (а) кремния, (б) фосфора, (в) серы, (г) ванадия, (д) кобальта, (е) церия. Для случаев “а”, “б” и “в” найдите все термы. Запишите спектроскопические символы полученных состояний.

- 20.<sup>C</sup> Используя второй порядок стационарной теории возмущений, определите, как зависит энергия взаимодействия от расстояния  $R$  между:

- (а) атомом и ионом ( $\sim 1/R^4$ );  
 (б) двумя атомами ( $\sim 1/R^6$ ).

- 21.<sup>C</sup> Желтый дублет натрия соответствует оптическим переходам  ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$  и  ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ . Исследуйте расщепление этого дублета в слабом и сильном магнитных полях. Сравните полученные картины расщепления линий натрия с расщеплениями синглетной линии кадмия, отвечающей переходу  ${}^1D \rightarrow {}^1P$ .

22. С помощью “золотого правила” Ферми получите формулу для дифференциального сечения упругого рассеяния в борновском приближении.

- 23.<sup>C</sup> Найдите в борновском приближении дифференциальные и полные сечения рассеяния частицы в полях:

$$(а) V(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}, \quad (б) V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

В случае (а) покажите, что в пределе  $\kappa \rightarrow 0$  дифференциальное сечение принимает вид резерфордского сечения рассеяния

заряженной частицы на отталкивающем кулоновском центре. Запишите критерии применимости борновского приближения для рассматриваемых случаев.

- 24.<sup>C</sup> Выразите дифференциальное сечение рассеяния:
- (а)  $\alpha$ -частиц на  $\alpha$ -частицах,
  - (б) протонов на протонах
- через амплитуду рассеяния двух точечных заряженных частиц друг на друге.
25. Может ли распасться на две  $\alpha$ -частицы нестабильное ядро  ${}^8\text{Be}^*$ , находящееся в состоянии с полным угловым моментом  $J = 1$ ?
26. Определите вероятность процесса, при котором ядро, связанное гармоническим потенциалом, останется в основном состоянии после испускания  $\gamma$ -кванта (эффект Мессбауэра).
- 27.<sup>C</sup> Найдите угловое распределение фотонов, излучающихся в переходе  $|2p\rangle \rightarrow |1s\rangle$  атома водорода, и время жизни  $|2p\rangle$  состояния. Выразите это время в атомных единицах времени.
28. Нейтрон находится в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}_0 \parallel z$ . Определите время жизни состояния с проекцией спина на направление поля  $m_s = +1/2$ . Получите численное значение времени жизни для  $\mathcal{H}_0 = 1$  кГс.
29. Найдите сечение фотоэффекта на атоме водорода под действием плоской монохроматической волны с частотой  $\omega$  для случая  $\hbar\omega \gg I$ , где  $I$  – потенциал ионизации атома. Сравните с результатом вычислений при классическом описании поля.

Срок сдачи первого задания: 16.10 – 21.10.2024 года.

Срок сдачи второго задания: 11.12 – 16.12.2024 года.

Подписано в печать 17.06.2024. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .

Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 60 экз. Заказ №111.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»  
тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru