98-12
68-2

В. М. Уроев

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИФ «ЯУЗА»
Москва
1998

В. М. Уроев
Уравнения математической физики. – М.. В. Секачев, ИФ «Яуза». 1998. – 373 с.

Рецензенты:
В. П. Мясников, академик Российской академии наук
Н. Х. Розов, профессор, доктор физико-математических наук (кафедра дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова)

ISBN 5-88923-026-3

© В. М. Уроев, 1998

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

Глава I. Классификация линейных уравнений с частными производными 10
§1. Введение. Вывод основных уравнений математической физики 10
§2. Приведение уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду 17
§3. Классификация уравнений второго порядка в точке 27

Глава II. Задача Коши и смешанная задача для волнового уравнения 33
§4. Задача Коши для гиперболических уравнений на плоскости. Формула Даламбера для волнового уравнения 33
§5. Волновое уравнение в $\mathbf{R}^n$. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши 42
§6. Волновое уравнение в пространстве. Формула Кирхгофа. Принцип Гюйгенса 47
§7. Волновое уравнение на плоскости. Метод спуска. Формула Пуассона. Диффузия волн 57
§8. Принцип Дюамеля для волнового уравнения 60
§9. О корректности постановки задачи Коши для волнового уравнения. Некорректно поставленные задачи. Пример Адамара 66
§10. Смешанная задача для волнового уравнения. Задача Гурса 70
§11. Метод Фурье решения смешанной задачи для волнового уравнения на отрезке. Существование и единственность классического решения 79

Глава III. Задача Коши и смешанная задача для уравнения теплопроводности 93
§12. Уравнение теплопроводности. Принцип максимума 93
§13. Единственность решений задачи Коши и смешанной задачи для уравнения теплопроводности 98
§14. Построения функции источника для уравнения теплопроводности при помощи автомодельного решения 103
§15. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности 110
§16. Принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности 121
§17. Смешанная задача для распространения тепла в полуограниченном стержне 125
§18. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке методом Фурье. Существование и единственность классического решения 130

Глава IV. Некоторые свойства оператора Лапласа. Функции Бесселя и их применение 142
§19. Ортогональность собственных функций симметричного оператора. Формулы Грина для оператора Лапласа. Правильная нормальная производная. Симметричность и положительная (неотрицательная) определенность оператора "$-\Delta$" с граничными условиями Дирихле (Неймана) 142
§20. Дифференциальное уравнение Бесселя. Неограниченность в нуле общего решения. Функции Бесселя первого рода 152
§21. Существование счетного числа нулей функции Бесселя первого рода. Ортогональность функций Бесселя 160
§22. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности в круге 166

Глава V. Первоначальные сведения об уравнении Пуассона. Задача Дирихле в $\mathbf{R}^2$ 173

§23. Уравнение Пуассона. Принцип максимума для гармонических функций. Корректность постановки внутренней задачи Дирихле 173
§24. Решение задачи Дирихле для уравнение Лапласа в круге в случае непрерывной граничной функции. Краевые задачи в кольце 178

Глава VI. Элементы теории обобщенных функций 190
§25. Обобщенные функции. Пространства D и D'. Дифференцирование в D' 190
§26. Пространство Шварца S. Пространство S'. Преобразование Фурье 200
§27. Прямое произведение и свертка обобщенных функций 210
§28. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора. Фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbf{R}^3$ 222
§29. Фундаментальное решение задачи Коши для простейших эволюционных уравнений 226
§30. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности 233
§31. Фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения 236

Глава VII. Свойства гармонических функций. Задача Пуассона. Задача Дирихле в $\mathbf{R}^3$ 241
§32. Оператор Лапласа в сферических координатах. Интегральное представление для гладких функций 241
§33. Гармонические функции: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, принцип максимума, теорема о стирании особенности 249
§34. Функция Грина задачи Дирихле. Симметричность функции Грина. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина 256
§35. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре (интеграл Пуассона). Преобразование Кельвина 263

§36. Регулярность гармонической функции на бесконечности. Задача Пуассона: единственность решения, формула Пуассона 270
§37. Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере (сферические функции) 276

Глава VIII. Теория Фредгольма для интегральных уравнений 292
§38. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма 292
§39. Интегральные уравнения с малым непрерывным ядром. Ряд Неймана. Резольвента и резольвентное ядро ...303
§40. Интегральные уравнения с непрерывным ядром. Сведение к уравнениям с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма 312
§41. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема Гильберта-Шмидта для истокообразно представимых функций 319

Глава IX. Задача Штурма-Лиувилля 328
§42. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля 328
§43. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром 341
§44. Свойства спектра задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова 347

Глава X. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^3$ с помощью потенциалов простого и двойного слоя 350
§45. Постановка основных краевых задач для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^3$. Вопросы единственности 350
§46. Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства (без доказательства). Потенциал двойного слоя в случае постоянной плотности 354
§47. Сведение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана к интегральным уравнениям. Применение теории Фредгольма 363

§48. Сведение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана к интегральным уравнениям. Потенциал Робэна 366

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга является развернутым конспектом лекций, читаемых автором для студентов третьего курса Московского физико-технического института (МФТИ) в 1991-1998 гг.

Автор старался не выходить за рамки реально прочитанного на лекциях материала, что позволяет рассчитывать на доступность книги для читателя, знакомого с математикой в объеме двух первых курсов технического университета. В книге некоторые теоремы приведены без доказательства, что обусловлено стремлением сделать текст доступным для первого знакомства с уравнениями математической физики. Вместе с тем изложение ведется строго, и в тех случаях, когда автор не имел возможности привести полное доказательство, возникающие трудности не игнорируются.

Вниманию читателя предлагается много примеров, иллюстрирующих теоретический материал и знакомящих с различными техническими приемами. Все задачи, большинство из которых предлагались на письменных экзаменах в МФТИ, приведены с решениями.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность за помощь в подготовке книги к печати Андрею Евгеньевичу Бибичеву, взявшему на себя труд по редактированию рукописи.

Естественно, что у читателя возникнет потребность в более глубоком изучении тех или иных фрагментов излагаемого материала. В таком случае целесообразно обратиться к классическим учебникам и монографиям, и, прежде всего, тем, что определили основное содержание программы:

1. *Ж. Адамар*, Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, “Наука”, 1978;

2. *В. С. Владимиров*, Уравнения математической физики, “Наука”, 1975,

3. *В. С. Владимиров*, Обобщенные функции в математической физике, “Наука”, 1976;

4. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов*, Обобщенные функции, вып. 1-3, Физматгиз, 1958;

5. *О. А. Ладыженская*, Краевые задачи математической физики, “Наука”, 1973;

6. *И. Г. Петровский*, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961;

7. *С. Л. Соболев*, Уравнения математической физики, “Наука”, 1966;

8. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Уравнения математической физики, “Наука”, 1972.

В. М. Уроев

Январь 1998 г.

Классификация линейных уравнений с частными производными

§1. Введение. Вывод основных уравнений математической физики

1.1. Основные обозначения и понятия. На протяжении всего курса будут использоваться следующие обозначения и понятия.

1) *Числовые множества:*

N множество натуральных чисел;

Z множество целых чисел;

R множество действительных чисел;

C множество комплексных чисел;

Элементы множества $\mathbf{R}^n$ обычно будем обозначать через $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$.

2) *Линейные операторы.* Пусть E_1 и E_2 – линейные пространства над полем действительных (комплексных) чисел. Оператор A, отображающий пространство E_1 в пространство E_2, называется линейным, если для любых элементов φ и ψ пространства E_1 и любых действительных (комплексных) чисел и справедливо равенство:

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A(\varphi) + \beta A(\psi)$$

Замечание 1. Часто для краткости вместо $A(\varphi)$ пишут $A\varphi$.

Замечание 2. Если $E_1 = \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$), то оператор называется функционалом и обозначается, как правило, строчными латинскими

буквами f, g и так далее.

Умножение оператора на число и сумму операторов определяют естественным образом. А именно, пусть α действительное (комплексное) число, тогда под оператором αA понимают оператор, действующий по правилу

$$(\alpha A)(\varphi) = \alpha(A\varphi), \ \varphi \in E_1.$$

Суммой операторов A и B, действующих из E_1 в E_2, называется оператор $A + B$, действующий по правилу

$$(A + B)(\varphi) = A\varphi + B\varphi, \ \varphi \in E_1.$$

Таким образом, множество линейных операторов, действующих из E_1 в E_2, является линейным пространством. Более того, в §39 будет введено понятие нормы оператора.

Образ линейного оператора A:

$$\operatorname{Im} A = \{\psi \in E_2 : \exists\varphi \in E_1, \ A\varphi = \psi\} \subset E_2$$

Ядро линейного оператора A:

$$\operatorname{Ker} A = \{\varphi \in E_1 : \ A\varphi = 0\} \subset E_1$$

Очевидно, что $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Ker} A$ – линейные многообразия.

Обратный оператор: если для любого элемента ψ из $\operatorname{Im} A$ существует единственный элемент φ из E_1 такой, что $A\varphi = \psi$, то определяют обратный оператор A^{-1}, отображающий $\operatorname{Im} A$ на E_1 по следующему правилу: $\psi \in \operatorname{Im} A$ переходит в $\varphi \in E_1$ такой, что $A\varphi = \psi$. Корректность данного определения и линейность обратного оператора легко проверяются.

Пусть определен дополнительно линейный оператор C, отображающий пространство E_2 в некоторое линейное пространство E_3. Тогда определяют произведение CA операторов A и C, как композицию:

$$(CA)(\varphi) = C(A\varphi), \ \varphi \in E_1.$$

Если E_2 совпадает с E_1, то в этом случае выделяют тождественный оператор E:

$$E\varphi = \varphi, \ \varphi \in E_1.$$

В этом же случае определяют возведение оператора A в степень p,

$p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$:

$$A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p \text{ раз}},\ p \in \mathbf{N},$$

$$A^0 = E.$$

Если $\operatorname{Im} A = E_1$ и существует обратный оператор A^{-1}, то можно определить $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p$, $p \in \mathbf{N}$.

Пусть E_1 и E_2 – линейные топологические пространства. Тогда оператор A, отображающий E_1 в E_2, называется непрерывным, если из сходимости последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ к φ в E_1 следует сходимость $A\varphi_k \to A\varphi$, k в E_2, где сходимость понимается в смысле соответствующей топологии.

Из определений непосредственно вытекает следующее

Утверждение 1. Для пространств конечной размерности из линейности оператора следует его непрерывность.

Замечание 3. Далее, на протяжении курса, по мере необходимости будут приводиться различные элементы из теории линейных операторов.

3) *Дифференциальный оператор* D^α. Пусть G область в $\mathbf{R}^n$, $\alpha = \left(\alpha^1, \ldots, \alpha^n\right)$ – мульти-индекс (упорядоченный набор неотрицательных целых чисел), $|\alpha| = \alpha^1 + \ldots + \alpha^n$. Через D^α обозначим линейный дифференциальный оператор, действующий из $\tilde{N}_x^\alpha(G)$ в $\tilde{N}(G)$ следующим образом [1]):

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x^1, \ldots, x^n)}{\left(\partial x^1\right)^{\alpha^1} \ldots \left(\partial x^n\right)^{\alpha^n}},\ f \in C_x^\alpha(G)$$

Пример 1. Оператор Лапласа "Δ" (лапласиан)

---

[1]) Класс $C(M)$ – множество функций, непрерывных на множестве $M \subset \mathbf{R}^n$; $C_x^\alpha(M)$ множество функций $u(x)$, имеющих непрерывные на M производные вплоть до $D_x^\alpha u(x)$.

$$\Delta \bullet = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} \bullet = D^{(2,0\ldots0)} \bullet + \ldots + D^{(0,\ldots0,2)} \bullet .$$

Здесь и далее мы будем использовать точку ($\bullet$) для обозначения произвольной допустимой функции, на которую действует дифференциальный оператор.

4) *Уравнение с частными производными.* Общий вид уравнения с частными производными выглядит следующим образом:

$$F\left(x, u(x), D^{\alpha_1} u(x), \ldots, D^{\alpha_m} u(x)\right) = 0,\ x \in G \subset \mathbf{R}^n, \qquad (1.1)$$

где $u(x)$ – искомая функция, F – действительнозначная функция, определяющая вид уравнения, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – мульти-индексы.

Как правило, уравнение (1.1) рассматривается в совокупности с начальными и (или) граничными условиями и требованиями на гладкость функции u, о чем речь пойдет чуть позже.

Общепринятой является следующая терминология.

Главная часть уравнения (1.1) – совокупность старших производных.

Порядок уравнения (1.1) – порядок старших производных.

Линейное уравнение с частными производными – уравнение вида (1.1), линейное относительно функции u и частных производных $D\,u$.

Квазилинейное уравнение с частными производными – уравнение вида (1.1), линейное относительно главной части.

В нашем курсе мы будем рассматривать только линейные уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} u(x) + c(x) u(x) = f(x). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) с $f(x) \equiv 0$ называется *однородным*.

1.2. Основные уравнения. В этом пункте мы рассмотрим три основных уравнения математической физики.

1) *Волновое уравнение.* Пусть длинная струна совершает плоское поперечное колебательное движение. Положение такой струны в каждый момент времени t можно задать функцией $u(x,t)$. Обозначим через $T(x)$ – горизонтальную составляющую натяжения нити, – линейную плотность нити, $\tilde{f}(x,t)$ – линейную плотность попе-

речной составляющей внешних сил, действующих на нить. Тогда $T(x) = T$ – константа, так как нить совершает поперечные колебания. Уравнение движения участка $[x; x+\delta]$ принимает вид:

$$Tu_x(x+\delta,t) - Tu_x(x,t) + \tilde{f}(x,t)\delta + o(\delta) = \rho u_{tt}(x,t)\delta .$$

Деля это выражение на δ и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем уравнение колебаний струны

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ x \in (x_1; x_2), \qquad (1.3)$$

где $a^2 = T/\rho$ постоянная, характеризующая нить, $f = \tilde{f}/\rho$. $(x_1; x_2)$ – область локализации струны ($-\infty \le x_1 < x_2 \le +\infty$).

Забегая вперед, отметим, что уравнения такого вида относятся к гиперболическому типу (см. §3).

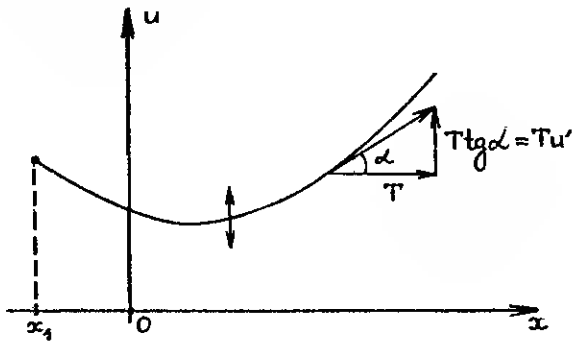

рис. 1

Если рассматривается струна, имеющая конец (концы), то есть x_1 или (и) x_2 конечны, то необходимо добавить уравнения, определяющие движение конца (концов), так называемые граничные условия. Простейшими примерами граничных условий для $x = x_1$ могут служить следующие:

а) закрепленный конец: $u(x_1,t) \equiv const$;

б) свободный конец: $u_x(x_1,t) \equiv 0$ (поперечная составляющая силы, действующей на конец, равна нулю);

в) упругое закрепление: $u_x(x_1,t) = ku(x_1,t)$, $k>0$.

Обобщением уравнения (1.3) является *волновое уравнение* в n-мерном пространстве:

$$u_{tt}(x,t) = a^2\Delta_x u(x,t) + f(x,t),\ x \in G \subset \mathbf{R}^n, \qquad (1.4)$$

где G – область, в которой рассматривается волновой процесс, оператор Лапласа "Δ_x" относится к пространственным переменным x: $\Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} u(x,t)$.

При $n = 2$ уравнение (1.4) описывает колебания тонкой мембраны, $u(x^1, x^2, t)$ в этом случае имеет смысл поперечного отклонения от положения равновесия.

При $n = 3$ уравнение (1.4) описывает распространение электромагнитных или звуковых волн в пространстве, $u(x^1, x^2, x^3, t)$ есть напряженность поля или плотность среды соответственно.

Волновой процесс в неоднородной среде описывается *уравнением колебаний*

$$g(x)u_{tt}(x,t) = \operatorname{div}(p(x)\cdot \operatorname{grad} u(x,t)) - q(x)u(x,t) + f(x,t),\ x \in G,$$

где G область в $\mathbf{R}^n$, $g > 0$, $p > 0$ и q характеристики среды, f функция, описывающая внешнее воздействие.

2) *Уравнение теплопроводности.* Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n$ область G, занимаемую веществом с плотностью $\rho > 0$, коэффициентом теплопроводности k 0 и теплоемкостью $c > 0$. Пусть $F(x,t)$ – зависимость мощности источников тепла, расположенных в G, от времени t. Тогда для любой области $D \subset G$ с границей ∂D, являющейся гладкой поверхностью [1]), мы можем записать закон сохранения теплоты Q в этой области за промежуток времени $[t; t+\delta]$:

$$Q(t+\delta) - Q(t) \equiv \int_D c\rho(u(x,t+\delta) - u(x,t))dx =$$

[1]) Для краткости мы не будем различать понятия поверхности и носителя поверхности.

$$= \int_t^{t+\delta} dt \int_{\partial D} k \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) ds_x + \int_t^{t+\delta} dt \int_D F(x,t) dx,$$

где $u(x,t)$ – температура в точке x в момент времени t, n – внешняя (по отношению к D) единичная нормаль, ds_x – элемент поверхности, описываемый радиус-вектором $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $dx = dx^1 \ldots dx^n$ – элемент объема, $\frac{\partial}{\partial n} \bullet = (n, \operatorname{grad} \bullet)$ нормальная производная.

Если предположить достаточную гладкость функции $u(x,t)$, то, воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, получаем:

$$\int_t^{t+\delta} dt \int_D \left[k \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x,t)) + F(x,t)\right] dx = \int_D c\rho \left(u(x, t+\delta) - u(x,t)\right) dx$$

Деля это выражение на δ и переходя к пределу $\delta \to 0$ под знаком интеграла (также в предположениях достаточной гладкости подынтегральных функций), найдем:

$$\int_D c\rho u_t(x,t) dx = \int_D \left[k \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x,t)) + F(x,t)\right] dx.$$

Поскольку это равенство справедливо для произвольной области D G, то должно выполняться

$$u_t(x,t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x,t)) + f(x,t), \ x \in G,$$

где $a^2 = 1/c\rho$, $f(x,t) = a^2 F(x,t)$

Учтем, что $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \bullet) = \Delta_x \bullet$, тогда получаем *уравнение теплопроводности*:

$$u_t(x,t) = a^2 \Delta_x u(x,t) + f(x,t), \ x \in G. \qquad (1.5)$$

Это уравнение относят к параболическому типу (см. §3).

Простейшими примерами граничных условий могут служить следующие:

а) задана температура на границе: $u(x,t)\big|_{x \in \partial G} = u_0(x,t)$ – краевое условие *типа Дирихле* (*первого рода*);

б) задан поток на границе: $\frac{\partial}{\partial n} u(x,t)\Big|_{x \in \partial G} = u_1(x,t)$ – краевое условие *типа Неймана* (*второго рода*);

в) задан процесс теплообмена на границе: $\left[k \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) - u(x,t)\right]_{x \in \partial G} = u_2(x,t)$ – краевое условие *третьего рода*.

Уравнение (1.5) описывает также процесс диффузии, причем $u(x,t)$ в этом случае имеет смысл концентрации.

Процессы распространения тепла и диффузии в неоднородной среде с характеристиками $g > 0$, $p > 0$ и q описываются уравнением

$$g(x) u_t(x,t) = \operatorname{div}(p(x) \cdot \operatorname{grad} u(x,t)) - q(x) u(x,t) + f(x,t), \ x \in G$$

(*уравнение диффузии*).

3) *Уравнение Пуассона.* Рассмотрим стационарное ($u(x,t) \equiv u(x)$, $f(x,t) \equiv f(x)$) уравнение (1.5):

$$-\Delta u(x) = F(x) \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) называется *уравнением Пуассона*. Оно описывает, например, потенциал электростатического поля $u(x)$ при заданной плотности зарядов $\frac{1}{4\pi} F(x)$ и обычно рассматривается в совокупности с краевыми условиями типа Дирихле и Неймана (задачи Дирихле и Неймана соответственно)

Уравнение (1.6) относят к эллиптическому типу (см. §3)

В случае, когда $F(x) \equiv 0$, уравнение (1.6) называется *уравнением Лапласа*.

<u>Определение 1.</u> Пусть G область в $\mathbf{R}^n$. Функция $u(x)$ называется *гармонической* в G, если $u(x) \in C^2(G)$ и $\Delta u(x) = 0$ в G.

§2. Приведение уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду

2.1. Канонический вид. В предыдущем параграфе были получены основные уравнения математической физики, главные части которых для случая двух переменных x, y (x,y $\mathbf{R}$) имеют вид:

а) $u_{xx} - a^2 u_{yy}$ для волнового уравнения (a 0);

б) u_{xx} для уравнения теплопроводности;

в) $u_{xx} + u_{yy}$ для уравнения Пуассона.

Замечание 1. Коэффициент a без ограничения общности можно считать равным единице (производя замену y на y/a, этого всегда можно добиться).

Определение 1. Вид квазилинейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, в котором главная часть имеет один из вышеперечисленных видов, называется *каноническим.*

Возникает вопрос о приведении произвольного (квази)линейного уравнения второго порядка к каноническому виду в некоторой окрестности заданной точки (x_0, y_0).

Основное утверждение данного параграфа состоит в том, что для случая двух переменных это приведение почти всегда можно сделать (смысл слова "почти" будет раскрыт ниже).

2.2. Уравнение характеристик. Рассмотрим общий вид квазилинейного уравнения второго порядка в $\mathbf{R}^2$:

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + C(x,y)u_{yy}(x,u) + \\ + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (2.1)$$

Метод приведения к каноническому виду естественно искать, опираясь на опыт работы с простейшими уравнениями. Например, рассмотрим уравнение с главной частью вида $v_{\xi\eta}(\xi,\eta)$, в простейшем случае:

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0,\ (\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2$$

Его общее решение представляется в виде суммы двух произвольных дважды непрерывно дифференцируемых функций:

$$v(\xi,\eta) = I(\xi) + J(\eta)$$

Именно к виду $v_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ и постараемся привести главную часть уравнения (2.1).

Сделаем невырожденную замену переменных:

$$\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y); \qquad (2.2)$$

$$\xi \in C^2(U),\ \eta \in C^2(U),\ \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{ à } U,$$

где U малая окрестность точки (x_0, y_0).

В этом параграфе мы будем считать, что функции A, B, C и u принадлежат классу $C^2(U)$, причем $A \neq 0$ в U.

Введем обозначение $v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. Здесь $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ обратная замена (существует, поскольку исходная замена является невырожденной).

Остановимся подробнее на технике дифференцирования. Правило дифференцирования сложной функции дает

$$\frac{\partial}{\partial x}\bullet = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\bullet; \qquad (2.3^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\bullet = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\bullet. \qquad (2.3^{**})$$

Дифференцируя повторно, заметим, что в случае линейной связи между (ξ,η) и (x,y) правила перемножения многочленов и дифференцирования совпадают: выполняются коммутативность операторов дифференцирования между собой и с константами, ассоциативность и дистрибутивность (производная суммы равна сумме производных). По этой причине для нахождения главной части уравнения относительно $v(\xi,\eta)$ достаточно формально возвести в квадрат выражения (2.3*) и (2.3**) (дифференцирование коэффициентов ξ_x, ξ_y, η_x и η_y даст только множители при производных первого порядка):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bullet = \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet + 2\xi_x\eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\bullet + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet + (\ldots)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + (\ldots)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\bullet = \xi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet + 2\xi_y\eta_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\bullet + \eta_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet + (\ldots)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + (\ldots)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\bullet = \xi_x\xi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\bullet + \eta_x\eta_y \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet + \\ + (\ldots)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + (\ldots)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet.$$

Следовательно, в результате произведенной замены (2.2) уравнение (2.1) примет следующий вид:

$$a(\xi,\eta)v_{\xi\xi} + 2b(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)v_{\eta\eta} + \Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta) = 0, \quad (2.3)$$

где
$$a = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,$$
$$b = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y,$$
$$c = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2;$$
$$\Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta) = F(x,y,u,u_x,u_y) + (\ldots)v_\xi + (\ldots)v_\eta$$

(конкретный вид функции здесь нам не интересен, так как важна только главная часть уравнения).

Согласно высказанной выше идее потребуем, чтобы $a = 0$ и $c = 0$ в U:

$$A(x,y)\xi_x^2(x,y) + 2B(x,y)\xi_x(x,y)\xi_y(x,y) + C(x,y)\xi_y^2(x,y) = 0,$$
$$A(x,y)\eta_x^2(x,y) + 2B(x,y)\eta_x(x,y)\eta_y(x,y) + C(x,y)\eta_y^2(x,y) = 0.$$

Таким образом, надо найти в классе $C^2(U)$ два решения $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ уравнения

$$A(x,y)f_x^2(x,y) + 2B(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y) + C(x,y)f_y^2(x,y) = 0, \quad (2.4)$$

для которых якобиан $\begin{vmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{vmatrix} \neq 0$ в U. Тогда, сделав замену $\xi = f_1(x,\xi)$, $\eta = f_2(x,\xi)$, мы получим уравнение

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \tilde{\Phi}(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta), \quad (2.5)$$

где $\tilde{\Phi} = -\Phi/2b$.

Замечание 2. Если $a(x,y) = 0$ и $c(x,y) = 0$ в U, то ни в какой точке окрестности U коэффициент $b(x,y)$ не равен нулю, так как иначе бы получили, что в результате невырожденной замены уравнение второго порядка перешло в уравнение первого порядка

Как описать новые координаты? Нужно найти зависимость между переменными x и y вдоль координатных линий $\xi = const$ и $\eta = const$

<u>Определение 2.</u> Уравнение (2.4) называется *уравнением характеристик* для уравнения (2.1). *Характеристиками* уравнения (2.1)

называются линии уровня решения $f(x,y)$ уравнения (2.4), то есть кривые, задаваемые равенством $f(x,y) = const$.

Вдоль характеристики полный дифференциал решения $f(x,y)$ уравнения (2.4) равен нулю:

$$df = f_x dx + f_y dy = 0,$$

откуда получаем, что $f(x,y) = const$ вдоль решений уравнения

$$A(x,y)(dy)^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)(dx)^2 = 0. \quad (2.6)$$

Замечание 3. Уравнение (2.6) также называют уравнением характеристик. Мнемоническое правило записи этого уравнения следующее: взять главную часть уравнения (2.1) и заменить в ней производные по одной переменной на дифференциалы другой переменной, при этом изменив знак на противоположный при смешанной производной, и все это приравнять нулю.

Если $f_x \neq 0$ в окрестности U (или в некоторой меньшей окрестности), то уравнение (2.6) можно переписать в следующем виде:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0. \quad (2.7)$$

Это квадратное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$ с дискриминантом $D = 4B^2 - 4AC$. Возможны следующие варианты:

1) существует окрестность V точки (x_0, y_0) (V U), в которой

а) $D>0$,

б) D 0,

в) $D<0$;

2) $D(x_0, y_0) = 0$ и в любой окрестности точки (x_0, y_0) дискриминант D отличен от тождественного нуля.

Рассмотрим каждый случай в отдельности

1.а) $D>0$. Тогда существуют два корня квадратного уравнения (2.7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y) - \sqrt{\frac{1}{4}D(x,y)}}{A(x,y)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y) + \sqrt{\frac{1}{4}D(x,y)}}{A(x,y)}.$$

В правых частях стоят функции из класса $C^2(V)$. Из курса диффе-

ренциальных уравнений известно, что для таких уравнений существуют первые интегралы $f_1(x,y) = const$ и $f_2(x,y) = const$ из того же класса, и, следовательно, существует замена переменных $\xi = f_1(x.\xi)$, $\eta = f_2(x,\xi)$, причем

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\sqrt{D}}{A} \neq 0 \text{ в } V.$$

Это и есть искомая замена, переводящая уравнение (2.1) в уравнение (2.5) в окрестности V. Для приведения уравнения (2.5) к каноническому виду

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta) \qquad (2.8)$$

достаточно положить $w(\alpha,\beta) = v(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$, то есть перейти к новым переменным $\alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2}$ и $\beta = \dfrac{\xi-\eta}{2}$.

Замечание 4. Вид уравнения (2.5) иногда называют *первым каноническим*, а уравнения (2.8) – *вторым каноническим*.

1.б) D 0. Аналогично случаю 1.а мы можем найти функции f_1 и f_2, но только в этом случае они будут линейно зависимы, поскольку D 0. Сделаем замену переменных $\xi = f_1(x,\xi)$, $\eta = \eta(x,\xi)$, где функция (x,y) выбирается произвольным образом из соображений невырожденности замены. Тогда уравнение (2.1) перейдет в уравнение

$$2b(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)v_{\eta\eta} + \Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta) = 0.$$

Заметим, что функции A и C одного (для определенности неотрицательного) знака, так как $AC = B^2 \geq 0$. Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$b = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x \pm \sqrt{C}\eta_y\right).$$

Здесь знаки "+" или " " выбираются в зависимости от знака коэффициента B ($B = \pm\sqrt{AC}$). В силу уравнения характеристик (2.4) первый сомножитель в последнем выражении для b равен нулю:

$$\left(\sqrt{A}\xi_x \pm \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0.$$

Итак, $b = 0$, и мы получили уравнение канонического вида:

$$v_{\eta\eta} = -\Phi/c. \qquad (2.9)$$

1.в) $D<0$. Как и в случае 1.а квадратное уравнение (2.7) имеет два различных корня, но уже комплексных:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B(x,y) - i\sqrt{\frac{1}{4}|D(x,y)|}}{A(x,y)}. \quad \frac{dx}{dy} = \frac{B(x,y) + i\sqrt{\frac{1}{4}|D(x,y)|}}{A(x,y)}.$$

Тогда функции $\xi = f_1(x,y)$ и $\eta = f_2(x,y)$ можно выбрать так, что они будут комплексносопряженными, и в новых, уже действительных, координатах

$$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$$

уравнение (2.1) примет канонический вид

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} = H(\alpha,\beta,w,w_\alpha,w_\beta). \qquad (2.10)$$

2) Если $D(x_0,y_0) = 0$ и в любой окрестности точки (x_0,y_0) есть точка, в которой D 0, то уравнение (2.1) можно привести к каноническому виду только в точке (x_0,y_0) (см. §3).

Пример 1. Уравнение Трикоми: $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

Для $x>0$ в соответствии с 1.в оно приводится к каноническому виду $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{3\eta}u_\eta = 0$, $\eta < 0$. Для $x<0$ $u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0$, $\xi > \eta$. При $x = 0$ уравнение Трикоми уже имеет канонический вид, но ни в какой окрестности точки с нулевой абсциссой оно не может быть приведено к каноническому виду.

Замечание 5. Для случая большего количества переменных такое приведение (в некоторой окрестности точки) в общем случае сделать нельзя (см. [6]). В следующем параграфе будет показана возможность такого приведения в точке.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + (y^2-4)u_{yy} + 2yu_y = -64x^3, \ (x,y) \in \mathbf{R}^2. \qquad (2.11)$$

Решение. Воспользовавшись замечанием 3, запишем уравнение

характеристик:

$$x^2(dy)^2 + 2xydxdy + (y^2 - 4)(dx)^2 = 0.$$

Предполагая, что вдоль характеристик $dx \neq 0$, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - 4 = 0 \qquad (2.12)$$

Далее вычисляем дискриминант полученного квадратного уравнения:

$$D/4 = (xy)^2 - x^2(y^2 - 4) = (2x)^2.$$

Заметим, что на прямой $x = 0$ реализуется ситуация 2), так что приведение к каноническому виду возможно лишь в каждой из полуплоскостей $x < 0$ и $x > 0$. В них $D > 0$ и существует два различных решения квадратного уравнения (2.12):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y-2}{x} \text{ и } \frac{dy}{dx} = -\frac{y+2}{x}. \qquad (2.13)$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, получаем

$$\ln|y \pm 2| = -\ln|x| + C,$$

откуда следует связь между y и x для решений каждого из дифференциальных уравнений (2.13):

$$x(y-2) = C_1 \text{ и } x(y+2) = C_2,$$

где C_1 и C_2 произвольные константы. Следовательно, функции

$$f_1(x,y) = x(y-2) \text{ и } f_2(x,y) = x(y+2)$$

постоянны для каждого решения $y = y(x)$ соответствующего уравнения (2.13), поэтому эти функции можно использовать для замены переменных:

$$\xi = x(y-2),\ \eta = x(y+2). \qquad (2.14)$$

Замечание 6. Очевидно, выбор новых переменных неоднозначен. Можно было бы положить $\xi = g_1(f_1(x,y))$, $\eta = g_2(f_2(x,y))$, где g_1 и g_2 произвольные строго монотонные дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной.

При замене (2.14) производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\bullet = (y-2)\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + (y+2)\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\bullet = x\frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + x\frac{\partial}{\partial \eta}\bullet,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bullet = (y-2)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet + (y+2)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet + 2(y^2-4)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\bullet,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\bullet = x^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet + x^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet + 2x^2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\bullet,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\bullet = x(y-2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\bullet + x(y+2)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\bullet + 2xy\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\bullet + \frac{\partial}{\partial \xi}\bullet + \frac{\partial}{\partial \eta}\bullet.$$

Найдем уравнение, которому будет удовлетворять функция $v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. В соответствии с теорией, коэффициенты при $v_{\xi\xi}$ и $v_{\eta\eta}$ равны нулю. Вычислим остальные коэффициенты:

при $v_{\xi\eta}$ $\quad 4x^2(y^2-4) + 4x^2y^2 = 16x^2 = (\eta - \xi)^2$;

при v_{ξ} $\quad 2xy - 2xy = 0$;

при v_{η} $\quad 2xy - 2xy = 0$.

В итоге получаем уравнение

$$(\eta - \xi)^2 v_{\xi\eta} = (\eta - \xi)^3,$$

или

$$v_{\xi\eta} = \eta - \xi.$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0,\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad (2.15)$$

Решение. Уравнение характеристик имеет вид

$$x^2(dy)^2 - 2xydxdy - 3y^2(dx)^2 = 0,$$

откуда

$$(xdy - 3ydx)(xdy + ydx) = 0.$$

В каждой из полуплоскостей $x > 0$ и $x < 0$ уравнение имеет гиперболический тип, так как есть два семейства характеристик $y = y(x)$, вдоль которых выполняются дифференциальные уравне-

ния

$$y' = \frac{3y}{x} \text{ или } y' = -\frac{y}{x}$$

соответственно. Следовательно, для первого семейства $y = C_1x^3$, а для второго $y = C_2x^{-1}$. Здесь C_1 и C_2 произвольные константы, включая ноль. Именно их значения на характеристиках и можно взять в качестве значений новых переменных:

$$\xi = \frac{y}{x^3},\ \eta = xy.$$

Подчеркнем, что как и в предыдущем примере (замечание 6), этот выбор неоднозначен. Найдем как преобразуются производные, учитывая, что коэффициенты при $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bullet$ и $\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\bullet$ можно не вычислять, так как в соответствии с теорией в уравнении для функции $v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ будут отсутствовать производные $v_{\xi\xi}$ и $v_{\eta\eta}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\bullet = -\frac{3y}{x^4}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet + y\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\bullet = \frac{1}{x^3}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet + x\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\bullet = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3y}{x^4}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet + y\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet\right) = (\ldots)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bullet + (\ldots)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} +$$

$$+\left(\frac{y}{x^3} - \frac{3y}{x^3}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet - \frac{3}{x^4}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet + \frac{\partial}{\partial\eta}\bullet,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bullet = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3y}{x^4}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet + y\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet\right) = (\ldots)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (\ldots)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} -$$

$$-\frac{6y^2}{x^4}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet + \frac{12y}{x^5}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\bullet = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial}{\partial\xi}\bullet + x\frac{\partial}{\partial\eta}\bullet\right) = (\ldots)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (\ldots)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{2}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bullet.$$

В результате подстановки этих соотношений в уравнение (2.15) получаем, что функция $v(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(-x^2\frac{6y^2}{x^4} - 2xy\frac{2y}{x^3} - 3y^2\frac{2}{x^2}\right)v_{\xi\eta} + \left(x^2\frac{12y}{x^5} - 2xy\frac{3}{x^4} + 2x\frac{3y}{x^4}\right)v_\xi +$$

$$+(2xy - 2xy)v_\eta = 0,$$

или

$$-\frac{16y^2}{x^2}v_{\xi\eta} + \frac{12y}{x^3}v_\xi = 0,$$

откуда

$$4\eta v_{\xi\eta} - 3v_\xi = 0.$$

§3. Классификация уравнений второго порядка в точке

3.1. Соответствие с квадратичной формой. Рассмотрим теперь случай произвольного количества переменных и дадим классификацию уравнений второго порядка в точке.

Как и в предыдущем параграфе рассмотрим (квази)линейное дифференциальное уравнение второго порядка, но уже для произвольного количества переменных:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}u(x) + F(x, u(x), \operatorname{grad} u(x)) = f(x),\ x \in G, \quad (3.1)$$

где G область в $\mathbf{R}^n$, в которой рассматривается уравнение (3.1), $u \in C^2(G)$. Для определенности полагаем, что $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ [1]).

Выберем и зафиксируем произвольную точку $x_0 \in G$. Тогда коэффициенты $a^{ij} = a^{ij}(x_0)$ - это фиксированные числа. Далее рассмотрим главную часть уравнения (3.1)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\bullet \quad (3.2)$$

[1]) Вид уравнения зависит только от суммарных коэффициентов $a^{ij} + a^{ji}$, так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial x^i}$ в силу гладкости функции u.

Заменим операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^i}$ символами t_i, $i = 1,\dots,n$, которые мы будем трактовать как действительные переменные:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} t_i t_j \,. \tag{3.3}$$

Это квадратичная форма. Ее можно привести к каноническому виду (например, методом Лагранжа выделения точных квадратов). А именно, существует невырожденная квадратная матрица $\|s_p^i\|$, определяющая линейную замену $\tau_p = \sum_{i=1}^{n} s_p^i t_i$, $p = 1,\dots,n$, то есть

$$\|\tau_1 \quad \dots \quad \tau_n\| = \|t_1 \quad \dots \quad t_n\| \cdot \begin{Vmatrix} s_1^1 & \dots & s_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^n & \dots & s_n^n \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

такую, что квадратичная форма (3.3) в результате этой замены переходит в квадратичную форму

$$\sum_{p=1}^{n} b^{pp} \tau_p \tau_p \,, \tag{3.5}$$

где $b^{pq} = 0$ при $p \neq q$.

Оказывается, что при помощи матрицы $\|s_p^i\|$ можно построить замену переменных в уравнении (3.1), которая приведет главную часть (3.2) к виду

$$\sum_{p=1}^{n} b^{pp} \frac{\partial^2}{\left(\partial \xi^p\right)^2} \bullet \,. \tag{3.6}$$

Посмотрим, как преобразуются операторы дифференцирования при невырожденной достаточно гладкой замене переменных $\xi^p = \xi^p(x^1,\dots,x^n)$, $p = 1,\dots,n$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet = \sum_{p=1}^{n} \xi_{x^i}^p \frac{\partial}{\partial \xi^p} \bullet \,, \; i = 1,\dots,n \,,$$

или

$$t_i = \sum_{p=1}^{n} \xi_{x^i}^p \tau_p \,, \; i = 1,\dots,n$$

Здесь операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \xi^p}$ заменены на символы τ_p. Учтем далее, что замена является невырожденной, и, следовательно, существует обратная замена переменных $x^i = x^i(\xi^1,\dots,\xi^n)$, $i = 1,\dots,n$, для которой можно записать

$$\frac{\partial}{\partial \xi^p} \bullet = \sum_{i=1}^{n} x_{\xi^p}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet \,, \; p = 1,\dots,n,$$

или

$$\tau_p = \sum_{i=1}^{n} x_{\xi^p}^i t_i \,, \; p = 1,\dots,n \,. \tag{3.7}$$

Если замена переменных $x = x(\xi)$ линейна и описывается матрицей $\|s_p^i\|$:

$$\begin{Vmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} s_1^1 & \dots & s_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^n & \dots & s_n^n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{Vmatrix} , \tag{3.8}$$

то $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} = s_p^i$, и выражения (3.4) и (3.7) совпадают.

Остается только заметить, что главная часть уравнения преобразуется по тем же законам, что и квадратичная форма (в силу правил повторного дифференцирования, которые обсуждались в §2).

Итак, доказано следующее

<u>Утверждение 1.</u> Главная часть (3.2) уравнения (3.1) преобразуется при замене переменных (3.8) как квадратичная форма (3.3) при замене переменных (3.4).

3.2. Классификация. Преобразуем главную часть уравнения (3.1) в точке $x_0 \in G$ к виду (3.6).

<u>Определение 1.</u> Если все коэффициенты b^{ii} отличны от нуля и имеют один и тот же знак, то уравнение (3.1) в точке x_0 относится

к *эллиптическому типу*; если все b^{ii} отличны от нуля, но есть b^{ii} разных знаков, то – к *гиперболическому типу*; если есть b^{ii} равные нулю, то – к *параболическому типу*.

Здесь необходимо сделать следующие замечания.

Замечание 1. Приведенная классификация зависит от точки $x_0 \in G$. В общем случае нельзя гарантировать даже то, что уравнение (3.1) имеет фиксированный тип в сколь угодно малой окрестности точки x_0 (см. §2).

Замечание 2. Корректность определения 1, то есть независимость от матрицы $\|s_p^j\|$, непосредственно следует из закона инерции квадратичных форм.

Замечание 3. Геометрический смысл определения легко понять, рассмотрев в случае двух переменных кривые на плоскости, задаваемые уравнением $\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} t_i t_j = const$.

Пример 1. Определить тип уравнения с главной частью

$$u_{x^1x^1} + 2u_{x^1x^2} - 4u_{x^1x^3} + 2u_{x^2x^3} + 2u_{x^2x^2} - 3u_{x^3x^3},\ x \in \mathbf{R}^3.$$

Решение. Приведем соответствующую квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа выделения точных квадратов:

$$t_1^2 + 2t_1t_2 - 4t_1t_3 + 2t_2t_3 + 2t_2^2 - 3t_3^2 = (t_1 + t_2 - 2t_3)^2 + 6t_2t_3 + t_2^2 -$$
$$-7t_3^2 = (t_1 + t_2 - 2t_3)^2 + (t_2 + 3t_3)^2 - 16t_3^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2,$$

где

$$\|\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3\| = \|t_1 \quad t_2 \quad t_3\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, замена переменных

$$\begin{Vmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix}$$

приведет главную часть к виду

$$v_{\xi^1\xi^1} + v_{\xi^2\xi^2} - v_{\xi^3\xi^3}$$

гиперболический тип.

Пример 2. Определить в каждой точке $x \in \mathbf{R}^3$ тип уравнения с главной частью

$$u_{x^1x^1} + u_{x^2x^2} + 2\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)u_{x^2x^3} + \left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)u_{x^3x^3}.$$

Решение. Обозначим значение коэффициента $(x^1)^2 + (x^2)^2$ в рассматриваемой точке x через и рассмотрим соответствующую квадратичную форму:

$$t_1^2 + t_2^2 + 2\alpha t_2 t_3 + \alpha t_3^2.$$

Для приведения к каноническому виду этой квадратичной формы воспользуемся методом Лагранжа.

$$t_1^2 + t_2^2 + 2\alpha t_2 t_3 + \alpha t_3^2 = t_1^2 + (t_2 + \alpha t_3)^2 + (\alpha - \alpha^2)t_3^2.$$

Таким образом, замена переменных

$$\tau_1 = t_1,\ \tau_2 = t_2 + \alpha t_3,\ \tau_3 = t_3.$$

приводит квадратичную форму к диагональному виду

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \alpha(1 - \alpha)\tau_3^2.$$

Следовательно, при $\alpha > 1$, то есть во внешности замыкания цилиндра $\overline{H} = \left\{x : (x^1)^2 + (x^2)^2 \le 1\right\}$, уравнение имеет гиперболический тип, при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ (на границе и оси цилиндра H) параболический, при $0 < \alpha < 1$ (во внутренности цилиндра H за исключением оси) эллиптический.

Пример 3. Определить тип уравнения

$$u_{x^1x^2} + u_{x^2x^3} + u_{x^3x^1} = 0$$

Решение. Приравнивая к нулю соответствующую квадратичную форму $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$, получаем в пространстве переменных (t_1, t_2, t_3) уравнение конуса, так как соответствующая поверхность содержит три координатные оси. Следовательно, форма знакопеременная, и тип уравнения гиперболический. [1])

---

[1]) Можно было, конечно, привести квадратичную форму к каноническому виду, начав с замены $t_1 = \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2$, $t_2 = \tilde{t}_1 - \tilde{t}_2$.

3.3. Характеристические поверхности.

Определение 2. Направление, задаваемое вектором $\|k_1 \dots k_n\|$, называется *характеристическим* для уравнения (3.1) в точке $x_0 \in G$, если $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} k_i k_j = 0$.

Приводя главную часть уравнения (3.1) в точке $x_0 \in G$ к виду (3.6), получаем, что эллиптические уравнения не имеют характеристических направлений, а параболические и гиперболические уравнения имеют по крайней мере одно, а то и целый конус характеристических направлений.

Определение 3. Гладкая поверхность в области $D \subset G$ называется *характеристической* для уравнения (3.1) или просто *характеристикой* уравнения (3.1), если ее нормаль n в каждой точке имеет характеристическое направление.

Пусть характеристика является гладкой поверхностью и задается уравнением $f(x) = 0$, где f – скалярная функция. Тогда ее единичную нормаль можно найти по формуле

$$n = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|},$$

и, следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} = 0. \qquad (3.9)$$

В двумерном случае это уравнение совпадает с уравнением (2.4), оправдывая название последнего (см. определение 2 §2).

Глава II

Задача Коши и смешанная задача для волнового уравнения

§4. Задача Коши для гиперболических уравнений на плоскости. Формула Даламбера для волнового уравнения

4.1. Классическая задача Коши. В главе рассматриваются начальные и начально-краевые задачи для волнового уравнения, которое относится к гиперболическому типу.

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} + F(x, u(x), \operatorname{grad} u(x)) = 0, \ x \in \mathbf{R}^n, \qquad (4.1)$$

где $a^{ij}(x)$ – коэффициенты, непрерывно зависящие от x, функция F непрерывна по совокупности всех своих аргументов.

Пусть S – достаточно гладкая ориентированная поверхность в $\mathbf{R}^n$, G – некоторая область, замыкание которой содержит поверхность S. Если уравнение (4.1) имеет гиперболический тип в области G, то классическая задача Коши для него ставится следующим образом: *найти функцию* $u(x)$ *из класса* $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, *удовлетворяющую уравнению* (4.1) *и начальным условиям*

$$u(x)\big|_S = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial n}(x)\Big|_S = u_1(x), \qquad (4.2)$$

где $u_0(x)$, $u_1(x)$ – заданные на поверхности S функции, n – единичная нормаль к поверхности S.

Под *корректностью* постановки задачи понимается выполнение следующих трех условий:

1) решение существует в заданном классе функций;

2) это решение является единственным;

3) решение непрерывно зависит от начальных и краевых данных (иногда и от других параметров задачи, например, коэффициентов) при заданных топологиях в пространстве решений и в пространстве начальных и краевых данных.

Пример некорректно поставленной задачи для эллиптических уравнений будет приведен в §8. Здесь же без доказательства сформулируем следующее

Утверждение 1. Если нормаль n к поверхности S хотя бы в одной точке имеет характеристическое направление, то ни в какой окрестности поверхности S поставленная задача Коши не будет корректной.

Замечание 1. Из утверждения 1 следует, что постановка классической задачи Коши (4.1),(4.2) для гиперболического уравнения может быть корректной только в случае, когда нормаль к поверхности S ни в какой точке не имеет характеристическое направление. Подробнее см. [1].

Пример 1. Решить задачу Коши для уравнения

$$x^2u_{xx}(x,y) - 2xyu_{xy}(x,y) + (y^2-4)u_{yy}(x,y) + 2yu_y(x,y) = -64x^3 \qquad (4.3)$$

в области $G = \{(x,y) : x > 1,\ y \in \mathbf{R}\}$ с начальными условиями

$$u(1,y) = 2y^2 + 2y - 8,\ u_x(1,y) = 6y^2 + 2y - 24. \qquad (4.4)$$

Решение. Согласно результатам примера 2 из §2 уравнение (4.3) в рассматриваемой области относится к гиперболическому типу и в переменных

$$\xi = x(y-2),\ \eta = x(y+2) \qquad (4.5)$$

для функции $v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ имеет следующий вид:

$$v_{\xi\eta} = \eta - \xi. \qquad (4.6)$$

Отметим, что начальные условия (4.4) заданы на прямой, ни в одной точке не касающейся характеристик.

В данном случае легко найти общий вид решения. Сначала проинтегрируем уравнение (4.6) по ξ, считая η параметром, а

$v_\eta(\xi,\eta)$ – неизвестной функцией переменной ξ. Тогда приходим к следующему результату:

$$v_\eta = \eta\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 + C_1,$$

где $C_1 = C_1(\eta)$ – произвольная (с учетом непрерывности v_η – непрерывная) функция параметра η, так как при каждом значении η константа интегрирования получается произвольной. Далее, проинтегрируем последнее соотношение по переменной η, на этот раз считая ξ параметром:

$$v(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\eta^2\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2\eta + I(\xi) + J(\eta),$$

где $J(\eta)$ – произвольная функция переменной η, полученная интегрированием функции $C_1(\eta)$, а $I(\xi)$ – произвольная функция переменной ξ, которая получается при фиксированном ξ как константа при интегрировании по переменной η.

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая, что v – дважды непрерывно дифференцируемая функция, находим:

$$u(x,y) = 2x^2(y^2-4) + I(x(y-2)) + J(x(y+2)),$$

где $I(\xi)$ и $J(\eta)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов ξ и η. Найдем эти функции из начальных условий (4.4):

$$u(1,y) = 2(y^2-4) + I(y-2) + J(y+2) = 2y^2 + 2y - 8,$$

$$u_x(1,y) = 6(y^2-4) + (y-2)I'(y-2) + (y+2)J'(y+2) =$$
$$= 6y^2 + 2y - 24;$$

следовательно,

$$\begin{cases} I(y-2) + J(y+2) = 2y \\ (y-2)I'(y-2) + (y+2)J'(y+2) = 2y \end{cases} \qquad (4.7)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4.7) по y, умножим на $(y-2)$ и вычтем из второго, в результате получим

$$4J'(y+2) = 4.$$

Интегрируя, находим

$$J(\eta) = \eta + C,$$

где C – произвольная постоянная. Далее, воспользуемся первым уравнением системы (4.7):

$$I(y-2) = 2y - J(y+2) = 2y - (y+2+C) = (y-2) - C,$$

следовательно,

$$I(\xi) = \xi - C.\ ^{1)}$$

Итак, функция

$$u(x,y) = 2x^3(y^2-4) + x(y-2) + x(y+2) = 2x^3(y^2-4) + 2xy$$

– решение задачи Коши (4.3),(4.4).

Пример 2. Указать наибольшую область, в которой задача Коши для уравнения (4.3) с начальными условиями (4.4), заданными только на отрезке прямой $x=1$, $0 \le y \le 3$, имеет единственное решение.

Решение. Для определения области не нужно искать решения задачи, достаточно знать характеристики $\xi = const$ и $\eta = const$, определяемые равенствами (4.5).

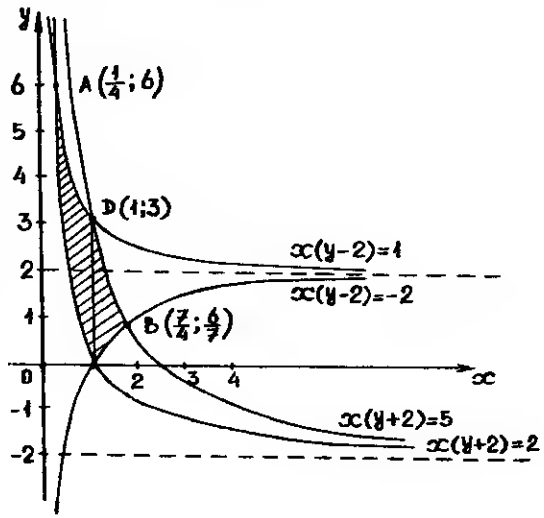

Рис. 2

[1]) Вообще-то, константу C можно было положить нулем с самого начала, так как функции $I(\xi)$ и $J(\eta)$, естественно, определены с точностью до константы (одновременная замена функций $I(\xi)$ и $J(\eta)$ на $I(\xi)$-C и $J(\eta)$+C соответственно не меняет решения)

Проведем характеристики из семейств $\xi = const$ и $\eta = const$ через концы C и D отрезка, на котором поставлены данные Коши (так называются начальные условия). Эти характеристики пересекутся еще в точках A и B (см. рис. 2). Заштрихованная область – искомая.

Действительно, через каждую точку этой области проходит ровно по одной характеристике из семейств $\xi = const$ и $\eta = const$, причем каждая пересекает отрезок CD [1]). Функции $I(\xi)$ и $J(\eta)$ при таких ξ и η определяются, естественно, своими значениями на отрезке CD, которые можно однозначно найти из данных Коши.

С другой стороны, любая точка вне заштрихованной области обладает тем свойством, что хотя бы одна из двух проходящих через нее характеристик не пересекает отрезок CD.

Пример 3. Решить задачу Коши для уравнения

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0 \qquad (4.8)$$

в окрестности отрезка прямой $CD = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ y = 1\}$ с начальными условиями

$$u(x,1) = x+1,\ u_y(x,1) = x+1. \qquad (4.9)$$

Указать наибольшую область, в которой поставленная задача (4.8),(4.9) имеет единственное решение.

Решение. В примере 3 из §2 для уравнения (4.8) были найдены характеристики

$$\xi = \frac{y}{x^3},\ \eta = xy \qquad (4.10)$$

и вид уравнения для функции $v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$.

$$4\eta v_{\xi\eta} - 3v_\xi = 0. \qquad (4.11)$$

Проинтегрируем уравнение (4.11) по η, считая ξ параметром, а v_ξ – неизвестной функцией переменной η:

$$v_\xi = C_1\eta^{3/4}, \qquad (4.12)$$

[1]) Обратите внимание на то, что прямая y=2 тоже является характеристикой ξ=0.

где $C_1 = C_1(\xi)$ – константа, значение которой зависит от параметра ξ, причем из гладкости v следует, что $C_1(\xi)$ является непрерывной функцией.

Уравнение (4.12) можно проинтегрировать по переменной ξ, считая, что η – параметр. Интегрирование функции $C_1(\xi)$ дает функцию $g(\xi)$, так что приходим к следующему результату:

$$v(\xi,\eta) = g(\xi)\eta^{3/4} + f(\eta), \tag{4.13}$$

где $f(\eta)$ – константа, значение которой зависит от параметра η. Из гладкости функции v вытекает, что функции $g(\xi)$ и $f(\xi)$ должны быть дважды непрерывно дифференцируемыми. Таким образом, получаем следующее общее решение уравнения (4.8):

$$u(x,y) = g\left(\frac{y}{x^3}\right)(xy)^{3/4} + f(xy). \tag{4.13'}$$

Теперь подставим функцию u в найденном виде в начальные условия (4.9):

$$\begin{cases} x^{3/4}g\left(x^{-3}\right) + f(x) = x+1 \\ x^{-9/4}g'\left(x^{-3}\right) + \dfrac{3}{4}x^{3/4}g\left(x^{-3}\right) + xf'(x) = x+1 \end{cases}. \tag{4.14}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4.14) по x:

$$-3x^{-13/4}g'\left(x^{-3}\right) + \frac{3}{4}x^{-1/4}g\left(x^{-3}\right) + f'(x) = 1,$$

умножим обе части полученного равенства на x и вычтем из второго уравнения системы. После приведения подобных получается дифференциальное уравнение

$$4x^{-9/4}g'\left(x^{-3}\right) = 1.$$

Обозначим $x^{-3} = z$ и вспомним, что производная всюду понималась как производная по аргументу функции. Получаем:

$$4z^{3/4}g'(z) = 1,$$

откуда $g(z) = z^{1/4} + C$. Постоянную C можно положить нулем [1]).

[1]) Одновременная замена $g(\xi)$ на $g(\xi)-C$ и $f(\eta)$ на $f(\eta)+C\eta^{3/4}$ решения не меняет.

Итак, $g(z) = z^{1/4}$, так что из первого уравнения (4.14) находим

$$f(x) = x + 1 - x^{3/4}\frac{1}{x^{3/4}} = x.$$

Возвращаясь к представлениям (4.13) и (4.13'), получаем

$$u(x,y) = \xi^{1/4}\eta^{3/4} + \eta = y + xy.$$

Как и в предыдущем примере наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение, можно построить опираясь лишь на уравнения характеристик (4.10). На рис. 3 эта область заштрихована.

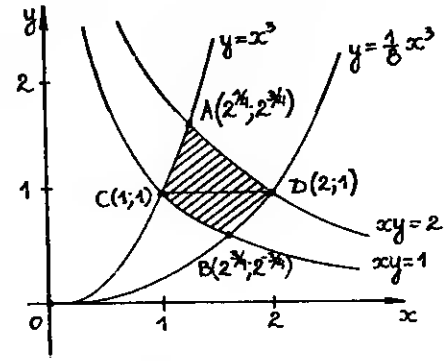

Рис. 3

Замечание 2. В примерах 1 и 3 решение задачи Коши находилось сравнительно легко благодаря отсутствию в первом каноническом виде уравнений хотя бы одной частной производной первого порядка. Значительно большей общностью отличается метод Римана (см., например, [7]), но его изложение выходит за рамки нашего курса.

4.2. Формула Даламбера. Пользуясь подходом, продемонстрированным в примере 1, найдем в общем виде решение классической задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbf{R}$ (уравнения свободных поперечных колебаний бесконечной струны)

$$u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t),\ a > 0 \tag{4.15}$$

в области $G = \{(x,t) : x \in \mathbf{R},\ t > 0\}$ с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \mathbf{R}. \qquad (4.16)$$

Замечание 3. Задание начальных условий на поверхности $S = \{(x,t) : x \in \mathbf{R},\ t = 0\}$ и ограничение $t > 0$ оправданны содержательной стороной задачи.

Для справедливости дальнейших выкладок необходимо, чтобы $u_0(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $u_1(x) \in C^1(\mathbf{R})$. Найдем функцию $u(x,t)$ из класса $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, удовлетворяющую уравнению (4.15) и начальным условиям (4.16).

Уравнение характеристик для уравнения (4.15) выглядит следующим образом:

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$

Его решения $x = \pm at + const$ приводят к замене переменных

$$\xi = x - at,\ \eta = x + at,$$

$$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2a}\right),$$

в результате которой исходное уравнение (4.15) принимает вид

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0.$$

Интегрируя два раза это уравнение (по ξ и по η), находим

$$v(\xi,\eta) = I(\xi) + J(\eta),$$

или

$$u(x,y) = I(x - at) + J(x + at), \qquad (4.17)$$

где I, J – произвольные функции из класса $C^2(\mathbf{R})$.

Таким образом, решение задачи Коши (4.15),(4.16) является суммой прямой волны $I(x - at)$ и обратной волны $J(x + at)$. Действительно, график прямой волны с ростом времени t движется по оси абсцисс с постоянной скоростью a вправо, а график обратной волны – влево.

Функции I и J легко выражаются через начальные условия (4.16):

$$\begin{cases} I(x) + J(x) = u_0(x) \\ -aI'(x) + aJ'(x) = u_1(x) \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} I(x) + J(x) = u_0(x) \\ -aI(x) + aJ(x) = \int\limits_{x_0}^{x} u_1(\lambda)d\lambda \end{cases},$$

где x_0 – произвольная фиксированная точка на прямой $\mathbf{R}$. Следовательно,

$$I(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} u_1(\lambda)d\lambda,\ J(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} u_1(\lambda)d\lambda.$$

Итак, приходим к представлению

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x - at) + u_0(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda)d\lambda \qquad (4.18)$$

Эта формула, носящая имя *Даламбера*, и дает решение поставленной задачи.

Из представления (4.18) непосредственно следует, что для нахождения решения u в точке $(x_0, t_0) \in G$ достаточно знать значения функции $u_1(x)$ на отрезке $[x_0 - at_0; x_0 + at_0]$ и значения функции $u_0(x)$ в точках $x_0 - at_0$ и $x_0 + at_0$. По этой причине отрезок $[x_0 - at_0; x_0 + at_0]$ называется *областью зависимости* для точки (x_0, t_0) (см. рис. 4).

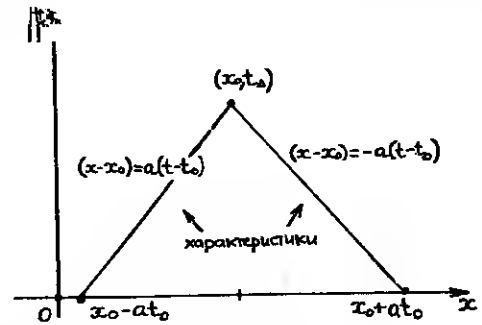

Рис. 4

Поучительно наблюдать за поведением решения $u(x,t)$ в случае, когда начальная скорость $u_1(x)$ тождественно равна нулю:

прямая и обратная волны представляют из себя смещенное начальное отклонение $u_0(x)$, уменьшенное вдвое. Заметим также, что если $u_1(x) \equiv 0$, а функция $u_0(x)$ отлична от нуля только на конечном отрезке, то в каждой точке x при достаточно больших значениях времени t функция u равна нулю

§5. Волновое уравнение в $\mathbf{R}^n$. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши

5.1. Энергетическое неравенство для волнового уравнения. Докажем единственность решения задачи Коши для волнового уравнения при помощи энергетического неравенства.

Рассмотрим в области $G = \{(x,t) : x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0\}$ классическую задачу Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbf{R}^n$

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \Delta_x u(x,t),\ a > 0 \tag{5.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \tag{5.2}$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ – заданные функции из классов $C^1(\mathbf{R}^n)$ и $C(\mathbf{R}^n)$ соответственно, функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$.

Преобразуем уравнение (5.1) к дивергентному виду, для чего умножим его на функцию $2u_t$ и проведем следующие преобразования:

$$\left(u_t^2\right)_t = 2u_t u_{tt} = a^2 \sum_{i=1}^{n} 2u_{x^i x^i} u_t = a^2 \sum_{i=1}^{n} \left[2(u_{x^i} u_t)_{x^i} - (u_{x^i}^2)_t\right],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x^i}^2\right] - 2a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(u_{x^i} u_t) = 0. \tag{5.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$w = u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x^i}^2;\quad J^k = -2a^2 u_t u_{x^k},\ k = 1, \ldots n.$$

Тогда уравнение (5.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) + \operatorname{div}_x J(x,t) = 0. \tag{5.4}$$

где $J = \left(J^1, \ldots, J^n\right)$ – векторная функция, $\operatorname{div}_x J = \sum_{k=1}^{n} J_{x^k}^k$.

Замечание 1. Физический смысл полученного результата следующий. Уравнение (5.4) представляет собой уравнение непрерывности, w – плотность энергии, J – плотность потока энергии.

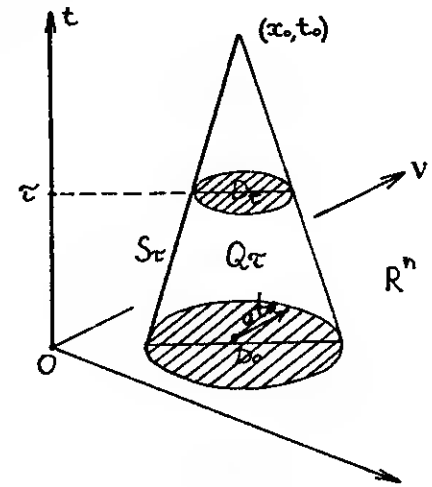

Рис. 5

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ переменных (x,t) конус $Q = \{(x,t) : 0 < t < t_0,\ |x - x_0| < at(t_0 - t)\}$ с вершиной в точке $(x_0, t_0) \in G$. Как легко проверить, нормаль $\nu = \left(\nu^1, \ldots, \nu^n, \nu^{n+1}\right)$ к боковой поверхности конуса $\{(x,t) : 0 < t < t_0,\ |x - x_0| = a(t_0 - t)\}$ в каждой точке удовлетворяет равенству

$$\left(\nu^{n+1}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\nu^i\right)^2 = 0,$$

то есть боковая поверхность конуса является характеристикой.

Рассмотрим произвольный момент времени τ из промежутка $[0;t_0)$ и введем следующие обозначения:

$D_\tau = \{(x,t) : t=\tau,\ |x-x_0| < a(t_0-\tau)\}$ – сечение конуса Q плоскостью $t=\tau$;

$Q_\tau = \{(x,t) : 0<t<\tau,\ |x-x_0| < at(t_0-t)\}$ – усеченный конус;

$S_\tau = \{(x,t) : 0<t<\tau,\ |x-x_0| = at(t_0-t)\}$ – боковая поверхность усеченного конуса;

$E(\tau) = \int\limits_{D_\tau} w dx = \int\limits_{D_\tau}\left(u_t^2 + a^2\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x^i}^2\right)dx$ – интеграл энергии.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть Q – ограниченная область в $\mathbf{R}^{n+1}$ с кусочно гладкой границей ∂Q, $P=(P^1,\dots,P^{n+1})$ – векторная функция переменных $x\in\mathbf{R}^n$ и $t\in\mathbf{R}$, определенная в $\overline{Q}$ и принадлежащая классу $C^1(Q)\cap C(\overline{Q})$, причем $\operatorname{div}_{(x,t)}P=0$, $(x,t)\in Q$. Тогда выполняется равенство

$$\int\limits_{\partial Q}(P,n)ds = 0,$$

где n – внешняя единичная нормаль.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим область $\tilde{Q}$ такую, что $\overline{\tilde{Q}}\subset Q$ и $\partial\tilde{Q}$ – кусочно гладкая поверхность. В $\overline{\tilde{Q}}$ согласно условиям леммы выполняется равенство $\operatorname{div}_{(x,t)}P=0$, следовательно,

$$\int\limits_{\partial\tilde{Q}}\operatorname{div}_{(x,t)}P dxdt = 0$$

Воспользуемся для преобразования интеграла теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_{\partial\tilde{Q}}(P,n)ds = 0$$

Остается устремить область $\tilde{Q}$ к Q и учесть существование интеграла $\int\limits_{\partial Q}(P,n)ds$ ■

Лемма 1 позволяет доказать следующее

Утверждение 1. Пусть функция $u(x,t)$ из класса $C^2(Q_\tau)\cap C^1(\overline{Q_\tau})$ удовлетворяет в усеченном конусе Q_τ уравнению (5.1) и на его основании D_0 начальным условиям (5.2). Тогда выполняется энергетическое неравенство

$$E(\tau)\le E(0). \tag{5.5}$$

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим векторную функцию $P=(J^1,\dots,J^n,w)$. Тогда из уравнения (5.4) следует, что

$$\operatorname{div}_{(x,t)}P(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} J^i_{x^i} + w_t = 0.$$

Далее воспользуемся леммой 1, получаем

$$0 = \int\limits_{\partial Q_\tau}(P,n)ds = \int\limits_{D_0}(P,n)ds + \int\limits_{D_\tau}(P,n)ds + \int\limits_{S_\tau}(P,n)ds,$$

где n – внешняя (по отношению к Q_τ) единичная нормаль к поверхности ∂Q_τ. На поверхности D_0: $n=(0,\dots,0,-1)$, $(P,n)=-w$; на поверхности D_τ: $n=(0,\dots,0,1)$, $(P,n)=w$; на поверхности S_τ: $n=\nu$,

$$(P,n) = \sum_{i=1}^{n}\left(-2a^2u_tu_{x^i}\right)\nu^i + \left(u_t^2 + a^2\sum_{i=1}^{n}u_{x^i}^2\right)\nu^{n+1} =$$

$$= \frac{a^2}{\nu^{n+1}}\left[-2\sum_{i=1}^{n}u_t\nu^i u_{x^i}\nu^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left(u_t\nu^i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x^i}\nu^{n+1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{a^2}{\nu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\left(u_t\nu^i - u_{x^i}\nu^{n+1}\right)^2 \ge 0$$

При преобразованиях мы учли, что S_τ – характеристика, $\nu^{n+1}>0$ для внешней нормали. Следовательно, справедливо неравенство

$$-E(0) + E(\tau) = -\int\limits_{S_\tau}(P,n)ds \le 0.$$

■

5.2. Единственность решения. Используя энергетическое неравенство (5.5), докажем единственность решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в $\mathbf{R}^n$

$$u_{tt}(x,t) = \Delta_x u(x,t) + f(x,t) \qquad (5.6)$$

с начальными условиями (5.2)

Теорема 1. Если в замыкании некоторого усеченного конуса $\overline{Q_\tau}$ существует решение задачи Коши (5.6),(5.2) из класса $C^2(Q_\tau) \cap C^1(\overline{Q_\tau})$, то оно единственно.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{\tilde{u}}(x,t)$ – решения задачи Коши (5.6),(5.2) из класса $C^2(Q_\tau) \cap C^1(\overline{Q_\tau})$. Тогда их разность $u = \tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}$ – решение задачи Коши для однородного уравнения (5.1) с однородными начальными условиями ($u(x,0) \equiv 0$ и $u_t(x,0) \equiv 0$). Следовательно, в произвольный момент времени t из отрезка $[0;\tau]$ должно выполняться энергетическое неравенство

$$0 \le E(t) = \int_{D_t} \left(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \right) dx \le E(0) = 0$$

С учетом гладкости функции u получаем, что $u_t \equiv 0$ и $u_{x_i} \equiv 0$, $i = 1,\dots n$ в $\overline{Q_\tau}$, но $u(x,0) = 0$, следовательно, $u \equiv 0$ в $\overline{Q_\tau}$. Таким образом, решения $\tilde{u}$ и $\tilde{\tilde{u}}$ совпадают в замыкании конуса $\overline{Q_\tau}$ ■

Следствие 1. Если решение классической задачи Коши (5.6),(5.2) существует в замыкании области $\overline{G} = \{(x,t) : x \in \mathbf{R}^n,\ t \ge 0\}$, то оно единственно (поскольку единственно в произвольном усеченном конусе)

Следствие 2. Для того, чтобы определить решение u в точке (x_0, t_0) достаточно знать значения функций u_0 и u_1 в замкнутом шаре $\overline{B} = \{x : |x - x_0| \le a t_0\}$, который называется *областью зависимости* для точки (x_0, t_0) (естественное обобщение понятия, введенного в предыдущем параграфе).

Следствие 3. Энергетическое неравенство, и, следовательно, теорема о единственности решения задачи Коши, справедливы в области, ограниченной боковой поверхностью "пространственного типа", то есть поверхностью, для которой внешняя нормаль

$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^{n+1})$ удовлетворяет неравенству

$$(\nu^{n+1})^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} (\nu^i)^2 \ge 0$$

§6. Волновое уравнение в пространстве. Формула Кирхгофа. Принцип Гюйгенса

6.1. Формула Кирхгофа. Рассмотрим в области $G = \{(x,t) : x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0\}$ задачу Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \Delta_x u(x,t),\ (x,t) \in G,\ a > 0, \qquad (6.1)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \qquad (6.2)$$

Пусть функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, определяющие начальные условия, принадлежат классам $C^3(\mathbf{R}^3)$ и $C^2(\mathbf{R}^3)$ соответственно. Наша цель – проверить, что *формула Кирхгофа*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|x-y|=at} u_1(y)\,ds_y + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|x-y|=at} u_0(y)\,ds_y \right] \qquad (6.3)$$

дает функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи Коши (6.1),(6.2).

Для этого рассмотрим две вспомогательные задачи Коши: с однородными начальными условиями на саму функцию ($u_0 \equiv 0$) и с однородными начальными условиями на ее производную по времени ($u_1 \equiv 0$). Тогда в силу линейности уравнения (6.1) решение исходной задачи Коши будет равно сумме решений вспомогательных задач.

Утверждение 1. Формула

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{|x-y|=at} u_1(y)\,ds_y \qquad (6.4)$$

дает решение задачи Коши для волнового уравнения

$$v_{tt}(x,t) = a^2\Delta_x v(x,t),\ (x,t) \in G \tag{6.5}$$

с начальными условиями

$$v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = u_1(x). \tag{6.6}$$

Доказательство утверждения 1 разобьем на несколько этапов.

1) Преобразуем формулу (6.4), сделав замену переменных $z = \dfrac{y-x}{at}$:

$$v(x,t) = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1} u_1(x+atz)ds_z. \tag{6.7}$$

2) Поскольку $u_1 \in C^2(\mathbf{R}^3)$, то формула (6.7) определяет функцию v из класса $C^2(G)$ (знак дифференцирования можно вносить под знак интеграла по компакту в случае, когда продифференцированная подынтегральная функция непрерывна).

3) По теореме о среднем для функции v из формулы (6.7) при фиксированном значении пространственной переменной x справедлив следующий предельный переход:

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}u_1(\xi)4\pi(at)^2 = u_1(\xi)t \xrightarrow{t\to+0} 0,$$

где ξ – некоторая точка из замкнутого шара $\overline{B} = \{y \in \mathbf{R}^3 : |x-y| \le at\}$.

4) Вычислим первую производную по времени:

$$v_t(x,t) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1} u_1(x+atz)ds_z + \frac{t}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|z|=1} u_1(x+atz)ds_z =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1} u_1(x+atz)ds_z + \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1}(\operatorname{grad} u_1(x+atz), az)ds_z =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1} u_1(x+atz)ds_z + \frac{at}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1}(\operatorname{grad} u_1(x+atz), n)ds_z,$$

где n – внешняя единичная нормаль к сфере, по которой производится интегрирование. Применяя теорему Остроградского-Гаусса, и учитывая, что

$$\operatorname{div}_z(\operatorname{grad} u_1(x+atz)) = at\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1(x+atz)) = at\Delta u_1(x+atz),$$

получаем

$$v_t(x,t) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1} u_1(x+atz)ds_z + \frac{(at)^2}{4\pi}\iiint\limits_{|z|\le 1}\Delta u_1(x+atz)dz =$$

$$= \frac{v(x,t)}{t} + \frac{1}{4\pi at}A(x,t).$$

Здесь введено обозначение $A(x,t) = \iiint\limits_{|x-y|\le at}\Delta u_1(y)dy$.

5) Из последнего выражения для производной v_t аналогично с пунктом 3) доказательства находим, что для любого фиксированного x справедлив предельный переход

$$\lim_{t\to+0} v_t(x,t) - u_1(x)$$

Таким образом. функция v удовлетворяет начальным условиям (6.6).

6) Остается проверить выполнение волнового уравнения (6.5) для $(x,t) \in G$:

$$v_{tt}(x,t) = \frac{v_t(x,t)}{t} - \frac{1}{t^2}v(x,t) + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}A(x,t) - \frac{1}{4\pi at^2}A(x,t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}A(x,t) = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{|x-y|\le at}\Delta u_1(y)dy.$$

Перейдем к сферическим координатам (r,φ,θ): $y^1 = x^1 + r\sin\theta\cos\varphi$, $y^2 = x^2 + r\sin\theta\sin\varphi$, $y^3 = x^3 + r\cos\theta$. Тогда выражение для v_{tt} можно преобразовать следующим образом:

$$v_{tt}(x,t) = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{at}r^2\Delta u_1(y(\varphi,\theta,r))dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi at}a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(at)^2\Delta u_1(y(\varphi,\theta,at))\sin\theta d\theta = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{|x-y|=at}\Delta u_1(y)ds_y$$

С другой стороны, вычисляя лапласиан от обеих частей равенства (6.7), находим:

$$a^2\Delta_x v(x,t) = \frac{a^2 t}{4\pi}\iint\limits_{|z|=1}\Delta u_1(x+atz)ds_z = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{|x-y|=at}\Delta u_1(y)ds_y.$$

Следовательно, $v_{tt} = a^2\Delta_x v$, $(x,t) \in G$

Из 3), 5) н 6) и следует утверждение ■

Утверждение 2. Формула

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|x-y|=at} u_0(y)ds_y\right] \qquad (6.8)$$

дает решение задачи Коши для волнового уравнения

$$w_{tt}(x,t) = a^2\Delta_x w(x,t),\ (x,t) \in G \qquad (6.9)$$

с начальными условиями

$$w(x,0) = u_0(x),\ w_t(x,0) = 0. \qquad (6.10)$$

Доказательство утверждеиня 2. Рассмотрим задачу Коши (6.5),(6.6), в которой вместо функции $u_1(x)$ стоит более гладкая функция $u_0(x)$. Тогда формула (6.4) с u_0 вместо u_1 дает функцию $v(x,t)$ из класса $C^3(G)$, а из формулы (6.8) следует, что $w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \in C^2(G)$. Далее заметим следующее:

1) $w(x,0) = v_t(x,0) = u_0(x)$;

2) $w_t(x,0) = \lim\limits_{t\to+0} v_{tt}(x,t) = \lim\limits_{t\to+0} a^2\Delta_x v(x,t) = 0$;

3) поскольку $v \in C^3(G)$, то можно продифференцнровать по t обе части равенства (6.5), получаем $w_{tt} = a^2\Delta_x w$ ■

Итак, $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, что с учетом формул (6.4) и (6.8) приводит к формуле Кирхгофа (6.3), а в предыдущем параграфе доказана единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.

Пример 1. Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи Кошн для однородного волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$4u_{tt}(x,t) = \Delta_x u(x,t),\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = u_1(x).$$

где $u_1(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$. Найти значения $u(0,t)$ при

$t > 0$.

Решение. Воспользуемся формулой Кирхгофа:

$$u(0,t) = \frac{1}{\pi t}\iint\limits_{2|y|=t} u_1(y)ds_y.$$

Если $t > 2$, то $u(0,t) = 0$, так как в этом случае сфера радиуса $|y| = \frac{1}{2}t$ не пересекается с носителем фуикции u_1 [1]). При $t \le 2$ получаем:

$$u(0,t) = \frac{1}{\pi t}\iint\limits_{2|y|=t} \exp\left(-\frac{1}{1-|y|^2}\right)ds_y = \frac{1}{\pi t}\exp\left(-\frac{4}{4-t^2}\right)4\pi\left(\frac{t}{2}\right)^2 =$$

$$= t\exp\left(-\frac{4}{4-t^2}\right).$$

Заметим, что в ряде случаев решение задачи Коши можно найти, не обращаясь к формуле Кирхгофа.

Пример 2. Найти решение $u(x,t)$ задачн Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$u_{tt}(x,t) = \Delta_x u(x,t) + e^{-t}\cos\left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right),\ x \in R^3,\ t > 0 \qquad (6.11)$$

с начальнымн условиямн

$$u(x,0) = u_0(x) = \left(x^1\right)^2 + 2\left(x^3\right)^2, \qquad (6.12)$$

$$u_t(x,0) = u_1(x) = \sin\left(x^1 - 3x^2\right) + \frac{1}{1+\left(x^1 - x^2 + 3x^3\right)^2}. \qquad (6.13)$$

Решенне. Воспользуемся лннейностью уравнения (6.11) и будем искать решенне $u(x,t)$ в виде суммы четырех функций:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + v(x,t) + w(x,t) + z(x,t),$$

где $\tilde{u}$ – решение задачн Коши для волнового уравнения (6.11) с однородными начальиыми условиями ($\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0$); v – решенне задачн Коши для однородного волнового уравнения с начальными условиями $v(x,0) = u_0(x)$, $v_t(x,0) = 0$; w – решенне

[1]) Носителем функции $f(x)$ называется замыкание множества, на котором функция отлична от нуля: $\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \ne 0\}}$.

задачи Коши для однородного волнового уравнения с начальными условиями $w(x,0)=0$, $w_t(x,t)=\sin\left(x^1-3x^2\right)$; z – решение задачи Коши для однородного волнового уравнения с начальными условиями $z(x,0)=0$, $z_t(x,0)=\dfrac{1}{1+\left(x^1-x^2+3x^3\right)^2}$.

а) Построение решения $\tilde{u}(x,t)$. Заметим, что функция $\cos\left(x^1+2x^2+2x^3\right)$ является собственной для оператора Δ_x и отвечает собственному значению -9 (подробнее о собственных функциях и значениях см. §19). Следовательно, функцию $\tilde{u}$ имеет смысл искать в виде

$$\tilde{u}(x,t)=f(t)\cos\left(x^1+2x^2+2x^3\right),$$

где $f(t)$ – неизвестная функция времени. Из уравнения (6.11) вытекает, что функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению

$$f''(t)=-9f(t)+e^{-t},$$

общее решение которого легко находится:

$$f(t)=\frac{1}{10}e^{-t}+A\cos 3t+B\sin 3t,$$

где A и B – произвольные постоянные. Учтем, что в силу однородных начальных условий для функции $\tilde{u}$ решение $f(t)$ также удовлетворяет однородным начальным условиям $f(0)=f'(0)=0$, откуда

$$f(t)=\frac{1}{10}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 3t+\frac{1}{30}\sin 3t.$$

б) Второе слагаемое v можно искать в виде $v(x,t)=\left(x^1\right)^2+2\left(x^3\right)^2+g(t)$, где функция $g(t)$ выбирается так, чтобы функция $v(x,t)$ удовлетворяла однородному уравнению

$$v_{tt}=\Delta_x v, \tag{6.14}$$

откуда

$$g''(t)=6.$$

Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы $g(0)=0$

и $g'(0)=0$. Таким образом, находим $g(t)=3t^2$, так что

$$v(x,t)=\left(x^1\right)^2+2\left(x^3\right)^2+3t^2. \tag{6.15}$$

Предложенный способ реализуется только по той причине, что оператор Лапласа переводит функцию $\left(x^1\right)^2+2\left(x^3\right)^2$ в константу.

Большей общностью отличается следующий подход: искать решение $v(x,t)$ как сумму решений $\tilde{v}\left(x^1,t\right)$ и $\tilde{\tilde{v}}\left(x^3,t\right)$ задач Коши для однородного уравнения колебаний струны:

$$\tilde{v}_{tt}=\tilde{v}_{x^1x^1},\ \tilde{v}\left(x^1,0\right)=\left(x^1\right)^2,\ \tilde{v}_t\left(x^1,t\right)=0;$$

$$\tilde{\tilde{v}}_{tt}=\tilde{\tilde{v}}_{x^3x^3},\ \tilde{\tilde{v}}\left(x^3,0\right)=2\left(x^3\right)^2,\ \tilde{\tilde{v}}_t\left(x^3,t\right)=0$$

По формуле Даламбера (4.18) находим

$$\tilde{v}\left(x^1,t\right)=\frac{1}{2}\left(\left(x^1+t\right)^2+\left(x^1-t\right)^2\right)=\left(x^1\right)^2+t^2,$$

аналогично

$$\tilde{\tilde{v}}\left(x^3,t\right)=2\left(x^3\right)^2+2t^2,$$

откуда следует ранее полученная формула (6.15). Этот способ применим всегда, когда функции, задающие начальные условия, являются суммой функций, каждая из которых зависит лишь от одной из пространственных переменных.

Наконец, познакомимся еще с третьим способом построения решения $v(x,t)$. Сначала рассмотрим уравнение (6.14) с начальными условиями

$$v\big|_{t=0}=v_0,\ v_t\big|_{t=0}=v_1, \tag{6.16}$$

подразумевая под символами $\Delta=\Delta_x$, v_0 и v_1 – произвольные числа, причем функция v в этом случае зависит только от переменной t. Поставленная задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения легко решается:

$$v(t)=v_0\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\Delta}\right)+\frac{v_1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{sh}\left(t\sqrt{\Delta}\right).$$

Полученное решение разложим в ряд Тейлора по степеням t:

$$v(t)=\left(1+\frac{t^2}{2!}\Delta+\frac{t^4}{4!}\Delta^2+\ldots\right)v_0+\left(t\sqrt{\Delta}+\frac{\left(t\sqrt{\Delta}\right)^3}{3!}+\ldots\right)\frac{v_1}{\sqrt{\Delta}},$$

или

$$v=v_0+\frac{t^2}{2!}\Delta v_0+\frac{t^4}{4!}\Delta^2 v_0+\ldots+tv_1+\frac{t^3}{3!}\Delta v_1+\frac{t^5}{5!}\Delta^2 v_1+\ldots \qquad (6.17)$$

В случае, когда $\Delta=\Delta_x$, v_0 и v_1 – числа, ряд (6.17) сходится на всей комплексной плоскости, и, следовательно, его можно почленно дифференцировать (напомним, что внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать). Теперь рассмотрим ряд (6.17) в случае, когда $\Delta=\Delta_x$ – это все-таки оператор Лапласа, а v_0 и v_1 – функции пространственных переменных. В предположении, что формально продифференцированный ряд сходится равномерно, его по-прежнему можно почленно дифференцировать, и в силу линейности операторов Δ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ этот ряд по-прежнему удовлетворяет уравнению (6.14).

В частности, решение задачи Коши для волнового уравнения (6.14) с начальными условиями (6.16), в которых u_0 и u_1 – бесконечно дифференцируемые функции, представляется рядом (6.16), если для всех натуральных чисел k, начиная с некоторого k_0, справедливы неравенства $\left|\frac{\partial^k v_0}{\left(\partial x^i\right)^k}\right|<Cq^k$, $\left|\frac{\partial^k v_1}{\left(\partial x^i\right)^k}\right|<Cq^k$, где C, q – произвольные константы.

В исходной ситуации $v_1=0$, v_0 – многочлен, так что ряд (6.17) на самом деле содержит конечное число членов. Следовательно,

$$v(x,t)=\left(x^1\right)^2+2\left(x^3\right)^2+\frac{t^2}{2}\Delta\left(\left(x^1\right)^2+2\left(x^3\right)^2\right),$$

что опять приводит к формуле (6.15).

в) Третье слагаемое $w(x,t)$ можно искать аналогично решению пункта а), так как $\sin\left(x^1-3x^2\right)$ – собственная функция оператора

Лапласа, отвечающая собственному значению -10:

$$w(x,t)=h(t)\sin\left(x^1-3x^2\right),$$

где $h(t)$ – решение уравнения

$$h''(t)=-10h(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$h(0)=0,\ h'(0)=1.$$

В таком случае $h(t)=\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\left(t\sqrt{10}\right)$, так что

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\left(t\sqrt{10}\right)\sin\left(x^1-3x^2\right).$$

Другой способ – применить для решения этой задачи формулу (6.17), где $v_0=0$ и $v_1=\sin\left(x^1-3x^2\right)$. В этом случае $\Delta^k v_1=(-10)^k v_1$, поэтому

$$w(x,t)=\left(t+\frac{t^3}{3!}(-10)+\frac{t^5}{5!}(-10)^2+\ldots\right)v_1(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(t\sqrt{10}-\frac{\left(t\sqrt{10}\right)^3}{3!}+\frac{\left(t\sqrt{10}\right)^5}{5!}-\ldots\right)v_1(x)=\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\left(\sqrt{10}\cdot t\right)v_1(x)$$

г) Построение решения $z(x,t)$. Введем новую переменную $\xi=x^1-x^2+3x^3$ и попробуем искать решение в виде

$$z\left(x^1,x^2,x^3,t\right)=\tilde{z}\left(x^1-x^2+3x^3\right)\equiv\tilde{z}(\xi,t)$$

Тогда $\Delta_x\tilde{z}(\xi(x),t)=11\tilde{z}_{\xi\xi}$, поэтому $\tilde{z}(\xi,t)$ – решение задачи Коши для уравнения колебаний струны

$$\tilde{z}_{tt}=11\tilde{z}_{\xi\xi}$$

с начальными условиями

$$\tilde{z}(\xi,0)=0,\ \tilde{z}_t(\xi,0)=\frac{1}{1+\xi^2}.$$

По формуле Даламбера (4.18) получаем:

$$\tilde{z}(\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{11}}\int\limits_{\xi-t\sqrt{11}}^{\xi+t\sqrt{11}}\frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{11}}\left(\operatorname{arctg}\left(\xi+t\sqrt{11}\right)-\operatorname{arctg}\left(\xi-t\sqrt{11}\right)\right).$$

Предложенный способ сведения к уравнению с одной переменной применим в случае, когда начальные условия (правая часть) зависят от линейной комбинации исходных пространственных координат.

Итак, получаем окончательный результат

$$u(x,t)=\left(\frac{1}{10}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 3t+\frac{1}{30}\sin 3t\right)\cos\left(x^1+2x^2+2x^3\right)+3t^2+$$

$$+\left(x^1\right)^2+2\left(x^3\right)^2+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\left(t\sqrt{10}\right)\sin\left(x^1-3x^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{11}}\left(\operatorname{arctg}\left(x^1-x^2+3x^3+t\sqrt{11}\right)-\operatorname{arctg}\left(x^1-x^2+3x^3-t\sqrt{11}\right)\right).$$

6.2. Принцип Гюйгенса. Обратимся к физическим следствиям из формулы (6.3).

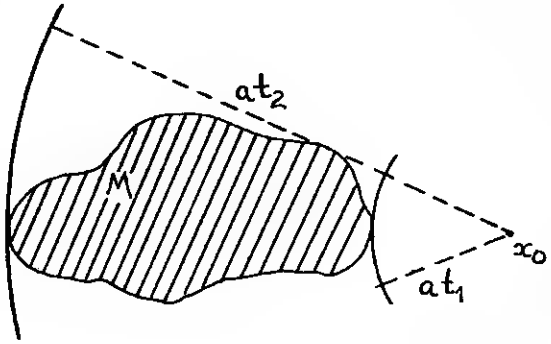

Рис. 6

Пусть в начальный момент времени $t=0$ есть локальное возмущение: носители функций u_0 и u_1 ограничены и, следовательно, содержатся в некотором компакте *M*. Рассмотрим произвольную точку $x_0\in\mathbf{R}^3$ и исследуем вопрос о том, при каких значениях времени t функция $u(x_0,t)$ отлична от нуля. Введем следующие обозначения (см. рис. 6):

$$t_1=\frac{1}{a}\inf_{y\in M}|y-x_0|,\ t_2=\frac{1}{a}\sup_{y\in M}|y-x_0|$$

Тогда из формулы (6.3) вытекает следующее

Утверждение 3. При данном значении $x_0\in\mathbf{R}^3$ вне отрезка времени $[t_1;t_2]$ функция $u(x_0,t)$ тождественна нулю.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке пространства действие, локализованное во времени, то есть возмущение распространяется в виде волны, имеющей передний и задний фронты. Это и есть одна из формулировок *принципа Гюйгенса*.

§7. Волновое уравнение на плоскости. Метод спуска. Формула Пуассона. Диффузия волн

7.1. Метод спуска. Рассмотрим задачу Коши для однородного волнового уравнения на плоскости

$$u_{tt}(x,t)=a^2\Delta_x u(x,t),\ x\in\mathbf{R}^2,\ t>0 \tag{7.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x). \tag{7.2}$$

Для определенности считаем, что $a>0$. Пусть $u_0\in C^3(\mathbf{R}^2)$ и $u_1\in C^2(\mathbf{R}^2)$. "Погрузим" плоскость значений переменной $x=(x^1,x^2)$ в $\mathbf{R}^3$: $\tilde{x}=(x^1,x^2,x^3)$. Далее рассмотрим задачу Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$\tilde{u}_{tt}(\tilde{x},t)=\Delta_{\tilde{x}}\tilde{u}(\tilde{x},t),\ \tilde{x}\in\mathbf{R}^3,\ t>0 \tag{7.3}$$

с начальными условиями

$$\tilde{u}(\tilde{x},0)=u_0(x),\ \tilde{u}_t(\tilde{x},0)=u_1(x), \tag{7.4}$$

то есть

$$\tilde{u}(x^1, x^2, x^3, 0) = u_0(x^1, x^2),\ \tilde{u}_t(x^1, x^2, x^3, 0) = u_1(x^1, x^2).$$

Согласно результатам предыдущего параграфа для решения задачи (7.3),(7.4) справедлива формула

$$u(\tilde{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint\limits_{|\tilde{x}-\tilde{y}|=at} u_1(y)\,ds_{\tilde{y}} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint\limits_{|\tilde{x}-\tilde{y}|=at} u_0(y)\,ds_{\tilde{y}}\right].$$

Преобразуем интегралы, участвующие в ней, с учетом того, что начальные условия не зависят от переменной x^3:

$$\iint\limits_{|\tilde{x}-\tilde{y}|=at} u_1(y)\,ds_{\tilde{y}} = 2 \iint\limits_{\substack{|\tilde{x}-\tilde{y}|=at \\ y^3>0}} u_1(y)\,ds_{\tilde{y}}.$$

Теперь перейдем от интегрирования по полусфере к интегрированию по кругу $\{y \in \mathbf{R}^2 : |x-y| \le at\}$, учтя, что $ds_{\tilde{y}} = \dfrac{dy^1 dy^2}{n^3}$, где $n = \dfrac{1}{at}(\tilde{y} - \tilde{x})$ – единичная нормаль (см. рис. 7). Следовательно,

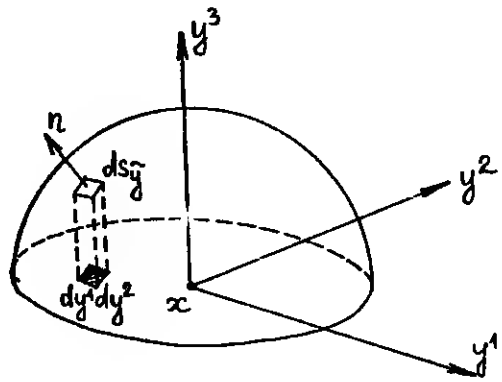

Рис. 7

$$ds_{\tilde{y}} = at\frac{dy^1 dy^2}{y^3 - x^3} = \frac{at}{\sqrt{(at)^2 - (y^1 - x^1)^2 - (y^2 - x^2)^2}}\,dy^1 dy^2 =$$

$$= \frac{at}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,dy,$$

и

$$\iint\limits_{|\tilde{x}-\tilde{y}|=at} u_1(y)\,ds_{\tilde{y}} = 2 \iint\limits_{|x-y|\le at} u_1(y)\frac{at}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,dy$$

Аналогично преобразуется второй интеграл, и в результате получаем

<u>Утверждение 1.</u> Решение задачи Коши (7.1),(7.2) выражается следующей *формулой Пуассона*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint\limits_{|x-y|\le at} \frac{u_1(y)dy}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|x-y|\le at} \frac{u_0(y)dy}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\right].$$

Доказательство утверждения 1. Поскольку функция $\tilde{u}(\tilde{x}, t)$ не зависит от x^3 и удовлетворяет уравнению (7.3) и начальным условиям (7.4), то функция $u(x,t) = \tilde{u}(\tilde{x}, t)$ удовлетворяет уравнению (7.1) и начальным условиям (7.2), так как

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\tilde{u} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\tilde{u} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}u.$$

В силу доказанной в §5 единственности других решений нет ■

Замечание 1. Используя метод спуска можно получить из формулы Пуассона формулу Даламбера.

7.2. Диффузия волн. Из формулы Пуассона видно, что на плоскости нарушается принцип Гюйгенса (у волны нет заднего фронта). Это явление называется *диффузией волн*. Можно привести более наглядное доказательство. Пусть носители функций u_0 и u_1 содержатся в некотором компакте M. Тогда "погрузив" $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^3$, получим, что носитель начального возмущения – неограниченный цилиндр $\{(x^1, x^2, x^3) : (x^1, x^2) \in M,\ x^3 \in \mathbf{R}\}$ (см. рис. 8). Следовательно, начальное возмущение неограниченно в пространстве, и возмущение в любой точке неограниченно во времени (у цилиндрических волн отсутствует задний фронт).

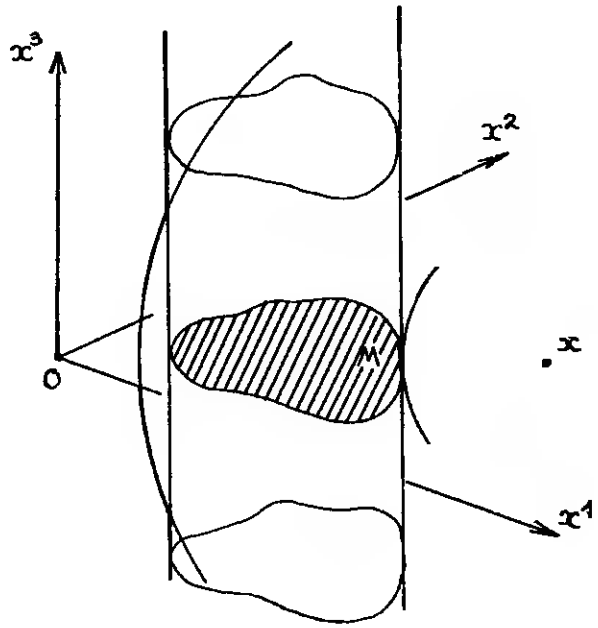

Рис. 8

§8. Принцип Дюамеля для волнового уравнения

8.1. Общая теория. Принцип Дюамеля позволяет, зная решение задачи Коши для однородного уравнения, найти решение и для неоднородного.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^n$

$$u_{tt}(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \qquad (8.1)$$

с иачальными условнями

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \qquad (8.2)$$

Для определенности будем считать, что $a > 0$. Из линейности уравнения следует, что решение представимо в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $v(x,t)$ – решеиие задачи Коши для однородного волнового уравиения начальными условиями (8.2) (предполагается известным), $w(x,t)$ – решение задачн Коши для уравнения (8.1) с однородными начальными условиями ($w(x,0) = w_t(x,0) = 0$).

Найдем функцию w из класса $C^2\left(\mathbf{R}^n \times [0;\infty)\right)$, для чего рассмотрнм следующую задачу Коши, зависящую от параметра $\tau \geq 0$:

$$p_{tt}(x,t,\tau) - a^2\Delta_x p(x,t,\tau) = 0,\ x \in \mathbf{R}^n,\ t > \tau, \qquad (8.3)$$

$$p(x,\tau,\tau) = 0,\ p_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau). \qquad (8.4)$$

<u>Утверждение 1 (принцип Дюамеля).</u> Если существует решение $p(x,t,\tau)$ вспомогательной задачи (8.3),(8.4) из класса $C^{2,2,0}_{x,t,\tau}\left(\overline{M}\right)$, где $M = \left\{(x,t,\tau) : x \in \mathbf{R}^n,\ \tau \geq 0,\ t > \tau\right\}$, то функция $w(x,t) = \int\limits_0^t p(x,t,\tau)d\tau$ удовлетворяет поставленным требованиям.

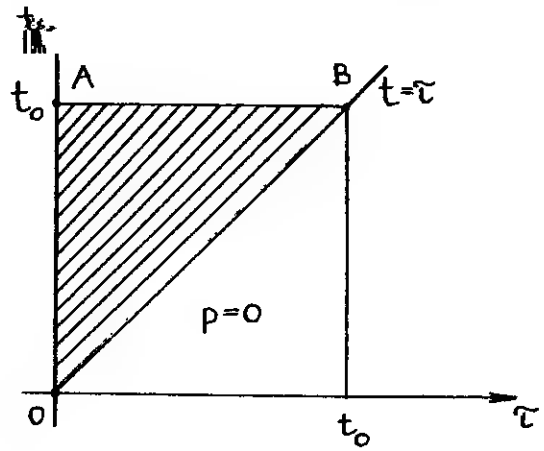

Рис. 9

То есть при фиксированном значении $\tau \geq 0$ строится решеиие $p(x,t,\tau)$ задачи Коши (8.3),(8.4) для $t \geq \tau$. Решение неоднородного уравнения в момент t_0 получается как интеграл по отрезку AB от функции $p(x,t_0,\tau)$ (см. рис. 9)

Доказательство утверждения 1. Согласно предположению о гладкости функции $p(x,t,\tau)$ справедливы следующие равенства:

1) $w(x,0) = 0$;

2) $w_t(x,t) = p(x,t,t) + \int\limits_0^t p_t(x,t,\tau)d\tau = \int\limits_0^t p_t(x,t,\tau)d\tau,\ t \ge 0$;

3) $w_t(x,0) = 0$;

4) $w_{tt}(x,t) = p_t(x,t,t) + \int\limits_0^t p_{tt}(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t a^2\Delta_x p(x,t,\tau)d\tau =$

$$= f(x,t) + a^2\Delta_x \int\limits_0^t p(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + a^2\Delta_x w(x,t),\ t > 0.$$

Из 1),3),4) и следует утверждение ■

Данный прием носит достаточно общий характер и называется *принципом Дюамеля* (см. также §16).

8.2. Применение совместно с формулой Даламбера. Рассмотрим одномерный случай. Пусть функция $f(x,t)$ принадлежит классу $C^{1,0}_{x,t}(\mathbf{R}\times[0;\infty))$, тогда для решения задачи (8.3),(8.4) можно использовать формулу Даламбера (4.18), откуда

$$p(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda,\tau)d\lambda$$

Из гладкости f вытекает, что $p \in C^{2,2,0}_{x,t,\tau}(\overline{M})$, поэтому

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda,\tau)d\lambda d\tau.$$

Таким образом, решение $u(x,t)$ задачи Коши

$$u_{tt}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

в случае, когда $u_0 \in C^2(\mathbf{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbf{R})$ и $f \in C^{1,0}_{x,t}(\mathbf{R}\times[0;\infty))$, выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda,\tau)d\lambda d\tau + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\lambda)d\lambda +$$
$$+\frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right]. \qquad (8.5)$$

Пример 1. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$u_{tt}(x,t) = \Delta_x u(x,t) + e^{-t}\cos\left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right),\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0 \qquad (8.6)$$

с однородными начальными условиями

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \qquad (8.7)$$

Решение. Повернем пространственную систему координат так, чтобы направление оси абсцисс совпало с направлением вектора $\|1\ \ 2\ \ 2\|^T$:

$$\xi^1 = \frac{1}{3}\left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right),\ \xi^2 = \ldots,\ \xi^3 = \ldots;$$
$$\tilde{u}(\xi,t) = u\left(x(\xi),t\right).$$

Тогда уравнение (8.6) и начальные условия (8.7) преобразуются следующим образом:

$$\tilde{u}_{tt}(\xi,t) = \Delta_\xi \tilde{u}(\xi,t) + e^{-t}\cos 3\xi^1,$$
$$\tilde{u}(\xi,0) = \tilde{u}_t(\xi,0) = 0.$$

Решение этой задачи будет зависеть только от переменных ξ^1 и t (формально это следует из единственности решения задачи Коши), и для его нахождения можно воспользоваться формулой (8.5):

$$\tilde{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\xi^1-(t-\tau)}^{\xi^1+(t-\tau)} e^{-\tau}\cos 3\lambda d\lambda = \frac{1}{6}\int\limits_0^t e^{-\tau}\sin 3\lambda\Big|_{\xi^1-(t-\tau)}^{\xi^1+(t-\tau)} d\tau = \frac{\cos 3\xi^1}{3}\times$$
$$\times\int\limits_0^t e^{-\tau}\sin 3(t-\tau)d\tau = -\frac{\cos 3\xi^1}{10}e^{-\tau}\left(\frac{1}{3}\sin 3(t-\tau) - \cos 3(t-\tau)\right)\Bigg|_0^t =$$
$$= \left(\frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 3t + \frac{1}{30}\sin 3t\right)\cos 3\xi^1$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для решения задачи (8.6),(8.7):

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 3t + \frac{1}{30}\sin 3t\right)\cos\left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right)$$

(сравните с пунктом а) примера 2 из §6).

Пример 2. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$u_{tt}(x,t) = \Delta_x u(x,t) + \left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right)^2,\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0$$

с однородными начальными условиями

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Решение. Сделаем такую же замену переменных, как в предыдущем примере 1, тогда приходим к задаче Коши для уравнения

$$\tilde{u}_{tt}(\xi,t) = \Delta_\xi \tilde{u}(\xi,t) + 9\left(\xi^1\right)^2$$

с однородными начальными условиями. По формуле Дюамеля (8.5) получим:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{\xi^1-(t-\tau)}^{\xi^1+(t-\tau)} 9\lambda^2 d\lambda = \frac{3}{2}\int_0^t \left[\left(\xi^1 + (t-\tau)\right)^3 - \left(\xi^1 - (t-\tau)\right)^3\right] d\tau =$$

$$= 3\int_0^t \left[3\left(\xi^1\right)^2 (t-\tau) + (t-\tau)^3\right] d\tau = 3\left(\frac{3}{2}\left(\xi^1\right)^2 t^2 + \frac{t^4}{4}\right),$$

то есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right)^2 t^2 + \frac{3t^4}{4}$$

Замечание 1. Решение $u(x,t)$ можно также было искать в виде $u(x,t) = f(t)\left(x^1 + 2x^2 + 2x^3\right)^2 + g(t)$.

8.3. Применение совместно с формулами Кирхгофа и Пуассона. Аналогично с одномерным случаем принцип Дюамеля дает решение задачи Коши

$$u_{tt}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),$$

$$u_0 \in C^3\left(\mathbf{R}^n\right),\ u_1 \in C^2\left(\mathbf{R}^n\right),\ f \in C^{2,0}_{x,t}\left(\mathbf{R}^n \times [0;\infty)\right)$$

для $n = 2$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \iint_{|x-y|\le a(t-\tau)} \frac{f(y,\tau)dyd\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-y|^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{|x-y|\le at} \frac{u_1(y)dy}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|x-y|\le at} \frac{u_0(y)dy}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}; \qquad (8.8)$$

для $n = 3$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|x-y|\le at} \frac{f\left(y, t - \left|\frac{x-y}{a}\right|\right)}{|x-y|}dy + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|x-y|=at} u_1(y)ds_y +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|x-y|=at} u_0(y)ds_y\right]. \qquad (8.9)$$

Первое слагаемое в формуле (8.9) получается из интеграла Дюамеля

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \iint_{|x-y|=a(t-\tau)} \frac{f(y,\tau)}{t-\tau}ds_y d\tau$$

при помощи следующих преобразований:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \iint_{|x-y|=a(t-\tau)} \frac{f(y,\tau)}{t-\tau}ds_y d\tau = \frac{1}{4\pi a}\int_0^t \iint_{|x-y|=a(t-\tau)} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}ds_y d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at} \iint_{|x-y|=r} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}ds_y dr = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|x-y|\le at} \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}dy,$$

где $r = a(t-\tau)$.

Пример 2. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$u_{tt}(x,t) = \Delta_x u(x,t) + 4x^1x^2x^3,\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0$$

с однородными начальными условиями

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой (8.9) и введем новую переменную $z = y - x$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{|x-y|\le at} \frac{4y^1y^2y^3}{|x-y|}dy = \frac{1}{\pi}\iiint_{|z|\le at} \frac{\left(x^1+z^1\right)\left(x^2+z^2\right)\left(x^3+z^3\right)}{|z|}dz$$

Из симметрии следует, что $\iint_{|z|=1} z^i ds_z = 0$ для $i = 1,2,3$, $\iint_{|z|=1} z^i z^j ds_z = 0$

для $i \neq j$ и $\iint\limits_{|z|=1} z^1 z^2 z^3 ds_z = 0$, следовательно,

$$u(x,t) = \frac{x^1x^2x^3}{\pi} \iiint\limits_{|z|\le at} \frac{1}{|z|} dz = \frac{x^1x^2x^3}{\pi} 4\pi \int\limits_0^{at} r dr = 2x^1x^2x^3(at)^2.$$

Замечание 2. Решение $u(x,t)$ можно было искать в виде $f(t)x^1x^2x^3$, так как функция $x^1x^2x^3$ является собственной функцией оператора Лапласа, отвечающей нулевому собственному значению.

§9. О корректности постановки задачи Коши для волнового уравнения. Некорректно поставленные задачи. Пример Адамара

9.1. Непрерывная зависимость от начальных данных. Рассмотрим в ограниченной по времени области $G = \{(x,t) : x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < t < T\}$ задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G \tag{9.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \tag{9.2}$$

Исследуем зависимость решения от начальных условий. Пусть $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{\tilde{u}}(x,t)$ – решения задачи Коши (9.1),(9.2) с функциями, задающими начальные условия, $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ и $\tilde{\tilde{u}}_0, \tilde{\tilde{u}}_1$ соответственно. Рассмотрим следующие случаи.

1) $n = 1$. Пусть $\tilde{\tilde{u}}_0 - \tilde{u}_0 \in C^2(\mathbf{R})$ и $\tilde{\tilde{u}}_1 - \tilde{u}_1 \in C^1(\mathbf{R})$. Тогда для разности решений $\tilde{\tilde{u}} - \tilde{u}$ справедлива формула Даламбера, из которой следует, что для любых чисел $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ существует $\varepsilon = \delta_1 + T\delta_2$ такое, что из выполнения неравенств $|\tilde{\tilde{u}}_0(x) - \tilde{u}_0(x)| < \delta_1$ и $|\tilde{\tilde{u}}_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta_2$ для всех $x \in \mathbf{R}$ вытекает выполнение неравенства $|\tilde{\tilde{u}}(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$ для $(x,t) \in G$. Таким образом, решение задачи Коши (9.1),(9.2) в этом случае непрерывно зависит от начальных условий в равномерной метрике.

2) $n = 2$ ($n = 3$). Пусть $\tilde{\tilde{u}}_0 - \tilde{u}_0 \in C^3$ и $\tilde{\tilde{u}}_1 - \tilde{u}_1 \in C^2$. Тогда для разности $\tilde{\tilde{u}} - \tilde{u}$ справедлива формула Пуассона (Кирхгофа), из которой следует, что для любых $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и $\delta_3 > 0$ существует $\varepsilon = \delta_1 + T\delta_2 + aT\delta_3$ такое, что из выполнения неравенств $|\tilde{\tilde{u}}_0(x) - \tilde{u}_0(x)| < \delta_1$, $|\tilde{\tilde{u}}_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta_2$ и $|\mathrm{grad}(\tilde{\tilde{u}}_0(x) - \tilde{u}_0(x))| < \delta_3$ для всех x вытекает выполнение неравенства $|\tilde{\tilde{u}}(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$ для $(x,t) \in G$.

В предыдущих параграфах были доказаны единственность и существование решения при дополнительных условиях на гладкость начальных данных и правой части. Теперь показана непрерывная зависимость от начальных данных, что и завершает доказательство корректности классической задачи Коши для волнового уравнения.

9.2. Усиление энергетического неравенства. Приведенные выше утверждения о непрерывной зависимости решения от начальных данных в достаточно гладкой метрике страдают двумя недостатками: зависят от конкретной размерности пространства, требуют дополнительной гладкости начальных данных.

При отсутствии достаточной гладкости функций удобнее работать с интегральными выражениями. Здесь будет доказана непрерывная зависимость от начальных данных не в равномерной метрике, а в среднеквадратичной.

Итак, пусть $x \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{u}_0, \tilde{\tilde{u}}_0 \in C^1(\mathbf{R}^n)$ и $\tilde{u}_1, \tilde{\tilde{u}}_1 \in C(\mathbf{R}^n)$. Тогда разность $u(x,t) = \tilde{\tilde{u}}(x,t) - \tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$u_{tt}(x,t) = a^2\Delta_x u(x,t),\ (x,t) \in G \tag{9.3}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x) = \tilde{\tilde{u}}_0(x) - \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) = \tilde{\tilde{u}}_1(x) - \tilde{u}_1(x). \tag{9.4}$$

Заметим, что энергетическое неравенство (5.5), справедливое для однородного волнового уравнения, почти решает поставлен-

ную задачу, но в него входят только производные функции u и не входит она сама. Необходимо усилить энергетическое неравенство, для чего перейдем к *телеграфному уравнению*, сделав замену

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\lambda t},$$

где λ – произвольное положительное число. Уравнение (9.3) и начальные условия (9.4) преобразуются следующим образом:

$$Lv \equiv v_{tt} + 2\lambda v_t + \lambda^2 v - a^2\Delta_x v = 0, \tag{9.5}$$

$$v(x,0) = u_0(x),\ v_t(x,0) = u_1(x) - \lambda u_0(x). \tag{9.6}$$

Аналогично выкладкам §5, из уравнения (9.5) получаем цепочку равенств

$$0 = 2v_t Lv = 2v_t v_{tt} - 2a^2 v_t \Delta_x v + 2\lambda^2 v_t v + 4\lambda v_t^2 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(2a^2 v_{x^i} v_t\right)_{x^i} + a^2\left(\sum_{i=1}^{n} v_{x^i}^2\right)_t + \left(v_t^2\right)_t + \lambda^2\left(v^2\right)_t + 4\lambda v_t^2.$$

Следовательно, справедливо следующее равенство

$$\mathrm{div}_{(x,t)} R \equiv \sum_{i=1}^{n} R^i_{x^i} + R_t^{n+1} = -4\lambda v_t^2,$$

где $R - P + \left(0,\ldots,0,\lambda^2 v^2\right)$; $P^i = -2a^2 v_t v_{x^i}$, $i = 1,\ldots n$ и $P^{n+1} = v_t^2 + a^2|\mathrm{grad} v|^2$. Далее воспользуемся обозначениями §5 и проследим за следующими выкладками:

$$0 = \int_{\partial Q_\tau}(R,n)ds + 4\lambda\int_{Q_\tau} v_t^2 dxdt = \int_{\partial Q_\tau}(P,n)ds + \int_{\partial Q_\tau}\lambda^2 v^2 n^{n+1} ds +$$

$$+4\lambda\int_{Q_\tau} v_t^2 dxdt = W(\tau) - W(0) + \int_{S_\tau}(P,n)ds + \int_{S_\tau}\lambda^2 v^2 n^{n+1} ds + 4\lambda\int_{Q_\tau} v_t^2 dxdt.$$

Здесь введено обозначение $W(\tau) = \int_{D_\tau}\left(v_t^2 + a^2|\mathrm{grad} v|^2 + \lambda^2 v^2\right)dx$ (норма из класса Соболева $W_2^{1,1}$). Таким, образом, приходим к следующему неравенству:

$$W(\tau) - W(0) = -\int_{S_\tau}(P,n)ds - \int_{S_\tau}\lambda^2 v^2 n^{n+1} ds - 4\lambda\int_{Q_\tau} v_t^2 dxdt \le 0.$$

Возвращаясь к исходным функциям, получаем

$$\lambda^2\int_{D_\tau} u^2 dx \le \int_{D_\tau}\left[(u_t - \lambda u)^2 + a^2|\mathrm{grad} u|^2 + \lambda^2 u^2\right]dx \le$$

$$\le e^{2\lambda T}\int_{D_0}\left[(u_1 - \lambda u_0)^2 + a^2|\mathrm{grad} u_0|^2 + \lambda^2 u_0^2\right]dx \le$$

$$\le e^{2\lambda T}\int_{D_0}\left[2u_1^2 + 3\lambda^2 u_0^2 + a^2|\mathrm{grad} u_0|^2\right]dx.$$

Итак, для фиксированного $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\lambda^2\int_{D_\tau} u^2 dx \le e^{2\lambda T}\int_{D_0}\left[2u_1^2 + 3\lambda^2 u_0^2 + a^2|\mathrm{grad} u_0|^2\right]dx, \tag{9.7}$$

откуда следует непрерывная зависимость решения в среднеквадратичной метрике от начальных условий в метрике $W_2^{1,1}$.

9.3. Пример Адамара. Классическую задачу Коши нельзя корректно поставить для уравнения произвольного типа. Пример, который впервые предложил Адамар, показывает, что для уравнений эллиптического типа постановка классической задачи Коши некорректна.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения Лапласа

$$u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = u_{1,k}(x) = \frac{1}{k^2}\sin kx,\ k \in \mathbf{N}$$

Легко проверить, что ее решение есть $u_k(x,t) = \frac{\mathrm{sh}\,kt}{k^3}\sin kx$. Следовательно, не смотря на то, что функциональные последовательности $\left\{u_{1,k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{\frac{d}{dx}u_{1,k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно стремятся к нулю при $k \to \infty$, решение $u_k(x,t)$ к нулю не стремится. Непрерывной зависимости от начальных данных нет.

§10. Смешанная задача для волнового уравнения. Задача Гурса

10.1. Смешанная задача. При выводе уравнения колебаний струны упоминалось, что, если струна ограничена или полуограничена (имеет хотя бы один конец), то для каждого из концов струны нужно задавать уравнение движения, то есть граничные условия.

Общая постановка *смешанной (начально-краевой) задачи* для волнового уравнения в $\mathbf{R}^n$ следующая. Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$, границей ∂D которой является кусочно гладкая поверхность, n – внешняя единичная нормаль к ∂D, T – момент времени, ограничивающий наблюдение за волновым процессом. Надо найти функцию $u(x,t)$ из класса $C^2(D\times(0;T))\cap C^1(\overline{D}\times[0;T))$, удовлетворяющую волновому уравнению

$$u_{tt}(x,t)-a^2\Delta_x u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in D\times(0;T), \qquad (10.1)$$

начальным условиям

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in D \qquad (10.2)$$

и граничным условиям

$$\left(\alpha u(x,t)+\beta\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial D}=v(x,t),\ (x,t)\in\partial D\times[0;T). \qquad (10.3)$$

Замечание 1. Если $\beta=0$, то достаточно требовать, чтобы $u\in C^2(D\times(0;T))\cap C^1(D\times[0;T])\cap C(\overline{D}\times[0;T])$.

Заметим, что необходимыми условиями существования решения являются *условия согласования*:

$$\left(\alpha u_0(x)+\frac{\partial u_0(x)}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial D}=v(x,0) \qquad (10.4)$$

и аналогичные для производных (смысл очевиден).

В §1 были перечислены три типа граничных условий:

1) $\alpha=1,\ \beta=0$ – граничное условие первого рода (типа Дирихле);

2) $\alpha=0,\ \beta=1$ – граничное условие второго рода (типа Неймана);

3) $\alpha>0,\ \beta=1$ – граничное условие третьего рода.

10.2. Пример смешанной задачи. Рассмотрим смешанную задачу для полуограниченной струны

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\ x>0,\ t>0 \qquad (10.5)$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x) \qquad (10.6)$$

и граничными условиями первого рода

$$u(0,t)=v(t) \qquad (10.7)$$

Для определенности будем считать, что $a>0$. Потребуем следующую гладкость краевых и начальных данных: $u_0\in C^2[0;\infty)$, $u_1\in C^1[0;\infty)$ и $v\in C^2[0;\infty)$. Условия согласования:

$$u_0(0)=v(0),\ v'(0)=u_1(0),\ v''(0)=a^2u_0''(0). \qquad (10.8)$$

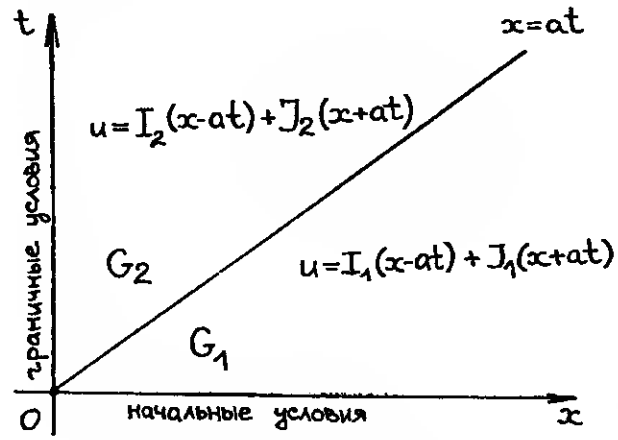

Рис. 10

Согласно формуле (4.17) справедливо следующее представление для решения $u(x,t)$ в области $G_1=\{(x,t):\ 0<at<x\}$: $u(x,t)=I_1(x-at)+J_1(x+at)$; в области $G_2=\{(x,t):\ 0<x<at\}$: $u(x,t)=I_2(x-at)+J_2(x+at)$, где I_1, I_2, J_1 и J_2 – неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции (см. рис. 10).

В области G_1 для определения функций I_1 и J_1 достаточно начальных условий, как было показано в §4 при выводе формулы Даламбера. Для определения функций I_2 и J_2 есть два условия: условие непрерывности решения u на характеристике $x = at$ и граничное условие, то есть

$$\begin{cases} I_2(0) + J_2(2at) = I_1(0) + J_1(2at) \\ I_2(-at) + J_2(at) = v(t) \end{cases}. \qquad (10.9)$$

Таким образом, обратная волна J_2 с точностью до константы совпадает с обратной волной J_1. Эту константу естественно положить равной нулю, так как функции J_1 и J_2, разумеется, определяются с точностью до константы. Итак, обратная волна просто проходит через характеристику $x = at$, что обеспечивает непрерывность решения. А вот прямая волна $I_2(x - at)$ уже порождается граничными условиями во взаимодействии с обратной волной.

Формальное решение системы (10.9) дает следующий результат:

$$J_2(\xi) = J_1(\xi) + C, \quad I_2(\xi) = -J_1(-\xi) + v\left(-\frac{\xi}{a}\right) - C,$$

где C – произвольная константа. Следовательно, для $(x,t) \in G_2$ справедливо представление

$$u(x,t) = J_2(x + at) + I_2(x - at) =$$

$$= J_1(x + at) - J_1(at - x) + v\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Заметим, что возможность непрерывной "сшивки" решений на характеристике $x = at$:

$$u(x,t)\big|_{x=at} = v(0),$$

– обеспечивается первым условием согласования из соотношений (10.8): $u(0,0) = u_0(0) = v(0)$.

Легко проверить, что второе и третье условия согласования из соотношений (10.8) обеспечивают непрерывность на характеристике первых и соответственно вторых производных построенного решения.

На практике удобнее для точек (x,t) из области G_1 выписать формулу Даламбера, тогда первое уравнение в системе (10.9) можно заменить следующим:

$$I_2(0) + J_2(2at) = u(x,t)\big|_{x=at},$$

откуда

$$u(x,t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u_0(x+at) + u_0(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi, & x \ge at \\ v\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(u_0(at+x) - u_0(at-x)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x} u_1(\xi)d\xi, & x \le at \end{cases} \qquad (10.10)$$

Итак, однозначно найдено решение задачи (10.3), которое принадлежит классу $C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$

Замечание 2. При отсутствии третьего условия (второго и третьего условий) согласования из соотношений (10.8) решение задачи (10.5),(10.6),(10.7) все равно строится по предложенной схеме, приводящей к формуле (10.10). Однако построенное решение уже не будет классическим, так как на характеристике $x = at$ вторые (даже первые) производные терпят разрыв. Вместе с тем подобные задачи имеют очевидный физический смысл и представляют практический интерес.

Аналогично можно решать смешанные задачи с граничными условиями второго и третьего рода.

Пример 1. Решить смешанную задачу для волнового уравнения на полуоси

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) + 2, \ t > 0, \ x > 0$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 2x - \cos x, \ u_t(x,0) = -2 - 2\sin x$$

и граничными условиями

$$u(0,t) - u_x(0,t) = t^2 - 3$$

Решение. Прежде всего перейдем к однородному волновому уравнению подстановкой $u(x,t) = w(x,t) + t^2$ [1]), где функция w –

[1]) Частное решение $\tilde{u} = t^2$ неоднородного уравнения можно найти из формулы Дюамеля (8.5), но в данном случае его проще искать как функцию $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$.

решение смешанной задачи

$$w_{tt}(x,t) = 4w_{xx},\ t > 0,\ x > 0, \tag{10.11}$$

$$w(x,0) = w_0(x) \equiv 2x - \cos x,\ w_t(x,0) = w_1(x) \equiv -2 - \sin x, \tag{10.12}$$

$$w(0,t) - w_x(0,t) = \nu(t) \equiv -3. \tag{10.13}$$

Для нахождения значений функции w в точках (x,t), лежащих ниже характеристики $x = 2t$ можно воспользоваться формулой Даламбера (4.18):

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[2(x+2t) - \cos(x+2t) + 2(x-2t) - \cos(x-2t)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-2t}^{x+2t}(1+\sin\lambda)d\lambda = 2x - \cos(x-2t) - 2t$$

Следовательно,

$$w(x,t) = 2(x-t) - \cos(x-2t),\ x > 2t$$

В области $G_2 = \{(x,t) : 0 < x < 2t\}$ общий вид решения следующий:

$$w(x,t) = I(x-2t) + J(x+2t).$$

Для нахождения функций I и J воспользуемся двумя условиями: непрерывность решения w на характеристике $x = 2t$ и граничное условие при $x = 0$, то есть

$$\begin{cases} I(0) + J(4t) = 2t - 1 \\ I(-2t) + J(2t) - I'(-2t) - J'(2t) = -3 \end{cases}$$

В очередной раз отметим, что функции I и J определяются с точностью до постоянного слагаемого, поэтому без ограничения общности можно положить $I(0) = -1$, тогда $J(\eta) = \eta/2$, $J'(\eta) = 1/2$, и после замены $\xi = -2t$ второе уравнение системы приводится к виду

$$I'(\xi) - I(\xi) = \frac{5}{2} - \frac{\xi}{2}.$$

Частным решением этого уравнения является многочлен первой степени, коэффициенты которого легко находятся: $\tilde{I}(\xi) = \frac{\xi}{2} - 2$, поэтому

$$I(\xi) = Ce^{\xi} + \frac{\xi}{2} - 2,$$

где C – константа, которая будет найдена ниже.

Итак, в рассматриваемой области

$$w(x,t) = I(x-2t) + J(x+2t) = \frac{x-2t}{2} - 2 + Ce^{x-2t} + \frac{x+2t}{2} =$$

$$= x - 2 + Ce^{x-2t}.$$

Значение функции w в точке $x = 0$, $t = 0$ известно из соотношений (10.12): $w(0,0) = -1$, поэтому $C = 1$, то есть в области G_2 решение имеет следующий вид:

$$w(x,t) = x - 2 + e^{x-2t}.$$

Объединяя полученные результаты, находим ответ

$$u(x,t) = t^2 + \begin{cases} 2(x-t) - \cos(x-2t),\ 0 \le 2t < x \\ x - 2 + e^{x-2t},\ 0 \le x \le 2t \end{cases}$$

Замечание 3. Первые и вторые производные этой функции непрерывны на характеристике $x = 2t$, то есть $u \in C^2([0;\infty) \times [0;\infty))$. Это свойство обеспечивается следующими условиями согласования, которым удовлетворяют начальные и граничные данные из соотношений (10.12) и (10.13):

$$\nu(t)\big|_{t=0} = w(0,0) - w_x(0,0) = \left[w_0(x) - \frac{\partial w_0(x)}{\partial x}\right]_{x=0};$$

$$\frac{\partial \nu(t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = w_t(0,0) - w_{xt}(0,0) = \left[w_1(x) - \frac{\partial w_1(x)}{\partial x}\right]_{x=0}.$$

10.3. Метод отражений. Для полуограниченной струны с однородными граничными условиями есть метод сведения смешанной задачи к задаче Коши.

Рассмотрим смешанную задачу с однородными граничными условиями первого рода:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \tag{10.14}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \tag{10.15}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{10.16}$$

где $u_0 \in C^2[0;\infty)$, $u_1 \in C^1[0;\infty)$. Потребуем выполнение следую-

щих условий согласования:

$$u_0(0) = 0,\ u_1(0) = 0 \text{ и } u_0''(0) = 0. \qquad (10.17)$$

Лемма 1. Пусть $w(x,t)$ – решение классической задачи Коши

$$w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \qquad (10.18)$$

$$w(x,0) = \begin{cases} u_0(x), & x \ge 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases},\ w_t(x,0) = \begin{cases} u_1(x), & x \ge 0 \\ -u_1(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad (10.19)$$

тогда сужение $u = w|_{x\ge 0}$ является решением смешанной задачи (10.14),(10.15),(10.16).

Доказательство леммы 1. Смысл этой леммы состоит в том, что, если решение задачи Коши есть нечетная функция переменной x, то однородное граничное условие выполняется автоматически. Поэтому достаточно доказать, что решение задачи (10.18),(10.19) при любом $t \ge 0$ есть нечетная по x функция.

Рассмотрим функцию $\tilde{w}(x,t) = -w(-x,t)$. Для нее $\tilde{w}_{tt}(x,t) = -w_{tt}(-x,t) = -a^2 w_{xx}(-x,t) = a^2 \tilde{w}_{xx}(x,t)$ и выполнены начальные условия (10.19) (ввиду нечетности последних). Следовательно, если w – решение задачи (10.18),(10.19), то и $\tilde{w}$ – решение той же задачи, и в силу доказанной единственности решения классической задачи Коши для волнового уравнения

$$w(x,t) = \tilde{w}(x,t) = -w(-x,t),$$

что и требовалось доказать ■

Замечание 4. Условия согласования (10.17) обеспечивают гладкость начальных данных (10.19) при $x = 0$, которая необходима для гладкости решения w на характеристиках $x = \pm at$

Рассмотрим теперь смешанную задачу для уравнения (10.14) с начальными условиями (10.15) и однородными граничными условиями второго рода

$$u_x(0,t) = 0. \qquad (10.20)$$

Условия согласования в этом случае выглядят следующим образом:

$$u_0'(0) = 0,\ u_1'(0) = 0. \qquad (10.21)$$

Лемма 2. Если $w(x,t)$ – решение классической задачи Коши для уравнения (10.18) с начальными условиями

$$w(x,0) = u_0(|x|),\ w_t(x,0) = u_1(|x|), \qquad (10.22)$$

то сужение $u = w|_{x\ge 0}$ является решением смешанной задачи (10.14),(10.15),(10.20).

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 с той лишь разницей, что в этом случай $w(x,t)$ – четная функция переменной x.

Пример 2. Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \Delta_x u(x,t),\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(|x|),\ u_t(x,0) = 0,$$

где $a > 0$, f – заданная функция из класса $C^2[0;\infty)$.

Решение. В силу единственности решение поставленной задачи зависит только от радиуса $r = |x|$. Будем искать его в виде

$$u(x,t) = \frac{v(r,t)}{r},\ r = |x|.$$

Тогда

$$\Delta_x u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r - v) = \frac{v_{rr}}{r},\ ^{1)}$$

и приходим к начально-краевой задаче в области $\{(r,t) : r > 0,\ t > 0\}$ для уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{rr},\ r > 0,\ t > 0$$

с начальными условиями

$$v(r,0) = rf(r),\ v_t(r,0) = 0$$

и краевыми условиями первого рода

$$v(0,t) = 0.$$

(Последние вытекают из того, что $v(0) = [u(x,t)\cdot|x|]_{x=0} = 0$.) Для решения этой задачи воспользуемся леммой 1, положим $v_0(r) = rf(|r|)$, $r \in \mathbf{R}$ и выпишем формулу Даламбера:

---

[1]) Подробнее об операторе Лапласа в сферических координатах см. §32.

$$v(r,t) = \frac{1}{2}\left[v_0(r+at) + v_0(r-at)\right] =$$

$$= \frac{r+at}{2} f(r+at) + \frac{r-at}{2} f(|r-at|).$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{at}{|x|}\right) f(|x|+at) + \left(1-\frac{at}{|x|}\right) f(||x|-at|)\right].$$

Отметим, что полученная функция имеет конечный предел при $|x| \to 0$:

$$u(0,t) = f(at) + at \cdot f'(at).$$

10.4. Задача Гурса. Задачей Гурса называется задача для уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными, в которой задается по одному условию на каждой из двух пересекающихся характеристик.

Для постановки задачи Гурса удобно использовать первый канонический вид (см. §2) гиперболического уравнения. Тогда характеристики совпадают с координатными осями, и задача формулируется следующим образом

Пусть $G = (0;\Xi) \times (0;H)$ – прямоугольная область в $\mathbf{R}^2$. Требуется найти решение $u(\xi,\eta)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} + A\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi} + B\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta} + Cu(\xi,\eta) = f(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in G$$

из класса $C^2(G) \cap C(\overline{G})$, удовлетворяющее условиям

$$u(\xi,0) = \varphi_1(\xi),\ u(0,\eta) = \varphi_1(\eta), \qquad (10.23)$$

где A, B, C, и f – заданные функции из класса $C(G)$, φ_1 и φ_2 – заданные функции из классов $C[0;\Xi]$ и $C[0;H]$ соответственно.

Очевидно, что для существования решения необходимым является *условие согласования*

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \qquad (10.24)$$

Пример 3. Решить задачу Гурса для однородного уравнения колебаний струны

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) = a^2\tilde{u}_{xx}(x,t),\ a > 0. \qquad (10.25)$$

Решение. Уравнение (10.25) приводится к первому каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \qquad (10.26)$$

заменой

$$\xi = x - at,\ \eta = x + at;$$

$$u(\xi,\eta) = \tilde{u}\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2a}\right).$$

Поскольку общий вид решения уравнения (10.26) есть $u(\xi,\eta) = I(\xi) + J(\eta)$, то для решения задачи Гурса (10.26),(10.23) получаем выражение $u(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) - \varphi_1(0)$ (при условии, что функции φ_1 и φ_2 дважды непрерывно дифференцируемы, и выполнено условие согласования (10.24)).

§11. Метод Фурье решения смешанной задачи для волнового уравнения на отрезке. Существование и единственность классического решения

11.1. Метод Фурье. Широко распространен подход к отысканию решений смешанных и краевых задач в виде функциональных рядов.

Общая схема решения смешанной или краевой задачи методом Фурье следующая:

1) сведение к задаче с однородными граничными условиями;

2) построение формального решения в виде функционального ряда с разделенными переменными;

3) доказательство сходимости этого ряда к функции, являющейся решением поставленной задачи из заданного класса.

Рассмотрим в прямоугольной области $G = (0;l) \times (0;T)$ смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) - a^2\tilde{u}_{xx}(x,t) = \tilde{f}(x,t),\ (x,t) \in G \qquad (11.1)$$

с начальными условиями

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{u}_1(x) \qquad (11.2)$$

и граничными условиями первого рода

$$\tilde{u}(0,t) = \mu(t),\ \tilde{u}(l,t) = \nu(t). \qquad (11.3)$$

Необходимо найти решение задачи (11.1),(11.2),(11.3) из класса $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$.

Прежде всего, сведем задачу к смешанной задаче с однородными граничными условиями. Для простоты будем предполагать, что $\mu, \nu \in C^2[0;T]$, тогда, производя замену

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) - \nu(t) - \frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}(x-l),$$

получаем смешанную задачу с однородными граничными условиями

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G, \qquad (11.4)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad (11.5)$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \qquad (11.6)$$

Здесь f, u_0 и u_1 – преобразованные функции $\tilde{f}$, $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$ соответственно.

11.2. Построение формального решения. Решим задачу о нахождении собственных функций дифференциального оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, определенного на линейном многообразии функций $M = \left\{X(x) : X \in C^2(0;l) \cap C[0;l],\ X'' \in L_2(0;l),\ X(0) = X(l) = 0\right\}$ [1]):

$$-X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < l, \qquad (11.7)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (11.8)$$

Общее решение уравнения (11.7) есть

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x,$$

где $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ – постоянные, $\sqrt{\lambda}$ – одно из значений комплексного корня [2]). Граничные условия (11.8) приводят к системе уравнений

[1]) Под классом функций $L_2(D)$ понимается множество функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на измеримом множестве D

[2]) В §19 будет показано, что оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ на многообразии $M \subset L_2(0;l)$ является положительно определенным, поэтому может иметь только положительные собственные значения.

на постоянные:

$$\begin{cases} 0 = X(0) = C_2 \\ 0 = X(l) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}l \end{cases},$$

откуда

$$C_2 = 0;\quad \sqrt{\lambda}l = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

Значение $\lambda = 0$ не является собственным, поскольку в этом случае решением системы (11.7),(11.8) является только функция, тождественно равная нулю (см. определение собственного значения в §19).

Таким образом, получаем набор собственных значений и собственных функций, отвечающих этим значениям:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x,\ k \in \mathbf{N}. \qquad (11.9)$$

Заметим, что функции $X(x)$ удовлетворяют однородным граничным условиям на концах отрезка $[0;l]$ и являются собственными для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, входящего в волновое уравнение. Следовательно, решение $u(x,t)$ задачи (11.4),(11.5),(11.6) имеет смысл искать в виде функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad (11.10)$$

где $T_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$ – функции, определенные на $[0;T]$

Найдем $T_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$, при этом считая выполненными следующие условия:

1) $u_0(x) \in C^2[0;l]$, существует третья производная $u_0'''(x)$ – кусочно непрерывная на отрезке $[0;l]$ функция (имеет конечное число разрывов первого рода), $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0$;

2) $u_1(x) \in C^1[0;l]$, существует $u_1''(x)$ – кусочно непрерывная на отрезке $[0;l]$ функция, $u_1(0) = u_1(l) = 0$;

3) $f(x,t) \in C^{2,0}_{x,t}(\overline{G})$, $f(0,t) = f(l,t) \equiv 0$

Из ограничения 1) следует, что ряд Фурье функции $u_0(x)$ схо-

дится равномерно к самой $u_0(x)$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l}x,\ x \in [0;l], \qquad (11.11)$$

где $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k}{l}x dx$ – коэффициенты Фурье, причем $a_k = \frac{\tilde{a}_k}{k^3}$ и числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{a}_k|^2$ сходится. Обозначим $C_1 = \sup_{k\in\mathbf{N}}|\tilde{a}_k| < \infty$.

Аналогично для функции $u_1(x)$ из ограничения 2) получаем, что

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k}{l}x,\ x \in [0;l], \qquad (11.12)$$

где $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{\pi k}{l}x dx$ – коэффициенты Фурье, причем $b_k = \frac{\tilde{b}_k}{k^2}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{b}_k|^2$ сходится. Обозначим $C_2 = \sup_{k\in\mathbf{N}}|\tilde{b}_k| < \infty$.

Ограничение 3) позволяет для каждого значения t из отрезка $[0;T]$ разложить функцию $f(x,t)$ в равномерно сходящийся по переменной x ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x,\ x \in [0;l], \qquad (11.13)$$

где $B_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x dx \in C[0;T]$. В соответствии с правилом дифференцирования рядов Фурье $|B_k(t)| = \frac{|\tilde{B}_k(t)|}{k^2}$, где $\tilde{B}_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x dx \in C([0,T])$ – коэффициенты Фурье разложения функции $f_{xx}(x,t)$ при фиксированном значении t. Неравенство Бесселя для $\tilde{B}_k(t)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{B}_k(t)|^2 \le \frac{2}{l}\int_0^l |f_{xx}(x,t)|^2 dx.$$

Заметим, что $g(t) = \frac{2}{l}\int_0^l |f_{xx}(x,t)|^2 dx$ есть непрерывная функция своего аргумента t, так как $f_{xx}(x,t) \in C(\overline{G})$. Следовательно, существует $\sup_{t\in[0;T]} g(t) = C_3 < \infty$.

Формально подставляя ряды (11.10), (11.11), (11.12) и (11.13) в равенства (11.4), (11.5) и учитывая свойства функций $X_k(x)$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)X_k(x) + a^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)X_k(x),\ (x,t) \in G,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x),\ x \in [0;l],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k X_k(x),\ x \in [0;l]$$

(возможность почленного дифференцирования ряда (11.10) будет обсуждаться в следующем пункте). Потребуем почленное выполнение написанных равенств:

$$T_k''(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = B_k(t), \qquad (11.14.k)$$

$$T_k(0) = a_k,\ T_k'(0) = b_k. \qquad (11.15.k)$$

Для решения задач Коши (11.14.k),(11.15.k), $k \in \mathbf{N}$ воспользуемся следующей леммой.

<u>Лемма 1.</u> Функция

$$T(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t B(\xi)\sin\mu(t-\xi)d\xi \qquad (11.16)$$

является решением (и притом единственным) из класса $C^2(0;T] \cap C^1[0;T]$ задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$T''(t) + \mu^2 T(t) = B(t),\ 0 < t \le T, \qquad (11.17)$$

$$T(0) = T'(0) = 0, \qquad (11.18)$$

где $\mu > 0$ и $B(t) \in C[0;T]$.

Доказательство леммы 1. Единственность решения доказывается в курсе дифференциальных уравнений. Тот факт, что функция $T(t)$, определяемая формулой (11.16), является решением задачи (11.17),(11.18), можно непосредственно проверить:

$$T(0) = 0,$$

$$T'(t) = \frac{1}{\mu} B(t)\sin 0 + \int_0^t B(\xi)\cos\mu(t-\xi)d\xi = \int_0^t B(\xi)\cos\mu(t-\xi)d\xi,$$

$$T'(0) = 0,$$

$$T''(t) = B(t)\cos 0 - \mu\int_0^t B(\xi)\sin\mu(t-\xi)d\xi = B(t) - \mu^2 T(t)$$

■

Замечание 1. Конструктивное доказательство леммы 1 (формальное построение решения) будет приведено в качестве примера использования фундаментальных решений дифференциальных операторов (см. §28).

Следовательно,

$$T_k(t) = a_k\cos\frac{\pi ak}{l}t + b_k\frac{l}{\pi ak}\sin\frac{\pi ak}{l}t + \frac{l}{\pi ak}\int_0^t B_k(\xi)\sin\frac{\pi ak}{l}(t-\xi)d\xi$$

Итак, построен ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{\pi ak}{l}t + b_k\frac{l}{\pi ak}\sin\frac{\pi ak}{l}t + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{\pi ak}\int_0^t B_k(\xi)\sin\frac{\pi ak}{l}(t-\xi)d\xi\right]\sin\frac{\pi k}{l}x. \qquad (11.19)$$

11.3. Классическое решение. Докажем, что функциональный ряд (11.19) сходится равномерно к некоторой непрерывной на $\overline{G}$ функции. Для чего оценим его k-й член следующим образом:

$$\sup_{(x,t)\in\overline{G}}|T_k(t)X_k(x)| \le \sup_{t\in[0;T]}|T_k(t)| \le |a_k| + \frac{|b_k|l}{\pi ak} +$$

$$+\frac{l}{\pi ak}\sup_{t\in[0;T]}\left|\int_0^t B_k(\xi)\sin\frac{\pi ak}{l}(t-\xi)d\xi\right| \le |a_k| + \frac{|b_k|l}{\pi ak} + \frac{lT}{\pi ak}\sup_{t\in[0;T]}|B_k(t)| =$$

$$= \frac{|\tilde{a}_k|}{k^3} + \frac{|\tilde{b}_k|l}{\pi ak^3} + \frac{lT}{\pi ak^3}\sup_{t\in[0;T]}|\tilde{B}_k(t)| \le \left[C_1 + \frac{l}{\pi a}C_2 + \frac{lT}{\pi a}\sqrt{C_3}\right]\frac{1}{k^3}.$$

Здесь в последнем неравенстве учтено, что

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0;T]}|\tilde{B}_k(t)| \le \sup_{t\in[0;T]}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{B}_k(t)|^2} \le \sup_{t\in[0;T]}\sqrt{g(t)} = \sqrt{C_3}.$$

Таким образом, ряд (11.19) мажорируется числовым сходящимся рядом, следовательно, он сходится равномерно на $\overline{G}$ к некоторой функции $u(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x). \qquad (11.20)$$

Более того, функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C(\overline{G})$, так как члены ряда $T_k(t)X_k(x)$ непрерывны на $\overline{G}$.

Аналогичным образом докажем теперь равномерную сходимость рядов $\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)$, $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k'(x)$, $\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t)X_k'(x)$, $\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)X_k(x)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k''(x)$ в $\overline{G}$. Тогда получим существование непрерывных на $\overline{G}$ производных $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xt}(x,t)$, $u_{tt}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)X_k(x)$ и $u_{xx}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k''(x)$. Доказательство проведем в наиболее сложных случаях – для вторых производных по t и x, так как первые и смешанная производные оцениваются проще.

Для k-го члена ряда $\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)X_k(x)$ справедлива оценка

$$\sup_{(x,t)\in\overline{G}}|T_k''(t)X_k(x)| \le \sup_{t\in[0;T]}|T_k''(t)| \le \sup_{t\in[0;T]}\left|B_k(t) - \left(\frac{\pi ak}{l}\right)^2 a_k\cos\frac{\pi ak}{l}t - \right.$$

$$\left. -\frac{\pi ak}{l}b_k\sin\frac{\pi ak}{l}t - \frac{\pi ak}{l}\int_0^t B_k(\xi)\sin\frac{\pi ak}{l}(t-\xi)d\xi\right| \le \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\frac{\tilde{a}_k}{k} +$$

$$+\frac{\pi a}{l}\frac{|\tilde{b}_k|}{k}+\frac{1}{k^2}\sup_{t\in[0;T]}|\tilde{B}_k(t)|+\frac{\pi a}{l}\int_0^T\frac{|\tilde{B}_k(\xi)|}{k}d\xi\le\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\left(|\tilde{a}_k|^2+\frac{1}{k^2}\right)+$$

$$+\frac{\pi a}{l}\left(|\tilde{b}_k|^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{k^2}\sqrt{C_3}+\frac{\pi a}{l}\int_0^T\left(|\tilde{B}_k(\xi)|^2+\frac{1}{k^2}\right)d\xi=\frac{1}{k^2}\sqrt{C_3}+$$

$$+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\left(|\tilde{a}_k|^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\pi a}{l}\left(|\tilde{b}_k|^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\pi aT}{l}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi a}{l}\int_0^T|\tilde{B}_k(\xi)|^2d\xi.$$

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T|\tilde{B}_k(\xi)|^2d\xi$ сходится, так как для любого $n\in\mathbf{N}$ справедлнва цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^T|\tilde{B}_k(\xi)|^2d\xi\le\int_0^T\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{B}_k(\xi)|^2\right]d\xi\le\int_0^T g(\xi)d\xi\le C_3T.$$

Следовательно, мажорирующий чнсловой ряд сходится (как сумма сходящихся рядов), поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty}T_k''(t)X_k(x)$ сходится равномерно в $\overline{G}$.

Для ряда $\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k''(x)\equiv-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2T_k(t)X_k(x)$ еще проще:

$$\sup_{(x,t)\in\overline{G}}\left|\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2T_k(t)X_k(x)\right|\le\sup_{t\in[0;T]}\left|\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2T_k(t)\right|\le$$

$$\le\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{|\tilde{a}_k|}{k}+\frac{\pi}{la}\frac{|\tilde{b}_k|}{k}+\frac{\pi}{la}\int_0^T\frac{|\tilde{B}_k(\xi)|}{k}d\xi\le$$

$$\le\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(|\tilde{a}_k|^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\pi}{la}\left(|\tilde{b}_k|^2+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\pi T}{la}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi}{la}\int_0^T|\tilde{B}_k(\xi)|^2d\xi$$

– мажорируется сходяшнмся чнсловым рядом.

Подведем итог.

<u>Теорема 1.</u> Пусть выполнены условия 1), 2) и 3), перечисленные в предыдущем пункте. Тогда смешанная задача (11.4),(11.5),(11.6) в классе функций $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ имеет еднистенное решение,

причем ряд (11.19) равномерно сходится к этому решению.

Доказательство теоремы 1. Единственность решения будет доказана в следующем пункте (теорема 2), а сходимость ряда (11.19) к решению (н, таким образом, существование решения) была доказана выше ■

Пример 1. Решить смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x)=(\pi-x)xt,\ x\in(0;\pi),\ t\in(0;T),$$

$$u(x,0)=u_0(x)=0,\ u_t(x,0)=u_1(x)=\sin^2x,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$

Решение. Заметим, что функции, участвующие в этой задаче, удовлетворяют условиям 1), 2) и 3). По этой причине можно воспользоваться теоремой 1 и строить решение в виде ряда (11.19). Найдем коэффициенты a_k, b_k и $B_k(t)$ разложения в ряды Фурье функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x,t)$ соответственно:

$$a_k=0,\ k\in\mathbf{N};$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos2x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kxdx-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(k+2)xdx-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(k-2)xdx=$$

$$=\begin{cases}0,\ k=2n\\ \frac{2}{\pi k}-\frac{1}{\pi(k+2)}-\frac{1}{\pi(k-2)},\ k=2n-1\end{cases}=\begin{cases}0,\ k=2n\\ \frac{8}{\pi k(4-k^2)},\ k=2n-1\end{cases};$$

$$\frac{B_k(t)}{t}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x-x^2)\sin kxdx=\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos kxdx=$$

$$=\frac{4}{\pi k^2}\int_0^{\pi}\sin kxdx=\begin{cases}0,\ k=2n\\ \frac{8}{\pi k^3},\ k=2n-1\end{cases},\ n\in\mathbf{N}.$$

Вычислим интеграл, входящий в выражение (11.19):

$$\int_0^t\xi\sin k(t-\xi)d\xi=\frac{t}{k}-\frac{1}{k}\int_0^t\cos k(t-\xi)d\xi=\frac{t}{k}-\frac{\sin kt}{k^2}.$$

Получаем результат

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi(2n-1)^2}-\frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^2-4}+\frac{t}{(2n-1)^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^4}\right]\sin(2n-1)x$$

Пример 2. Решить смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t)+4u(x,t)=u_{xx}(x,t)+4t^2x+8t,\ x\in(0;1),\ t>0,$$
$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=2,$$
$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=t^2$$

Решение. Будем действовать в соответствии со схемой метода Фурье. Перейдем к однородным граничным условиям, сделав замену $u(x,t)=v(x,t)+xt^2$, где функция $v(x,t)$ – решение смешанной задачи

$$v_{tt}(x,t)+4v(x,t)-v_{xx}(x,t)=8t-2x,\ x\in(0;1),\ t>0,\quad (11.20)$$
$$v(x,0)=0,\ v_t(x,0)=2,\quad (11.21)$$
$$v_x(0,t)=v_x(1,t)=0.\quad (11.22)$$

Будем искать функцию $v(x,t)$ в виде функционального ряда с разделенными переменными x и t:

$$v(x,t)\sim\sum_k\tilde{T}_k(t)\tilde{X}_k(x)\quad (11.23)$$

От функций $\tilde{X}_k(x)$ потребуем, чтобы они являлись собственными для дифференциального оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ и удовлетворяли однородным граничным условиям второго рода:

$$-\tilde{X}_k''(x)=\lambda_k\tilde{X}_k(x),$$
$$\tilde{X}_k'(0)=\tilde{X}_k'(1)=0.$$

Находим

$$\lambda_k=\pi^2k^2,\ \tilde{X}_k(x)=\cos\pi kx,\ k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$$

Далее разложим функцию x, входящую в уравнение (11.20), по системе $\{\cos\pi kx\}_{k=0}^{\infty}$:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cos\pi kx,$$

$$c_0=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2},$$

$$c_k=2\int_0^1 x\cos\pi kx\,dx=-\frac{2}{\pi k}\int_0^1\sin\pi kx\,dx=\begin{cases}0, & k=2n\\ -\frac{4}{\pi^2k^2}, & k=2n-1\end{cases},\ n\in\mathbf{N}.$$

Формально подставим ряд (11.23) в уравнение (11.20) и начальные условия (11.21):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{T}_k''(t)\tilde{X}_k(x)+\left(4+\pi^2k^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{T}_k(t)\tilde{X}_k(x)=8t\tilde{X}_0(x)-2\sum_{k=0}^{\infty}c_k\tilde{X}_k(x),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{T}_k(0)\tilde{X}_k(x)=0,\ \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{T}_k'(0)\tilde{X}_k(x)=2\tilde{X}_0(x).$$

Потребуем почленного выполнения написанных равенств:

$$\tilde{T}_0''(t)+4\tilde{T}_0(t)=8t-1,$$
$$\tilde{T}_0(0)=0,\ \tilde{T}_0'(0)=2;$$

и

$$\tilde{T}_k''(t)+\left(4+\pi^2k^2\right)\tilde{T}_k(t)=-2c_k,$$
$$\tilde{T}_k(0)=\tilde{T}_k'(0)=0,$$
$$k\in\mathbf{N}.$$

Решая эти задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, находим

$$\tilde{T}_0(t)=\frac{1}{4}\cos2t+2t-\frac{1}{4},$$
$$\tilde{T}_k(t)=-\frac{2c_k}{4+\pi^2k^2}\left(1-\cos\sqrt{4+\pi^2k^2}\,t\right),\ k\in\mathbf{N}.$$

В итоге получаем ряд

$$v(x,t)\sim\frac{1}{4}\cos2t+2t-\frac{1}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha_nt}{(2n-1)^2\alpha_n^2}\cos\pi(2n-1)x,$$

где $\alpha_n^2=4+\pi^2(2n-1)^2$.

Остается отметить, что ряды $\sum_k \tilde{T}_k(t)\tilde{X}_k(x)$, $\sum_k \tilde{T}_k''(t)\tilde{X}_k(x)$ и $\sum_k \tilde{T}_k(t)\tilde{X}_k''(x)$ сходятся равномерно на множестве $[0;1]\times[0;\infty)$, так как мажорируются сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{const}{n^2}$. Следовательно, можно записать

$$u(x,t) = xt^2 + \frac{1}{4}\cos 2t + 2t - \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha_n t}{(2n-1)^2\alpha_n^2}\cos\pi(2n-1)x.$$

11.4. Единственность решения. Для полноты картины осталось изучить вопрос о единственности решения.

Теорема 2. Рассмотрим в прямоугольной области $G = (0;l)\times(0;T)$ смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке

$$u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t)\in G$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

и граничными условиями одного из типов

либо $\quad u(0,t) = \nu(t),\ u(l,t) = \mu(t)$,

либо $\quad u_x(0,t) = \nu(t),\ u_x(l,t) = \mu(t)$,

либо $k_1u(0,t) - u_x(0,t) = \nu(t),\ k_2u(l,t) + u_x(l,t) = \mu(t),\ k_1,k_2 > 0$.

Эта задача может иметь не более одного решения в классе $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{\tilde{u}}(x,t)$ – два решения из указанного класса. Тогда их разность $w(x,t) = \tilde{\tilde{u}}(x,t) - \tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$Lw(x,t) \equiv w_{tt}(x,t) - a^2w_{xx}(x,t) = 0,\ (x,t)\in G,$$

однородным начальным условиям

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0$$

и однородным граничным условиям соответствующего типа

$$w(0,t) = w(l,t) = 0,$$

или $\quad w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0$,

или $\quad k_1w(0,t) - w_x(0,t) = k_2w(l,t) + w_x(l,t) = 0,\ k_1,k_2 > 0$.

Получим для функции $w(x,t)$ аналог энергетического неравенства, для чего проделаем уже привычные преобразования (см. §5):

$$2w_tLw = 2w_tw_{tt} - 2a^2w_tw_{xx} = (w_t^2)_t - 2\left(a^2w_xw_t\right)_x + 2a^2w_xw_{tx} =$$
$$= \left(w_t^2 + a^2w_x^2\right)_t - \left(2a^2w_xw_t\right)_x.$$

Следовательно, для произвольного $\tau\in(0;T]$ и малого $\delta > 0$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = \int_\delta^{\tau-\delta}\int_\delta^{l-\delta}2w_t(x,t)Lw(x,t)dtdx = \int_\delta^{\tau-\delta}dt\int_\delta^{l-\delta}\left(w_t^2(x,t) + a^2w_x^2(x,t)\right)_t dx -$$
$$-2a^2\int_\delta^{\tau-\delta}dt\int_\delta^{l-\delta}\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)_x dx = \int_\delta^{\tau-\delta}dt\frac{\partial}{\partial t}\int_\delta^{l-\delta}\left(w_t^2(x,t) + a^2w_x^2(x,t)\right)dx -$$
$$-2a^2\int_\delta^{\tau-\delta}\left(w_x(l-\delta,t)w_t(l-\delta,t) - w_x(\delta,t)w_t(\delta,t)\right)dt =$$
$$= \int_\delta^{l-\delta}\left(w_t^2(x,\tau-\delta) + a^2w_x^2(x,\tau-\delta)\right)dx - \int_\delta^{l-\delta}\left(w_t^2(x,\delta) + a^2w_x^2(x,\delta)\right)dx -$$
$$-2a^2\int_\delta^{\tau-\delta}\left(w_x(l-\delta,t)w_t(l-\delta,t) - w_x(\delta,t)w_t(\delta,t)\right)dt.$$

Устремим теперь δ к нулю, учитывая, что функции w_x и w_t принадлежат классу $C([0;l]\times[0;T])$

$$\int_0^l\left(w_t^2(x,\tau) + a^2w_x^2(x,\tau)\right)dx - \int_\delta^l\left(w_t^2(x,0) + a^2w_x^2(x,0)\right)dx =$$
$$= 2a^2\int_0^\tau\left(w_x(l,t)w_t(l,t) - w_x(0,t)w_t(0,t)\right)dt$$

Обозначим $E(t) = \int_0^l\left(w_t^2(x,t) + a^2w_x^2(x,t)\right)dx$ и учтем, что $E(0) = 0$ в силу однородных начальных условий. Следовательно,

$$E(\tau) = 2a^2 \int_0^\tau \left(w_x(l,t)w_t(l,t) - w_x(0,t)w_t(0,t)\right)dt. \qquad (11.24)$$

Рассмотрим следующие варианты.

1) Для граничных условий первого рода $w(0,t) = w(l,t) = 0$, получаем $w_t(0,t) = w_t(l,t) = 0$ и равенство (11.24) переходит в $E(\tau) = 0$.

2) Для граничных условий второго рода $w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0$, следовательно, $E(\tau) = 0$.

3) Для граничных условий третьего рода проследим за следующими преобразованиями:

$$0 \le E(\tau) = 2a^2 \int_0^\tau \left(-k_2 w(l,t)w_t(l,t) - k_1 w(0,t)w_t(0,t)\right)dt =$$

$$= -a^2 \int_0^\tau \left(k_1\left(w^2(0,t)\right)_t + k_2\left(w^2(l,t)\right)_t\right)dt = -a^2\left(k_1 w^2(0,\tau) + k_2 w^2(l,\tau)\right) \le 0.$$

Следовательно, $E(\tau) = 0$.

Итак, во всех трех случаях справедливо равенство $E(\tau) = 0$ для произвольного $\tau \in [0;T]$.

С учетом гладкости функции $w(x,t)$, получаем, что $w \equiv 0$ или $\tilde{\tilde{u}} \equiv \tilde{u}$, что и требовалось доказать ■

Глава III

Задача Коши и смешанная задача для уравнения теплопроводности

§12. Уравнение теплопроводности. Принцип максимума

12.1. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Перейдем к рассмотрению начальных и начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в $\mathbf{R}^n$:

$$u_t(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R}. \qquad (12.1)$$

Как и для волнового уравнения переменная t имеет физический смысл времени, а x – пространственных координат. В этой главе будем считать, что $a > 0$.

Для уравнения (11.1) ставятся две основные задачи.

1) *Классическая задача Коши.* Пусть $G = \mathbf{R}^n \times (0;T)$ – область в пространстве переменных (x,t), T – момент времени, ограничивающий наблюдение за процессом распространения тепла; $f(x,t)$ и $u_0(x)$ – заданные функции из классов $C(G)$ и $C(\mathbf{R}^n)$ соответственно. Требуется найти в классе $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G})$ функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbf{R}^n.$$

2) *Смешанная задача.* Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D, $G = D \times (0;T)$; $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $\nu(x,t)$ – задан-

ные функции из классов $C(G)$, $C^1(\overline{D})$ и $C(\partial D \times [0;T])$ соответственно. Требуется найти функцию $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C^{1,0}_{x,t}(\overline{G})$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G,$$

начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in D$$

и граничным условиям

$$\left(\alpha u(x,t) + \beta\frac{\partial}{\partial n}u(x,t)\right)\Bigg|_{x\in\partial D} = \nu(x,t),\ t \in [0;T],$$

где n – внешняя единичная нормаль к границе ∂D области D, α и β – коэффициенты, определяющие тип граничных условий.

Замечание 1. В случае, когда $\beta = 0$, достаточно требовать от функций $u_0(x)$ и $u(x,t)$ принадлежность классам $C(\overline{D})$ и $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G})$ соответственно.

Для существования решения смешанной задачи необходимым является *условие согласования*

$$\left(\alpha u_0(x) + \beta\frac{\partial}{\partial n}u_0(x)\right)\Bigg|_{x\in\partial D} = \nu(x,0).$$

12.2. Принцип максимума в ограниченной области. При обсуждении корректности постановок классической задачи Коши и смешанной задачи для волнового уравнения использовалось энергетическое неравенство. В случае уравнения теплопроводности для тех же целей оказывается полезным принцип максимума.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Введем следующие обозначения:

$$D_0 = \{(x,t) : x \in D,\ t = 0\},$$
$$S_T = \{(x,t) : x \in \partial D,\ 0 \le t \le T\},$$
$$V_T = \{(x,t) : x \in D,\ 0 < t \le T\},$$

причем $0 < T < \infty$. Выделим класс функций

$$C^{2,1}_{x,t}(V_T) \cap C(\overline{V_T}) \tag{12.2}$$

Лемма 1. Пусть функция $w(x,t)$ из класса (12.2) удовлетворяет в V_T неравенству

$$L_\lambda w(x,t) \equiv w_t(x,t) - a^2\Delta_x w(x,t) + \lambda w(x,t) \le 0, \tag{12.3}$$

при некотором $\lambda > 0$. Тогда, если $\sup\limits_{\overline{V_T}} w(x,t) > 0$, то для произвольной точки (x,t) из V_T выполняется неравенство

$$w(x,t) < \sup_{D_0 \cup S_T} w. \tag{12.4}$$

Доказательство леммы 1. Прежде всего заметим, что $w(x,t)$ – непрерывная на компакте $\overline{V_T}$ функция. По этой причине значение $\sup\limits_{\overline{V_T}} w$ конечно и достигается хотя бы в одной точке из $\overline{V_T}$. Неравенство (12.4), таким образом, означает, что значение $\sup\limits_{\overline{V_T}} w$ не может достигаться в точках множества V_T, то есть из равенства $w(x,t) = \sup\limits_{\overline{V_T}} w$ следует, что $(x,t) \in D_0 \cup S_T$. Допустим теперь противное: существует точка $(x_0,t_0) \in V_T$ такая, что $w(x_0,t_0) = \sup\limits_{\overline{V_T}} w > 0$. Тогда согласно необходимому условию максимума справедливо неравенство $\Delta_x w(x_0,t_0) \le 0$, подставляя которое в неравенство (12.3), получаем

$$w_t(x_0,t_0) \le -\lambda(x_0,t_0)w(x_0,t_0) < 0.$$

Следовательно, в интервале $(0;t_0)$ существует момент времени t, для которого $w(x_0,t) > (x_0,t_0)$, что противоречит выбору точки (x_0,t_0) ■

Из леммы 1 вытекает следующая

Теорема 1 (принцип максимума). Если функция $u(x,t)$ принадлежит классу (12.2) и удовлетворяет в V_T однородному уравнению теплопроводности

$$u_t(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = 0, \tag{12.5}$$

то для произвольной точки (x,t) из V_T выполняются неравенства

$$\inf_{D_0\cup S_T} u \le u(x,t) \le \sup_{D_0\cup S_T} u. \qquad (12.6)$$

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\sup\limits_{\overline{V_T}} u > 0$, так как из того, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет неравенствам (12.6), следует, что и функция $u(x,t) + const$ удовлетворяет тем же неравенствам.

Пусть λ – произвольное положительное число. Рассмотрим функцию $w(x,t) = u(x,t)e^{-\lambda t}$. Она удовлетворяет в V_T равенству $L_\lambda w(x,t) = 0$, и, следовательно, по лемме 1 выполняется неравенство

$$e^{-\lambda t}u(x,t) < \sup_{(\xi,\tau)\in D_0\cup S_T} e^{-\lambda\tau}u(\xi,\tau),\ (x,t)\in V_T.$$

Перейдем теперь к пределу в обеих частях последнего неравенства при $\lambda \to +0$, получаем

$$u(x,t) \le \sup_{(\xi,\tau)\in D_0\cup S_T} u(\xi,\tau),\ (x,t)\in V_T.$$

Таким образом, доказана правая часть утверждения (12.6). Для доказательства левой достаточно заметить, что функция $-u(x,t)$ так же удовлетворяет уравнению (12.5), причем $-\sup\limits_{D_0\cup S}(-u) = \inf\limits_{D_0\cup S} u$

■

Замечание 2. Усилить принцип максимума (12.6), поставив строгие знаки неравенства, нельзя (например, функция $u(x,t) \equiv const$ удовлетворяет уравнению (12.6)).

Замечание 3. Можно не требовать выполнение уравнения теплопроводности (12.5) при $t = T$, в этом случае нестрогие неравенства (12.6) останутся справедливыми при $t = T$ в силу непрерывности функции $u(x,t)$ на $\overline{V_T}$.

12.3. Принцип максимума в неограниченной области для класса ограниченных функций. Пусть теперь $D = \mathbf{R}^n$. Выделив новый класс функций

$$C^{2,1}_{x,t}\left(\mathbf{R}^n\times(0;T]\right)\cap C\left(\mathbf{R}^n\times[0;T]\right)\cap B\left(\mathbf{R}^n\times[0;T]\right),\ ^{1)} \qquad (12.7)$$

можно сформулировать аналог теоремы 1.

Теорема 2. Пусть функция $u(x,t)$ принадлежит классу (12.7) и удовлетворяет в $\mathbf{R}^n\times(0;T]$ однородному уравнению теплопроводности (12.5). Тогда для функции справедлив принцип максимума

$$\inf_{\xi\in\mathbf{R}^n} u(\xi,0) \le u(x,t) \le \sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} u(\xi,0),\ (x,t)\in\mathbf{R}^n\times(0;T]. \qquad (12.8)$$

Доказательство теоремы 2. По соображениям, приведенным в доказательстве теоремы 1, можно ограничиться рассмотрением только правой части неравенства (12.7), считая при этом, что $C = \sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}^n} u(\xi,0) > 0$.

Основная идея доказательства состоит в сведении к случаю ограниченной области при помощи барьерной функции.

Рассмотрим для произвольного фиксированного числа $\lambda > 0$ вспомогательную функцию $w_\varepsilon(x,t) = u(x,t)e^{-\lambda t} - \varepsilon\left(|x|^2 + 2na^2t\right)$, зависящую от параметра $\varepsilon > 0$. Покажем, что значение $\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}^n} w_\varepsilon(\xi,0)$ является положительным. Из определения C следует, что существует точка $x_0 \in \mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ такая, что $u(x_0,0) > \frac{2}{3}C$. Следовательно, существует число $\varepsilon_0 = \dfrac{C}{3|x_0|^2}$ такое, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}^n} w_\varepsilon(\xi,0) \ge \frac{1}{3}C > 0$. Отметим так же, что при $t = 0$ справедливо неравенство $w_\varepsilon(x,0) = u(x,0) - \varepsilon|x|^2 \le u(x,0) \le C$, $x\in\mathbf{R}^n$. Проверим выполнение в $\mathbf{R}^n\times(0;T]$ неравенства (12.3), необходимого для применения к функции w_ε леммы 1:

$$L_\lambda w_\varepsilon(x,t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x + \lambda\right)w_\varepsilon(x,t) = L_\lambda\left(u(x,t)e^{-\lambda t}\right) -$$

[1]) Класс $B(M)$ – множество ограниченных на M функций.

$$-\varepsilon\lambda\left(|x|^2+2na^2t\right)=-\varepsilon\lambda\left(|x|^2+2na^2t\right)\le 0.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon<\varepsilon_0$. Тогда из вида функции w_ε и ограниченности функции u следует существование числа R_0 такого, что для произвольного радиуса $R>R_0$ выполняется неравенство $w_\varepsilon(x,t)<0$ для $|x|=R$ и $t\in[0;T]$. Применяя к ограниченной области $D_R=\{x\in\mathbf{R}^n:\ |x|<R\}$ и функции w_ε лемму 1, получаем, что для точек $(x,t)\in D_R\times(0;T]$ выполняется неравенство

$$w_\varepsilon(x,t)<\max\left\{\sup_{|\xi|\le R}w_\varepsilon(\xi,0),\ \sup_{|\xi|=R,\tau\in[0;T]}w_\varepsilon(\xi,\tau)\right\}\le C.$$

Следовательно,

$$w_\varepsilon(x,t)=u(x,t)e^{-\lambda t}-\varepsilon\left(|x|^2+2na^2t\right)<C,\ (x,t)\in\mathbf{R}^n\times(0;T],$$

так как R может быть сколь угодно большим. Далее совершим два предельных перехода: при $\varepsilon\to+0$, и затем при $\lambda\to+0$ (именно в такой последовательности!). Окончательно находим

$$u(x,t)\le C,\ (x,t)\in\mathbf{R}^n\times(0;T].$$

■

§13. Единственность решений задачи Коши и смешанной задачи для уравнения теплопроводности

13.1. Единственность решения смешанной задачи. Уже здесь можно дать частичный ответ на вопрос о корректности постановки смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Теорема 1. Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Если решение $u(x,t)$ смешанной задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t)-a^2(x,t)\Delta_x u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in G=D\times(0;T) \qquad (13.1)$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_0\in C(\overline{D}) \qquad (13.2)$$

и граничными условиями первого рода

$$u(x,t)\big|_{x\in\partial D}=\nu(x,t),\ \nu\in C(\partial D\times[0,T]) \qquad (13.3)$$

существует в классе функций $C^{2,1}_{x,t}(G)\cap C(\overline{G})$, то оно единственно в этом классе и непрерывно зависит от начальных и граничных данных (в равномерной метрике).

Доказательство теоремы 1.

Единственность. Пусть $\tilde u$ и $\tilde{\tilde u}$ – решения задачи (13.1),(13.2),(13.3). Тогда их разность $u=\tilde{\tilde u}-\tilde u$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями:

$$u_t(x,t)=a^2(x,t)\Delta_x u(x,t),\ (x,t)\in G,$$
$$u(x,0)=0,$$
$$u(x,t)\big|_{x\in\partial D}=0.$$

Согласно принципу максимума в ограниченной области (теорема 1, §12) выполняются неравенства

$$0\le u(x,t)\le 0\ (x,t)\in\overline{G}$$

Следовательно, $\tilde u\equiv\tilde{\tilde u}$ в $\overline{G}$.

Непрерывная зависимость. Пусть теперь $\tilde u$ и $\tilde{\tilde u}$ – решения задачи (13.1),(13.2),(13.3), отвечающие различным начально-краевым данным: $\tilde u_0$, $\tilde\nu$ и $\tilde{\tilde u}_0$, $\tilde{\tilde\nu}$ соответственно. Тогда разность $u=\tilde{\tilde u}-\tilde u$ является решением смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t)=a^2(x,t)\Delta_x u(x,t),\ (x,t)\in G$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\tilde{\tilde u}_0(x)-\tilde u_0(x)$$

и граничными условиями

$$u(x,t)\big|_{x\in\partial D}=\tilde{\tilde\nu}(x,t)-\tilde\nu(x,t).$$

Воспользуемся для функции u принципом максимума, получаем оценку

$$\left|\tilde u(x,t)-\tilde{\tilde u}(x,t)\right|\le\max\left\{\sup_{\overline{D}}\left|\tilde u_0-\tilde{\tilde u}_0\right|,\ \sup_{\partial D\times[0;T]}\left|\tilde\nu-\tilde{\tilde\nu}\right|\right\},\ (x,t)\in\overline{G},$$

что означает непрерывную зависимость решения от начальных и краевых данных в равномерной метрике ■

13.2. Единственность решения задачи Коши. Из принципа

максимума в неограниченной области вытекает следующая

Теорема 2. Если решение задачи Коши

$$u_t(x,t) - a^2(x,t)\Delta_x u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G = \mathbf{R}^n \times (0;T), \quad (13.4)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_0 \in C(\mathbf{R}^n) \quad (13.5)$$

с ограниченными начальными данными u_0 существует в классе функций $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G}) \cap B(\overline{G})$, то оно единственно в нем и непрерывно зависит от начальных данных (в равномерной метрике).

Единственность решения можно доказать в более широком классе функций.

Определение 1. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $F(G)$ функций *ограниченного роста* тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные C и β такие, что для произвольной точки $(x,t) \in G$ выполняется неравенство $|u(x,t)| \le Ce^{\beta|x|}$.

Обсудим корректность этого определения. Надо доказать, что множество функций $F(G)$ действительно образует класс, то есть, если функции u и $\tilde{u}$ принадлежат множеству $F(G)$, то и их линейная комбинация $\alpha u + \tilde{\alpha}\tilde{u}$ также принадлежит $F(G)$. Пусть C_1, β_1 и C_2, β_2 – постоянные соответствующие u и $\tilde{u}$, тогда для модуля значения линейной комбинации $\alpha u + \tilde{\alpha}\tilde{u}$ в точке $(x,t) \in G$ можно записать оценку

$$|\alpha u(x,t) + \tilde{\alpha}\tilde{u}(x,t)| \le |\alpha u(x,t)| + |\tilde{\alpha}\tilde{u}(x,t)| \le |\alpha| C_1 e^{\beta_1|x|} + |\tilde{\alpha}| C_2 e^{\beta_2 x} \le Ce^{\beta|x|},$$

где $C = |\alpha| C_1 + |\tilde{\alpha}| C_2$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$. Следовательно, функция $\alpha u + \tilde{\alpha}\tilde{u}$ принадлежит классу $F(G)$.

Теорема 3. Если решение задачи Коши (13.4),(13.5) с начальными данными u_0 ограниченного роста существует в классе функций

$$C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G}) \cap F(G), \quad (13.6)$$

то оно единственно в этом классе.

Доказательство теоремы 3. Достаточно показать, что в классе

(13.6) не существует отличного от тривиального (тождественно равного нулю) решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2\Delta_x u(x,t),\quad (x,t) \in G = \mathbf{R}^n \times (0;T) \quad (13.7)$$

с однородными начальными условиями

$$u(x,0) = 0. \quad (13.8)$$

Допустим противное: существует решение $u(x,t)$ задачи (13.7), (13.8), для которого $\sup\limits_{\overline{G}} u > 0$ или $\inf\limits_{\overline{G}} u < 0$. Рассмотрим две эти возможности отдельно.

1) Пусть $\sup\limits_{\overline{G}} u > 0$. Поскольку функция $u(x,t)$ по условию принадлежит классу функций конечного роста $F(G)$, то существуют положительные постоянные C и β такие, что для точек (x,t) из $\overline{G}$ выполняется неравенство $|u(x,t)| \le Ce^{\beta|x|}$. Рассмотрим функцию

$$w_{\varepsilon\lambda}(x,t) = u(x,t)e^{-\lambda t} - \varepsilon \exp\left(4a^2\beta^2 t\right)\prod_{i=1}^{n} \operatorname{ch}\left(2\beta x^i\right),$$

зависящую от положительных параметров ε и λ. Обсудим далее условия применимости к функции $w_{\varepsilon\lambda}$ леммы 1 из предыдущего параграфа.

а) Из неравенства $\sup\limits_{\overline{G}} u > 0$ непосредственно следует существование чисел $\varepsilon_0 > 0$ и $\lambda_0 > 0$ таких, что для $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda < \lambda_0$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\overline{G}} w_{\varepsilon\lambda} > 0$.

б) Легко проверить, что функция $\exp\left(4a^2\beta^2 t\right)\prod\limits_{i=1}^{n} \operatorname{ch}\left(2\beta x^i\right)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (13.6), и следовательно, для точек $(x,t) \in G$ можно записать

$$L_\lambda w_{\varepsilon\lambda}(x,t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x + \lambda\right) w_{\varepsilon\lambda}(x,t) = L_\lambda\left(u(x,t)e^{-\lambda t}\right) -$$

$$-\varepsilon\lambda \exp\left(4a^2\beta^2 t\right)\prod_{i=1}^{n} \operatorname{ch}\left(2\beta x^i\right) = -\varepsilon\lambda \exp\left(4a^2\beta^2 t\right)\prod_{i=1}^{n} \operatorname{ch}\left(2\beta x^i\right) \le 0.$$

в) Для $t = 0$ и $x \in \mathbf{R}^n$ справедлива следующая оценка:

$$w_{\varepsilon\lambda}(x,0) = u(x,0) - \varepsilon\prod_{i=1}^{n} \operatorname{ch}\left(2\beta x^i\right) = -\varepsilon\prod_{i=1}^{n} \operatorname{ch}\left(2\beta x^i\right) < 0.$$

г) Поскольку $|u(x,t)| \le Ce^{\beta|x|}$, $(x,t) \in \overline{G}$, то при фиксированных значениях ε и λ существует положительное число R_0 такое, что для произвольного радиуса $R > R_0$ выполняется неравенство $w_{\varepsilon\lambda}(x,t) < 0$ для $|x| = R$ и $t \in [0;T]$.

Эти обстоятельства позволяют применить к функции $w_{\varepsilon\lambda}$ при фиксированных значениях $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda < \lambda_0$ в шаровой области $D_R = \left\{x \in \mathbf{R}^n : |x| < R\right\}$ радиуса $R > R_0$ лемму 1 предыдущего параграфа, получаем

$$w_{\varepsilon\lambda}(x,t) \le \max\left\{\sup_{\xi \in D_R} w_{\varepsilon\lambda}(\xi,0),\ \sup_{|\xi|=R,\tau\in[0;T]} w_{\varepsilon\lambda}(\xi,\tau)\right\} \le 0,\ (x,t) \in D_R \times [0,T],$$

Учтем, что радиус R может быть сколь угодно большим, приходим к неравенству

$$w_{\varepsilon\lambda}(x,t) \le 0,\ (x,t) \in \overline{G}$$

Совершая предельный переход при $\varepsilon \to +0$ и $\lambda \to +0$, находим

$$u(x,t) \le 0,\ (x,t) \in \overline{G},$$

что противоречит предположению $\sup\limits_{\overline{G}} u > 0$.

2) Пусть $\inf\limits_{\overline{G}} u < 0$. Этот случай сводится к предыдущему, для чего достаточно заметить, что, если функция $u(x,t)$ является решением задачи (13.7),(13.8), то и $-u(x,t)$ – решение этой задачи, причем $\inf\limits_{\overline{G}} u = -\sup\limits_{\overline{G}}(-u)$.

Итак, $u \equiv 0$ в $\overline{G}$, что и требовалось доказать ■

§14. Построение функции источника для уравнения теплопроводности с помощью автомодельного решения

14.1. Группы преобразований. Дадим необходимый для дальнейшего набор понятий.

Рассмотрим в области $G \subset \mathbf{R}^n$ произвольное уравнение в частных производных

$$F\left(x, u(x), D^{\alpha_1}u(x), \ldots, D^{\alpha_m}u(x)\right) = 0,\ x \in G. \qquad (14.1)$$

Пусть U – взаимно однозначное преобразование независимых переменных, отображающее область G на себя:

$$G \overset{U}{\leftrightarrow} G,\ \ \tilde{x} = U(x). \qquad (14.2)$$

<u>Определение 1.</u> Уравнение (14.1) называется *инвариантным* относительно преобразования U независимых переменных (14.2), если оно равносильно уравнению

$$F\left(U(x), u(U(x)), D_x^{\alpha_1}u(U(x)), \ldots, D_x^{\alpha_m}u(U(x))\right) = 0,\ x \in G, \qquad (14.3)$$

то есть функция u является решением уравнения (14.1) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения (14.3).

Пусть теперь преобразование U зависит от скалярного параметра α, который может принимать значения из области $D \subset \mathbf{R}$. Обозначим: U_α – преобразование, отвечающее значению параметра α.

<u>Определение 2.</u> Множество преобразований $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ называется *однопараметрической группой преобразований*, если выполнены следующие свойства:

1) для любых значений параметров α_1 и α_2 из области D существует единственное значение $\alpha \in D$ такое, что $U_\alpha = U_{\alpha_1} \circ U_{\alpha_2}$. Таким образом, на множестве $D \times D$ определена функция γ: $\alpha = \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$;

2) в D существует единственное значение параметра α_0 такое, что для любого α из D выполняются равенства $\gamma(\alpha_0, \alpha) = \gamma(\alpha, \alpha_0) = \alpha$, то есть U_{α_0} суть тождественное преобра-

зование;

3) для любого $\alpha \in D$ должно существовать единственное $\beta \in D$ такое, что $\gamma(\alpha,\beta) = \gamma(\beta,\alpha) = \alpha_0$, то есть U_β – обратное к U_α преобразование.

Заметим, что поскольку композиция преобразований обладает свойством ассоциативности $(U_{\alpha_1} \circ U_{\alpha_2}) \circ U_{\alpha_3} = U_{\alpha_1} \circ (U_{\alpha_2} \circ U_{\alpha_3})$, то операция γ так же обладает этим свойством: $\gamma(\gamma(\alpha_1,\alpha_2),\alpha_3) = \gamma(\alpha_1,\gamma(\alpha_2,\alpha_3))$. Следовательно, γ есть групповая операция на множестве D.

Определение 3. Говорят, что уравнение (14.1) *допускает однопараметрическую группу* преобразований $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$, если для любого $\alpha \in D$ уравнение (14.1) инвариантно относительно преобразования U_α.

Определение 4. Функция $I(x)$ называется *инвариантом* однопараметрической группы преобразований $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$, если для любого $\alpha \in D$ выполняется тождество $I(x) \equiv I(U_\alpha(x))$, $x \in G$.

14.2. Автомодельное решение. Рассмотрим теперь однородное уравнение теплопроводности

$$u_t(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = 0,\ (x,t) \in G = \mathbf{R}^n \times (0;\infty) \qquad (14.4)$$

и однопараметрическую группу преобразований

$$\begin{cases} \tilde{t} = \alpha t \\ \tilde{x} = \alpha^k x \end{cases},\ \alpha \in D = (0;\infty), \qquad (14.5)$$

где k – постоянная.

Множество преобразований (14.5) действительно образует группу: $\gamma(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2$, $\alpha_0 = 1$, $\beta = 1/\alpha$.

Выберем постоянную k так, чтобы уравнение (14.4) допускало группу (14.5), то есть потребуем, чтобы уравнение (14.4) было равносильно уравнению

$$u_t(\alpha^k x, \alpha t) = a^2\Delta_x u(\alpha^k x, \alpha t),\ (x,t) \in G,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\alpha u_{\tilde{t}}(\tilde{x},\tilde{t}) = a^2\alpha^{2k}\Delta_{\tilde{x}} u(\tilde{x},\tilde{t}),\ (\tilde{x},\tilde{t}) \in G. \qquad (14.6)$$

Сравнивая уравнения (14.4) и (14.6), находим

$$k = \frac{1}{2} \qquad (14.7)$$

Легко проверить, что $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$ – инвариант группы (14.5).

Замечание 1. Возможно, в качестве инварианта ξ удобнее было бы выбрать функцию $\xi = \dfrac{x}{a\sqrt{t}}$. Первое соображение в пользу такого выбора техническое: в уравнении (14.8), которое будет получено далее, отсутствовал бы коэффициент $1/a^2$. Более содержательное соображение вытекает из применения метода размерностей, опирающегося на поиск безразмерной переменной, каковой в рассматриваемом случае как раз и является $\xi = \dfrac{x}{a\sqrt{t}}$.

Определение 5. Решение уравнения (14.1), зависящее только от инвариантов некоторой допустимой однопараметрической группы преобразований, называется *автомодельным решением*.

Попробуем найти автомодельное решение уравнения (14.4) вида

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Подставляя в уравнение (14.4), находим

$$-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(x, \operatorname{grad} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) - \frac{a^2}{t}\Delta f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0,$$

или

$$\Delta f(\xi) + \frac{1}{2a^2}(\xi, \operatorname{grad} f(\xi)) = 0 \qquad (14.8)$$

Ищем решение уравнения (14.8) в следующем виде:

$$f(\xi) = \prod_{i=1}^{n} g(\xi^i), \qquad (14.9)$$

где g – скалярная функция скалярного аргумента, найти которую труда не составляет:

$$g''(\zeta) = -\frac{\zeta}{2a^2} g'(\zeta),$$

откуда

$$g(\zeta) = C_1 \int_0^{\zeta} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4a^2}\right) d\lambda + C_2. \qquad (14.10)$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные.

14.3. Функция источника. Полученное автомодельное решение обладает двумя недостатками

Во-первых, при $t \to +0$ функция $u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ поточечно стремится к функции $u_0(x)$, тождественно равной константе. По этой причине автомодельное решение мало полезно при решении задачи Коши.

Во-вторых, физический смысл имеют лишь решения $u(x,t)$ уравнения теплопроводности (14.4), достаточно быстро убывающие на бесконечности (при $|x| \to \infty$) вместе со своими производными первого порядка. Для таких функций из класса $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G})$, удовлетворяющих уравнению (14.4), справедлив закон сохранения

$$\int_{R^n} u(x,t)dx = const \text{ при } t > 0, \qquad (14.11)$$

так как интегрирование обеих частей уравнения (14.4) по x дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{R^n} u(x,t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} u(x,t)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} u_t(x,t)dx =$$

$$= a^2 \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} \Delta_x u(x,t)dx = a^2 \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\le R} \mathrm{div}_x(\mathrm{grad}_x\, u(x,t))dx =$$

$$= a^2 \lim_{R\to\infty}\int_{|x|=R} \left(\mathrm{grad}_x\, u(x,t), \frac{x}{R}\right) ds_x = 0$$

Но автомодельное решение закону сохранения (14.11) не удовлетворяет.

Будем искать решение уравнения (14.4), удовлетворяющее закону сохранения тепла, в виде

$$u(x,t) = c(t)\tilde{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Функции c и $\tilde{f}$ найдем из равенств (14.4) и (14.11), в частности из закона сохранения (14.11) для функции $c(t)$ получаем следующее представление:

$$c(t)\left(\sqrt{t}\right)^n \int_{R^n} f(\xi)d\xi = const,$$

откуда

$$c(t) = \frac{C}{\left(\sqrt{t}\right)^n}. \qquad (14.12)$$

Здесь $C = \dfrac{const}{\int_{R^n} f(\xi)d\xi}$ – константа, которая будет выбрана позже

Уравнение (14.4) приводит в свою очередь к следующему соотношению:

$$c'(t)\tilde{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2t\sqrt{t}}c(t)\left(\mathrm{grad}\,\tilde{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), x\right) - \frac{a^2}{t}\Delta\tilde{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0.$$

Разделяя как и раньше переменные $\tilde{f}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \prod_{i=1}^{n} h\left(\frac{x^i}{\sqrt{t}}\right)$, находим

$$c'(t)\prod_{i=1}^{n} h\left(\frac{x^i}{\sqrt{t}}\right) - c(t)\sum_{j=1}^{n}\left[h'\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)\frac{x^j}{2t\sqrt{t}}\prod_{i\ne j} h\left(\frac{x^i}{\sqrt{t}}\right)\right] -$$

$$-a^2 c(t)\sum_{j=1}^{n}\left[h''\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{t}\prod_{i\ne j} h\left(\frac{x^i}{\sqrt{t}}\right)\right] = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{c'(t)}{n}h\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right) - c(t)h'\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)\frac{x^j}{2t\sqrt{t}} - a^2 c(t)h''\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{t}\right]\prod_{i\ne j} h\left(\frac{x^i}{\sqrt{t}}\right)\right\} = 0.$$

Учтем выражение (14.12) для функции $c(t)$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[-\frac{1}{2\left(\sqrt{t}\right)^{n+2}}h\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)-\frac{x^j}{2\left(\sqrt{t}\right)^{n+3}}h'\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)-\frac{a^2}{\left(\sqrt{t}\right)^{n+2}}h''\left(\frac{x^j}{\sqrt{t}}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\prod_{i\neq j}h\left(\frac{x^i}{\sqrt{t}}\right)\right]\right\}=0$$

Это равенство будет выполнено, если потребовать очевидного тождества

$$\frac{1}{2}h(\zeta)+\frac{1}{2}\zeta h'(\zeta)+a^2h''(\zeta)=0,$$

которое можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\left(\zeta h(\zeta)\right)'+\left(a^2h'(\zeta)\right)'=0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\zeta h(\zeta)+a^2h'(\zeta)=C_1, \qquad (14.13)$$

где C_1 – константа. Из условия убывания на бесконечности следует, что $C_1=0$. Решая уравнение (14.13), находим

$$h(\zeta)=C_2\exp\left(-\frac{\zeta^2}{4a^2}\right).$$

Здесь константу C_2 можно положить равной единице, поскольку уже есть произвольный постоянный множитель C.

Итак,

$$u(x,t)=\frac{C}{\left(\sqrt{t}\right)^n}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{\left(x^i\right)^2}{4a^2t}\right)=\frac{C}{\left(\sqrt{t}\right)^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right).$$

Постоянную C удобно выбрать так, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\int_{\mathbf{R}^n}u(x,t)dx=1,\ t>0,$$

то есть

$$1=\frac{C}{\left(\sqrt{t}\right)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)dx=C\left(2a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta\right)^n=C\left(2a\sqrt{\pi}\right)^n.$$

Выпишем окончательный результат:

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(\sqrt{4a^2\pi t}\right)^n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right). \qquad (14.14)$$

Это и есть *функция источника* для уравнения теплопроводности. Стандартное обозначение для нее – $G(x,t)$.

<u>Свойства</u> функции источника $G(x,t)$:

1) функция $G(x,t)$ принадлежит классу $C^\infty\left(\mathbf{R}^n\times(0;\infty)\right)$ и удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (14.4) в области $\mathbf{R}^n\times(0;\infty)$;

2) при $t>0$ справедливо тождество $\int_{\mathbf{R}^n}G(x,t)dx\equiv 1$;

3) для любого числа $\delta>0$ существует предел $\int_{|x|\geq\delta}G(x,t)dt\to 0$ при $t\to+0$.

Доказательство свойств.

Свойства 1) и 2) следуют из построения функции $G(x,t)$ и ее вида.

Свойство 3). Выберем и зафиксируем произвольное число $\delta>0$. Проследим за следующими преобразованиями:

$$\int_{|x|\geq\delta}G(x,t)dx=\frac{1}{\left(\sqrt{4a^2\pi t}\right)^n}\int_{|x|\geq\delta}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)dx=\frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}\int_{|\xi|\geq\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}e^{-|\xi|^2}d\xi,$$

Из сходимости несобственного интеграла $\int_{\mathbf{R}^n}e^{-|\xi|^2}d\xi$ следует справедливость предельного перехода

$$\int_{|x|\geq\delta}G(x,t)dx=\frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}\int_{|\xi|\geq\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}}e^{-|\xi|^2}d\xi\to 0 \text{ при } t\to+0.$$

■

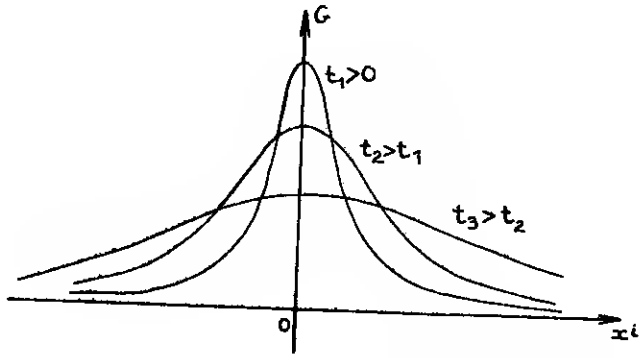

Рис. 11

Замечание 2. При изучении обобщенных функций будет показано (см. §30), что функции $G(x,t)$ переменной x, зависящие от параметра t, при стремлении t к нулю образуют δ-образную последовательность, то есть в пространстве обобщенных функций D' имеет место сходимость $G(x,t) \to \delta(x)$ при $t \to +0$.

Замечание 3. Из свойств функции источника $G(x,t)$ следует ее физический смысл: $G(x,t)$ – распределение температуры в однородном пространстве в результате точечного выброса единицы тепла в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$.

§15. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

15.1. Свертка функций. Введем основополагающее понятие.

Определение 1. Пусть $f(\xi)$ и $g(\xi)$ – функции в $\mathbf{R}^n$. Если для любой точки $x \in \mathbf{R}^n$ существует несобственный интеграл

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-\xi)g(\xi)d\xi,$$

то он называется *сверткой* функций f и g и обозначается $h(x) = (f*g)(x)$.

Свойства свертки:

1) коммутативность: если существует свертка $f*g$, то существует свертка $g*f$, причем $g*f = f*g$;

2) линейность: если существуют свертки f_1*g и f_2*g, то для произвольных постоянных α_1 и α_2 существует свертка $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g$, причем $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1(f_1*g) + \alpha_2(f_2*g)$;

3) дифференцирование свертки (по одной из переменных x^j): пусть функции f и g из классов $C^1_{x^j}(\mathbf{R}^n)$ и $C(\mathbf{R}^n)$ соответственно таковы, что существует их свертка $f*g$, и для любой точки x_0 из $\mathbf{R}^n$ существует окружающий ее шар $B_r(x_0) = \{x : |x - x_0| < r\}$ такой, что несобственный интеграл $\int_{\mathbf{R}^n} g(\xi)\frac{\partial}{\partial x^j} f(x-\xi)d\xi$ сходится равномерно при $x \in B_r(x_0)$, тогда свертка $(f*g)(x)$ дифференцируема по переменной x^j, причем

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(f*g)(x) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} f(\xi)\right)*g(\xi)\right](x). \qquad (15.1)$$

Доказательство свойств.

Свойства 1) и 2) следуют из свойств интегралов.

Свойство 3). Рассмотрим функцию $F(x,\xi) = f(x-\xi)g(\xi)$. В сделанных предположениях для нее выполняются свойства

$$F(x,\xi) \in C^1_{x^j}(\mathbf{R}^{2n}) \text{ и } \frac{\partial}{\partial x^j}F(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x^j} f(x-\xi)g(\xi).$$

Следовательно, по правилу дифференцирования неопределенных интегралов, зависящих от параметра, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\int_{\mathbf{R}^n} F(x,\xi)d\xi = \int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial}{\partial x^j}F(x,\xi)d\xi, \qquad (15.2)$$

так как интеграл, стоящий справа, согласно условиям сходится равномерно в каждом из шаров, покрывающих все $\mathbf{R}^n$. Равенство (15.2) легко переписать в виде (15.1) ■

15.2. Интеграл Пуассона. Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2\Delta_x u(x,t), \ (x,t) \in G = \mathbf{R}^n \times (0;\infty) \qquad (15.3)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{15.4}$$

Учитывая физический смысл функции источника $G(x,t)$, построенной в предыдущем параграфе, можно предположить, что для решения $u(x,t)$ задачи (15.3),(15.4) при $t>0$ справедлива формула

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} G(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi \equiv G(\xi,t) \underset{\xi}{*} u_0(\xi).$$

<u>Теорема 1.</u> Пусть функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbf{R}^n$. Тогда решение задачи Коши (15.3),(15.4) в классе $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G}) \cap B(\overline{G})$ существует, единственно, бесконечно дифференцируемо при $t>0$ и непрерывно зависит от начальных данных в равномерной метрике. При $t>0$ это решение задается интегралом Пуассона

$$u(x,t) = G(\xi,t) \underset{\xi}{*} u_0(\xi) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right) u_0(\xi)d\xi \tag{15.5}$$

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько этапов.

1) Функция источника $G(x,t)$ бесконечно дифференцируема: $G(x,t) \in C^\infty\left(\mathbf{R}^n \times (0;\infty)\right)$. Более того, из ее вида следует, что для любого мульти-индекса $\alpha = \left(\alpha^1,\ldots,\alpha^n,\alpha^{n+1}\right)$ справедливо следующее выражение для производной $D^\alpha_{(x,t)}G(x-\xi,t)$ при $t>0$:

$$D^\alpha_{(x,t)}G(x-\xi,t) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\left(\partial x^1\right)^{\alpha^1}\ldots\left(\partial x^n\right)^{\alpha^n}\partial t^{\alpha^{n+1}}} G(x-\xi,t) =$$

$$= P\left(x-\xi,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right),$$

где P – многочлен от своих аргументов. Следовательно, для любой точки (x_0,t_0) из $\mathbf{R}^n \times (0;\infty)$ существуют постоянные $C>0$ и $K>0$ такие, что для произвольной точки $\xi \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство

$$\left|D^\alpha G(x-\xi,t)u_0(\xi)\right| \le MC\tilde{P}(\xi)\exp\left(-K|\xi|^2\right),\ (x,t) \in B_1(x_0) \times \left(\tfrac{1}{2}t_0;2t_0\right).$$

Здесь $M = \sup\limits_{\mathbf{R}^n}|u_0| < \infty$, $\tilde{P}$ – многочлен, $B_1(x_0) = \{x : |x-x_0| < 1\}$ – единичный шар с центром в точке x_0. В соответствии с мажорантным признаком это означает, что несобственный интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha_{(x,t)}G(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi$$

сходится равномерно в цилиндре $B_1(x_0) \times \left(\tfrac{1}{2}t_0;2t_0\right)$. Следовательно, при $t>0$ существуют все производные

$$D^\alpha_{(x,t)}u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha_{(x,t)}G(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi \tag{15.6}$$

Таким образом, бесконечная дифференцируемость функции $u(x,t)$, задаваемой формулой (15.5), доказана

2) Поскольку $G(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (15.3), то с учетом соотношений (15.6) следует, что и функция $u(x,t)$ из формулы (15.5) удовлетворяет этому уравнению при $t>0$.

3) Проверим выполнение начального условия, для чего докажем, что функция $u(x,t)$, задаваемая при $t>0$ формулой (15.5) и равная $u_0(x)$ при $t=0$, непрерывна в произвольной точке $(x_0,0)$. Воспользуемся свойством 2) функции источника $G(x,t)$ и сделаем следующие оценки для $(x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0;\infty)$:

$$|u(x,t) - u(x_0,0)| = |u(x,t) - u_0(x_0)| = \left|u(x,t) - u_0(x_0)\int_{\mathbf{R}^n} G(x-\xi,t)d\xi\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbf{R}^n} G(x-\xi,t)\left(u_0(\xi) - u_0(x_0)\right)d\xi\right| \le \int_{\mathbf{R}^n} G(x-\xi,t)|u_0(\xi) - u_0(x_0)|d\xi.$$

Из непрерывности функции u_0 следует, что для произвольных $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|u_0(x_0) - u_0(\xi)| < \varepsilon$ при $\xi \in B_{2\delta}(x_0) = \{x : |x-x_0| < 2\delta\}$. Преобразуем с учетом этого оценку для модуля разности $|u(x,t) - u(x_0,0)|$ при $|x-x_0| < \delta$:

$$|u(x,t)-u(x_0,0)| \le \int\limits_{|x-\xi|\ge\delta} G(x-\xi,t)|u_0(\xi)-u_0(x_0)|d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|x-\xi|\le\delta} G(x-\xi,t)|u_0(\xi)-u_0(x_0)|d\xi \le 2M \int\limits_{|\zeta|\ge\delta} G(\zeta,t)d\zeta + \varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}^n} G(\zeta,t)d\zeta =$$

$$= 2M \int\limits_{|\zeta|\ge\delta} G(\zeta,t)d\zeta + \varepsilon,$$

где $\zeta = x-\xi$. Из свойства 3) функции источника следует, что существует число $t_0 > 0$ такое, что $\int\limits_{|\zeta|\ge\delta} G(\zeta,t)d\zeta < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ при $0 < t < t_0$.

Итак, для произвольных $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что $|u(x,t)-u(x_0,0)| < 2\varepsilon$ при $(x,t) \in B_\delta(x_0) \times (0;t_0)$. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в точках $(x_0,0)$

Замечание 1. Если функция $u_0(x)$ равномерно непрерывна, то сходимость $u(x,t)$ к $u_0(x)$ при $t \to +0$ является равномерной.

4) Необходимо все же проверить тот очевидный факт, что построенное решение $u(x,t)$ – ограниченная в области $\mathbf{R}^n \times (0;\infty)$ функция. Это вытекает из следующей оценки:

$$|u(x,t)| = \left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} u_0(\xi)G(x-\xi,t)d\xi\right| \le M \int\limits_{\mathbf{R}^n} G(x-\xi,t)d\xi = M$$

5) Единственность решения и его непрерывная зависимость от начальных данных являются следствием принципа максимума в неограниченной области (см. §12) и обсуждались в §13 ■

Пример 1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - 3\Delta_x u(x,t) = \frac{5(x^1)^2 - 12(x^2)^2 + 7(x^3)^2}{9t^2+4}, \quad x \in \mathbf{R}^3, \ t > 0 \quad (15.7)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \exp\left(-2(x^1)^2\right)\sin\left(2x^2 + x^3\right). \quad (15.8)$$

Решение. Прежде всего сведем уравнение (15.7) к однородному

$$u_t(x,t) = 3\Delta_x u(x,t), \quad (15.9)$$

для чего представим решение $u(x,t)$ задачи (15.7),(15.8) в виде $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \hat{u}(x,t)$, где $\hat{u}(x,t)$ – решение уравнения (15.7), удовлетворяющее однородным начальным условиям $\hat{u}(x,0) = 0$. Для нахождения функции $\hat{u}(x,t)$ заметим, что правая часть уравнения (15.7) представима в виде $f(x)g_0(t)$, причем функция $f(x)$ является гармонической ($\Delta f = 0$). По этой причине функцию $\tilde{u}(x,t)$ имеет смысл искать в виде $\hat{u}(x,t) = f(x)g(t)$, где $g(t)$ – неизвестная функция, которая согласно уравнению (15.7) должна удовлетворять равенству

$$g'(t) = g_0(t) = \frac{1}{9t^2+4} \quad (15.10)$$

Более того, $g(0) = 0$, так как $\hat{u}(x,0) = 0$. Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (15.10), находим

$$g(t) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3t}{2},$$

откуда

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3t}{2}\cdot\left[5(x^1)^2 - 12(x^2)^2 + 7(x^3)^2\right].$$

Найдем теперь функцию $\tilde{u}(x,t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности (15.9) с начальными данными (15.8), вид которых наводит на мысль о разделении переменных: $\tilde{u}(x,t) = v(x^1,t)w(x^2,x^3,t)$. Подставим $\tilde{u}(x,t)$ в равенства (15.9) и (15.8), получим

$$v_t w + v w_t = 3v_{x^1x^1}w + 3v\Delta_{(x^2,x^3)}w,$$

$$v(x^1,0)w(x^2,x^3,0) = \exp\left(-2(x^1)^2\right)\sin\left(2x^2+x^3\right)$$

Эти уравнения будут выполнены, если потребовать, чтобы

$$v_t(\eta,t) = 3v_{\eta\eta}(\eta,t), \ \eta \in \mathbf{R}, \ t > 0, \quad (15.11)$$

$$v(\eta,0) = e^{-2\eta^2}, \quad (15.12)$$

и

$$w_t(\zeta,t) = 3\Delta_\zeta w(\zeta,t),\ \zeta \in \mathbf{R}^2,\ t > 0, \qquad (15.13)$$

$$w(\zeta,0) = \sin\left(2\zeta^1 + \zeta^2\right). \qquad (15.14)$$

Для решения задачи (15.11),(15.12) воспользуемся теоремой 1:

$$v(\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\lambda-\eta)^2}{12t}\right)\exp\left(-2\lambda^2\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\lambda-\eta)^2 + 24\lambda^2 t}{12t}\right)d\lambda.$$

В показателе экспоненты выделим полный квадрат из членов, содержащих переменную интегрирования λ:

$$\lambda^2 - 2\lambda\eta + \eta^2 + 24\lambda^2 t = \left[\lambda\sqrt{1+24t} - \frac{\eta}{\sqrt{1+24t}}\right]^2 + \eta^2\frac{24t}{1+24t},$$

и сделаем замену переменных $\alpha = \lambda\sqrt{1+24t} - \dfrac{\eta}{\sqrt{1+24t}}$. Тогда

$$v(\eta,t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi t}}\exp\left(-\frac{2\eta^2}{1+24t}\right)\frac{1}{\sqrt{1+24t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{12t}\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3\pi t}}\exp\left(-\frac{2\eta^2}{1+24t}\right)\frac{1}{\sqrt{1+24t}}2\sqrt{3\pi t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+24t}}\exp\left(-\frac{2\eta^2}{1+24t}\right).$$

Функцию же $w(\zeta,t)$ будем искать в виде $w(\zeta,t) = h(t)\sin\left(2\zeta^1 + \zeta^2\right)$, отметив, что $\sin\left(2\zeta^1 + \zeta^2\right)$ – собственная функция оператора Лапласа, отвечающая собственному значению -5. Тогда для неизвестной функции времени $h(t)$, получаем уравнение

$$h'(t) = -15h(t)$$

и начальное условие $h(0) = 1$. Следовательно, $h(t) = e^{-15t}$, откуда

$$w(\zeta,t) = e^{-15t}\sin\left(2\zeta^1 + \zeta^2\right).$$

Итак, найдено решение

$$u(x,t) = \frac{\sin\left(2x^2 + x^3\right)}{\sqrt{1+24t}}\exp\left(-\frac{2\left(x^1\right)^2}{1+24t} - 15t\right) +$$

$$+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3t}{2}\cdot\left[5\left(x^1\right)^2 - 12\left(x^2\right)^2 + 7\left(x^3\right)^2\right].$$

Пример 2. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbf{R}^3$

$$u_t(x,t) = \Delta_x u(x,t) + e^{-t}\left(x^1\right)^4,\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0 \qquad (15.15)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \exp\left\{-2\left(x^1 - x^2 + x^3\right)^2\right\} \qquad (15.16)$$

Решение. Сначала найдем частное решение $\tilde{u}(x,t)$ неоднородного уравнения. Заметим, что функция e^{-t} является собственной для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}$, поэтому частное решение имеет смысл искать в виде

$$\tilde{u}(x,t) = e^{-t}f\left(x^1\right).$$

Подставляя $\tilde{u}(x,t)$ в уравнение (15.15), получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция f:

$$-f\left(x^1\right) = f''\left(x^1\right) + \left(x^1\right)^4$$

Существует частное решение этого уравнения, являющееся многочленом четвертой степени

$$f\left(x^1\right) = A\left(x^1\right)^4 + B\left(x^1\right)^2 + C,$$

коэффициенты которого легко вычисляются.

$$A = -1,\ B = -12A,\ C = -2B$$

Таким образом, найдено частное решение

$$\tilde{u}(x,t) = e^{-t}\left[-\left(x^1\right)^4 + 12\left(x^1\right)^2 - 24\right]$$

Тогда решение задачи Коши (15.15),(15.16) можно представить в виде суммы $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \hat{u}(x,t)$, где $\hat{u}(x,t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\hat{u}_t(x,t) = \Delta_x \hat{u}(x,t),\ x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0$$

с начальными условиями

$$\hat{u}(x,0) = \exp\left\{-2\left(x^1 - x^2 + x^3\right)^2\right\} + \left(x^1\right)^4 - 12\left(x^1\right)^2 + 24.$$

Решение $\hat{u}(x,t)$, в свою очередь, будем искать в виде суммы двух решений $\hat{u}(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности, причем $v(x,0) = \exp\left\{-2\left(x^1 - x^2 + x^3\right)^2\right\}$ и $w(x,0) = \left(x^1\right)^4 - 12\left(x^1\right)^2 + 24$.

а) Для нахождения функции $v(x,t)$ введем новую переменную $\eta = x^1 - x^2 + x^3$ и будем искать решение в виде

$$v(x,t) = \tilde{v}(\eta,t).$$

После подстановки в однородное уравнение теплопроводности получаем:

$$\tilde{v}_t(\eta,t) = 3\tilde{v}_{\eta\eta}(\eta,t),$$

причем

$$\tilde{v}(\eta,0) = e^{-2\eta^2},$$

то есть $\tilde{v}(\eta,t)$ – это найденное в примере 1 решение задачи (15.11),(15.12):

$$\tilde{v}(\eta,t) = \frac{1}{\sqrt{1+24t}}\exp\left\{-\frac{2\eta^2}{1+24t}\right\}.$$

Следовательно,

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+24t}}\exp\left\{-2\frac{\left(x^1 - x^2 + x^3\right)^2}{1+24t}\right\}.$$

б) Для нахождения функции $w(x,t)$ выпишем решение в виде степенного (относительно переменной t) ряда. Аналогично п. б) примера 2 из §6 можно доказать, что степенной ряд

$$w(x,t) = e^{t\Delta}w_0(x) = w_0(x) + t\Delta w_0(x) + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 w_0(x) + \ldots \quad (15.17)$$

является решением задачи Коши

$$w_t = \Delta_x w,\ t > 0, \quad (15.18)$$

$$w\big|_{t=0} = w_0 \quad (15.19)$$

в предположениях о равномерной сходимости почленно продифференцированного ряда (15.17) [1]. Это предположение заведомо справедливо, когда ряд (15.17) конечен. В нашем случае $w_0(x) = \left(x^1\right)^4 - 12\left(x^1\right)^2 + 24$, поэтому

$$w(x,t) = \left(x^1\right)^4 - 12\left(x^1\right)^2 + 24 + \left(12\left(x^1\right)^2 - 24\right)t + 12t^2.$$

Выпишем общий результат:

$$u(x,t) = \left(\left(x^1\right)^4 - 12\left(x^1\right)^2 + 24\right)\left(1 - e^{t}\right) + \left(12\left(x^1\right)^2 - 24\right)t + 12t^2 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+24t}}\exp\left\{-2\frac{\left(x^1 - x^2 + x^3\right)^2}{1+24t}\right\}.$$

15.3. Скорость распространения тепла. Из формулы Пуассона (15.5) можно сделать формальный вывод: скорость распространения тепла бесконечна. Но такое утверждение противоречит постулату Эйнштейна о существовании конечной максимальной скорости распространения энергии.

Ошибка формальной трактовки полученного результата состоит в том, что любой процесс переноса является статистическим процессом, а следовательно, неизбежно сопровождается флуктуациями. По этой причине небольшие изменения температуры, возникающие на больших расстояниях от начального возмущения, реально невозможно зарегистрировать. Если же изучать подобные тонкие эффекты, то следует пользоваться другим уравнением.

Физическое значение имеет следующий результат. Рассмотрим точечный выброс единицы тепла в начальный момент времени

---

[1]) Формально ряд (15.17) можно получить, рассмотрев задачу (15.18),(15.19) в случае, когда $\Delta = \Delta_x$ и w_0 – числа. Тогда задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (15.18) легко решается:

$$w = e^{t\Delta}w_0$$

Остается разложить экспоненту в ряд Тейлора:

$$w = w_0 + t\Delta w_0 + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 w_0 + \ldots.$$

$t=0$ в начале координат $x=0$. Тогда согласно физическому смыслу функции источника в последующие моменты времени распределение температуры в пространстве есть гауссовы кривые $G(x,t)$. Дальность распространения тепла удобно характеризовать шириной этих кривых. Например, можно вычислить среднее значение $\langle |x|^2 \rangle$ квадрата расстояния, на котором сосредоточена энергия в момент времени $t>0$.

$$\langle |x|^2 \rangle(t) \equiv \int_{R^n} G(x,t)|x|^2 dx = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n} \int_{R^n} |x|^2 \exp\left(-\alpha \frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) dx \Bigg|_{\alpha=1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=1} \frac{-4a^2 t}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n} \int_{R^n} \exp\left(-\alpha \frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) dx = -4a^2 t \frac{\partial}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=1} \frac{1}{\left(\sqrt{\alpha}\right)^n} =$$

$$= 4a^2 t \frac{n}{2} = 2na^2 t.$$

Здесь α – вспомогательный параметр, введенный для вычисления интеграла.

Таким образом, если принять за среднее значение координаты "теплового фронта" величину $\sqrt{\langle |x|^2 \rangle}$, получаем, что она пропорциональна $\sqrt{t}$, то есть скорость распространения тепловой энергии со временем убывает как $1/\sqrt{t}$. Для сравнения вспомним, что волновой фронт распространяется с постоянной скоростью, которая определяется только характеристиками среды. Тепло же распространяется со скоростью, пропорциональной градиенту температуры, который со временем убывает.

§16. Принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности

16.1. Принцип Дюамеля. Зная решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности, можно найти решение и для

неоднородного.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - a^2 \Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G = \mathbf{R}^n \times (0;\infty) \qquad (16.1)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x). \qquad (16.2)$$

Из линейности уравнения (16.1) следует, что решение $u(x,t)$ представимо в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $v(x,t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности с начальными условиями (16.2), $w(x,t)$ – решение задачи Коши для уравнения (16.1) с однородными начальными условиями $w(x,0)=0$

Найдем функцию $w(x,t)$ из класса $C^{2,1}_{x,t}(G) \cap C(\overline{G})$. Для этого рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши, зависящую от параметра $\tau \ge 0$:

$$p_t(x,t,\tau) - a^2 \Delta_x p(x,t,\tau) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > \tau, \qquad (16.3)$$

$$p(x,\tau,\tau) = f(x,\tau). \qquad (16.4)$$

<u>Утверждение 1 (принцип Дюамеля).</u> Если существует решение $p(x,t,\tau)$ вспомогательной задачи (16.3),(16.4) из класса $C^{2,1,0}_{x,t,\tau}(\overline{M})$, где $M = \{(x,t,\tau) : x \in \mathbf{R}^n, \ \tau \ge 0, \ t > \tau\}$, то функция $w(x,t) = \int_0^t p(x,t,\tau)d\tau$ удовлетворяет поставленным требованиям.

Доказательство утверждения 1. В соответствии с предположением о гладкости функции $p(x,t,\tau)$ справедливы следующие равенства:

1) $w(x,0) = 0$;

2) $w_t(x,t) = p(x,t,t) + \int_0^t p_t(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + \int_0^t a^2 \Delta_x p(x,t,\tau)d\tau =$

$$= f(x,t) + a^2 \Delta_x \int_0^t p(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + a^2 \Delta_x w(x,t), \quad t > 0.$$

Из 1) и 2) следует утверждение ■

16.2. Формула Дюамеля. Пусть функция $f(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,0}_{x,t}\left(\mathbf{R}^n \times [0;\infty)\right)$, причем производные $D^{\alpha}_x f(x,t)$, $|\alpha| \le 2$ ограничены по x при каждом фиксированном $t \ge 0$, а сама функция $f(x,t)$ ограничена на всевозможных множествах вида $\mathbf{R}^n \times [0;T]$, $T > 0$. В этом случае для нахождения решения $p(x,t,\tau)$ задачи (16.3),(16.4) можно воспользоваться формулой Пуассона (15.5):

$$p(x,t,\tau) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}\right)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi, \qquad (16.5)$$

$$t > \tau \ge 0$$

Обоснуем гладкость функции $p(x,t,\tau)$, требуемую в сформулированном выше утверждении 1. Определенные технические проблемы связаны только с доказательством непрерывности функции $p(x,t,\tau)$ по переменной τ на множестве $\overline{M}$ и гладкость $p(x,t,\tau)$ при $t = \tau$.

<u>Утверждение 2.</u> В указанных выше предположениях о гладкости и ограниченности функции $f(x,t)$ функция $p(x,t,\tau)$ непрерывна по переменной τ на множестве $\overline{M}$.

Доказательство утверждения 2. Необходимо показать, что для произвольной точки (x,t,τ_0) из $\overline{M}$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $|\tau - \tau_0| < \delta$, $0 \le \tau \le t$ следует выполнение неравенства $|p(x,t,\tau) - p(x,t,\tau_0)| < \varepsilon$.

Преобразуем интеграл, входящий в формулу (16.5), следующим образом:

$$p(x,t,\tau) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}\right)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau},\tau\right)e^{-\zeta^2}d\zeta.$$

где $\zeta = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t-\tau}}$ – новая переменная интегрирования. Далее оценим разность $|p(x,t,\tau) - p(x,t,\tau_0)|$:

$$|p(x,t,\tau) - p(x,t,\tau_0)| = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau},\tau\right)e^{-\zeta^2}d\zeta - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbf{R}^n} f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau_0},\tau_0\right)e^{-\zeta^2}d\zeta\right| \le \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n} 2C \int\limits_{|\zeta|>\sigma} e^{-\zeta^2}d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n} \int\limits_{|\zeta|\le\sigma} \left|f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau},\tau\right) - f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau_0},\tau_0\right)\right| e^{-\zeta^2}d\zeta$$

Здесь $C = \sup\limits_{(\xi,\tau)\in\mathbf{R}^n\times[0;t]} |f(\xi,\tau)| < \infty$, а число $\sigma > 0$ выбрано так, что выполняется неравенство $\int\limits_{|\zeta|>\sigma} e^{-\zeta^2}d\zeta < \dfrac{\varepsilon}{4C}\left(\sqrt{\pi}\right)^n$. Из непрерывности функции $f(\xi,\tau)$ вытекает ее равномерная непрерывность в ограниченной окрестности точки (x,τ_0), следовательно, число $\delta > 0$ можно выбрать так, что выполняется неравенство $\left|f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau},\tau\right) - f\left(x + 2a\zeta\sqrt{t-\tau_0},\tau_0\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|\tau - \tau_0| < \delta$, $|\zeta| \le \sigma$. Таким образом, показано существование $\delta > 0$ такого, что $|p(x,t,\tau) - p(x,t,\tau_0)| < \varepsilon$ при $|\tau - \tau_0| < \delta$ ■

<u>Утверждение 3.</u> В указанных выше предположениях о гладкости и ограниченности функции $f(x,t)$ функция $p(x,t,\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x и один раз по переменной t при $t \ge \tau$.

Доказательство утверждения 3. Бесконечная дифференцируемость функции $p(x,t,\tau)$ по переменным x и t при $t > \tau$ непосредственно следует из теоремы 1 §15. Обоснуем требуемую гладкость

при $t=\tau$, для чего преобразуем интеграл, входящий в формулу (16.5), воспользовавшись симметричностью свертки:

$$p(x,t,\tau)=\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}\right)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x-\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi,\ t>\tau.$$

С учетом промежуточных результатов доказательства теоремы 1 §15 и свойств функции $f(x,t)$ справедливо равенство

$$D_x^\alpha p(x,t,\tau)=\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}\right)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} D_x^\alpha f(x-\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi,$$

$$t>\tau,\ |\alpha|\le 2.$$

Поскольку функции $u_0(x)=D_x^\alpha f(x,\tau)$, $|\alpha|\le 2$ при фиксированных значениях $\tau\ge 0$ удовлетворяют всем требованиям теоремы 1 §15, то

$$D_x^\alpha p(x,t,\tau)\to D_x^\alpha f(x,\tau)\ \text{при}\ t\to\tau+0,\ |\alpha|\le 2.$$

Непрерывность же производной $\frac{\partial}{\partial t}p(x,t,\tau)$ при $t=\tau$ в свою очередь следует из выполнения для $p(x,t,\tau)$ уравнения (16.3):

$$\lim_{t\to\tau+0}\frac{\partial}{\partial t}p(x,t,\tau)=a^2\lim_{t\to\tau+0}\Delta_x p(x,t,\tau).$$

■

Воспользуемся теперь принципом Дюамеля. Получаем формулу для решения задачи (16.1),(16.2) с непрерывными ограниченными начальными данными $u_0(x)$:

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}\right)^n}\left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} u_0(\xi)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right)d\xi. \qquad (16.6)$$

Замечание 1. На практике можно избежать вычисления интеграла Дюамеля, если удается как-то подобрать частное решение

неоднородного уравнения теплопроводности, как, например, в примерах 1 и 2 из §15.

§17. Смешанная задача для распространения тепла в полуограниченном стержне

17.1. Метод отражений. Рассмотрим задачу о распространении тепла в полуограниченном однородном стержне с заданной зависимостью от времени температуры на конце:

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\ x>0,\ t>0, \qquad (17.1)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x>0, \qquad (17.2)$$

$$u(0,t)=\nu(t),\ t>0. \qquad (17.3)$$

Это смешанная задача для уравнения теплопроводности (17.1) с начальными условиями (17.2) и граничными условиями первого рода (17.3). Должно выполняться условие согласования $u_0(0)=\nu(0)$.

В случае, когда граничные условия являются однородными ($\nu(t)\equiv 0$), смешанную задачу (17.1),(17.2),(17.3) можно свести к задаче Коши для уравнения теплопроводности при помощи метода отражений, основу которого составляет следующая

<u>Лемма 1.</u> Пусть $G=\{(x,t):\ x\in\mathbf{R},\ t>0\}$, $w(x,t)$ – функция из класса $C^{2,1}_{x,t}(G)\cap C(\overline{G})\cap B(\overline{G})$, являющаяся решением задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$w_t(x,t)=a^2w_{xx}(x,t).\ (x,t)\in G \qquad (17.4)$$

с начальными условиями

$$w(x,0)=w_0(x), \qquad (17.5)$$

где $w_0(x)$ – заданная нечетная функция из класса $C(\mathbf{R})\cap B(\mathbf{R})$. Тогда $w(x,t)$ является нечетной по x функцией, то есть для любых $(x,t)\in\overline{G}$ выполняется равенство $w(x,t)=-w(-x,t)$.

Доказательство леммы 1. Пусть $w(x,t)$ – решение задачи (17.4),(17.5). Рассмотрим функцию $\tilde{w}(x,t)=-w(-x,t)$. Она так же является решением, поскольку

1) $\tilde{w}_t(x,t) = -w_t(-x,t) = -a^2 w_{xx}(-x,t) = a^2 \tilde{w}_{xx}(x,t),\ (x,t) \in G$;

2) $\tilde{w}(x,0) = -w(-x,0) = -w_0(-x) = w_0(x)$

Из единственности решения получаем

$$w(x,t) \equiv \tilde{w}(x,t) \equiv -w(-x,t),$$

что и требовалось доказать ■

Следствие 1. Пусть $u_0(x)$ – заданная функция из класса $C(\mathbf{R}) \cap B(\mathbf{R})$, $\nu(x) \equiv 0$, $u_0(0) = 0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right] u_0(\xi) d\xi, & t > 0 \\ u_0(x), & t = 0 \end{cases}$$

является решением смешанной задачи (17.1),(17.2),(17.3) из класса $C^{2,1}_{x,t}((0;\infty) \times (0;\infty)) \cap C([0;\infty) \times [0;\infty)) \cap B([0;\infty) \times [0;\infty))$.

Доказательство следствия 1. Достаточно рассмотреть задачу Коши (17.4),(17.5) с начальными данными $w_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \ge 0 \\ -u_0(-x), & x < 0 \end{cases}$. Согласно формуле Пуассона ее решение при $t > 0$ есть

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) w_0(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) (-u_0(-\xi)) d\xi + \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) u_0(\xi) d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right] u_0(\xi) d\xi,$$

причем из леммы 1 следует, что $w(0,t) \equiv 0$. По этой причине $u(x,t) = w(x,t)|_{x \ge 0}$ – решение задачи (17.1),(17.2),(17.3) ■

17.2. Принцип Дюамеля. Решим теперь смешанную задачу (17.1),(17.2),(17.3) в случае однородных начальных условий:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \tag{17.6}$$

$$u(x,0) = 0,\ x > 0, \tag{17.7}$$

$$u(0,t) = \nu(t),\ t > 0. \tag{17.8}$$

Лемма 2. Пусть функция $U(x,t)$ принадлежит классу $C([0;\infty) \times (0;\infty)) \cap C^{2,1}_{x,t}((0;\infty) \times [0;\infty))$ и является решением смешанной задачи (17.6),(17.7),(17.8) с граничными данными, тождественно равными единице. Тогда функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(x,t-\tau)\nu(\tau)d\tau,\ x > 0,\ t \ge 0 \\ \nu(t),\ x = 0,\ t \ge 0 \end{cases} \tag{17.9}$$

принадлежит классу $\tilde{N}^{2,1}_{x,t}((0;\infty) \times (0;\infty)) \cap C([0;\infty) \times [0;\infty))$ и является решением смешанной задачи (17.6),(17.7),(17.8) с произвольными непрерывно дифференцируемыми на $[0;\infty)$ граничными данными $\nu(t)$, удовлетворяющими условию согласования $\nu(0) = 0$.

Доказательство леммы 2.

1) Прежде всего преобразуем формулу (17.9) для $t \ge 0$, $x > 0$ с учетом гладкости функции ν:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(x,t-\tau)\nu(\tau)d\tau = -\nu(\tau)U(x,t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} +$$

$$+ \int_0^t U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau = \int_0^t U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau.$$

В последнем равенстве мы учли, что $U(x,0) = 0$ и $\nu(0) = 0$. Из полученного выражения для функции $u(x,t)$ следует, что она принадлежит классу $C((0;\infty) \times [0;\infty))$ и удовлетворяет начальным условиям (17.7)

2) Для произвольного фиксированного $t \ge 0$ можно сделать следующую оценку модуля разности $|u(x,t) - u(0,t)|$:

$$|u(x,t) - u(0,t)| = |u(x,t) - \nu(t)| = \left| \int_0^t U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau - \int_0^t \nu'(\tau)d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_0^t [U(x,t-\tau)-1]\nu'(\tau)d\tau \right| \le \sup_{\tau\in[0;t]} |\nu'(\tau)| \cdot \int_0^t |U(x,t-\tau)-1| d\tau .$$

Устремим x к нулю справа и учтем, что $U(0,t)=1$ при $t>0$. Получаем $|u(x,t)-u(0,t)| \to 0$ при $x \to +0$. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна на множестве $[0;\infty)\times[0;\infty)$ по каждой из своих переменных, что, как известно, влечет ее непрерывность на этом множестве по совокупности переменных. Таким образом, доказали, что $u \in C([0;\infty)\times[0;\infty))$ и выполняются граничные условия (17.8).

3) Поскольку для произвольных $x>0$ и $t>0$ справедливы преобразования

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau +$$

$$+ \nu'(t)U(x,0) = \int_0^t a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau ,$$

и

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t-\tau)\nu'(\tau)d\tau ,$$

то функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}_{x,t}((0;\infty)\times(0;\infty))$ и удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (17.6) ■

<u>Следствие 2.</u> Пусть функция $\nu(x)$ задана и непрерывно дифференцируема на множестве $[0;\infty)$, причем выполнено условие согласования $\nu(0)=0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{x\nu(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau, & x>0,\ t\ge 0 \\ \nu(t), & x=0,\ t\ge 0 \end{cases} \qquad (17.10)$$

является решением смешанной задачи (17.6),(17.7),(17.8) из класса $C^{2,1}_{x,t}((0;\infty)\times(0;\infty)) \cap C([0;\infty)\times[0;\infty))$.

Доказательство следствия 2. Построим функцию $U(x,t)$ при помощи автомодельного решения (см. формулу (14.10)):

$$U(x,t) = g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = C_1 \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4a^2}\right)d\lambda + C_2,\ x\ge 0,\ t>0.$$

Константы C_1 и C_2 выберем из условий $U(0,t)=1$ и $U(x,0)=0$:

$$\begin{cases} 1 = U(0,t) = C_2 \\ 0 = U(x,0) = C_1 \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4a^2}\right)d\lambda + C_2 = C_1\sqrt{\pi a^2} + C_2 \end{cases},$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi a^2}},\ C_2 = 1.$$

Таким образом, получаем функцию

$$U(x,t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^2}} \displaystyle\int_0^{x/\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2}\right)d\xi, & x\ge 0,\ t>0 \\ 0,\ x>0,\ t=0 \end{cases}.$$

Вычислим ее производную по времени:

$$U_t(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^2}} \dfrac{x}{2\left(\sqrt{t}\right)^3} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2 t}\right), & x\ge 0,\ t>0 \\ 0,\ x>0,\ t=0 \end{cases}$$

Таким образом, построенная функция $U(x,t)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 2. Следовательно, функция $u(x,t)$, определяемая выражением (17.10), является решением смешанной задачи (17.6),(17.7),(17.8) ■

§18. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке методом Фурье. Существование и единственность классического решения

18.1. Построение формального решения. Применим метод Фурье, описанный в §11, к смешанной задаче для уравнения теплопроводности на отрезке.

Рассмотрим в прямоугольной области $G=(0;l)\times(0;T)$ смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in G \tag{18.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{18.2}$$

и однородными граничными условиями первого рода

$$u(0,t)=u(l,t)=0. \tag{18.3}$$

Необходимо найти решение $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}_{x,t}(G)\cap C(\overline{G})$.

Замечание 1. Для решения смешанной задачи с неоднородными граничными условиями достаточно воспользоваться приемом, описанным в §11, чтобы получить задачу (18.1),(18.2),(18.3).

Как и в случае волнового уравнения, будем искать решение $u(x,t)$ в виде функционального ряда по собственным функциям $X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{l}x$, $k\in\mathbf{N}$ дифференциального оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями $X_k(0)=X_k(l)=0$:

$$u(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{18.4}$$

где $T_k(t)$, $k\in\mathbf{N}$ – неизвестные функции переменной $t\in[0;T]$. Найдем $T_k(t)$, $k\in\mathbf{N}$.

Пусть функция $u_0(x)$ принадлежит классу $\tilde{N}[0;l]$, существует кусочно непрерывная на отрезке $[0;l]$ производная $u_0'(x)$, и выполнены условия согласования $u_0(0)=u_0(l)=0$. Тогда ряд Фурье функции $u_0(x)$ сходится равномерно к ней самой:

$$u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{18.5}$$

где $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$ – коэффициенты Фурье. Причем $a_k=\frac{\tilde{a}_k}{k}$ и числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{a}_k|^2$ сходится.

Аналогично для функции $f(x,t)$ предполагаем, что $f(x,t)\in C(\overline{G})$, существует $f_x(x,t)$ – кусочно непрерывная по x функция при любом фиксированном t из отрезка $[0;T]$, и $f(0,t)=f(l,t)\equiv 0$. Тогда для каждого фиксированного значения времени t из отрезка $[0;T]$ функция $f(x,t)$ раскладывается в равномерно сходящийся по x ряд Фурье

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{18.6}$$

где $B_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx\in C[0;T]$ и

$$\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{t\in[0;T]}|B_k(t)|=\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{t\in[0;T]}\left|\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx\right|\le\frac{2}{l}\sup_{t\in[0;T]}\int_0^l|f(x,t)|dx\le$$

$$\le 2\sup_{(x,t)\in\overline{G}}|f(x,t)|=C_1,$$

причем постоянная C_1 конечна, так как $f(x,t)\in C(\overline{G})$, $\overline{G}$ – компакт.

Подставляя ряды (18.4), (18.5) и (18.6) в задачу (18.1),(18.2), (18.3), и учитывая свойства функций $X_k(x)$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(t)X_k(x)+a^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kT_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(t)X_k(x),\ (x,t)\in G,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k(x),\ x\in[0;l]$$

(возможность почленного дифференцирования ряда будет обсуждаться в следующем пункте). Потребуем почленное выполнение

написанных равенств:

$$T_k'(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = B_k(t),\ \ T_k(0) = a_k,\ \ k \in \mathbf{N}. \qquad (18.7)$$

Решая для каждого натурального числа k, задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (18.7), находим

$$T_k(t) = a_k \exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) + \int_0^t B_k(\tau)\exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right)d\tau. \qquad (18.8)$$

Отметим, что функции $T_k(t)$ непрерывны на отрезке $[0;T]$.

Итак, формально построили ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) + \int_0^t B_k(\tau)\exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right)d\tau\right]\sin\frac{\pi k}{l}x. \qquad (18.9)$$

18.2. Классическое решение. Покажем, что функциональный ряд (18.9) сходится равномерно к некоторой непрерывной на $\overline{G}$ функции, для чего оценим его k-й член следующим образом:

$$\sup_{(x,t)\in\overline{G}}\left|T_k(t)X_k(x)\right| \le \sup_{t\in[0;T]}\left|T_k(t)\right| \le \sup_{t\in[0;T]}\left|\int_0^t B_k(\tau)\exp\left(-\lambda_k a^2(t-\tau)\right)d\tau\right| +$$

$$+\left|a_k\right| \le \sup_{t\in[0;T]}\left|B_k(t)\right| \cdot \sup_{t\in[0;T]}\int_0^t \exp\left(-\lambda_k a^2(t-\tau)\right)d\tau + \left|a_k\right| \le \left|a_k\right| +$$

$$+C_1 \sup_{t\in[0;T]}\frac{1}{a^2\lambda_k}\left(1-\exp\left(-\lambda_k a^2 t\right)\right) \le \left|a_k\right| + \frac{C_1}{a^2\lambda_k} = \frac{\left|\tilde{a}_k\right|}{k} + \frac{l^2 C_1}{(a\pi k)^2} \le$$

$$\le \left|\tilde{a}_k\right|^2 + \frac{1}{k^2} + \frac{l^2 C_1}{(a\pi k)^2}.$$

Здесь в последнем неравенстве мы воспользовались соотношением между средним геометрическим и средним арифметическим. Поскольку числовой мажорирующий ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\tilde{a}_k\right|^2 + \frac{const}{k^2}\right)$ сходится, то функциональный ряд (18.9) сходится равномерно на $\overline{G}$ к некоторой функции $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x). \qquad (18.10)$$

Более того, $u(x,t) \in C(\overline{G})$, так как члены ряда $T_k(t)X_k(x)$ непрерывны на $\overline{G}$

Теперь докажем возможность почленного дифференцирования в G ряда (18.9) в двух следующих случаях:

а) дополнительно потребуем, чтобы $f(x,t) \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{G})$, и существовала производная $f_{xx}(x,t) \in B(\overline{G})$ – кусочно непрерывная по x функция при любом фиксированном t из отрезка $[0;T]$;

б) дополнительно потребуем, чтобы $f(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\overline{G})$.

Достаточно доказать равномерную сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k'(x)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k''(x)$ в некоторой окрестности произвольной точки $(x,t) \in G$, тогда будет обоснована возможность почленного дифференцирования, и, поскольку $T_k(t)X_k(x) \in C_{x,t}^{2,1}(G)$ для любого натурального k, сразу получим, что $u(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(G)$

В случае **а)** для коэффициентов справедливо равенство

$$\left|B_k(t)\right| = \frac{\left|\tilde{B}_k(t)\right|}{k^2},$$

где $\tilde{B}_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$ и

$$\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{t\in[0;T]}\left|\tilde{B}_k(t)\right| \le \frac{2}{l}\sup_{t\in[0;T]}\int_0^l\left|f_{xx}(x,t)\right|dx \le 2\sup_{(x,t)\in\overline{G}}\left|f_{xx}(x,t)\right| = C_2 < \infty.$$

Выберем и зафиксируем произвольное малое $t_0 > 0$. Оценим k-й член ряда $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)$:

$$\sup_{(x,t)\in[0;l]\times[t_0;T]}\left|T_k'(t)X_k(x)\right| \le \sup_{t\in[t_0;T]}\left|T_k'(t)\right| =$$

$$= \sup_{t\in[t_0;T]}\left|-a^2\lambda_k a_k \exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) + B_k(t) - a^2\lambda_k\int_0^t B_k(\tau)\exp\left(-\lambda_k a^2(t-\tau)\right)d\tau\right| \le$$

$$\le \left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 |a_k| \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] + \sup_{t\in[0;T]} \frac{|\tilde{B}_k(t)|}{k^2} +$$

$$+a^2\lambda_k \sup_{t\in[0;T]} \int_0^t |B_k(\tau)| \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \le \left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 |a_k| \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] +$$

$$+\frac{C_2}{k^2} + a^2\lambda_k \sup_{t\in[0;T]} |B_k(t)| \frac{1}{a^2\lambda_k} \le \left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 |a_k| \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] + 2\frac{C_2}{k^2}.$$

Получили, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x)$ мажорируется числовым сходящимся рядом, следовательно, он сходится равномерно на множестве $[0;l]\times[t_0;T]$, что в силу произвольности t_0 означает существование $u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x) \in C([0;l]\times(0;T])$.

Аналогично для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T_k(t) X_k(x)$:

$$\sup_{(x,t)\in[0;l]\times[t_0;T]} |\lambda_k T_k(t) X_k(x)| \le \sup_{t\in[t_0;T]} |\lambda_k T_k(t)| =$$

$$= \sup_{t\in[t_0;T]} \left| \lambda_k a_k \exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) + \lambda_k \int_0^t B_k(\tau) \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \right| \le$$

$$\le \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 |a_k| \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] + \lambda_k \sup_{t\in[0;T]} \int_0^t |B_k(\tau)| \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \le$$

$$\le \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 |a_k| \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] + \frac{C_2}{a^2 k^2}$$

Отметим также, что для членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k'(x)$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{x\in[0;l]} |T_k(t) X_k'(x)| \le \frac{l}{\pi} |\lambda_k T_k(t)|,$$

а модуль $|\lambda_k T_k(t)|$ оценили выше.

Таким образом, доказали, что в случае а) построенный ряд (18.9) можно необходимое число раз почленно дифференцировать и его сумма $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}_{x,t}(G)$.

В случае б) коэффициенты $B_k(t)$ непрерывно дифференцируемы

$$B_k'(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f_t(x,t) \sin\frac{\pi k}{l} x dx \in C[0;T],\ k \in \mathbf{N},$$

причем

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \sup_{t\in[0;T]} |B_k'(t)| \le \sup_{t\in[0;T]} \frac{2}{l} \int_0^l |f_t(x,t)| dx \le 2 \sup_{(x,t)\in\bar{G}} |f_t(x,t)| = C_3 < \infty.$$

Выберем и зафиксируем произвольное малое $t_0 > 0$. Оценим k-й член ряда $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x)$:

$$\sup_{(x,t)\in[0;l]\times[t_0;T]} |T_k'(t) X_k(x)| \le \sup_{t\in[t_0;T]} |T_k'(t)| =$$

$$= \sup_{t\in[t_0;T]} \left| -a^2\lambda_k a_k \exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) + B_k(t) - a^2\lambda_k \int_0^t B_k(\tau) \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \right| \le$$

$$\le A_k + \sup_{t\in[t_0;T]} \left| B_k(t) - \int_0^t B_k(\tau) d_\tau \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) \right| = A_k +$$

$$+ \sup_{t\in[t_0;T]} \left| B_k(t) - B_k(\tau) \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) \Big|_{\tau=0}^{t} + \int_0^t B_k'(\tau) \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \right| =$$

$$= \sup_{t\in[t_0;T]} \left| B_k(t) - B_k(t) + B_k(0) \exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) + \int_0^t B_k'(\tau) \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \right| +$$

$$+A_k \le A_k + C_1 \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] + C_3 \sup_{t\in[t_0;T]} \int_0^t \exp\left(-\lambda_k a^2 (t-\tau)\right) d\tau \le$$

$$\le A_k + C_1 \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right] + C_3 \left(\frac{l}{a\pi k}\right)^2.$$

Здесь для удобства введено обозначение $A_k = \left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 |a_k| \exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t_0 k^2\right]$. Получили, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x)$

мажорируется числовым сходящимся рядом, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)X_k(x)$ сходится равномерно на множестве $[0;l]\times[t_0;T]$, $t_0>0$. Таким образом, существует $u_t(x,t)\in C([0;l]\times(0;T])$.

Вторая производная по x требует более тонких рассуждений. Для произвольного фиксированного $t\in(0;T]$ сделаем следующие выкладки

$$\sup_{x\in[0;l]}\left|T_k(t)X_k''(x)\right| \le \lambda_k|T_k(t)| \le \lambda_k|a_k|\exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) +$$

$$+\lambda_k\left|\int_0^t B_k(\tau)\exp\left(-\lambda_k a^2(t-\tau)\right)d\tau\right| = \lambda_k|a_k|\exp\left(-\lambda_k a^2 t\right) +$$

$$+\frac{1}{a^2}\left|B_k(t)-B_k(0)\exp\left(-\lambda_k a^2 t\right)-\int_0^t B_k'(\tau)\exp\left(-\lambda_k a^2(t-\tau)\right)d\tau\right| \le$$

$$\le\left[\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2|a_k|+\frac{C_1}{a^2}\right]\exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 tk^2\right]+\frac{1}{a^2}|B_k(t)|+C_3\left(\frac{l}{a^2\pi k}\right)^2.$$

Из гладкости функции $f(x,t)$, потребованной при построении формального решения, следует, что $|B_k(t)|=\frac{|\hat{B}_k(t)|}{k}$, причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{B}_k(t)\right|^2$ сходится при любом фиксированном t из отрезка $[0;T]$. Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sup_{x\in[0;l]}\left|T_k(t)X_k''(x)\right| \le \left[\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2|a_k|+\frac{C_1}{a^2}\right]\exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 tk^2\right]+\frac{1}{a^2}\frac{|\hat{B}_k(t)|}{k}+$$

$$+C_3\left(\frac{l}{a^2\pi k}\right)^2 \le \left[\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2|a_k|+\frac{C_1}{a^2}\right]\exp\left[-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 tk^2\right]+\frac{1}{a^2}\left|\hat{B}_k(t)\right|^2+$$

$$+\frac{1}{a^2k^2}+C_3\left(\frac{l}{a^2\pi k}\right)^2.$$

Полученный мажорирующий ряд при фиксированном $t\in(0;T]$ является числовым и сходится. Следовательно, существует

$u_{xx}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k''(x)$, $(x,t)\in G$. Поскольку $f(x,t)\in C(G)$, $u_t(x,t)\in C(G)$ (сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций) и $u_{xx}(x,t)=\frac{1}{a^2}\left[u_t(x,t)-f(x,t)\right]$ (по построению $u(x,t)$), то $u_{xx}(x,t)\in C(G)$.

18.3. Итог. В заключение сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть функция $u_0(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[0;l]$, существует кусочно непрерывная на отрезке $[0;l]$ производная $u_0'(x)$, и $u_0(0)=u_0(l)=0$; функция $f(x,t)$ задана и удовлетворяет одному из условий:

а) $f(x,t)\in C_{x,t}^{1,0}(\overline{G})$, существует $f_{xx}(x,t)\in B(\overline{G})$ – кусочно непрерывная по x функция при любом фиксированном t из отрезка $[0;T]$, и $f(0,t)=f(l,t)=0$ при всех $t\in[0;T]$;

б) $f(x,t)\in C_{x,t}^{0,1}(\overline{G})$, существует $f_x(x,t)$ – кусочно непрерывная по x функция при любом фиксированном t из отрезка $[0;T]$, и $f(0,t)=f(l,t)=0$ при всех $t\in[0;T]$.

Тогда смешанная задача (18.1),(18.2),(18.3) имеет в классе функций $C(\overline{G})\cap C_{x,t}^{2,1}(G)$ единственное решение, причем ряд (18.9) сходится равномерно на $\overline{G}$ к этому решению.

Доказательство теоремы 1. Единственность решения доказана в §13, а существование решения – в пункте 2 данного параграфа ■

Пример 1. Решить смешанную задачу

$$u_t(x,t)-4u_{xx}(x,t)=f(x,t)=\sin^2\frac{x}{2},\ x\in(0;2\pi),\ t\in(0;T),$$

$$u(x,0)=u_0(x)=\pi-|x-\pi|,$$

$$u(0,t)=u(2\pi,t)=0.$$

Решение. Заметим, что функции, участвующие в этой задаче, удовлетворяют условиям теоремы 1. По этой причине можно строить решение $u(x,t)$ в виде ряда (18.9). Найдем коэффициенты a_k и $B_k(t)$ разложения в ряды Фурье функций $u_0(x)$ и $f(x,t)$ соответ-

ственно:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\pi - |x-\pi|\right)\sin\frac{kx}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(1-(-1)^k\right)\int_0^{\pi} x\sin\frac{kx}{2}\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \dfrac{4}{\pi k}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\frac{kx}{2}\,dx, & k = 2n-1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ -\dfrac{8}{\pi(2n-1)^2}(-1)^n, & k = 2n-1 \end{cases},$$

и

$$B_k(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{kx}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\xi\cdot\sin k\xi\cdot d\xi =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \dfrac{8}{\pi k\left(4-k^2\right)}, & k = 2n-1, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}.$$

При вычислении коэффициентов $B_k(t)$ мы сделали замену $x = 2\xi$ и воспользовались результатом, полученным в примере 1 §11. Подставляя полученные коэффициенты в выражение (18.9) и учитывая, что

$$\int_0^t \exp\left(-k^2\tau\right)d\tau = -\frac{1}{k^2}\left[e\left(-k^2 t\right) - 1\right],$$

находим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8}{\pi(2n-1)^2}(-1)^{n+1}\exp\left(-(2n-1)^2 t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{\pi(2n-1)^3\left(4-(2n-1)^2\right)}\left[1-\exp\left(-(2n-1)^2 t\right)\right]\right\}\sin\frac{(2n-1)x}{2}.$$

Пример 2. Решить смешанную задачу

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = xe^t + 2t, \quad x \in (0;\pi/2), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x + 2\sin 2x\cos 3x,$$

$$u(0,t) = t^2, \quad u_x(\pi/2,t) = 1.$$

Решение. Прежде всего перейдем к смешанной задаче с однородными граничными условиями, для чего сделаем замену

$u(x,t) = t^2 + x + v(x,t)$. Тогда для неизвестной функции $v(x,t)$ получаем смешанную задачу

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = xe^t, \quad x \in (0;\pi/2), \quad t > 0, \tag{18.11}$$

$$v(x,0) = \sin 5x - \sin x, \tag{18.12}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v_x(\pi/2,t) = 0 \tag{18.13}$$

Найдем собственные функции $\hat{X}_k(x)$ дифференциального оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями $\hat{X}_k(0) = 0$ и $\hat{X}_k'(\pi/2) = 0$

$$-\hat{X}_k''(x) = \hat{\lambda}_k\hat{X}_k(x), \tag{18.14}$$

$$\hat{X}_k(0) = \hat{X}_k'(\pi/2) = 0 \tag{18.15}$$

Решение дифференциального уравнения (18.14), удовлетворяющее условию при $x = 0$, есть $\hat{X}_k = \sin\sqrt{\hat{\lambda}_k}\,x$. Условие на правом конце $x = \pi/2$ приводит к равенству

$$\sqrt{\hat{\lambda}_k}\,\frac{\pi}{2} = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

откуда

$$\hat{X}_k = \sin(2k-1)x, \quad \hat{\lambda}_k = (2k-1)^2, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Функцию $v(x,t)$ будем искать в виде ряда

$$v(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k(t)\hat{X}_k(x). \tag{18.16}$$

Получим уравнения на неизвестные функции $\hat{T}_k(t)$, для чего разложим функцию x, входящую в уравнение (18.11), по системе $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin(2k-1)x, \tag{18.17}$$

где

$$c_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(2k-1)x\,dx = \frac{4}{\pi(2k-1)}\int_0^{\pi/2}\cos(2k-1)x\,dx = \frac{4\cdot(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}.$$

Далее, подставим ряды (18.16) и (18.17) в смешанную задачу

(18.11),(18.12),(18.13):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k'(t)\hat{X}_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2\hat{T}_k(t)\hat{X}_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^t c_k\hat{X}_k(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k(0)X_k(x)=X_3(x)-X_1(x).$$

Потребуем почленного выполнения написанных равенств:

при $k=1$ $$\hat{T}_1'(t)+\hat{T}_1(t)=\frac{4}{\pi}e^t,$$

$$\hat{T}_1(0)=-1;$$

при $k=3$ $$\hat{T}_3'(t)+25\hat{T}_3(t)=\frac{4}{25\pi}e^t,$$

$$\hat{T}_3(0)=1;$$

при $k\neq 1;3$ $$\hat{T}_k'(t)+(2k-1)^2\hat{T}_k(t)=\frac{4e^t}{\pi(2k-1)^2}(-1)^{k+1},$$

$$\hat{T}_k(0)=0$$

Решая полученные задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка, находим

$$\hat{T}_1(t)=\frac{2}{\pi}e^t-\left(1+\frac{2}{\pi}\right)e^{-t},$$

$$\hat{T}_3(t)=\frac{2}{325\pi}e^t+\left(1-\frac{2}{325\pi}\right)e^{-t},$$

$$\hat{T}_k(t)=\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2\left(2k^2-2k+1\right)}\left[e^t-e^{-(2k-1)^2t}\right].$$

Учтем, что полученные таким образом ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k(t)\hat{X}_k(t)$, $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k'(t)\hat{X}_k(t)$, $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k(t)\hat{X}_k'(t)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{T}_k(t)\hat{X}_k''(t)$ сходятся равномерно на множестве $[0;l]\times[0;\infty)$, так как для произвольного $T>0$ мажорируются на множестве $[0;l]\times[0;T]$ числовым сходящимся

рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{const}{k^2}$. Следовательно, решение $u(x,t)$ можно записать в следующем виде:

$$u(x,t)=t^2+x+2e^t\sin 2x\cos 3x+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\left(2k^2-2k+1\right)}\left[e^t-e^{-(2k-1)^2t}\right]\sin(2k-1)x.$$

Некоторые свойства оператора Лапласа. Функции Бесселя и их применение

§19. Ортогональность собственных функций симметричного оператора. Формулы Грина для оператора Лапласа. Правильная нормальная производная. Симметричность и положительная (неотрицательная) определенность оператора "$-\Delta$" с граничными условиями Дирихле (Неймана)

19.1. Собственные значения линейных операторов. Для дальнейшего будут полезны следующие утверждения и понятия из области функционального анализа

Пусть H – линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел, M – линейное многообразие в H, A – линейный оператор, отображающий M в H.

Определение 1. Действительное (комплексное) число λ называется *собственным значением* (*числом*) оператора A, если существует ненулевой элемент φ из M такой, что $A\varphi = \lambda\varphi$. Элемент φ в этом случае называется *собственным вектором* (или *собственной функцией* в случае, когда H является функциональным пространством)

Замечание 1 Одному собственному значению могут отвечать несколько линейно независимых собственных векторов (их количество называется *кратностью* собственного значения).

Определение 2. Собственное значение называется *простым*, если существует единственный линейно независимый собственный

вектор, отвечающий ему

Если H – (пред)гильбертово пространство [1]), тогда можно ввести следующие понятия.

Определение 3. Оператор A называется *симметричным* на многообразии M, если для любых двух элементов φ и ψ из M выполняется равенство $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$

Теорема 1. Пусть A – линейный симметричный оператор, тогда все его собственные значения (если таковые существуют) являются действительными

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 содержательно, конечно, только в случае, когда H – (пред)гильбертово пространство над полем комплексных чисел.

Доказательство теоремы 1. Пусть λ – собственное значение оператора A, φ – собственный вектор, отвечающий ему. Воспользуемся свойствами скалярного произведения и симметричностью оператора A.

$$\lambda(\varphi,\varphi) = (A\varphi,\varphi) = (\varphi, A\varphi) = (\varphi,\lambda\varphi) = \overline{\lambda}(\varphi,\varphi)$$

Следовательно, $\lambda(\varphi,\varphi) = \overline{\lambda}(\varphi,\varphi)$, причем $(\varphi,\varphi) \neq 0$, так как $\varphi \neq 0$ по определению 1. Получили равенство $\lambda = \overline{\lambda}$ ■

Теорема 2. Пусть A – симметричный оператор, тогда, если λ_1 и λ_2 – различные собственные значения оператора A, то собственные векторы φ_1 и φ_2, отвечающие им, ортогональны, то есть $(\varphi_1,\varphi_2) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ и $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда справедлива цепочка равенств

$$\lambda_1(\varphi_1,\varphi_2) = (A\varphi_1,\varphi_2) = (\varphi_1, A\varphi_2) = \overline{\lambda_2}(\varphi_1,\varphi_2) = \lambda_2(\varphi_1,\varphi_2).$$

В последнем равенстве мы воспользовались теоремой 1. Следова-

[1]) Линейное пространство H называется предгильбертовым, если в H определено скалярное произведение (φ,ψ) двух любых элементов φ и ψ Гильбертово пространство – это полное предгильбертово пространство (метрическое пространство называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства).

тельно,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Учтем, что $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Получаем $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ ■

Определение 4. Оператор A называется *положительно* (*неотрицательно*) определенным на многообразии M, если для любого ненулевого элемента φ из M выполняется неравенство $(A\varphi, \varphi) > 0$ (соответственно $(A\varphi, \varphi) \geq 0$).

Теорема 3. Все собственные значения положительно (неотрицательно) определенного линейного оператора A положительны (неотрицательны).

Доказательство теоремы 3. Пусть λ – собственное значение положительно (неотрицательно) определенного линейного оператора A, φ – собственный вектор, отвечающий λ. Тогда $\lambda(\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) > 0$ (соответственно $\lambda(\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) \geq 0$), следовательно, $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$), так как $(\varphi, \varphi) > 0$ по определению скалярного произведения ■

Замечание 3. В случае, когда H – (пред)гильбертово пространство над полем целых чисел, из положительной (неотрицательной) определенности оператора вытекает его симметричность.

Это утверждение легко доказывается (см. [2]).

Пример 1 Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(0;l)$ [1]) линейное многообразие M, состоящее из функций $u(x)$, принадлежащих классу $C^2(0;l) \cap C^1[0;l]$, $u''(x) \in L_2(0;l)$ и удовлетворяющих условиям на концах $k_1u(0) - u'(0) = k_2u(l) + u'(l) = 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то есть

[1]) Пространство $L_2(D)$ – пространство функций с интегрируемым на измеримом множестве D квадратом модуля, в котором введено скалярное произведение $(u, v) = \int_D u(x)\overline{v(x)}dx$ Строго говоря, элементами гильбертова пространства $L_2(D)$ являются классы эквивалентных функций (две функции называются эквивалентными, если они равны друг другу везде за исключением точек множества меры ноль), при этом каждый класс эквивалентных функций однозначно определяется любой одной функцией, входящей в него.

$$M = \{u(x)\ .\ u \in C^2(0;l) \cap C^1[0;l],\ u'' \in L_2(0;l)\} \cap$$
$$\cap \{u(x)\ :\ k_1u(0) - u'(0) = k_2u(l) + u'(l) = 0\}$$

Надо доказать симметричность и положительную определенность дифференциального оператора $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ на многообразии M.

Решение. Для произвольных функций $u(x)$ и $v(x)$ из M справедливы равенства

$$(Au, v) = -\int_0^l u''(x)\overline{v(x)}dx = -u'(x)\overline{v(x)}\Big|_0^l + \int_0^l u'(x)\overline{v'(x)}dx =$$
$$= -u'(l)\overline{v(l)} + u'(0)\overline{v(0)} + \int_0^l u'(x)\overline{v'(x)}dx =$$
$$= k_2u(l)\overline{v(l)} + k_1u(0)\overline{v(0)} + (u', v'),$$

и

$$(u, Av) = -\int_0^l u(x)\overline{v''(x)}dx = -u(x)\overline{v'(x)}\Big|_0^l + \int_0^l u'(x)\overline{v'(x)}dx =$$
$$= -u(l)\overline{v'(l)} + u(0)\overline{v'(0)} + \int_0^l u'(x)\overline{v'(x)}dx =$$
$$= k_2u(l)\overline{v(l)} + k_1u(0)\overline{v(0)} + (u', v').$$

Следовательно, $(Au, v) = (u, Av)$, то есть оператор A на линейном многообразии M симметричен. Если $u = v$ и отличны от тождественного нуля, то

$$(Au, u) = k_1|u(0)|^2 + k_2|u(l)|^2 + (u', u') > 0.$$

Следовательно, оператор A на многообразии M положительно определен.

Замечание 4. Еще проще доказываются для $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ симметричность и положительная определенность с граничными условиями первого рода $u(0) = u(l) = 0$, симметричность и неотрицательная определенность с граничными условиями второго рода

$u'(0) = u'(l) = 0$.

19.2. Формулы Грина. Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D, обозначим: n – внешняя единичная нормаль к ∂D

Теорема 4 (первая формула Грина). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат классам $C^1(\overline{D})$ и $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ соответственно, причем $\Delta v \in L_1(D)$ [1]), то выполняется равенство

$$\int_D u\Delta v dx = -\int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i} dx + \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n} ds. \qquad (19.1)$$

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим произвольную область $\tilde{D}$ с кусочно гладкой границей $\partial\tilde{D}$ такую, что $\overline{\tilde{D}} \subset D$. Запишем для векторной функции $P = u\,\mathrm{grad}v$ и области $\tilde{D}$ формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\tilde{D}} \mathrm{div}P dx = \int_{\partial\tilde{D}} \sum_{i=1}^n P^i n^i ds$$

Учтем, что $\mathrm{div}P = u\Delta v + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i}$ и $\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x^i} n^i = \frac{\partial v}{\partial n}$ Получаем

$$\int_{\tilde{D}} u\Delta v dx = -\int_{\tilde{D}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i} dx + \int_{\partial\tilde{D}} u\frac{\partial v}{\partial n} ds$$

Все подынтегральные функции в последнем равенстве по условию интегрируемы в области D, что позволяет сделать предельный переход, устремляя $\tilde{D}$ к D ■

Теорема 5 (вторая формула Грина). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат классу $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, причем $\Delta u \in L_1(D)$ и

[1]) Класс $L_1(D)$ – множество функций, модуль которых интегрируем по Лебегу на измеримом множестве D Отметим, что в случае, когда множество D обладает конечной мерой $\mathrm{mes}D$, класс $L_1(D)$ содержит в себе класс $L_2(D)$ в качестве подмножества, так как для любой функции u из $L_2(D)$ можно записать

$$\int_D |u| dx = \int_D 1\ |u| dx \le \left(\int_D dx\right)\left(\int_D |u|^2 dx\right) = (\mathrm{mes}D)\int_D |u|^2 dx < \infty$$

$\Delta v \in L_1(D)$, то справедлива формула

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \qquad (19.2)$$

Доказательство теоремы 5. Поменяем в первой формуле Грина (19.1) местами функции u и v:

$$\int_D v\Delta u dx = -\int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i} dx + \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Вычитая данное равенство из равенства (19.1), получаем вторую формулу Грина (19.2) ■

Теорема 6 (третья формула Грина). Если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, причем $\Delta u \in L_1(D)$, то справедлива формула

$$\int_D u\Delta u dx = -\int_D \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)^2 dx + \int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial n} ds. \qquad (19.3)$$

Доказательство теоремы 6. Достаточно в первой формуле Грина (19.1) положить $v = u$ ■

19.3. Симметричность и положительная (неотрицательная) определенность оператора "–Δ" с граничными условиями Дирихле (Неймана). Пусть по-прежнему D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ линейные многообразия

$$M_1 = M \cap \left\{u(x)\ .\ u|_{\partial D} = 0\right\},$$

$$M_2 = M \cap \left\{u(x) : \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0\right\},$$

$$M_3 = M \cap \left\{u(x) : \left.\left(ku + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial D} = 0,\ k > 0\right\},$$

где $M = \left\{u(x) : u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),\ \Delta u \in L_2(D)\right\}$, n – внешняя (по отношению к D) единичная нормаль к ∂D. Линейные многообразия M_1, M_2 и M_3 состоят из функций, удовлетворяющих граничным условиям соответственно первого рода (Дирихле), второго

рода (Неймана) и третьего рода.

Теорема 7. Дифференциальный оператор $A = -\Delta$ на линейных многообразиях M_1, M_2 и M_3 симметричен, причем на линейных многообразиях M_1 и M_3 он положительно определен, а на M_2 – неотрицательно.

Доказательство теоремы 7

Симметричность. Рассмотрим две произвольные функции $u(x)$ и $v(x)$ из M и запишем для u и $\overline{v}$ вторую формулу Грина (19.2):

$$(Au, v) - (u, Av) = \int_D \left(-\Delta u \cdot \overline{v} + u\ \overline{\Delta v}\right) dx = \int_{\partial D} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\overline{v} + u\overline{\frac{\partial v}{\partial n}}\right) ds.$$

Из граничных условий следует, что $\left(-\frac{\partial u}{\partial n}\overline{v} + u\overline{\frac{\partial v}{\partial n}}\right)\Big|_{\partial D} = 0$, например, для u и v из M_3.

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial n}\overline{v} + u\overline{\frac{\partial v}{\partial n}}\right)\Big|_{\partial D} = \left(ku\overline{v} - ku\overline{v}\right)\Big|_{\partial D} = 0.$$

Следовательно, $(Au, v) = (u, Av)$

Положительная (неотрицательная) определенность. Пусть $u(x)$ – произвольная функция из M, отличная от тождественного нуля. Запишем первую формулу Грина (19.1) для функций $u(x)$ и $\overline{u(x)}$:

$$(Au, u) = -\int_D \Delta u\ \overline{u} dx = \int_D |\mathrm{grad} u|^2 dx - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\overline{u} ds.$$

Далее рассмотрим три варианта.

1) Пусть $u \in M_1$, тогда $\overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0$, то есть

$$(Au, u) = \int_D |\mathrm{grad} u|^2 dx > 0,$$

так как функция, тождественно равная константе, отличной от нуля, не принадлежит многообразию M_1. Следовательно, оператор $A = -\Delta$ положительно определен на M_1

2) Пусть $u \in M_2$, тогда $\overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0$, то есть

$$(Au, u) = \int_D |\mathrm{grad} u|^2 dx \geq 0.$$

Следовательно, оператор $A = -\Delta$ неотрицательно определен на многообразии M_2, причем равенство $(Au, u) = 0$ выполняется только для функций u, тождественно равных константе.

3) Пусть $u \in M_3$, тогда $\overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = -k|u|^2\Big|_{\partial D}$, то есть

$$(Au, u) = \int_D |\mathrm{grad} u|^2 dx + k\int_{\partial D} |u|^2 ds > 0.$$

Следовательно, оператор $A = -\Delta$ положительно определен на M_3 ■

Следствие 1. Собственные функции дифференциального оператора $A = -\Delta$, заданного на одном из линейных многообразий M_1, или M_2, или M_3, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(D)$.

Следствие 2. Все собственные значения дифференциального оператора $A = -\Delta$, заданного на M_1 или M_3, положительны.

Следствие 3. Все собственные значения дифференциального оператора $A = -\Delta$, заданного на M_2, неотрицательны, причем единственной линейно независимой собственной функцией, отвечающей $\lambda = 0$, является $u \equiv 1$.

19.4. Правильная нормальная производная. В физических процессах, описываемых эллиптическими уравнениями, гладкое внутри области и непрерывное на ее замыкании решение может и не иметь непрерывного на границе градиента. Это условие не требуется даже в случае, когда задается непрерывный "поток" через границу области, то есть значения нормальной производной. Что же тогда понимать под этим значением?

Пусть граница области D является не просто кусочно дифференцируемой, а достаточно гладкой, чтобы отстоящая от этой границы ∂D на заданное произвольное малое расстояние ρ поверх-

ность ∂D_ρ имела нормаль в каждой точке, которая в параметрическом задании поверхности является непрерывно дифференцируемой векторной функцией параметра α. Такая ситуация, в частности, реализуется в случае, когда граница ∂D области D дважды непрерывно дифференцируема. Поверхность ∂D_ρ будем называть *эквидистантной*, один из вариантов ее задания следующий:

$$\partial D_\rho = \{x \,.\, x + \rho n \in \partial D\},$$

где n – внешняя единичная нормаль к поверхности ∂D. При параметрическом задании дважды непрерывно дифференцируемой поверхности ∂D функции $x^i = x^i(\alpha)$, $i = 1,..\, n$ принадлежат классу C^2, так что нормаль n – непрерывно дифференцируемая функция этого параметра α.

Пусть функция $u(x)$ принадлежит классу $C^2(D)$, тогда в сделанных предположениях ее нормальные производные $\frac{\partial u}{\partial n}$ на поверхностях ∂D_ρ являются непрерывными функциями, которые обозначим $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D_\rho}$, $\rho > 0$. Далее предположим, что эти функции равномерно (относительно параметра α) стремятся к функции $u_1(x)$, $x \in \partial D$ при $\rho \to +0$. В таком случае эту предельную функцию $u_1(x)$ будем называть значением *правильной нормальной производной* функции $u(x)$ на поверхности ∂D

Такое определение правильной нормальной производной $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$ формально можно записать в следующем виде

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \lim_{\rho \to +0} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D_\rho}.$$

Сформулированные условия существования правильной нормальной производной обеспечивают корректность предельного

перехода $\int\limits_{\partial D_\rho} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \to \int\limits_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$ для $v \in C(\overline{D})$ при стремлении границы ∂D_ρ к ∂D. Отсюда следует справедливость формул Грина при меньших требованиях на гладкость функций (правда, требования на гладкость границы повышаются).

Сформулируем эти утверждения для ограниченной области D с достаточно гладкой границей ∂D

<u>Утверждение 1.</u> Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат классам $C^1(D) \cap C(\overline{D})$ и $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ соответственно, $v(x)$ имеет правильную нормальную производную $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial D}$, причем $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, $\frac{\partial v}{\partial x^i}$, $i = 1,\ldots n$ принадлежат $L_2(D)$, $\Delta v \in L_1(D)$. Тогда справедлива первая формула Грина (19.1).

<u>Утверждение 2.</u> Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат классу $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, имеют правильные нормальные производные $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial D}$, причем Δu и Δv принадлежат $L_1(D)$. Тогда справедлива вторая формула Грина (19.2).

<u>Утверждение 3</u> Пусть функция $u(x)$ принадлежит классу $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, имеет правильную нормальную производную $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$, причем $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots n$ принадлежат $L_2(D)$, $\Delta u \in L_1(D)$ Тогда справедлива третья формула Грина (19.3).

Следовательно, и свойства оператора "$-\Delta$", обсуждавшиеся в предыдущем пункте, справедливы на более широких линейных многообразиях, а именно в определении многообразий M_1, M_2 и M_3 можно заменить M на многообразие $\tilde{M}$ функций $u(x)$, принадлежащих классу $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, имеющих правильную нор-

мальную производную $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$, причем $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, $i=1,\ldots n$ и Δu принадлежат $L_2(D)$

§20. Дифференциальное уравнение Бесселя. Неограниченность в нуле общего решения. Функции Бесселя первого рода

20.1. Задача на собственные значения, приводящая к уравнению Бесселя. Для того, чтобы использовать метод Фурье для решения смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности в круговых областях, необходимо найти собственные функции дифференциального оператора $A=-\Delta$ в круге $D=\left\{x=\left(x^1,x^2\right)\quad |x|<R\right\}$.

$$-\Delta u\left(x^1,x^2\right)=\lambda u\left(x^1,x^2\right),\ \left(x^1,x^2\right)\in D, \tag{20.1}$$

удовлетворяющие соответствующим однородным условиями на границе:

$$u\left(x^1,x^2\right)\Big|_{\partial D}=0. \tag{20.2}$$

Будем искать функции u в классе $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ и потребуем, чтобы $\Delta u\in L_2(D)$. Тогда, в соответствии с результатами предыдущего параграфа, поставленная задача может иметь нетривиальные решения только при $\lambda>0$

Перейдем к полярным координатам (r,φ), сделав замену

$$g(r,\varphi)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$

Задача на собственные значения (20.1),(20.2) перепишется в этом случае следующим образом:

$$\frac{1}{r}\left(rg_r(r,\varphi)\right)_r+\frac{1}{r^2}g_{\varphi\varphi}(r,\varphi)+\lambda g(r,\varphi)=0,\ r\in[0,R), \tag{20.3}$$

$$g(R,\varphi)=0. \tag{20.4}$$

Найдем решения вида

$$g(r,\varphi)=Z(r)\Phi(\varphi),$$

где $\Phi(\varphi)$ – собственная функция оператора $-\frac{d^2}{d\varphi^2}$ на отрезке $[0,2\pi]$:

$$-\Phi''(\varphi)=\mu\Phi(\varphi). \tag{20.5}$$

Из гладкости исходной функции u следует, что $\Phi(\varphi)\in C^2[0;2\pi]$, причем $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$ и $\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$ (тогда из уравнения (20.5) будет следовать, что и $\Phi''(0)=\Phi''(2\pi)$). Общее решение уравнения (20.5) есть

$$\Phi(\varphi)=C_1\sin\sqrt{\mu}\varphi+C_2\cos\sqrt{\mu}\varphi,$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Учтем условия на концах:

$$\begin{cases}C_2=C_1\sin\sqrt{\mu}2\pi+C_2\cos\sqrt{\mu}2\pi\\ \sqrt{\mu}C_1=\sqrt{\mu}C_1\cos\sqrt{\mu}2\pi-\sqrt{\mu}C_2\sin\sqrt{\mu}2\pi\end{cases} \tag{20.6}$$

Далее рассмотрим два случая

1) $\mu=0$. Тогда $\Phi(\varphi)$ есть тождественная константа, которую мы выберем равной единице:

$$\Phi_0(\varphi)=1.$$

2) $\mu\neq 0$. Тогда поделим второе уравнение системы (20.6) на $\sqrt{\mu}$

$$\begin{cases}C_1\sin\sqrt{\mu}2\pi+C_2\left(\cos\sqrt{\mu}2\pi-1\right)=0\\ C_1\left(\cos\sqrt{\mu}2\pi-1\right)-C_2\sin\sqrt{\mu}2\pi=0\end{cases}.$$

Получили линейную одиородную систему относительно C_1 и C_2. Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0=-\sin^2\sqrt{\mu}2\pi-\cos^2\sqrt{\mu}2\pi+2\cos\sqrt{\mu}2\pi-1=2\left[\cos\sqrt{\mu}2\pi-1\right],$$

то есть

$$\cos\sqrt{\mu}2\pi=1$$

Следовательно, $\mu=n^2$, $n\in\mathbf{N}$. Выберем две линейно независимые

собственные функции, соответствующие $\mu = n^2$, следующим образом:

$$\Phi_{n,1}(\varphi) = \cos n\varphi,\ \Phi_{n,2}(\varphi) = \sin n\varphi$$

Вернемся к уравнению (20.3):

$$\left[\frac{1}{r}\left(rZ'(r)\right)' - \frac{n^2}{r^2}Z(r)\right]\Phi(\varphi) + \lambda Z(r)\Phi(\varphi) = 0,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

где $\Phi(\varphi)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению $\mu = n^2$. Следовательно, функция $Z(r)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$Z''(r) + \frac{1}{r}Z'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)Z(r) = 0 \qquad (20.7)$$

Получим уравнение, не зависящее от λ, для чего сделаем замену переменных

$$y(\xi) = Z\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

(напомним, что имеет смысл рассматривать лишь $\lambda>0$). Тогда уравнение (20.7) перейдет в дифференциальное уравнение Бесселя

$$y''(\xi) + \frac{1}{\xi}y'(\xi) + \left[1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right]y(\xi) = 0 \qquad (20.8)$$

Из условий на функцию u следует, что необходимо найти решение уравнения (20 8) из класса $C^2\left[0; R\sqrt{\lambda}\right) \cap C^1\left[0; R\sqrt{\lambda}\right]$, удовлетворяющее равенству

$$y\left(R\sqrt{\lambda}\right) = 0. \qquad (20\ 9)$$

20.2. Дифференциальное уравнение Бесселя. Уравнение

$$y''(\xi) + \frac{1}{\xi}y'(\xi) + \left[1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right]y(\xi) = 0 \qquad (20.10)$$

(здесь ν – произвольное действительное число) называется *дифференциальным уравнением Бесселя*. Всякое решение этого уравнения, отличное от тождественного нуля, называется цилиндрической функцией.

Ограничимся рассмотрением $\xi \geq 0$ Проведем анализ поведения около нуля решений уравнения Бесселя (20.10). Пусть $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$ – два произвольных решения. Тогда согласно формуле Лиувилля определитель Вронского при $\xi > 0$ равен

$$W(\xi) \equiv \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix} = W(\xi_0)\exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{1}{\eta}d\eta\right\} = \frac{W(\xi_0)\xi_0}{\xi},$$

где $\xi_0 > 0$ – произвольная фиксированная точка. Для линейно независимых $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$, определитель Вронского не обращается в ноль ни в одной точке, в частности $W(\xi_0) \neq 0$, следовательно, $\lim\limits_{\xi\to+0} W(\xi) = \infty$, так что для каждого фиксированного ν существует не более одной линейно независимой цилиндрической функции, ограниченной в нуле вместе со своей производной.

Цилиндрические функции можно построить в виде суммы степенного ряда, а можно строить численными методами (например, методом Рунге–Кутта). Первый подход широко описан в литературе. Здесь же обсуждается второй.

1) Рассмотрим вначале случай $\nu = 0$, тогда уравнение (20.10) имеет вид

$$y''(\xi) + \frac{1}{\xi}y'(\xi) + y(\xi) = 0. \qquad (20.11)$$

Построим нетривиальное решение, для которого $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$ конечны Из уравнения (20.11) следует, что $y'(\xi) = -\xi\left[y''(\xi) + y(\xi)\right] \xrightarrow{\xi\to+0} 0$, то есть $y'(0) = 0$. Чтобы решение было отлично от тождественного нуля, необходимо $y(0) \neq 0$. Положим $y(0) = 1$. По правилу Лопиталя получаем $\frac{y'(\xi)}{\xi} \xrightarrow{\xi\to+0} y''(0)$, что в совокупности с уравнением (20.11) дает $2y''(0) + 1 = 0$. Таким образом,

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -\tfrac{1}{2}.$$

Этого достаточно, чтобы построить решение численными методами.

Полученное таким образом решение обозначим через $J_0(\xi)$ (см. рис 12(а)). Оно ограничено в нуле вместе со своими двумя первыми производными.

2) Перейдем теперь к случаю $\nu > 0$. Приведем уравнение (20.10) к виду уравнения (20 11) при помощи замены

$$y(\xi) = \xi^{\sigma} z(\xi), \ \sigma > 0.$$

В результате уравнение (20 10) перейдет в

$$\sigma(\sigma-1)\xi^{\sigma-2}z(\xi) + 2\sigma\xi^{\sigma-1}z'(\xi) + \xi^{\sigma}z''(\xi) + \frac{1}{\xi}\left(\sigma\xi^{\sigma-1}z(\xi) + \xi^{\sigma}z'(\xi)\right) +$$

$$+\left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)\xi^{\sigma}z(\xi) = 0,$$

или

$$z''(\xi) + \frac{2\sigma+1}{\xi}z'(\xi) + \left[1 + \frac{\sigma(\sigma-1)+\sigma-\nu^2}{\xi^2}\right]z(\xi) = 0.$$

Потребуем, чтобы коэффициент при $z(\xi)$ был равен единице: $\sigma^2 - \nu^2 = 0$, то есть $\sigma = \nu > 0$. Тогда

$$y(\xi) = \xi^{\nu} z(\xi),$$

$$z''(\xi) + \frac{2\nu+1}{\xi}z'(\xi) + z(\xi) = 0$$

Аналогично со случаем $\nu = 0$: $z'(0) = 0$, $z(0) \neq 0$. По общему соглашению полагают

$$z(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\cdot 2^{\nu}},$$

где $\Gamma(\nu) = \int\limits_0^{\infty} \xi^{\nu-1}e^{-\xi}d\xi = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{\xi}\right)^{\nu-} dx$ – гамма-функция [1]). Тогда

[1]) Напомним простейшие свойства гамма-функции

1 $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$,

2 $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$,

3 если $\nu \in \mathbf{N}$, то $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$

$z''(0)(1+2\nu+1) + z(0) = 0$, что дает $z''(0) = -\dfrac{1}{\Gamma(\nu+2)\cdot 2^{\nu+1}}$.

Построенное таким образом решение $y(\xi) = \xi^{\nu}z(\xi)$ обозначим $J_{\nu}(\xi)$.

<u>Определение 1.</u> Цилиндрическая функция $J_{\nu}(\xi)$, $\nu \geq 0$ называется *функцией Бесселя первого рода* порядка (или индекса) ν

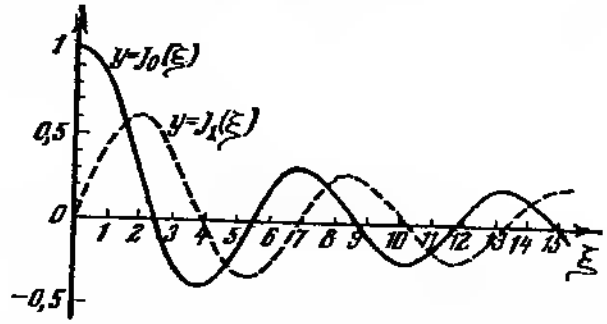

Рис 12(а). Функции Бесселя $J_0(\xi)$ и $J_1(\xi)$

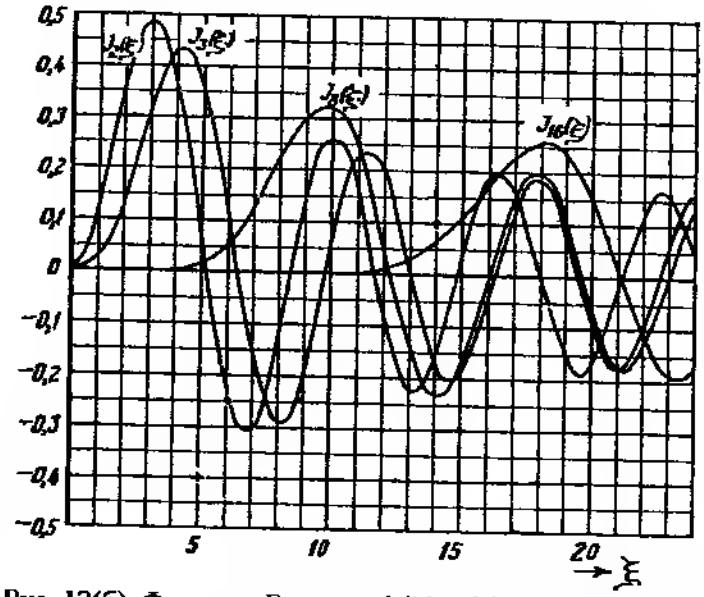

Рис 12(б). Функции Бесселя $J_2(\xi)$, $J_3(\xi)$, $J_8(\xi)$ и $J_{16}(\xi)$.

Отметим, что функция Бесселя $J_\nu(\xi)$, $\nu \ge 0$ ограничена в нуле, но ее производная, вообще говоря, не является ограниченной (например, функция $J_{1/2}(\xi)$ ведет себя около нуля как $\sqrt{\xi}$). Однако, для целого положительного ν функция $J_\nu(\xi)$ принадлежит классу $C^2[0;\infty)$ и является единственным линейно независимым решением уравнения (20.10) из этого класса.

Замечание 1. Требование $\nu \ge 0$ необходимо с точки зрения обозначений, поскольку через $J_{-\nu}(x)$, $\nu > 0$ в литературе обозначают функции Бесселя второго рода, которые неограниченны в нуле и равны сумме функционального ряда, которая не вычисляется описанным выше способом.

20.3. Собственные функции оператора Лапласа в круге. Вернемся к уравнению (20.8). Из требований на гладкость функции $y(\xi)$ вытекает, что $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$ должны быть конечны. Следовательно, с учетом свойств функций Бесселя первого рода, с точностью до постоянного множителя можно записать для решения $y(\xi)$ уравнения (20.8) равенство

$$y(\xi) = J_n(\xi).$$

В следующем параграфе будет доказано, что функция Бесселя первого рода $J_\nu(\xi)$ для любого $\nu \ge 0$ имеет счетное число нулей. Занумеруем положительные нули в порядке возрастания: $\mu_1^{(\nu)}$, $\mu_2^{(\nu)}$, ..., то есть

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \ldots < \mu_k^{(\nu)} < \ldots, \quad J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}\right) = 0.$$

Следовательно, задача (20.8),(20.9) имеет решения только при существовании $k \in \mathbf{N}$ такого, что $\sqrt{\lambda}R = \mu_k^{(n)}$.

Итак, собственные функции оператора $A = -\Delta$ в круге D радиуса R с однородными граничными условиями первого рода имеют следующий вид:

$$g_{0,k}(r,\varphi) = J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right), \ k \in \mathbf{N};$$

$$g_{n,k\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right.}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}, \ k,n \in \mathbf{N}$$

а соответствующие им собственные значения есть

$$\lambda_{n,k} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2, \ k \in \mathbf{N}, \ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

Отметим, что при $n = 0$ кратность $\lambda_{n,k}$ равна единице, а при $n \ne 0$ – двум.

В заключение сформулируем и докажем следующую теорему

Теорема 1. Пусть n – неотрицательное целое число. Тогда функции Бесселя первого рода $J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)$ и $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)$ при $m \ne k$ ортогональны с весом r на отрезке $[0,R]$, то есть справедливо равенство

$$\int_0^R J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right) r J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr = 0 \qquad (20.12)$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функции

$$g_1(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\cos n\varphi \ \text{ и } \ g_2(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)\cos n\varphi.$$

Они являются собственными для оператора $A = -\Delta$ в области D с однородными граничными условиями первого рода и отвечают различным собственным значениям: $\lambda_1 = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2$ и $\lambda_2 = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2$

Следовательно, в соответствии с результатами предыдущего параграфа функции g_1 и g_2 ортогональны:

$$0 = \iint_D g_1 g_2 dx^1 dx^2 = \int_0^R\left(\int_0^{2\pi} g_1 g_2 r d\varphi\right)dr =$$

$$= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 n\varphi d\varphi\right) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) r dr =$$

$$= \pi \int_0^R J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R} r\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r\right) r dr,$$

откуда следует равенство (20.12) ■

В следующем параграфе теорема 1 будет доказана в более общем случае.

§21. Существование счетного числа нулей функций Бесселя первого рода. Ортогональность функций Бесселя

21.1. Нули [1]) функций Бесселя первого рода. Зафиксируем произвольное $\nu \geq 0$ и рассмотрим дифференциальное уравнение Бесселя

$$y''(\xi) + \frac{1}{\xi} y'(\xi) + \left[1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right] y(\xi) = 0. \qquad (21.1)$$

Напомним, что функция Бесселя первого рода $J_\nu(\xi)$ – это нетривиальное ограниченное при $\xi = 0$ решение уравнения (21.1) Изучим свойства нулей этой функции.

Лемма 1. Множество нулей функции $J_\nu(\xi)$ не может иметь конечную предельную точку

Доказательство леммы 1. Допустим противное: пусть существует конечная точка ξ_0 такая, что в сколь угодно малой ее окрестности есть нуль функции $J_\nu(\xi)$ Рассмотрим два случая

1) Если $\xi_0 \neq 0$, то с учетом гладкости функции $J_\nu(\xi)$ получаем, что $J_\nu(\xi_0) = J'_\nu(\xi_0) = 0$. Согласно единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка (21.1) из условий $J_\nu(\xi_0) = J'_\nu(\xi_0) = 0$ следует, что $J_\nu(\xi) \equiv 0$. Получено противоречие с определением функции $J_\nu(\xi)$.

2) Из представления $J_\nu(\xi) = \xi^\nu z(\xi)$, $z''(0) \neq 0$, полученного в пункте 2 предыдущего параграфа, вытекает, что точка $\xi_0 = 0$ тоже

[1]) Точка ξ_0 называется *нулем функции* $f(\xi)$, если $f(\xi_0)=0$

не может быть предельной для нулей функции Бесселя ■

Следствие 1 Множество нулей функции $J_\nu(\xi)$ не более, чем счетно.

Доказательство следствия 1 Любой отрезок $[0; N]$, $N = 1,2,$. содержит только конечное число нулей функции $J_\nu(\xi)$ (иначе нашлась бы предельная точка нулей на этом отрезке). Следовательно, все нули можно последовательно "занумеровать" с помощью натурального ряда ■

Для более подробного анализа расположения нулей функции Бесселя первого рода $J_\nu(\xi)$ удобно воспользоваться теоремой сравнения Штурма, для чего необходимо привести уравнение (21 1) к виду, в котором отсутствует первая производная. Этого можно достичь стандартной подстановкой

$$y(\xi) = e^{f(\xi)} \tilde{y}(\xi)$$

В результате уравнение (21.1) перейдет в уравнение для $\tilde{y}(\xi)$ со следующим коэффициентом при $\tilde{y}'(\xi)$:

$$2f'(\xi)e^{f(\xi)} + \frac{1}{\xi} e^{f(\xi)},$$

который в силу наших стремлений должен равняться нулю, то есть

$$f'(\xi) = -\frac{1}{2\xi}$$

Выберем $f(\xi) = -\frac{1}{2}\ln\xi$, тогда

$$y(\xi) = \frac{\tilde{y}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \qquad (21.2)$$

Подстановка выражения (21.2) в уравнение (21.1) дает

$$\left(\frac{\tilde{y}''(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{3}{4}\frac{\tilde{y}(\xi)}{\left(\sqrt{\xi}\right)^5}\right) + \frac{1}{\xi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\tilde{y}(\xi)}{\left(\sqrt{\xi}\right)^3}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)\frac{\tilde{y}(\xi)}{\sqrt{\xi}} = 0,$$

или

$$\tilde{y}''(\xi) + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\xi^2}\right)\tilde{y}(\xi) = 0. \qquad (21.3)$$

Уравнение (21.3) называется *приведенным уравнением Бесселя.*

Отметим, что все положительные нули функций $J_\nu(\xi)$ и $\tilde{J}_\nu(\xi) = \sqrt{\xi} J_\nu(\xi)$ совпадают.

1) Рассмотрим уравнение $\hat{y}''(\xi) + \frac{1}{2}\hat{y}(\xi) = 0$ и возьмем следующее его решение:

$$\hat{y}(\xi) = \sin\frac{1}{\sqrt{2}}\xi .$$

Положительные нули функции $\hat{y}(\xi)$ есть $\xi_k = \sqrt{2}\pi k,\ k \in \mathbf{N}$. При ξ таком, что $\xi^2 \geq 2\left(\nu^2 - 1/4\right)$ выполняется неравенство

$$1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\xi^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, по теореме сравнения Штурма для любого достаточно большого натурального k на отрезке $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ есть нуль функции $\tilde{J}_\nu(\xi)$, являющейся решением уравнения (21.3), а следовательно, и нуль функции $J_\nu(\xi)$. Таким образом, функция $J_\nu(\xi)$ имеет бесконечное число нулей.

Итак, доказана

Теорема 1. Функция Бесселя первого рода $J_\nu(\xi)$ имеет счетное число нулей

Как и в предыдущем параграфе, занумеруем положительные нули функции $J_\nu(\xi)$ в порядке возрастания (без пропусков): $\mu_1^{(\nu)}, \mu_2^{(\nu)}, \ldots$

2) Рассмотрим уравнение $\hat{y}''(\xi) + 2\hat{y}(\xi) = 0$ и возьмем следующее его решение:

$$\hat{y}(\xi) = \sin\sqrt{2}\xi .$$

Положительные нули функции $\hat{y}(\xi)$ есть $\xi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi k,\ k \in \mathbf{N}$. При ξ таком, что $\xi^2 \geq 1/4 - \nu^2$ выполняется неравенство

$$1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\xi^2} \leq 2.$$

Следовательно, по теореме сравнения Штурма для любого натурального $k \geq k_0$, где натуральное число k_0 таково, что $\left(\mu_{k_0}^{(\nu)}\right)^2 \geq 1/4 - \nu^2$, отрезок $\left[\mu_k^{(\nu)}, \mu_{k+2}^{(\nu)}\right]$ содержит, как минимум, два нуля функции $\hat{y}(\xi)$, то есть

$$\mu_{k+2}^{(\nu)} - \mu_k^{(\nu)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\pi .$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_k^{(\nu)}\right)^2}$. Для него можно записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_k^{(\nu)}\right)^2} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\left(\mu_k^{(\nu)}\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_{k_0+2k}^{(\nu)}\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_{k_0+2k-1}^{(\nu)}\right)^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\left(\mu_k^{(\nu)}\right)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_{k_0+2}^{(\nu)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi k\right)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_{k_0+1}^{(\nu)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi k\right)^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\left(\mu_k^{(\nu)}\right)^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

Итак, доказана следующая

Теорема 2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_k^{(\nu)}\right)^2}$ сходится.

21.2. Ортогональность. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$L_\nu = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2},$$

заданный на линейном многообразии $M_\nu = \left\{\varphi(r) \quad \varphi(r) = r^{\nu+1/2}\cdot\tilde{\varphi}(r),\ \tilde{\varphi} \in C^2[0,R],\ \varphi(R) = 0\right\}$ в $L_2(0,R)$

Лемма 2. Для любого действительного $\nu \geq 0$ справедливы утверждения

1) оператор L_ν на линейном многообразии M_ν является симметричным,

2) функции $\varphi_{\nu k}(r) = \tilde{J}_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right) \equiv \sqrt{\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}} J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right),\ k \in \mathbf{N}$ яв-

ляются собственными функциями оператора L_ν и отвечают собственным значениям $\lambda_{\nu,k} = \left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right)^2$.

Доказательство леммы 2.

1) Пусть $\nu > 0$, тогда для любых двух функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ из линейного многообразия M_ν справедливы равенства

$$(L_\nu\varphi,\psi) = \int_0^R\left(-\varphi''(r) + \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\varphi(r)\right)\overline{\psi(r)}dr =$$

$$= -\varphi'(r)\overline{\psi(r)}\Big|_0^R + \int_0^R\varphi'(r)\overline{\psi'(r)}dr + \int_0^R\frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\varphi(r)\overline{\psi(r)}dr,$$

и

$$(\varphi,L_\nu\psi) = \int_0^R\varphi(r)\left(-\overline{\psi''(r)} + \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\overline{\psi(r)}\right)dr =$$

$$= -\varphi(r)\overline{\psi'(r)}\Big|_0^R + \int_0^R\varphi'(r)\overline{\psi'(r)}dr + \int_0^R\frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\varphi(r)\overline{\psi(r)}dr.$$

Из условий на концах отрезка $[0,R]$ получаем, что $0 = \varphi'(r)\overline{\psi(r)}\Big|_0^R = \varphi(r)\overline{\psi'(r)}\Big|_0^R$. Следовательно, $(L_\nu\varphi,\psi) = (\varphi,L_\nu\psi)$ что и требовалось доказать

Рассмотрим теперь случай $\nu = 0$. Пусть $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ – две произвольные функции из M_0, тогда в соответствии с определением M_ν справедливы равенства $\varphi(r) = \sqrt{r}\tilde{\varphi}(r)$ и $\psi(r) = \sqrt{r}\tilde{\psi}(r)$, где функции $\tilde{\varphi}(r)$ и $\tilde{\psi}(r)$ принадлежат классу $C^2[0,R]$. Проведем следующие преобразования:

$$(L_0\varphi,\psi) = \int_0^R\left[-\frac{1}{\sqrt{r}}\tilde{\varphi}'(r) - \sqrt{r}\tilde{\varphi}''(r)\right]\sqrt{r}\cdot\overline{\tilde{\psi}(r)}dr = \int_0^R\tilde{\varphi}'(r)\overline{\tilde{\psi}(r)}dr -$$

$$- r\tilde{\varphi}'(r)\overline{\tilde{\psi}(r)}\Big|_0^R + \int_0^R\tilde{\varphi}'(r)\overline{\left(r\tilde{\psi}(r)\right)'}dr = \int_0^R r\tilde{\varphi}'(r)\overline{\tilde{\psi}'(r)}dr.$$

Аналогичные преобразования приводят к равенству

$$(\varphi,L_0\psi) = \int_0^R r\tilde{\varphi}'(r)\overline{\tilde{\psi}'(r)}dr.$$

Следовательно, $(L_0\varphi,\psi) = (\varphi,L_0\psi)$

2) Из приведенного уравнения Бесселя (21.3) и вида оператора L_ν непосредственно вытекает важное соотношение

$$L_\nu\tilde{J}_\nu(r) \equiv -\tilde{J}_\nu''(r) + \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\tilde{J}_\nu(r) = \tilde{J}_\nu(r)$$

Следовательно,

$$L_\nu\varphi_{\nu,k}(r) = -\frac{d^2}{dr^2}\tilde{J}_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right) + \frac{\nu^2 - 1/4}{r^2}\tilde{J}_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right) =$$

$$= \left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right)^2\left[-J_\nu''\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right) + \left(\nu^2 - 1/4\right)\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)^{-2}\tilde{J}_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right)^2\tilde{J}_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right) = \lambda_{\nu,k}\varphi_{\nu,k}(r)$$

Поскольку $\tilde{J}_\nu(r) = \sqrt{r}J_\nu(r) = \sqrt{r}\cdot r^\nu\cdot z(r)$, $z(r)\in C^2[0;\infty)$ и $\varphi_{\nu,k}(R) = 0$, то $\varphi_{\nu,k}(r)\in M_\nu$ ■

Лемма 2 позволяет доказать следующую теорему.

<u>Теорема 3.</u> Пусть ν – произвольное неотрицательное действительное число. Тогда функции Бесселя первого рода $J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)$ и $J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{R}r\right)$ при $m\neq k$ ортогональны с весом r на отрезке $[0;R]$, то есть выполняется равенство

$$\int_0^R J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)rJ_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{R}r\right)dr = 0. \qquad (21.4)$$

(Для целых ν данная теорема была доказана в предыдущем параграфе.)

Доказательство теоремы 3 Рассмотрим функции $\varphi_{\nu,k}(r)$ и $\varphi_{\nu,m}(r)$. Это собственные функции симметричного оператора L_ν,

отвечающие различным собственным значениям $\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right)^2$, $\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{R}\right)^2$. Следовательно, $\varphi_{\nu,k}(r)$ и $\varphi_{\nu,m}(r)$ ортогональны, то есть

$$0=\left(\varphi_{\nu,k},\varphi_{\nu,m}\right)=\int_0^R\varphi_{\nu,k}(r)\varphi_{\nu,m}(r)dr=\frac{\sqrt{\mu_k^{(\nu)}\mu_m^{(\nu)}}}{R}\int_0^R J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)rJ_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{R}r\right)dr.$$

Остается учесть, что $\mu_k^{(\nu)}\neq 0$ и $\mu_m^{(\nu)}\neq 0$, чтобы получить равенст во (21.4) ■

21.3. Рекуррентные соотношения. Для справки без доказательства приведем следующие соотношения для функций Бесселя:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^\nu J_\nu(\xi)\right]=\xi^\nu J_{\nu-1}(\xi), \tag{21.5}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{J_\nu(\xi)}{\xi^\nu}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(\xi)}{\xi^\nu} \tag{21.6}$$

Из них легко получить, что

$$J_{\nu+1}(\xi)-\frac{2\nu}{\xi}J_\nu(\xi)+J_{\nu-1}(\xi)=0. \tag{21.7}$$

§22. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности в круге

22.1. Разложение по функциям Бесселя первого рода. Рассмотрим функцию $f(r)$ из класса $L_2(0;R)$. Для произвольного фиксированного $\nu\geq 0$ разложим функцию $f(r)$ в ряд Фурье по ортогональной с весом r системе $\left\{J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$.

$$f(r)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right), \tag{22.1}$$

где $a_k=\dfrac{\left(rf(r),J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)\right)}{\left(rJ_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right),J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)\right)}=\dfrac{\int_0^R f(r)J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)rdr}{\int_0^R J_\nu^2\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right)rdr}$ – коэффициенты Фурье.

Замечание 1. На практике для вычисления коэффициентов a_k удобно использовать рекуррентные соотношения (21.5) и (21.6).

Приведем без доказательства следующее утверждение о сходимости ряда (22.1).

<u>Теорема 1.</u> Пусть функция $f(r)$ непрерывна на отрезке $[0;R]$ и имеет на интервале $(0,R)$ абсолютно интегрируемую производную, причем $f(R)=0$. Тогда ряд (22.1) сходится равномерно к функции $f(r)$ на любом отрезке $[\delta;R]$, $0<\delta<R$:

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}r\right) \tag{22.2}$$

22.2. Примеры применения функций Бесселя. Рассмотрим смешанную задачу для однородного уравнения теплопроводности в круге $D=\left\{x=\left(x^1,x^2\right):\ |x|<R\right\}$

$$u_t(x,t)=a^2\Delta_x u(x,t),\ (x,t)\in D\times(0;\infty) \tag{22.3}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{D} \tag{22.4}$$

и однородными граничными условиями первого рода

$$u(x,t)\big|_{\partial D}=0,\ t\geq 0 \tag{22.5}$$

Здесь $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(D\times(0;\infty))\cap C(\overline{D}\times[0;\infty))$; $u_0(x)$ – заданная функция из класса $C(\overline{D})$, удовлетворяющая условию согласования $u_0(x)\big|_{\partial D}\equiv 0$.

Перейдем к полярным координатам (r,φ):

$$x=(r\cos\varphi,r\sin\varphi),\ r\geq 0,\ 0\leq\varphi<2\pi$$

Тогда смешанная задача (22.3),(22.4),(22.5) запишется следующим

образом:

$$w_t(r,\varphi,t) = a^2\Delta_{r\varphi}w(r,\varphi,t),\ 0 \le r < R,\ t > 0, \tag{22.6}$$

$$w(r,\varphi,0) = w_0(r,\varphi),\ 0 \le r \le R, \tag{22.7}$$

$$w(R,\varphi,t) = 0,\ t \ge 0, \tag{22.8}$$

где $\Delta_{r\varphi}\bullet = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\bullet\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$ – оператор Лапласа в полярных координатах, $w(r,\varphi,t) = u(x(r,\varphi),t)$ и $w_0(r,\varphi) = u_0(x(r,\varphi))$.

Условие согласования примет вид $w_0(R,\varphi) \equiv 0$.

Будем искать решение $w(r,\varphi,t)$ в виде функционального ряда по собственным функциям оператора $A = -\Delta$ в области D с однородными граничными условиями первого рода:

$$w(r,\varphi,t) \sim \sum_\lambda T_\lambda(t)X_\lambda(r,\varphi), \tag{22.9}$$

где $T_\lambda(t)$ – искомые функции, $X_\lambda(r,\varphi)$ – решения системы $\begin{cases} -\Delta_{r,\varphi}X_\lambda(r,\varphi) = \lambda X_\lambda(r,\varphi) \\ X_\lambda(R,\varphi) = 0 \end{cases}$, ортогональные друг другу в $L_2(D)$.

Прежде всего, разложим функцию $w_0(r,\varphi)$ в ряд Фурье по ортогональной системе $\{X_\lambda(r,\varphi)\}$ в $L_2(D)$

$$w_0(r,\varphi) \sim \sum_\lambda a_\lambda X_\lambda(r,\varphi), \tag{22.10}$$

где $a_\lambda = \frac{(w_0, X_\lambda)}{(X_\lambda, X_\lambda)} = \frac{\iint\limits_D w_0 X_\lambda dx^1 dx^2}{\iint\limits_D X_\lambda^2 dx^1 dx^2} = \frac{\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} w_0(r,\varphi)X_\lambda(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi}{\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} X_\lambda^2(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi}$ – коэффициенты Фурье.

Формально подставим ряды (22.9) и (22.10) в уравнение (22.6) и начальные условия (22.7). Тогда с учетом свойств функций $X_\lambda(r,\varphi)$ получим

$$\sum_\lambda T_\lambda'(t)X_\lambda(r,\varphi) = -a^2\sum_\lambda \lambda T_\lambda(t)X_\lambda(r,\varphi),$$

$$\sum_\lambda T_\lambda(0)X_\lambda(r,\varphi) = \sum_\lambda a_\lambda X_\lambda(r,\varphi).$$

Потребуем почленное выполнение написанных равенств:

$$T_\lambda'(t) + a^2\lambda T_\lambda(t) = 0,\ T_\lambda(0) = a_\lambda,$$

откуда

$$T_\lambda(t) = a_\lambda \exp(-a\lambda t). \tag{22.11}$$

Далее, воспользуемся результатами §20:

$$X_\lambda(r,\varphi) = J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right),\ \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2,\quad k \in \mathbf{N};$$

$$X_\lambda(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{Bmatrix},\ \lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2,\quad n,k \in \mathbf{N}.$$

Тогда ряд (22.9) запишется следующим образом:

$$w(r,\varphi,t) \sim \sum_{k=1}^\infty T_{0,k}(t)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\left[T_{n,k}(t)\cos n\varphi + \tilde{T}_{n,k}(t)\sin n\varphi\right]. \tag{22.12}$$

Если

$$w_0(r,\varphi) = \sum_{k=1}^\infty a_{0,k}J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right) + \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\left[a_{n,k}\cos n\varphi + \tilde{a}_{n,k}\sin n\varphi\right],$$

то

$$w(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^\infty a_{0,k}J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right)\exp\left[-\left(a\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2 t\right] +$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\left[a_{n,k}\cos n\varphi + \tilde{a}_{n,k}\sin n\varphi\right]\exp\left[-\left(a\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2 t\right].$$

Замечание 2. Целью данного параграфа не является обоснование возможности нахождения решения в виде такого функционального ряда. Здесь лишь продемонстрирован принцип применения цилиндрических функций при решении смешанных задач в круговой области

Подобным образом решаются и смешанные задачи для волнового уравнения в круге.

Пример 1. Найти решение $w(r,\varphi,t)$ смешанной задачи

$$w_{tt} - \Delta_{r\varphi} w + w = \cos t \cdot \cos 3\varphi \cdot J_3\left(2\mu_{10}^{(3)} r\right),\ 0 \le r < \tfrac{1}{2},\ t > 0, \quad (22.13)$$

$$w(r,\varphi,0) = r(1-2r)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right),\ 0 \le r \le \tfrac{1}{2}, \quad (22.14)$$

$$w_t(r,\varphi,0) = 0,\ 0 \le r \le \tfrac{1}{2}, \quad (22.15)$$

$$w(R,\varphi,t) = 0,\ t \ge 0. \quad (22.16)$$

Решение. Будем искать решение $w(r,\varphi,t)$ в следующем виде

$$w \sim T(t) J_3\left(2\mu_{10}^{(3)} r\right)\cos 3\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_1\left(2\mu_k^{(1)} r\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right). \quad (22.17)$$

Записав такое выражение для w, мы учли вид правой части уравнения (22.13) и начальных данных (22.14) и воспользовались тем фактом, что функции $\cos 3\varphi$ и $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ являются собственными для дифференциального оператора $-\frac{d^2}{d\varphi^2}$ и отвечают собственным значениям $n^2 = 9$ и $n^2 = 1$ соответственно. Разложим функцию $r(1-2r)$, входящую в начальные данные, по системе $\left\{J_1\left(2\mu_k^{(1)} r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$r(1-2r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(2\mu_k^{(1)} r\right), \quad (22.18)$$

где $a_k = \dfrac{\int_0^{1/2} r^2(1-2r) J_1\left(2\mu_k^{(1)} r\right) dr}{\int_0^{1/2} r J_1^2\left(2\mu_k^{(1)} r\right) dr}$. Далее, подставим ряды (22.17) и (22.18) в уравнение (22.13) и начальные условия (22.14),(22.15), потребовав почленного выполнения получающихся равенств

$$T''(t) + \left[\left(2\mu_{10}^{(3)}\right)^2 + 1\right] T(t) = \cos t,\ T(0) = 0,\ T'(0) = 0;$$

$$T_k''(t) + \left[\left(2\mu_k^{(1)}\right)^2 + 1\right] T_k(t) = 0,\ T_k(0) = a_k,\ T_k'(0) = 0$$

Решая эти задачи Коши для обыкновенных дифференциальных

уравнений второго порядка, находим

$$T(t) = \left(2\mu_{10}^{(3)}\right)^{-2}\left[\cos t - \cos\left(\sqrt{\left(2\mu_{10}^{(3)}\right)^2 + 1}\cdot t\right)\right],$$

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\sqrt{\left(2\mu_k^{(1)}\right)^2 + 1}\cdot t\right).$$

Следовательно,

$$w(r,\varphi,t) = \left(2\mu_{10}^{(3)}\right)^{-2}\left[\cos t - \cos\left(\sqrt{\left(2\mu_{10}^{(3)}\right)^2 + 1}\cdot t\right)\right] J_3\left(2\mu_{10}^{(3)} r\right)\cos 3\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\sqrt{\left(2\mu_k^{(1)}\right)^2 + 1}\cdot t\right) J_1\left(2\mu_k^{(1)} r\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$$

Пример 2. Решить задачу

$$u_{tt}(x,t) + \frac{4}{x} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{1}{x} u_x(x,t) + 3t \cdot J_2\left(\mu_5^{(2)} x\right), \quad (22.19)$$

$$0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = J_2\left(\mu_1^{(2)} x\right),\ 0 \le x \le 1, \quad (22.20)$$

$$|u(0,t)| < \infty,\ u(1,t) = 0,\ t \ge 0 \quad (22.21)$$

Решение. Функция Бесселя $J_2(\xi)$ по определению ограничена в $\xi = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$J_2''(\xi) + \frac{1}{\xi} J_2'(\xi) - \frac{4}{\xi^2} J_2(\xi) = -J_2(\xi)$$

Следовательно,

$$\frac{d^2}{dx^2} J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) - \frac{4}{x^2} J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) = -\left(\mu_k^{(2)}\right)^2 J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right),$$

причем

$$|J_2(0)| < \infty,\ J_2\left(\mu_k^{(2)}\right) = 0.$$

Отметим, что оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bullet + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\bullet - \frac{4}{x^2}\bullet$ так же входит в уравнение (22.19), по этой причине имеет смысл искать решение $u(x,t)$ в виде ряда

$$u(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (22.19) и начальные условия (22.20), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k^{(2)}\right)^2 T_k(t) J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) + 3t \cdot J_2\left(\mu_5^{(2)} x\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) = 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) J_2\left(\mu_k^{(2)} x\right) = J_2\left(\mu_1^{(2)} x\right)$$

Потребуем почленного выполнения написанных равенств

$$T_1''(t) + \left(\mu_1^{(2)}\right)^2 T_1(t) = 0, \ T_1(0) = 0, \ T_1'(0) = 1;$$

$$T_5''(t) + \left(\mu_5^{(2)}\right)^2 T_5(t) = 3t, \ T_5(0) = T_5'(0) = 0;$$

$$T_k(t) = 0, \ k \neq 1, \ k \neq 5$$

Решая задачи Коши для $T_1(t)$ и $T_5(t)$, находим

$$T_1(t) = \frac{1}{\mu_1^{(2)}} \sin\left(\mu_1^{(2)} t\right), \ T_5(t) = \frac{3}{\left(\mu_5^{(2)}\right)^2}\left[t - \frac{1}{\mu_5^{(2)}} \sin\left(\mu_5^{(2)} t\right)\right].$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu_1^{(2)}} \sin\left(\mu_1^{(2)} t\right) J_2\left(\mu_1^{(2)} x\right) + \frac{3}{\left(\mu_5^{(2)}\right)^2}\left[t - \frac{1}{\mu_5^{(2)}} \sin\left(\mu_5^{(2)} t\right)\right] J_2\left(\mu_5^{(2)} x\right).$$

Глава V

Первоначальные сведения об уравнении Пуассона. Задача Дирихле в $\mathbf{R}^2$

§23. Уравнение Пуассона. Принцип максимума для гармонических функций. Корректность постановки внутренней задачи Дирихле

23.1. Постановка краевых задач. Перейдем к изучению уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\left(\partial x^i\right)^2} u(x) = f(x), \ x \in \mathbf{R}^n, \tag{23.1}$$

которое, как отмечалось выше, относится к эллиптическому типу.

Пример Адамара (§8) показал, что постановка задачи Коши для уравнения Лапласа может быть некорректной. На самом деле, постановка классической задачи Коши для эллиптических уравнений всегда приводит к некорректным задачам.

Для уравнения (23.1), как и для всех эллиптических уравнений, рассматривают так называемые краевые задачи, среди которых выделяют следующие основные.

а) *Внутренняя задача Дирихле* Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $f(x)$ и $u_0(x)$ – заданные функции из классов $C(D)$ и $C(\partial D)$ соответственно. Требуется найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую в D уравнению Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x), \ x \in D \tag{23.2}$$

и граничному условию первого рода

$$u(x) = u_0(x),\ x \in \partial D. \qquad (23.3)$$

б) *Внешняя задача Дирихле.* Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $f(x)$ и $u_0(x)$ – заданные функции из классов $C(\mathbf{R}^n \setminus \overline{D})$ и $C(\partial D)$ соответственно. Требуется найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbf{R}^n \setminus D)$, удовлетворяющую в $\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}$ уравнению Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{D},$$

граничному условию первого рода

$$u(x) = u_0(x),\ x \in \partial D$$

и определенному условию на бесконечности.

в) *Внутренняя задача Неймана.* Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей ∂D, $f(x)$ и $u_1(x)$ – заданные функции из классов $C(D)$ и $C(\partial D)$ соответственно. Требуется найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, имеющую на границе ∂D правильную нормальную производную $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$ и удовлетворяющую в D уравнению Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in D$$

и граничному условию второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = u_1$$

г) *Внешняя задача Неймана* Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей ∂D, $f(x)$ и $u_1(x)$ – заданные функции из классов $C(\mathbf{R}^n \setminus \overline{D})$ и $C(\partial D)$ соответственно. Требуется найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbf{R}^n \setminus D)$, имеющую на границе ∂D правильную нормальную производную $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$, удовлетворяющую в $\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}$ уравнению Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{D},$$

граничному условию второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = u_1$$

и определенному условию на бесконечности.

Поставленные задачи на плоскости ($n = 2$) мы обсудим только для области D, являющейся кольцом.

Для случая $n = 3$ эти задачи подробно обсуждаются в седьмой главе (для шарового слоя) и в десятой главе (для широкого класса областей).

К основным также относят задачи с так называемыми краевыми условиями третьего рода:

$$\left.\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right]\right|_{\partial D} = u_2,\ \alpha > 0,$$

где n – внешняя нормаль, $\frac{\partial u}{\partial n}$ понимается, вообще говоря, как правильная нормальная производная. Пример такой задачи приведен в §24.

В этом параграфе ограничимся изучением корректности постановки внутренней задачи Дирихле.

23.2. Принцип максимума для гармонической функции.

Теорема 1 Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $u(x)$ – функция, гармоническая в D и непрерывная в $\overline{D}$. Тогда справедлив принцип максимума:

$$\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x) \qquad (23.4)$$

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что поскольку $\overline{D}$ и ∂D – компакты, и функция $u(x)$ непрерывна на них, то оба максимума в равенстве (23.4) существуют и достигаются хотя бы в одной точке соответствующих множеств

Допустим, что существует точка $x_0 \in D$ такая, что $u(x_0) > C_1$, где $C_1 = \max_{x \in \partial D} u(x)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x) = u(x) + \frac{u(x_0) - \tilde{N}_1}{\tilde{N}_2}|x - x_0|^2,$$

где $C_2 = \max\limits_{x\in\partial D}|x - x_0|^2$ ($C_2 > 0$, так как ∂D – компакт и $x_0 \notin \partial D$)

Тогда

$$\max_{x\in\partial D} v(x) = \max_{x\in\partial D}\left(u(x) + \frac{u(x_0) - C_1}{C_2}|x - x_0|^2\right) < C_1 + \frac{u(x_0) - C_1}{C_2}C_2 =$$

$$= u(x_0) = v(x_0).$$

Следовательно, максимум функции $v(x)$ не может достигаться на границе области D, а достигается в некоторой внутренней точке $x^* \in D$. Поскольку $u \in C^2(D)$ (см. определение гармонической функции), то и $v \in C^2(D)$, а следовательно, согласно необходимому условию максимума должно выполняться

$$\Delta v(x^*) \le 0,$$

но с другой стороны

$$\Delta v(x^*) = \Delta u(x^*) + \frac{u(x_0) - C_1}{C_2}\Delta|x^* - x_0|^2 = 2n\frac{u(x_0) - C_1}{C_2} > 0.$$

Из полученного противоречия следует, что $u(x_0) \le C_1$ ■

Следствие 1. В условиях теоремы справедливы утверждения

$$\min_{x\in\partial D} u(x) = \min_{x\in\bar D} u(x), \qquad (23.5)$$

и

$$\min_{x\in\partial D} u(x) \le u(x_0) \le \max_{x\in\partial D} u(x), \ \forall x_0 \in \bar D. \qquad (23.6)$$

Доказательство следствия 1. Поскольку функция $-u(x)$ так же является гармонической, то можно записать следующую цепочку равенств:

$$\min_{x\in\bar D} u(x) = -\max_{x\in\bar D}(-u(x)) = -\max_{x\in\partial D}(-u(x)) = \min_{x\in\partial D} u(x).$$

Таким образом, обосновано равенство (23.5). Объединение равенств (23.4) и (23.5) приводит к утверждению (23.6) ■

23.3. О корректности внутренней задачи Дирихле. При помощи принципа максимума докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Если существует решение внутренней задачи Дирихле (23.2),(23.3) в классе функций $C^2(D) \cap C(\bar D)$, то оно единственно в этом классе и непрерывно зависит от граничных данных u_0 в равномерной метрике.

Доказательство теоремы 2

Единственность. Пусть $\tilde u(x)$ и $\tilde{\tilde u}(x)$ – два решения внутренней задачи Дирихле (23.2),(23.3), отвечающие одним и тем же граничным данным. Рассмотрим их разность

$$u(x) = \tilde u(x) - \tilde{\tilde u}(x).$$

Она принадлежит классу $C^2(D) \cap C(\bar D)$ и удовлетворяет в D уравнению Лапласа и однородным граничным условиям. Следовательно, для $u(x)$ можно воспользоваться принципом максимума (23.4) и его следствием (23.5):

$$\max_{x\in\bar D} u(x) = 0, \ \min_{x\in\bar D} u(x) = 0,$$

или

$$\tilde u(x) \equiv \tilde{\tilde u}(x),$$

что и требовалось доказать.

Непрерывная зависимость. Пусть теперь $\tilde u(x)$ и $\tilde{\tilde u}(x)$ – решения задачи (23.2),(23.3), отвечающие граничным данным $\tilde u_0$ и $\tilde{\tilde u}_0$ соответственно. Тогда разность $u(x) = \tilde u(x) - \tilde{\tilde u}(x)$ является решением внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u(x) = 0, \ x \in D,$$

$$u(x) = u_0(x) \equiv \tilde u_0(x) - \tilde{\tilde u}_0(x), \ x \in \partial D$$

Воспользуемся для $u(x)$ принципом максимума:

$$\max_{x\in\bar D}|u(x)| = \max\left\{\max_{x\in\bar D} u(x), -\min_{x\in\bar D} u(x)\right\} =$$

$$= \max\left\{\max_{x\in\partial D} u_0(x), -\min_{x\in\partial D} u_0(x)\right\} = \max_{x\in\partial D}|u_0(x)|$$

Следовательно,

$$\max_{x\in\bar D}|\tilde u(x) - \tilde{\tilde u}(x)| = \max_{x\in\partial D}|\tilde u_0(x) - \tilde{\tilde u}_0(x)|.$$

■

§24. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в случае непрерывной граничной функции. Краевые задачи в кольце

24.1. Случай непрерывно дифференцируемой граничной функции. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круговой области $D = \{x = (x^1, x^2) : |x| < R\}$

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in D \tag{24.1}$$

с граничными условиями первого рода

$$u(x) = u_0(x),\ x \in \partial D \tag{24.2}$$

Необходимо найти решение $u(x)$ из класса $C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

В этом пункте будем считать, что $u_0 \in C^1(\partial D)$

Перейдем в задаче (24.1),(24.2) к полярным координатам (r,φ):

$$x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ r \geq 0.$$

Получаем

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}w(r,\varphi)\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}w(r,\varphi) = 0,\ r \in [0;R), \tag{24.3}$$

$$w(R,\varphi) = w_0(\varphi). \tag{24.4}$$

Здесь $w(r,\varphi) = u(x(r,\varphi))$, $w_0(\varphi) = u_0(x(R,\varphi))$. Из гладкости функции $u_0(x)$ вытекает, что функция $w_0(\varphi)$ принадлежит классу $\tilde{N}^1$ и является 2π-периодичной.

Будем искать решение $w(r,\varphi)$ в виде функционального ряда

$$w(r,\varphi) \sim \sum_\lambda Z_\lambda(r)\Phi_\lambda(\varphi),$$

где $\Phi_\lambda(\varphi)$ – 2π-периодичные собственные функции оператора $-\frac{d^2}{d\varphi^2}$, ортогональные друг другу. Как было показано в §20, собственные числа $\lambda = n^2$, а соответствующие линейно независимые собственные функции можно выбрать следующим образом:

$$\Phi_0(\varphi) = 1 \text{ для } n = 0,$$

$$\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi,\ \tilde{\Phi}_n(\varphi) = \sin n\varphi \text{ для } n \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, ищем решение задачи (24.3),(24.4) в виде ряда

$$w \sim \sum_\lambda Z_\lambda(r)\Phi_\lambda(\varphi) = Z_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[Z_n(r)\cos n\varphi + \tilde{Z}_n(r)\sin n\varphi\right]. \tag{24.5}$$

Из выше перечисленных свойств функции $w_0(\varphi)$ следует, что ее ряд Фурье по ортогональной системе $\{1, \cos\varphi, \sin\varphi, \ldots\}$ сходится равномерно к ней самой:

$$w_0(\varphi) = \sum_\lambda a_\lambda\Phi_\lambda(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\varphi + \tilde{a}_n\sin n\varphi\right], \tag{24.6}$$

где $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\varphi)d\varphi$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$, $n \in \mathbf{N}$ и $\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$, $n \in \mathbf{N}$ – коэффициенты Фурье, причем $a_n = \frac{b_n}{n}$, $\tilde{a}_n = \frac{\tilde{b}_n}{n}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|b_n|^2 + |\tilde{b}_n|^2\right)$ сходится. Введем обозначение $M = \sup_n \max\{|a_n|, |\tilde{a}_n|\} \leq 2\sup_\varphi |w_0(\varphi)| < \infty$

Формально подставим ряды (24 5) и (24.6) в соотношения (24.3) и (24.4), потребовав почленного выполнения получающихся равенств:

$$r^2 Z_\lambda''(r) + rZ_\lambda'(r) - \lambda^2 Z_\lambda(r) = 0, \tag{24.7}$$

$$Z_\lambda(R) = a_\lambda \tag{24 8}$$

Эти соотношения необходимо дополнить условиями

$$|Z_\lambda(0)| < \infty \tag{24.9}$$

которые вытекают из непрерывности решения $u(x)$ в нуле

Уравнение (24.7) является дифференциальным уравнением Эйлера, поэтому существует решение вида $Z_\lambda(r) = r^\alpha$, $\lambda = n^2$. Подставляя в уравнение, получаем

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0,$$

откуда $\alpha = \pm n$. Для $\lambda = n^2 > 0$, таким образом, найдено два линейно независимых решения: r^n и r^{-n}, так что общее решение имеет вид

$$Z_\lambda(r) = C_{\lambda,1} r^n + C_{\lambda,2} r^{-n}, \qquad (24.10)$$

где $C_{\lambda,1}$ и $C_{\lambda,2}$ – постоянные. Для $\lambda = 0$ уравнение (24.7) непосредственно решается:

$$Z_0(r) = C_{0,1} + C_{0,2} \ln r. \qquad (24.11)$$

Учитывая условия (24.8) и (24.9), получаем

$$Z_\lambda(r) = a_\lambda \left(\frac{r}{R}\right)^n, \ \lambda = n^2. \qquad (24.12)$$

Следовательно,

$$w \sim \sum_\lambda a_\lambda \left(\frac{r}{R}\right)^{\sqrt{\lambda}} \Phi_\lambda(\varphi) \equiv a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[a_n \cos n\varphi + \tilde{a}_n \sin n\varphi\right]. \qquad (24.13)$$

Докажем, что ряд (24.13) сходится равномерно при $0 \le r \le R$, для чего оценим его n-й член:

$$\sup_{r\in[0;R],\varphi} \left| \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[a_n \cos n\varphi + \tilde{a}_n \sin n\varphi\right] \right| \le |a_n| + |\tilde{a}_n| = \frac{|b_n|}{n} + \frac{|\tilde{b}_n|}{n} \le$$

$$\le |b_n|^2 + |\tilde{b}_n|^2 + \frac{2}{n^2}.$$

По мажорантному признаку ряд (24.13) сходится равномерно при $0 \le r \le R$.

Докажем теперь равномерную сходимость почленно продифференцированного k раз по r и l раз по φ ряда (24.13) в произвольном замкнутом круге $\overline{D}_0 = \{0 \le r \le R_0\}$, $R_0 < R$:

$$\sup_{\overline{D}_0} \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial r^k \partial \varphi^l} \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[a_n \cos n\varphi + \tilde{a}_n \sin n\varphi\right] \right\} \right| \le \frac{n!}{(n-k)!} \frac{r^{n-k}}{R^n} 2Mn^l \le$$

$$\le M \frac{n^{l+k}}{R^k} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{n-k}$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{l+k} \left(\frac{R_0}{R}\right)^n$ сходится для любых фиксированных $l, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, так как $R_0/R < 1$. Следовательно, почленно продифференцированный ряд сходится равномерно в $\overline{D}_0$. Тем самым

обоснована возможность почленного дифференцирования ряда (24.13) при $0 \le r < R$. Отметим, что при этом мы никак не использовали непрерывную дифференцируемость функции $w_0(\varphi)$.

Итак, доказано, что функция

$$w(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[a_n \cos n\varphi + \tilde{a}_n \sin n\varphi\right] \qquad (24.14)$$

является решением поставленной задачи Дирихле, причем $u(x) = w(r(x), \varphi(x)) \in C(\overline{D}) \cap C^\infty(D)$.

Пример 1. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге

$$\Delta u(x) \equiv u_{x^1x^1}(x) + u_{x^2x^2}(x) = 2x^1x^2 + 4|x|^2, \ |x| < 1 \qquad (24.15)$$

с граничными условиями

$$u(x) = 4\left(x^1\right)^3, \ |x| = 1. \qquad (24.16)$$

Решение. Перейдем к полярным координатам (r, φ):

$$x = \left(x^1, x^2\right) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$u(x(r,\varphi)) = w(r,\varphi).$$

Тогда задача (24.15),(24 16) перейдет в следующую:

$$\Delta_{r,\varphi} w \equiv \frac{1}{r}(r w_r)_r + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} = 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi + 4r^2, \ 0 \le r < 1, \qquad (24.17)$$

$$w(1,\varphi) = 4\cos^3\varphi. \qquad (24.18)$$

Преобразуем правые части равенств (24.17) и (24.18).

$$2r^2 \cos\varphi \sin\varphi + 4r^2 = r^2 \sin 2\varphi + 4r^2$$

$$4\cos^3\varphi = \cos 3\varphi + 3\cos\varphi$$

Будем искать решение вида

$$w = X_0(r) + X_2(r)\sin 2\varphi + X_1(r)\cos\varphi + X_3(r)\cos 3\varphi, \qquad (24.19)$$

где $X_n(r)$, $n = 0,..\ 3$ – неизвестные, ограниченные в нуле функции, для нахождения которых подставим выражение (24.19) в равенства (24.17) и (24.18):

$$X_0''(r) + \frac{1}{r} X_0'(r) = 4r^2, \ X_0(1) = 0;$$

$$X_1''(r)+\frac{1}{r}X_1'(r)-\frac{1}{r^2}X_1(r)=0,\ X_1(1)=3;$$

$$X_2''(r)+\frac{1}{r}X_2'(r)-\frac{4}{r^2}X_2(r)=r^2,\ X_2(1)=0;$$

$$X_3''(r)+\frac{1}{r}X_3'(r)-\frac{9}{r^2}X_3(r)=0,\ X_3(1)=1.$$

Найдем функцию $X_0(r)$:

$$\left(rX_0'(r)\right)'=4r^3,$$

следовательно,

$$rX_0'(r)=r^4+C_1,$$

откуда

$$X_0(r)=\frac{1}{4}r^4+C_1\ln r+C_2$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из условий $X_0(1)=0$ и $|X_0(0)|<\infty$, получаем

$$X_0(r)=\frac{1}{4}\left(r^4-1\right).$$

Функцию $X_2(r)$ будем искать в виде $X_2(r)=A(r)r^2$:

$$A''(r)+4A'(r)r+2A(r)+A'(r)r+2A(r)-4A(r)=r^2,$$

откуда

$$\left(rA'(r)+4A(r)\right)'=r$$

Следовательно,

$$rA'(r)+4A(r)=\frac{1}{2}r^2+C_2,$$

где C_2 — постоянная. Учитывая, что $|X_2(0)|<\infty$, получаем $A(r)=\frac{1}{12}r^2+\frac{1}{4}C_2$. Постоянную C_3 найдем из условия $X_3(1)=1$: $C_2=-\frac{1}{3}$, то есть

$$X_3(r)=\frac{1}{12}\left(r^2-1\right)r^2.$$

Функции $X_1(r)$ и $X_3(r)$ в соответствии с выражением (24.12) равны соответственно $3r$ и r^3. Таким образом, найдено решение

$$w=\frac{1}{4}\left(r^4-1\right)+\frac{1}{12}\left(r^2-1\right)r^2\sin 2\varphi+3r\cos\varphi+r^3\cos 3\varphi$$

Отметим, что задачу (24.15),(24.16) можно было бы решать другим способом, а именно избавиться от правой части в уравнении Пуассона (24.15) при помощи подстановки

$$u(x)=\tilde{u}(x)+x^1\left(x^2\right)^2+\frac{1}{3}\left(\left(x^1\right)^4+\left(x^2\right)^4\right),$$

где $\tilde{u}(x)$ – решение задачи Дирихле в круге, но уже для уравнения Лапласа, то есть для функции $\tilde{u}(x)$ можно воспользоваться результатом (24.14).

Замечание 1. В виде ряда (24.5) можно искать решения и других краевых задач в круге, изменятся только краевые условия (24.8).

24.2. Краевые задачи в кольце. Полученные в пункте 1 результаты можно использовать для решения краевых задач в кольце, а также во внешности круга. В последнем случае только следует иметь в виду, что на плоскости внешние задачи для уравнения Лапласа (Пуассона) решаются в классе ограниченных функций.

Воспользовавшись формулами (24.5), (24.10) и (24.11), получаем следующие результаты.

1) В кольце $\{(r,\varphi):\ \tilde{R}<r<R\}$, $0<\tilde{R}<R<\infty$ решение $w(r,\varphi)$ краевой задачи для уравнения Лапласа можно искать в виде

$$w(r,\varphi)\sim\tilde{N}_{0,1}+C_{0,2}\ln r+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_{n,1}r^n+\frac{C_{n,2}}{r^n}\right)\cos n\varphi+\left(\tilde{C}_{n,1}r^n+\frac{\tilde{C}_{n,2}}{r^n}\right)\sin n\varphi\right].$$

2) Во внешности круга $\{(r,\varphi)\ .\ r>R\}$ решение $w(r,\varphi)$ краевой задачи для уравнения Лапласа можно искать в виде

$$w(r,\varphi)\sim C_{0,1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\left[C_{n,2}\cos n\varphi+\tilde{C}_{n,2}\sin n\varphi\right].$$

Заметим, что после построения формального решения необходимо обосновать сходимость полученного ряда и возможность его почленного дифференцирования.

В приводимых ниже примерах в этом нет необходимости, так как в решение входит только конечное число слагаемых соответствующего ряда.

Пример 2 Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце:

$$\Delta u(x) = 0, \ \tfrac{1}{2} < |x| < 1$$

с граничными условиями

$$u(x) = 16\left(x^1\right)^2, \ |x| = \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x) = x^2, \ |x| = 1, \ n = x.$$

Решение. Перейдем к полярным координатам (r, φ)

$$\Delta_{r,\varphi} w(r,\varphi) = 0, \ \tfrac{1}{2} < r < 1,$$

$$w\left(\tfrac{1}{2}, \varphi\right) = 4\cos^2\varphi = 2 + 2\cos 2\varphi,$$

$$w_r(1,\varphi) = \sin\varphi$$

В соответствии с результатом 1) будем искать решение в следующем виде:

$$w = C_{0,1} + C_{0,2}\ln r + \left(\tilde{C}_{1,1} r + \frac{\tilde{C}_{1,2}}{r}\right)\sin\varphi + \left(C_{2,1} r^2 + \frac{C_{2,2}}{r^2}\right)\cos 2\varphi.$$

Постоянные $C_{n,k}$ найдем из граничных условий

$$w\left(\tfrac{1}{2}, \varphi\right) = 2 + 2\cos 2\varphi =$$

$$= C_{0,1} - C_{0,2}\ln 2 + \left(\frac{\tilde{C}_{1,1}}{2} + 2\tilde{C}_{1,2}\right)\sin\varphi + \left(\frac{C_{2,1}}{4} + 4C_{2,2}\right)\cos 2\varphi,$$

$$w_r(1,\varphi) = \sin\varphi = C_{0,2} + \left(\tilde{C}_{1,1} - \tilde{C}_{1,2}\right)\sin\varphi + 2\left(C_{2,1} - C_{2,2}\right)\cos 2\varphi,$$

откуда получаем системы линейных уравнений

$$\begin{cases} C_{0,1} - C_{0,2}\ln 2 = 2 \\ C_{0,2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \tilde{C}_{1,1} + 4\tilde{C}_{1,2} = 0 \\ \tilde{C}_{1,1} - \tilde{C}_{1,2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_{2,1} + 16C_{2,2} = 8 \\ C_{2,1} - C_{2,2} = 0 \end{cases}.$$

Их решения есть

$$C_{0,1} = 2, \ C_{0,2} = 0; \ \tilde{C}_{1,1} = \frac{4}{5}, \ \tilde{C}_{1,2} = -\frac{1}{5}; \ C_{2,1} = C_{2,2} = \frac{8}{17}.$$

Таким образом,

$$w = 2 + \frac{1}{5r}\left(4r^2 - 1\right)\sin\varphi + \frac{8}{17r^2}\left(r^4 + 1\right)\cos 2\varphi.$$

Пример 3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце:

$$\Delta u(x) = 0, \ \tfrac{1}{2} < |x| < 1$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x) = -2\left(x^2\right)^2, \ |x| = \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x) = \left(x^1\right)^2, \ |x| = 1,$$

где n – внешняя нормаль.

Решение. Перейдем к полярным координатам (r, φ)

$$\Delta_{r,\varphi} w(r,\varphi) = 0, \ \tfrac{1}{2} < r < 1,$$

$$w_r\left(\tfrac{1}{2}, \varphi\right) = 2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi$$

$$w_r(1,\varphi) = \cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

Следует обратить внимание на то, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=\frac{1}{2}} = -\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=\frac{1}{2}}, \text{ а } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1} = \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1},$$

так как n – внешняя нормаль по отношению к кольцу $\tfrac{1}{2} < |x| < 1$. В соответствии с результатом 1) будем искать решение $w(r,\varphi)$ в следующем виде.

$$w = C_{0,1} + C_{0,2}\ln r + \left(C_{2,1} r^2 + \frac{C_{2,2}}{r^2}\right)\cos 2\varphi.$$

Постоянные $C_{n,k}$ найдем из граничных условий

$$w_r\left(\tfrac{1}{2}, \varphi\right) = 1 - \cos 2\varphi = 2C_{0,2} + \left(C_{2,1} - 16C_{2,2}\right)\cos 2\varphi,$$

$$w_r(1,\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\varphi = C_{0,2} + 2\left(C_{2,1} - C_{2,2}\right)\cos 2\varphi,$$

откуда получаем системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2C_{0,2} = 1 \\ C_{0,2} = 1/2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_{2,1} - 16C_{2,2} = 1 \\ 4C_{2,1} - 4C_{2,2} = -1 \end{cases}$$

Их решения есть

$$C_{0,2} = \frac{1}{2};\ C_{2,1} = \frac{1}{3},\ C_{2,2} - \frac{1}{12}.$$

Таким образом,

$$w = C + \frac{1}{2}\ln r + \frac{1}{12r^2}\left(4r^4 + 1\right)\cos 2\varphi,$$

где $C = C_{0,1}$ – произвольная константа.

Замечание 2. Если решение внутренней задачи Неймана существует, но оно всегда определено с точностью до постоянного слагаемого, так как в задачу входят условия только на производные функции.

Замечание 3. Отметим, что для разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в ограниченной области D необходимо выполнение следующего условия

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds \equiv \int_{\partial D} u_1 ds = 0, \tag{24.20}$$

что следует из первой формулы Грина для функций u и $v \equiv 1$ (подробнее см. §45). В приведенном выше примере 3 условие (24 20) выполняется:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int_{|x|=1/2} 2\left(x^2\right)^2 ds + \int_{|x|=1} \left(x^1\right)^2 ds =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \frac{1}{2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 0,$$

что и обеспечило совместность неодиородной системы относительно $C_{0,2}$.

24.3. Интеграл Пуассона. Преобразуем выражение (24.14) с учетом равномерной сходимости в любом замкнутом круге $\overline{D}_0 = \{0 \le r \le R_0\}$, $R_0 < R$ и конкретных выражений для коэффициентов Фурье:

$$w(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left[a_n \cos n\varphi + \tilde{a}_n \sin n\varphi\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\psi)d\psi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left[\cos n\varphi \int_0^{2\pi} w_0(\psi)\cos n\psi d\psi + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} w_0(\psi)\sin n\psi d\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\psi)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\cos n\varphi \cos n\psi + \sin n\varphi \sin n\psi\right)\right] d\psi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\psi)d\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w_0(\psi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \psi)\right] d\psi.$$

Вычислим для $0 \le r < R$ сумму, стоящую под знаком интеграла

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\psi)}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\frac{\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\psi)}}{1 - \frac{r}{R}e^{i(\varphi-\psi)}} = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\frac{\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\psi)}\left(1 - \frac{r}{R}e^{-i(\varphi-\psi)}\right)}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(\varphi - \psi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} =$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{2\left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)\right)}$$

Итак, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге представимо в виде следующего *интеграла Пуассона*:

$$w(r,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{w_0(\psi)d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)},\ r \in [0, R). \tag{24.21}$$

24.4. Случай непрерывной граничной функции. Оказывается, что полученная формула (24.21) справедлива и в случае, когда от граничной функции требуется только непрерывность.

Итак, рассматривается задача (24.3),(24.4) с непрерывной 2π-периодичной граничной функцией $w_0(\varphi)$.

Поскольку при доказательстве равномерной сходимости почленно продифференцированного ряда (24.13) в произвольном

замкнутом круге $\overline{D}_0 = \{0 \le r \le R_0\}$, $R_0 < R$ использовалась лишь непрерывность функции $w_0(\varphi)$, то ряд (24.13), а следовательно, и интеграл (24.21) удовлетворяют уравнению (24.3) и в рассматриваемом случае.

Осталось доказать выполнение граничного условия.

Лемма 1. Для $r \in [0;R)$ справедливо равенство

$$\frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)} = 1.$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим задачу (24.3),(24.4) с граничной функцией $w_0(\varphi) \equiv 1$. Поскольку такая граничная функция удовлетворяет всем требованиям пункта 1 данного параграфа, то в силу формулы (24.21) функция

$$w(r,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)} \quad r \in [0;R)$$

является решением. С другой стороны, функция $w(r,\varphi) \equiv 1$, очевидно, также является решением. Таким образом, утверждение леммы есть следствие единственности решения внутренней задачи Дирихле, доказанной в предыдущем параграфе ■

Используя лемму 1, докажем, что функция $w(r,\varphi)$, задаваемая при $r \in [0;R)$ формулой (24.21), равномерно по $\varphi \in [0;2\pi]$ стремится к граничной функции $w_0(\varphi)$ при $r \to R - 0$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$v(r,\varphi) = \left|\frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w_0(\psi)d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)} - w_0(\varphi)\right|$$

Преобразуем выражение для $v(r,\varphi)$ с учетом леммы 1:

$$v(r,\varphi) = \left|\frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w_0(\psi) - w_0(\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)}d\psi\right| \le$$

$$\le \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|w_0(\psi) - w_0(\varphi)|}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)}d\psi$$

Так как $w_0(\varphi) \in C[0;2\pi]$ и $[0,2\pi]$ – компакт, то функция $w_0(\varphi)$

равномерно непрерывна на $[0;2\pi]$, то есть существует $\delta \in (0;\pi)$ такое, что $|w_0(\varphi) - w_0(\psi)| \le \varepsilon/2$ при $|\varphi - \psi| < \delta$. Тогда, разбивая интеграл на два, получаем

$$v(r,\varphi) \le \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\sup_{|\psi-\varphi|<\delta}|w_0(\psi) - w_0(\varphi)|\int_{|\psi-\varphi|<\delta}\frac{d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)} +$$

$$+\frac{R^2 - r^2}{2\pi}2\tilde{M}\int_{|\psi-\varphi|\ge\delta}\frac{d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)} \le$$

$$\le \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\frac{\varepsilon}{2}\int_{|\psi-\varphi|<\delta}\frac{d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)} +$$

$$+\frac{R^2 - r^2}{2\pi}2\tilde{M}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta} \le \frac{\varepsilon}{2} + 2\tilde{M}\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta}$$

где $\tilde{M} = \sup_{\varphi\in[0;2\pi]}|w_0(\varphi)| < \infty$. Поскольку для выбранного фиксированного числа $\delta > 0$

$$\lim_{r\to R-0}\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta} = \frac{1}{2R^2(1 - \cos\delta)}\lim_{r\to R-0}(R^2 - r^2) = 0,$$

то существует $\tilde{R} \in (0;R)$ такое, что $2\tilde{M}\dfrac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $r \in [\tilde{R};R)$.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{R} \in (0;R)$ такое, что $\sup_{r\in[\tilde{R};R),\varphi} v(r,\varphi) \le \varepsilon$.

Доказана следующая

Теорема 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в случае непрерывной граничной функции существует, единственно и представимо в виде интеграла Пуассона (24.21).

Элементы теории обобщенных функций

§25. Обобщенные функции. Пространства D и D'. Дифференцирование в D'

25.1. Обобщенные функции. В этой главе будут даны основные определения и факты из теории обобщенных функций с примерами применения

Определение 1 *Обобщенными функциями* называются линейные непрерывные функционалы, заданные на некотором линейном топологическом функциональном пространстве X (называемом *пространством основных функций*).

Хотя все термины, использованные в этом определении, уже обсуждались в §1, для полной ясности поясним их.

1) Линейность функционала f, заданного на пространстве основных функций X: $f(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 f(\varphi_1) + \lambda_2 f(\varphi_2)$ для любых чисел λ_1, λ_2 и функций φ_1, φ_2 из X.

Из линейности f следует, что $f(0) = 0$

2) Непрерывность функционала f, заданного на X: если последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ сходится в пространстве X к функции φ, то числовая последовательность $\{f(\varphi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(\varphi)$.

Утверждение 1. Необходимым и достаточным условием непрерывности линейного функционала f является непрерывность его в нуле:

$$\left(\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X,\ \varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} 0 \text{ в } X\right) \Rightarrow \left(f(\varphi_k) \overset{k\to\infty}{\to} 0\right) \qquad (25.1)$$

Доказательство утверждения 1.

Необходимость условия (25.1) очевидна.

Достаточность. Пусть выполнено условие (25.1). Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, сходящуюся в X к некоторой функции φ, и рассмотрим последовательность $\{\varphi_k - \varphi\}_{k=1}^{\infty}$. Так как X – линейное пространство, то последовательность $\{\varphi_k - \varphi\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ сходится к $0 \in X$. Тогда в соответствии с условием (25.1) $f(\varphi_k - \varphi) \overset{k\to\infty}{\to} 0$. Поскольку f линеен, то $f(\varphi_k) - f(\varphi) = f(\varphi_k - \varphi) \overset{k\to\infty}{\to} 0$ или $f(\varphi_k) \overset{k\to\infty}{\to} f(\varphi)$, что и требовалось доказать ■

Общепринятым и удобным является следующее обозначение действия обобщенной функции f на функцию $\varphi \in X$:

$$(f, \varphi) \equiv f(\varphi).$$

Наибольшее распространение получили два пространства основных функций – D и S. Данный параграф посвящен пространству D.

25.2. Пространство основных функций D.

Определение 2. Обозначим через $D \equiv D(\mathbf{R}^n)$ линейное топологическое пространство, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) элементами D являются финитные функции (вообще говоря, комплекснозначные) из класса $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$,

2) последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ сходится к функции $\varphi(x) \in D$, если

а) существует компакт $M \subset \mathbf{R}^n$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset M$ для любого натурального k,

б) для любого мульти-индекса α последовательность функций

$\left\{D^\alpha\varphi_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $D^\alpha\varphi(x)$

Замечание 1. Топология, порождаемая такой сходимостью в D не является метризуемой, то есть не существует метрики ρ в D такой, что

$$\left(\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} \varphi \text{ в } D\right) \Leftrightarrow \left(\rho(\varphi_k,\varphi) \overset{k\to\infty}{\to} 0\right).$$

<u>Утверждение 2.</u> Для любого мульти-индекса α оператор D^β, действующий из D в D, является непрерывным.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, сходящуюся к некоторой функции $\varphi(x)$ в D. Для нее согласно определению сходимости существует компакт M такой, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset M$, и для любого мульти-индекса α последовательность функций $\left\{D^\alpha\varphi_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $D^\alpha\varphi(x)$. Следовательно,

а) $\operatorname{supp}D^\beta\varphi_k \subset M$, $k \in \mathbf{N}$;

б) последовательность функций $D^\alpha\left(D^\beta\varphi_k(x)\right) = D^{\alpha+\beta}\varphi_k(x)$ равномерно сходится к $D^{\alpha+\beta}\varphi(x) = D^\alpha\left(D^\beta\varphi(x)\right)$.

Таким образом, $D^\beta\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} D^\beta\varphi$ в D, что и требовалось доказать ■

Далее, легко видеть, что так определенное пространство D является линейным, то есть для любых двух чисел λ_1 и λ_2 справедливы следующие утверждения:

1) $(\varphi_1, \varphi_2 \in D) \Rightarrow ((\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \in D)$;

2) $\left(\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} \varphi,\ \psi_k \overset{k\to\infty}{\to} \psi \text{ в } D\right) \Rightarrow \left((\lambda_1\varphi_k + \lambda_2\psi_k) \overset{k\to\infty}{\to} (\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi) \text{ в } D\right)$.

Единственной аналитической в $\mathbf{R}^n$ функцией из пространства D является $\varphi(x) \equiv 0$. В связи с этим возникает вопрос о нетривиальности пространства D. То есть, существуют ли в D функции, отличные от тождественного нуля? Следующий классический пример дает ответ на поставленный вопрос.

Пример 1. Пусть a – произвольное положительное число. Рассмотрим функцию

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - x^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \ge a \end{cases}, \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (25.2)$$

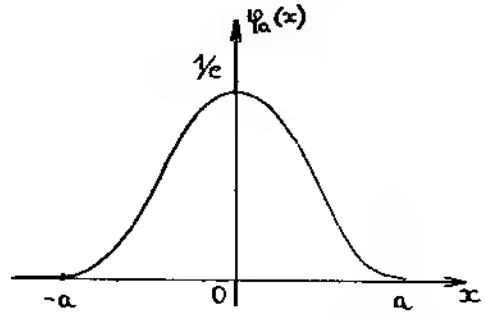

рис. 13

Поскольку $\operatorname{supp}\varphi_a = [-a; a]$ – компакт, и $\varphi_a \in C^\infty(\mathbf{R})$ (так как для любого $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ справедливы равенства $\varphi_a^{(k)}(-a+0) = \varphi_a^{(k)}(a-0) = 0$), то $\varphi_a \in D$

Обобщением функции (25.2) на случай $\mathbf{R}^n$ является функция

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - |x|^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \ge a \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^n \qquad (25.3)$$

25.3. Пространство обобщенных функций D′. Согласно общему определению, данному в пункте 1, всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на пространстве D, называется *обобщенной функцией* на D.

Пример 2 Рассмотрим на D функционал δ, действующий на любую функцию φ из D следующим образом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Этот функционал называется *δ-функцией* (Дирака). Линейность и непрерывность проверяются непосредственно

Пример 3 Произвольная локально абсолютно интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция $f(x)$ порождает обобщенную функцию f, значение которой на любой основной функции φ задается формулой

$$(f,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \qquad (25.4)$$

Проверим корректность определения (25.4).

1) Поскольку $f(x)$ локально абсолютно интегрируема в $\mathbf{R}^n$ и $\varphi\in\mathbf{D}$, то интеграл, стоящий справа в равенстве (25.4) существует:

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right|\le\int_{\operatorname{supp}\varphi}|f(x)||\varphi(x)|dx\le\sup|\varphi(x)|\int_{\operatorname{supp}\varphi}|f(x)|dx<\infty.$$

2) Линейность f следует из линейности интеграла.

3) Непрерывность f. Пусть $\varphi_k\xrightarrow{k\to\infty}\varphi$ в D Тогда существует компакт M такой, что $\operatorname{supp}\varphi_k\subset M$, $k\in\mathbf{N}$, $\sup\limits_{\mathbf{R}^n}|\varphi-\varphi_k|\xrightarrow{k\to\infty}0$. Следовательно, из оценки

$$|(f,\varphi_k)-(f,\varphi)|=|(f,\varphi_k-\varphi)|=\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)[\varphi_k(x)-\varphi(x)]dx\right|\le$$

$$\le\int_M|f(x)||\varphi_k(x)-\varphi(x)|dx\le\sup_M|\varphi_k-\varphi|\int_M|f(x)|dx$$

вытекает, что $(f,\varphi_k)\xrightarrow{n\to\infty}(f,\varphi)$

<u>Определение 3.</u> Обобщенные функции, определяемые локально абсолютно интегрируемыми в $\mathbf{R}^n$ функциями по формуле (25 4), называются *регулярными* обобщенными функциями. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными.*

<u>Утверждение 3</u> δ-функция является сингулярной обобщенной функцией

Доказательство утверждения 3. Допустим противное: существует локально абсолютно интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция $f(x)$ такая, что для любой $\varphi\in\mathbf{D}$ справедливы равенства

$$\varphi(0)=(\delta,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Следовательно, и для функций φ_a, $a>0$ (см (25.3)) справедливы равенства

$$\frac{1}{e}=\varphi_a(0)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_a(x)dx$$

Учтем, что $|\varphi_a(x)|\le\frac{1}{e}$ и $\lim\limits_{a\to+0}\int\limits_{|x|\le a}|f(x)|dx=0$ (в силу локальной абсолютной интегрируемости), получаем

$$\frac{1}{e}=\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_a(x)dx\right|\le\int_{|x|\le a}|f(x)||\varphi_a(x)|dx\le\frac{1}{e}\int_{|x|\le a}|f(x)|dx\xrightarrow{a\to+0}0,$$

что невозможно ■

Замечание 2 Часто даже для сингулярных обобщенных функций чисто формально пишут равенство

$$(f,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

обобщая запись (25.4)

Замечание 3 Далее вместо слов: регулярная обобщенная функция, порожденная локально абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, будем для краткости писать просто. регулярная обобщенная функция $f(x)$ (например, регулярная обобщенная функция $\sin x$)

<u>Определение 4</u> Пространством обобщенных функций D' называется множество обобщенных функций на D с введенной в нем поточечной сходимостью:

$$\left(f_k\xrightarrow{k\to\infty}f\ \hat{a}\ D'\right)\Leftrightarrow\left((f_k,\varphi)\xrightarrow{k\to\infty}(f,\varphi),\ \forall\varphi\in\mathbf{D}\right).$$

Единственность предела в D' следует непосредственно из единственности предела числовой последовательности.

Легко проверить, что пространство D' с введенными операциями сложения и умножения на число по формуле

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2,\varphi)=\lambda_1(f_1,\varphi)+\lambda_2(f_2,\varphi),\ \forall\varphi\in\mathbf{D}$$

является линейным пространством.

Приведем без доказательства следующую теорему

<u>Теорема 1 (полнота пространства D')</u>. Пусть последователь-

ность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D'$ является фундаментальной в смысле поточечной сходимости, то есть для каждой функции $\varphi \in D$ числовая последовательность $\{(f_k, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной (или, что тоже самое, сходящейся). Тогда функционал f на D, задаваемый равенством

$$(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(f_k, \varphi), \ \forall \varphi \in D,$$

является линейным и непрерывным, то есть $f \in D'$.

25.4. Дифференцирование в D'.

Определение 5. Производной $D^\alpha f$ обобщенной функции f называется функционал, действующий на любой элемент $\varphi \in D$ по формуле

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi)$$

Так определенный функционал $D^\alpha f$ является линейным (в силу линейности дифференциального оператора D^α) и непрерывным (как композиция непрерывных отображений D^α (из D в D) и f (из D в **R** или **C**)). Следовательно, $D^\alpha f \in D'$

Обсудим вопрос о том, что означает такое определение дифференцирования для регулярных обобщенных функций. Для простоты рассмотрим одномерный случай: $D = D(\mathbf{R})$. Произвольная функция $f(x)$ из класса $C^1(\mathbf{R})$ порождает в соответствии с формулой (25.4) обобщенную функцию f:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in D.$$

Найдем действие на произвольную основную функцию $\varphi \in D$ обобщенной функции, порожденной $f'(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi'),$$

где $[a; b]$ – отрезок, содержащий носитель функции φ. Следовательно, функция $f'(x)$ порождает обобщенную функцию, являющуюся согласно определению f'

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx. \qquad (25.5)$$

Для $f(x) \in C^k(\mathbf{R})$ путем последовательного дифференцирования легко получить обобщение формулы (24.5):

$$(f^{(k)}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)dx.$$

В n-мерном случае это равенство примет вид

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} (D^\alpha f(x))\varphi(x)dx, \ f(x) \in C^{|\alpha|}(\mathbf{R}^n)$$

для любого мульти-индекса α

Обозначим через θ регулярную обобщенную функцию, порожденную локально абсолютно интегрируемой функцией

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \ x \in \mathbf{R}$$

(функция Хевисайда).

Пример 4. Найти θ'.

Решение По определению для произвольной основной функции φ можно записать

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Следовательно, $\theta' = \delta$.

Пример 5. Найти результат действия производной $D^\alpha\delta$ на произвольную функцию $\varphi \in D$

Решение.

$$(D^\alpha\delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\delta, D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0).$$

Перечислим основные свойства дифференцирования в D'.

1) Любая обобщенная функция из D' бесконечно дифференцируема.

2) Результат дифференцирования в D' не зависит от порядка дифференцирования

3) Операция дифференцирования D^α для любого мульти-индекса α есть линейное и непрерывное отображение из D' в D'.

4) Если $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ в D' [1]), то для любого мульти-индекса α справедливо равенство $D^\alpha f = \sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha f_k$ в D'

Доказательство свойств.

Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из гладкости основных функций.

Свойство 3). Линейность очевидна. Для доказательства непрерывности достаточно показать, что из сходимости $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ в D' для произвольного мульти-индекса α следует сходимость $D^\alpha f_k \xrightarrow{k\to\infty} D^\alpha f$ в D' Если $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ в D', то для любой основной функции $\varphi \in D$ и любого мульти-индекса α будет выполняться

$$\left|\left(D^\alpha f_k, \varphi\right) - \left(D^\alpha f, \varphi\right)\right| = \left|\left(f_k, D^\alpha\varphi\right) - \left(f, D^\alpha\varphi\right)\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

так как $D^\alpha\varphi \in D$. Следовательно, $D^\alpha f_k \xrightarrow{k\to\infty} D^\alpha f$ в D'.

Свойство 4) есть прямое следствие свойства 3) ■

25.5. Другие операции в D'.

а) *Умножение обобщенных функций.*

<u>Определение 6.</u> Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $f \in D'$. Определим функционал $a \cdot f$ на D следующим образом.

$$(a \cdot f, \varphi) = (f, a\varphi), \ \forall\varphi \in D.$$

Поскольку умножение на $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ есть линейное и непрерывное отображение из D в D, то функционал $a \cdot f$ линеен и непрерывен (как композиция линейных и непрерывных отображений), то есть $a \cdot f \in D$

[1]) Обобщенная функция f называется суммой ряда обобщенных функций $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (что обозначают $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$), если $S_l \xrightarrow{l\to\infty} f$ в D', где $S_l = \sum_{k=1}^{l} f_k$ – частичные суммы

Смысл этого определения для регулярных обобщенных функций очевиден: если $f(x)$ локально абсолютно интегрируема, то и $g(x) = a(x)f(x)$ локально абсолютно интегрируема, причем

$$(g, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} (a(x)f(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)(a(x)\varphi(x))dx = (f, a\varphi) = (a \cdot f, \varphi)$$

Пример 6. Доказать, что $a \cdot \delta = a(0)\delta$ для $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$

Решение. Для произвольной основной функции φ справедливы равенства

$$(a \cdot \delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta, \varphi) = (a(0)\delta, \varphi).$$

б) *Линейная замена переменных в обобщенных функциях*

<u>Определение 7.</u> Пусть $f \in D'$, $x = Ax + b$ – линейная невырожденная замена переменных ($\det A \neq 0$). Обозначим через $f(Ax + b)$ обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi\left(A^{-1}(x - b)\right)}{|\det A|}\right), \ \forall\varphi \in D \qquad (25.6)$$

Для регулярных обобщенных функций равенство (25.6) есть не что иное, как правило замены переменной интегрирования $x = Ax + b$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(Ay + b)\varphi(y)dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi\left(A^{-1}(x - b)\right)\frac{dx}{|\det A|} = \left(f, \frac{\varphi\left(A^{-1}(x - b)\right)}{|\det A|}\right).$$

Пример 7 Найти результат действия смещенной δ-функции $\delta(x - x_0)$ на произвольную основную функцию φ.

Решение.

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0).$$

§26. Пространство Шварца S. Пространство S'. Преобразование Фурье

26.1. Преобразование Фурье. Напомним основные сведения о преобразовании Фурье, известные из курса математического ана-

лиза.

Определение 1. Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ функцию, обозначаемую $(Ff)(y)$, $y \in \mathbf{R}^n$ или $\hat{f}(y)$ и определяемую формулой

$$(Ff)(y) \equiv \hat{f}(y) = \text{v p} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{i(y,x)} dx, \qquad (26.1)$$

называется (прямым) *преобразованием Фурье*. А отображение F^{-1}, действующее по правилу

$$(F^{-1} f)(y) \equiv \check{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{v.p} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i(y,x)} dx, \qquad (26.2)$$

– *обратным преобразованием Фурье*

Функция $(Ff)(y)$ называется образом Фурье функции $f(x)$. Преобразование Фурье, так же как и обратное, определяется для всех функций, для которых существует интеграл в смысле главного значения (26.1), соответственно (26.2), в частности, для всех абсолютно интегрируемых в $\mathbf{R}^n$ функций

Свойства преобразования Фурье.

1) Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и абсолютно интегрируема в $\mathbf{R}^n$, то

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1} f) = f$$

2) Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в $\mathbf{R}^n$, то

$$Ff = (2\pi)^n F^{-1}(f(-x))$$

$$F^{-1} f = \frac{1}{(2\pi)^n} F(f(-x)).$$

3) Для любого мульти-индекса α справедливо утверждение: если функция $f(x) \in C^{|\alpha|}(\mathbf{R}^n)$, и все ее частные производные вплоть до порядка $|\alpha|$ включительно абсолютно интегрируемы в $\mathbf{R}^n$, то

$$(FD^\alpha f)(y) = (-i)^{|\alpha|} y^\alpha (Ff)(y),$$

$$(F^{-1} D^\alpha f)(y) = i^{|\alpha|} y^\alpha (F^{-1} f)(y),$$

где $y^\alpha \equiv \prod_{k=1}^{n} (y^k)^{\alpha^k}$

4) Для любого мульти-индекса α справедливо утверждение: если функция $f(x) \in C(\mathbf{R}^n)$, и функции $f(x)$, . ,$|x|^{|\alpha|} f(x)$ абсолютно интегрируемы в $\mathbf{R}^n$, то существуют производные $D^\alpha(Ff)$ и $D^\alpha(F^{-1} f)$, причем

$$D^\alpha(Ff) = (i)^{|\alpha|} F(x^\alpha f(x)),$$

$$D^\alpha(F^{-1} f) = (-i)^{|\alpha|} F^{-1}(x^\alpha f(x))$$

5) Прямое и обратное преобразования Фурье являются линейными отображениями множеств функций, на которых они определены.

6) Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в $\mathbf{R}^n$, то

$$(Ff(x - x_0))(y) = e^{i(x_0, y)}(Ff)(y)$$

26.2. Пространство Шварца основных функций S. Для распространения понятия преобразования Фурье на обобщенные функции (по аналогии с операцией дифференцирования) необходимо, чтобы преобразование Фурье существовало для всех элементов пространства основных функций и не выводило за пределы этого пространства.

Поскольку для любой функции $\varphi \in D$ образ Фурье $F\varphi$ есть аналитическая в $\mathbf{R}^n$ функция [1]), а D не содержит аналитические функции, отличные от тождественного нуля, то преобразование Фурье выводит за пределы пространства D По этой причине вводят еще одно пространство основных функций.

Определение 2. Обозначим через S линейное топологическое пространство, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) элементами S являются функции из класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, убы-

[1]) Функция называется аналитической в точке, если в некоторой окрестности этой точки она представима степенным рядом Функция называется аналитической в области, если она является аналитической в каждой точке этой области

вающие при $|x| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$, то есть

$$(\varphi(x) \in S) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \\ |x|^p D^{\alpha}\varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0, \ \forall p \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \ \forall \alpha \end{cases},$$

2) последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ сходится к φ в S, если для любых мульти-индексов α и β имеет место равномерная сходимость последовательности функций $\{x^{\beta}D^{\alpha}\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ к функции $x^{\beta}D^{\alpha}\varphi(x)$

Легко видеть, что пространство S содержит D в качестве подмножества, и из сходимости последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ в D следует ее сходимость в S. Но D≠S

Пример 1. Функция $\varphi(x) = \exp\{-|x|^2\}$ принадлежит пространству S и не принадлежит пространству D.

Определение 3 Функция $a(x)$ называется *функцией медленного роста,* если существуют постоянные $R > 0$, $C > 0$ и $p \geq 0$ такие, что $|a(x)| \leq C|x|^p$ при $|x| > R$.

Перечислим основные утверждения, справедливые для пространства S.

1) Оператор дифференцирования D^{β} для любого мульти-индекса β является непрерывным линейным отображением S в S

2) Операция умножения на функцию $a(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, каждая производная которой является функцией медленного роста, есть линейное непрерывное отображение S в S

3) Невырожденная линейная замена переменных $x = \boldsymbol{A}y + b$ есть линейное непрерывное отображение S в S.

4) Каждая функция из S является абсолютно интегрируемой в $\mathbf{R}^n$.

5) Преобразование Фурье F и обратное преобразование F^{-1} непрерывно и взаимно однозначно отображают S на себя

Доказательство утверждений

1) Пусть $\varphi \in S$, тогда функция $D^{\beta}\varphi$ так же принадлежит S, так как для любых неотрицательного целого числа p и мульти-индекса α из принадлежности $\varphi \in S$ следует, что

$$|x|^p D^{\alpha}(D^{\beta}\varphi(x)) = |x|^p D^{\alpha+\beta}\varphi(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty$$

Для доказательства непрерывности оператора D^{β} на S рассмотрим последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$, сходящуюся к некоторой функции φ в S. Тогда последовательность функций $|x|^p D^{\alpha}(D^{\beta}\varphi_k(x)) = |x|^p D^{\alpha+\beta}\varphi_k(x)$ сходится равномерно к функции $|x|^p D^{\alpha+\beta}\varphi(x) = |x|^p D^{\alpha}(D^{\beta}\varphi(x))$ для любых p и α. Следовательно, $D^{\beta}\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} D^{\beta}\varphi$ в S

2) Поскольку для любого мульти-индекса α производная $D^{\alpha}a(x)$ есть функция медленного роста, то существуют постоянные $R_{\alpha} > 0$, $C_{\alpha} > 0$ и $p_{\alpha} \geq 0$ такие, что $|D^{\alpha}a(x)| \leq C_{\alpha}|x|^{p_{\alpha}}$ при $|x| > R_{\alpha}$. Следовательно, если $\varphi \in S$, то и $a\varphi \in S$, и если $\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} \varphi$ в S, то для любых мульти-индексов α и β последовательность функций $x^{\beta}D^{\alpha}[a(x)(\varphi_k(x) - \varphi(x))]$ равномерно сходится к нулю при $n \to \infty$, то есть $a\varphi_k \overset{k\to\infty}{\to} a\varphi$ в S.

3) Тот факт, что линейная замена $x = \boldsymbol{A}y + b$ непрерывно отображает S в S, следует из следующих выкладок:

$$|y|^p D_y^{\alpha}\varphi(\boldsymbol{A}y + b) = |\boldsymbol{A}^{-1}(x - b)| \sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\beta} D_x^{\beta}\varphi(x) \leq C(|x| + |b|) \sum_{|\beta|=|\alpha|} c_{\beta} D_x^{\beta}\varphi(x)$$

где c_{β} – постоянные коэффициенты, зависящие от матрицы $\boldsymbol{A}$, C – максимум модулей собственных чисел матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$.

4) Если $\varphi \in S$, то согласно определению существует предел $|x|^{n+1}\varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0$. Следовательно, существует постоянная R>0 такая,

что $|x|^{n+1}|\varphi(x)| \le 1$ при $|x| \ge R$. Поэтому можно записать

$$\int_{R^n}|\varphi(x)|dx = \int_{|x|<R}|\varphi(x)|dx + \int_{|x|>R}|\varphi(x)|dx \le V_R \sup_{|x|<R}|\varphi(x)| + \int_{|x|>R}\frac{1}{|x|^{n+1}}dx < \infty,$$

где V_R – объем n-мерной сферы радиуса R.

5) Линейность преобразований F и F^{-1} на S следует из свойства 5), приведенного в предыдущем пункте.

Докажем, что преобразование Фурье F отображает S в S, то есть $(F\varphi)(y) \in S$ для произвольной $\varphi(x) \in S$. Для простоты рассмотрим одномерный случай. Пусть $\varphi(x) \in S(R)$. Оценим для произвольных неотрицательных целых чисел p и q модуль выражения $y^{p+1}(F\varphi)^{(q)}(y)$:

$$\left|y^{p+1}(F\varphi)^{(q)}(y)\right| = \left|y^{p+1}F\left(x^q\varphi(x)\right)\right| = \left|F\left[\left(x^q\varphi(x)\right)^{(p+1)}\right]\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^q\varphi(x)\right)^{(p+1)}e^{ixy}dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(x^q\varphi(x)\right)^{(p+1)}\right|dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{l,m}c_{l,m}x^l\varphi^{(m)}(x)\right|dx \le \sum_{l,m}|c_{l,m}|\int_{-\infty}^{+\infty}x^l\varphi^{(m)}(x)dx,$$

где $c_{l,m}$ – постоянные коэффициенты ($l = 0,\dots q$ и $m = 0,\dots p+1$). Так как $\varphi(x) \in S$, то каждый из интегралов в полученной сумме сходится. Следовательно,

$$\left|y^{p+1}(F\varphi)^{(q)}(y)\right| \le C, \qquad (26.3)$$

где C – постоянная, откуда

$$|y|^p(F\varphi)^{(q)}(y) \to 0 \text{ при } |y| \to \infty$$

Таким образом, $(F\varphi)(y) \in S$. Аналогично доказывается, что $\left(F^{-1}\varphi\right)(y) \in S$.

Тот факт, что преобразования F и F^{-1} отображают S на S, причем взаимно однозначно, следует из равенств

$$F^{-1}(F\varphi) = \varphi,\ F\left(F^{-1}\varphi\right) = \varphi.$$

Действительно, для любой функции φ из S найдется функция $\psi = F^{-1}\varphi \in S$ такая, что φ является образом ψ при преобразовании Фурье F, то есть F отображает S на S. Допустим теперь, что $F\varphi_1 = \psi$ и $F\varphi_2 = \psi$, тогда

$$0 = F^{-1}(\psi - \psi) = F^{-1}(F\varphi_1 - F\varphi_2) = F^{-1}F(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Следовательно, преобразование F взаимно однозначно отображает S на S Аналогично для F^{-1}.

Осталось доказать непрерывность этих отображений. Так как преобразование F линейно, то для доказательства его непрерывности на S достаточно доказать его непрерывность в нуле. Пусть последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset S(R)$ сходится к нулю в $S(R)$. Для двух произвольных неотрицательных целых чисел p и q воспользуемся неравенством (26.3)

$$\left|y^{p+1}(F\varphi_k)^{(q)}(y)\right| \le C_k,$$

где $C_k = \sum_{l,m}|c_{l,m}|\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^l\varphi_k^{(m)}(x)\right|dx$ Учтем, что $\varphi_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ в S, получаем $C_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Действительно,

$$C_k \le \sum_{l,m}|c_{l,m}|\ \sup_x\left|(1+x^2)x^l\varphi_k^{(m)}(x)\right| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx,$$

и

$$\sup_x\left|(1+x^2)x^l\varphi_k^{(m)}(x)\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Таким образом,

$$\sup_y\left|y^{p+1}(F\varphi_k)^{(q)}(y)\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

что означает сходимость последовательности $\{(F\varphi_k)(y)\}_{k=1}^{\infty}$ к нулю в S ■

26.3. Пространство обобщенных функций медленного роста S′.

<u>Определение 4.</u> Пространством обобщенных функций медленного роста S′ называется множество линейных непрерывных функ-

ционалов на S с введенной в нем поточечной сходимостью:

$$\left(f_k \xrightarrow{k\to\infty} f \text{ в } S'\right) \Leftrightarrow \left((f_k,\varphi) \xrightarrow{k\to\infty} (f,\varphi),\ \forall\varphi\in S\right)$$

Легко проверить, что пространство S' с введенными операциями сложения и умножения на число по формуле

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\varphi) = \lambda_1(f_1,\varphi) + \lambda_2(f_2,\varphi),\ \forall\varphi\in S,$$

является линейным пространством.

Приведем без доказательства следующую теорему.

<u>Теорема 1 (полнота пространства S').</u> Пусть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S'$ является фундаментальной в смысле поточечной сходимости, то есть для каждой функции $\varphi\in S$ числовая последовательность $\{(f_k,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной (или, что тоже самое, сходящейся). Тогда функционал f на S, задаваемый равенством

$$(f,\varphi) = \lim_{k\to\infty}(f_k,\varphi),\ \forall\varphi\in S,$$

является линейным и непрерывным, то есть $f\in S'$.

Пример 2. δ-функция определяется как и в пространстве D

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0),\ \forall\varphi\in S.$$

Пример 3 Любая локально интегрируемая функция $f(x)$ медленного роста определяет обобщенную функцию $f\in S'$ по формуле

$$(f,\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in S.$$

Данный пример раскрывает смысл названия пространства S'.

Поскольку пространство S содержит D в качестве подмножества, и из сходимости последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset D$ в D следует ее сходимость в S, то пространство D' содержит S' в качестве подмножества (для функционалов на S условия линейности и непрерывности накладывают больше ограничений, чем в случае D).

По аналогии с предыдущим параграфом определяются следующие операции в S'.

1) Производная D^α обобщенной функции $f\in S'$:

$$(D^\alpha f,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi),\ \forall\varphi\in S$$

2) Умножение на функцию $a(x)\in C^\infty(R^n)$, каждая производная которой является функцией медленного роста (например, $a(x)$ – полином):

$$(a\ f,\varphi) = (f,a\varphi),\ \forall\varphi\in S.$$

3) Линейная замена переменных $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$

$$(f(Ay+b),\varphi) = \left(f,\frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}\right),\ \forall\varphi\in S$$

Поскольку дифференцирование D^α, умножение на $a(x)$, замена переменных $x = Ay + b$ линейно и непрерывно отображают S в S, то функционалы $D^\alpha f$, $a\ f$, $f(Ay+b)$ являются линейными и непрерывными на S, то есть принадлежат S'.

В S' остаются справедливыми свойства дифференцирования, перечисленные в предыдущем параграфе для D'.

26.4. Преобразование Фурье в S'.

<u>Определение 5</u> Для обобщенной функции $f\in S'$ ее преобразованием Фурье Ff и обратным преобразованием Фурье $F^{-1}f$ называются функционалы на S, действие которых на произвольную $\varphi\in S$ определяется равенствами

$$(Ff,\varphi) = (f,F\varphi),$$
$$(F^{-1}f,\varphi) = (f,F^{-1}\varphi)$$

Поскольку F и F^{-1} линейно и непрерывно отображают S на себя, то функционалы Ff и $F^{-1}f$ принадлежат S' (линейны и непрерывны как композиции линейных и непрерывных отображений)

Пусть $f(x)$ – локально абсолютно интегрируемая функция медленного роста. Она порождает обобщенную функцию $f\in S'$, действующую по формуле

$$(f,\varphi)=\int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in S$$

Найдем обобщенную функцию, соответствующую $(Ff(x))(y)$:

$$\int\limits_{R^n}(Ff(x))(y)\varphi(y)dy=\int\limits_{R^n}\varphi(y)\left[\int\limits_{R^n} f(x)e^{i(y,x)}dx\right]dy=$$

$$=\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} f(x)e^{i(y,x)}\varphi(y)dxdy=\int\limits_{R^n} f(x)\left[\int\limits_{R^n}\varphi(y)e^{i(y,x)}dx\right]dx=$$

$$=\int\limits_{R^n} f(x)(F\varphi(y))(x)dx=(f,F\varphi)=(Ff,\varphi),$$

то есть в соответствии с введенным определением преобразования Фурье в S' функция $(Ff(x))(y)$ определяет обобщенную функцию Ff.

Преобразование Фурье в S' обладает следующими <u>свойствами</u>:

1) Преобразование Фурье F и обратное преобразование F^{-1} отображают пространство S' линейно непрерывно и взаимно однозначно на себя.

2) Для произвольной обобщенной функции $f\in S'$ справедливы равенства:

а) $F^{-1}(Ff)=F(F^{-1}f)=f$;

б) $Ff=(2\pi)^n F^{-1}(f(-x)),\ F^{-1}f=\dfrac{1}{(2\pi)^n}F(f(-x))$;

в) $D^\alpha(Ff)=i^{|\alpha|}F(x^\alpha f),\ D^\alpha(F^{-1}f)=(-i)^{|\alpha|}F^{-1}(x^\alpha f)$,

г) $(FD^\alpha f)(y)=(-i)^{|\alpha|}y^\alpha(Ff)(y),\ (F^{-1}D^\alpha f)(y)=i^{|\alpha|}y^\alpha(F^{-1}f)(y)$;

д) $(Ff(x-x_0))(y)=e^{i(x_0,y)}(Ff)(y)$.

Доказательство свойств.

Свойство 1). Принадлежность функционалов Ff и $F^{-1}f$ пространству S' обсуждалась выше Поэтому преобразования F и F^{-1} отображают S' в S' Проверим линейность этих отображений. Пусть f_1 и f_2 – обобщенные функции из S', λ_1 и λ_2 – числа ,

тогда для любой основной функции $\varphi\in S$ можно записать

$$(F(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2),\varphi)=(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2,F\varphi)=\lambda_1(f_1,F\varphi)+\lambda_2(f_2,F\varphi)=$$

$$=\lambda_1(Ff_1,\varphi)+\lambda_2(Ff_2,\varphi)=(\lambda_1(Ff_1)+\lambda_2(Ff_2),\varphi),$$

то есть $F(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1(Ff_1)+\lambda_2(Ff_2)$. Аналогично для F^{-1}.

Далее, для произвольной обобщенной функции $f\in S'$ справедливы равенства

$$F(F^{-1}f)=f,\ F^{-1}(Ff)=f$$

так как

$$(F(F^{-1}f),\varphi)=(f,F^{-1}(F\varphi))=(f,\varphi),\ \forall\varphi\in S,$$

$$(F^{-1}(Ff),\varphi)=(f,F(F^{-1}\varphi))=(f,\varphi),\ \forall\varphi\in S.$$

Следовательно, преобразования F и F^{-1} отображают S' на S', причем взаимно однозначно.

Осталось доказать непрерывность преобразований F и F^{-1} на S'. Пусть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset S'$ сходится к некоторой обобщенной функции f в S'. Тогда для произвольной функции $\varphi\in S$ можно записать

$$(Ff_k,\varphi)=(f_k,F\varphi)\xrightarrow{k\to\infty}(f,F\varphi)=(Ff,\varphi),$$

так как $F\varphi\in S$. Следовательно, $Ff_k\xrightarrow{k\to\infty}Ff$ в S'. Аналогично для F^{-1}.

Свойство 2) доказывается на основании определения преобразования Фурье в S' и соответствующих свойств преобразования Фурье из пункта 1. Для примера докажем первое равенство в (в):

$$(D^\alpha(Ff),\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(Ff,D^\alpha\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,F(D^\alpha\varphi))=$$

$$(-1)^{|\alpha|}(f,(-i)^{|\alpha|}x^\alpha(F\varphi)(x))=(i^{|\alpha|}x^\alpha f,F\varphi)=(i^{|\alpha|}F(x^\alpha f),\varphi),\ \forall\varphi\in S$$

Здесь функция x^α удовлетворяет всем требованиям, наложенным на $a(x)$ при определении произведения $a\cdot f$, поэтому $x^\alpha f\in S'$ ■

Пример 4. Найти преобразование Фурье от δ-функции.

Решение. Для произвольной функции φ из S справедлива цепочка равенств

$$(F\delta,\varphi)=(\delta,F\varphi)=(F\varphi)(0)=\int\limits_{R^n}\varphi(x)e^{i(x,y)}dx\Big|_{y=0}=\int\limits_{R^n}\varphi(x)dx=(1,\varphi)$$

Следовательно, $F\delta=1$. Обобщая с учетом свойства 2.д), запишем $(F\delta(x-x_0))(y)=e^{i(x_0,y)}$.

Пример 5. Найти преобразование Фурье единицы

Решение.

$$F1=(2\pi)^nF^{-1}1=(2\pi)^nF^{-1}(F\delta)=(2\pi)^n\delta$$

Пример 6. Найти преобразование Фурье регулярной обобщенной функции $x^2\sin 2x$

Решение

$$\left[F\left(x^2\sin 2x\right)\right](y)=\frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dy^2}(F\sin 2x)(y)=$$

$$=-\frac{1}{2i}\frac{d^2}{dy^2}\left[\left(Fe^{2ix}\right)(y)-\left(Fe^{-2ix}\right)(y)\right]=$$

$$=\pi i\frac{d^2}{dy^2}\left[\left(F^{-1}e^{-2ix}\right)(y)-\left(F^{-1}e^{2ix}\right)(y)\right]=\pi i\frac{d^2}{dy^2}\left[\delta(y+2)-\delta(y-2)\right]=$$

$$=\pi i\left[\delta''(y+2)-\delta''(y-2)\right].$$

§27. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

27.1. Носитель обобщенной функции. Введем несколько понятий, необходимых для определения свертки обобщенных функций.

Определение 1. Говорят, что обобщенная функция $f\in D'$ *равна нулю* в области $G\subset R^n$, если для любой основной функции $\varphi\in D$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi\subset G$, выполняется равенство $(f,\varphi)=0$.

Лемма 1. Пусть $\{G_\gamma\}$ – семейство областей в R^n, $G=\bigcup\limits_\gamma G_\gamma$ –

область. Тогда необходимым и достаточным условием равенства обобщенной функции $f\in D'$ в области G является равенство f нулю в каждой области G_γ

Доказательство леммы 1.

Необходимость условия очевидна (если $\operatorname{supp}\varphi\subset G_\gamma$, то $\operatorname{supp}\varphi\subset G$).

Достаточность Пусть обобщенная функция $f\in D'$ равна нулю во всех областях G_γ. Рассмотрим произвольную основную функцию $\varphi\in D$ такую, что $K=\operatorname{supp}\varphi\subset G$. Так как K – компакт, и $\{G_\gamma\}$ есть открытое покрытие K, то по лемме Гейне-Бореля существует конечное подпокрытие $\{G_{\gamma_l}\}_{l=1}^{L}$ $L<\infty$: $K\subset\bigcup\limits_{l=1}^{L}G_\gamma$. В дополнении к данному параграфу будет доказано, что функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде суммы $\varphi(x)=\sum\limits_{l=1}^{L}\varphi_l(x)$, где $\varphi_l\in D$, причем $\operatorname{supp}\varphi_l\subset G_{\gamma_l}$. Следовательно, в силу линейности функционала f и равенства f нулю в областях G_{γ_l} можно записать

$$(f,\varphi)=\left(f,\sum_{l=1}^{L}\varphi_l\right)=\sum_{l=1}^{L}(f,\varphi_l)=0,$$

что и требовалось доказать ■

Определение 2. Если обобщенная функция $f\in D'$ не равна нулю ни в какой окрестности точки x_0, то x_0 называется *существенной точкой* для f.

Пример 1. Для регулярной обобщенной функции f, порожденной $f(x)=x^2$, точка $x_0=0$ является существенной, хотя в ней $f(x)=0$.

Определение 3. Совокупность всех существенных точек называется *носителем* обобщенной функции.

Для регулярной обобщенной функции f, порожденной кусочно непрерывной функцией $f(x)$, носитель совпадает с замыканием

множества, на котором $f(x) \neq 0$, то есть с $\operatorname{supp} f(x)$

Утверждения.

1) Если пересечение носителей обобщенной функции $f \in D'$ и основной функции $\varphi \in D$ пусто, то $(f, \varphi) = 0$.

2) Пусть K – носитель обобщенной функции $f \in D'$. Если основные функции φ_1 и φ_2 совпадают в некоторой окрестности множества K, то $(f, \varphi_1) = (f, \varphi_2)$

3) Носитель δ-функции есть $\{0\}$.

Доказательство утверждений.

1) Есть непосредственное следствие определений и приведенной выше леммы 1

2) Так как функция $\varphi_1 - \varphi_2$ является основной и ее носитель не пересекается с K, то согласно утверждению 1) справедливо равенство $(f, \varphi_1 - \varphi_2)$. Следовательно, $(f, \varphi_1) = (f, \varphi_2)$.

3) Вытекает из определения δ-функции: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ ■

Благодаря утверждению 2) можно определить естественным образом значение обобщенной функции на некоторых неосновных функциях.

Пусть $f \in D'$ и K – носитель f. Рассмотрим функцию $\phi(x) \in C^\infty(R^n)$ с носителем $M = \operatorname{supp}\phi$. Если $K \cap M$ есть ограниченное множество, то определим значение f на ϕ следующим образом:

$$(f, \phi) = (f, \Phi) \tag{27.1}$$

где функция $\Phi(x)$ удовлетворяет следующим требованиям $\Phi \in D$, $\operatorname{supp}\Phi \subset M$, значения функций $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ совпадают в некоторой окрестности множества $K \cap M$

Равенство (27 1) для $\phi \in D$ следует из утверждения 2, а для остальных ϕ его следует понимать как определение, причем корректность такого определения (независимость от конкретной реализации Φ) также является следствием утверждения 2.

Необходимо еще доказать существование функции $\Phi(x)$, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям. Рассмотрим для произвольного измеримого множества G функцию $A_G(x) = C_a^{-1}\ (\chi_G * \varphi_a)(x)$, где a – фиксированное положительное число, $\chi_G(x) = \begin{cases} 1, & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases}$ индикаторная функция множества G, $C_a = \int\limits_{R^n} \varphi_a(x)dx$ – нормировочная постоянная. Так как функция $\varphi_a(x)$, задаваемая равенством (25 3), бесконечно дифференцируема и является финитной, то $A_G \in C^\infty(R^n)$ и носитель $\operatorname{supp} A_G$ содержится в замыкании a-окрестности множества G [1]), причем, если точка x такова, что $\overline{B_a} = \{y \ \ |x - y| \leq a\} \subset G$, то $A_G(x) = 1$. Следовательно, в качестве функции $\Phi(x)$ можно взять $A_G(x)\phi(x)$, где G – $2a$-окрестность множества $K \cap M$

27.2. Прямое произведение обобщенных функций. Следующим шагом к определению свертки является введение операции прямого произведения.

Рассмотрим обобщенные функции $f(x) \in D'(R^k)$ и $g(y) \in D'(R^m)$. Построим из них обобщенную функцию $h(x, y) \in D'(R^{k+m})$, для чего возьмем произвольную основную функцию $\varphi(x, y) \in D(R^{k+m})$ и зафиксируем x. Тогда $\varphi(x, y)$ есть функция только y, причем бесконечно дифференцируемая и финитная, следовательно, определено значение $(g(y), \varphi(x, y))$, зависимость которого от параметра x мы выразим функцией $\psi(x)$: $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$. Покажем, что функция $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема, воспользовавшись непрерывностью функционала g и гладкостью функции φ

[1]) a-окрестностью множества G называется множество

$$\{x : |x - y| < a,\ y \in G\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\psi(x) = \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x^j} =$$

$$= \lim_{\Delta x^j \to 0}\left(g(y), \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x^j}\right) =$$

$$= \left(g(y), \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x^j}\right) = \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x^j}\varphi(x, y)\right),$$

где $\Delta x^l = 0$ при $l \neq j$. Следовательно, существует непрерывная производная $\frac{\partial}{\partial x^j}\psi(x)$, так как функция $\varphi(x, y)$ равномерно непрерывна на своем носителе вместе со всеми своими производными Существование непрерывных производных $D^\alpha\psi(x)$ доказывается последовательным дифференцированием. Таким образом, $\psi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^k)$.

Далее, легко видеть, что функция $\psi(x)$ является финитной. Следовательно, $\psi \in D(\mathbf{R}^k)$, и к ней можно применять функционал $f(x)$. Итак, выражение

$$\left(f(x), (g(y), \varphi(x, y))\right)$$

имеет смысл для произвольной функции $\varphi(x, y)$ из $D(\mathbf{R}^{k+m})$ и задает некоторый функционал на $D(\mathbf{R}^{k+m})$.

<u>Определение 4.</u> *Прямым произведением* обобщенных функций $f(x) \in D'(\mathbf{R}^k)$ и $g(y) \in D'(\mathbf{R}^m)$ называется функционал $h(x, y) \equiv f(x) \times g(y)$, заданный на пространстве $D(\mathbf{R}^{k+m})$ и действующий по правилу

$$(f \times g, \varphi) = \left(f(x), (g(y), \varphi(x, y))\right), \ \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^{k+m}) \qquad (27.2)$$

Очевидно, что $f \times g$ является линейным функционалом. Более того, можно показать, что функционал $f \times g$ непрерывен (следует из непрерывности f и g). Следовательно, $f \times g \in D'(\mathbf{R}^{k+m})$.

Рассмотрим действие функционала $f \times g$ на основные функции

вида

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y), \ \varphi_1(x) \in D(\mathbf{R}^k), \ \varphi_2(y) \in D(\mathbf{R}^m). \qquad (27.3)$$

В этом случае, из линейности функционалов f и g получаем, что

$$(f \times g, \varphi(x, y)) = \left(f(x), (g(y), \varphi_1(x)\varphi_2(y))\right) =$$

$$\left(f(x), \varphi_1(x)(g(y), \varphi_2(y))\right) = (f, \varphi_1)(g, \varphi_2).$$

Пример 2. Доказать, что $\delta(x) \times \delta(y) = \delta(x, y)$.

Решение Для произвольной основной функции $\varphi(x, y)$ справедливы равенства

$$\left(\delta(x), (\delta(y), \varphi(x, y))\right) = \left(\delta(x), \varphi(x, 0)\right) = \varphi(0, 0) = \left(\delta(x, y), \varphi(x, y)\right).$$

<u>Свойства</u> прямого произведения.

1) Носитель H функционала $h = f \times g$ есть прямое произведение $F \times G$ носителей F и G функционалов f и g соответственно

2) Прямое произведение коммутативно:

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x).$$

3) Прямое произведение линейно, то есть для любых двух чисел λ_1 и λ_2 и любых двух обобщенных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из $D'(\mathbf{R}^k)$ выполняется равенство

$$\left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right) \times g(y) = \lambda_1\left(f_1(x) \times g(y)\right) + \lambda_2\left(f_2(x) \times g(y)\right)$$

(Аналогично для второго аргумента ввиду коммутативности.)

Доказательство свойств.

1) Проверьте данное утверждение самостоятельно по определению носителя обобщенной функции

2) Поскольку функционалы $f(x) \times g(y)$ и $g(y) \times f(x)$ непрерывны и линейны, то коммутативность достаточно доказать для множества основных функций, линейная оболочка которого плотна в $D(\mathbf{R}^{k+m})$. Возьмем в качестве такого множества все функции вида (27.3), а для них коммутативность следует из равенств

$$\left(f(x) \times g(y), \varphi(x, y)\right) = \left(f(x) \times g(y), \varphi_1(x)\varphi_2(y)\right) = (f, \varphi_1)(g, \varphi_2),$$

и

$$\left(g(y) \times f(x), \varphi(x, y)\right) = \left(g(y) \times f(x), \varphi_2(y)\varphi_1(x)\right) = (g, \varphi_2)(f, \varphi_1).$$

3) Для доказательства линейности подействуем функционалом

$(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \times g(y)$ на произвольную основную функцию $\varphi(x,y) \in D(\mathbf{R}^{k+m})$.

$$((\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \times g(y), \varphi(x,y)) =$$
$$= (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), (g(y), \varphi(x,y))) = \lambda_1 (f_1(x), (g(y), \varphi(x,y))) +$$
$$+\lambda_2 (f_2(x), (g(y), \varphi(x,y))) = \lambda_1 (f_1(x) \times g(y), \varphi(x,y)) +$$
$$+\lambda_2 (f_2(x) \times g(y), \varphi(x,y)) =$$
$$= (\lambda_1 (f_1(x) \times g(y)) + \lambda_2 (f_2(x) \times g(y)), \varphi(x,y)).$$

■

27.3. Оператор свертки в D'. В §15 было введено понятие свертки двух функций, заданных в $\mathbf{R}^n$. Обобщим его.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две абсолютно интегрируемые функции в $\mathbf{R}^n$, для которых существует свертка

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi) g(x-\xi) d\xi,$$

также являющаяся абсолютно интегрируемой в $\mathbf{R}^n$ функцией. Рассмотрим обобщенную функцию h, порожденную сверткой $h(x)$. Для произвольной основной функции $\varphi \in D$ действие на нее функционала h можно преобразовать следующим образом:

$$(h, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} h(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \left[\int_{\mathbf{R}^n} f(\xi) g(x-\xi) d\xi \right] \varphi(x) dx =$$
$$= \iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(\xi) g(x-\xi) \varphi(x) dx d\xi \overset{\eta = x-\xi}{=} \iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi+\eta) d\eta d\xi =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi) \left[\int_{\mathbf{R}^n} g(\eta) \varphi(\xi+\eta) d\eta \right] d\xi = (f(\xi), (g(\eta), \varphi(\xi+\eta))),$$

то есть

$$(h, \varphi) = (f(\xi), (g(\eta), \varphi(\xi+\eta))) = (f(\xi) \times g(\eta), \varphi(\xi+\eta)).$$

Проблема обобщения такой формулы заключается в том, что функция $\varphi(\xi+\eta)$ не является финитной.

<u>Определение 5.</u> Пусть f и g – обобщенные функции из D' с носителями F и G соответственно. Если для любой основной функции $\varphi \in D$ множество $(F \times G) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta)$ является ограниченным, то определяют обобщенную функцию $f * g$, называемую *сверткой*, действие которой на $\varphi \in D$ определяется по формуле

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi) \times g(\eta), \varphi(\xi+\eta)), \qquad (27.4)$$

что следует понимать в смысле (27.1).

Замечание 1. Легко проверить, что так определенный функционал $f * g$ является линейным. (Непрерывность в общем случае не обсуждаем.)

Возникает вопрос: при каких условиях существует свертка обобщенных функций? Следующие утверждения дают пример таких условий.

<u>Утверждения.</u>

1) Если носитель хотя бы одной из обобщенных функций f или g ограничен, то существует свертка $f * g \in D$.

2) В одномерном случае ($f, g \in D'(\mathbf{R})$): если носители обобщенных функций f и g ограничены с одной стороны, то существует свертка $f * g \in D'$.

Доказательство утверждений. В обоих случаях не будем доказывать непрерывность функционала $f * g$. Докажем только, что для любой функции $\varphi \in D$ множество $(F \times G) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta)$ является ограниченным.

1) Так как функция φ финитна, то носитель $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в некотором шаре $B_R = \{x \mid |x| < R\}$. Пусть, для определенности, ограничен носитель F обобщенной функции f, то есть F содержится в некотором шаре $B_r = \{x \mid |x| < r\}$. Тогда

$$(F \times G) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta) \subset (F \times \mathbf{R}^n) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta) \subset$$
$$\subset \{(\xi,\eta) : \xi \in F, |\xi+\eta| < R\} \subset \{(\xi,\eta) \mid |\xi| < r, |\eta| < R+r\} =$$
$$= B_r \times B_{R+r}$$

– ограниченное множество. Аналогично для ограниченного G.

2) Поскольку функция φ финитна, то существует положитель-

ное число a такое, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a; a]$. Для определенности будем считать, что носители F и G ограничены слева. Тогда, как видно из рис. 14, $(F \times G) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta)$ есть ограниченное множество ■

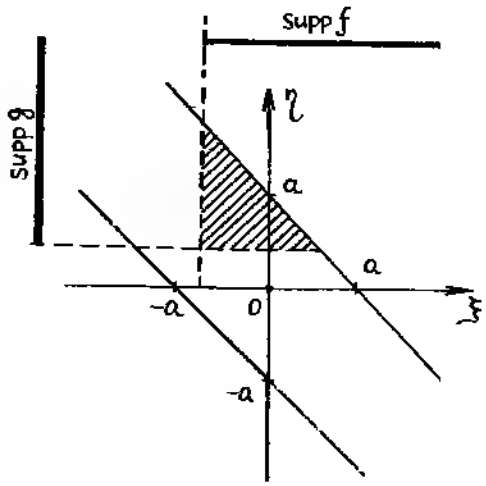

Рис. 14

<u>Свойства</u> свертки обобщенных функций.

1) Линейность: для любых чисел λ_1 и λ_2 справедливы утверждения

$$(\exists f_1 * g,\ \exists f_2 * g) \Rightarrow \left(\exists(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1(f_1 * g) + \lambda_2(f_2 * g)\right),$$

$$(\exists f * g_1,\ \exists f * g_2) \Rightarrow \left(\exists f * (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1(f * g_1) + \lambda_2(f * g_2)\right).$$

2) Коммутативность (симметричность):

$$(\exists f * g) \Rightarrow (\exists g * f,\ f * g = g * f).$$

3) Дифференцируемость:

$$\left(\exists f * g \in D'\right) \Rightarrow \left(D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g\right).$$

Доказательство свойств

1) Линейность свертки следует из линейности прямого произведения.

2) Поскольку функция $\varphi(\xi+\eta)$ симметрична относительно

вхождения ξ и η, то

$$(\xi,\eta) \in (F \times G) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta) \Leftrightarrow (\eta,\xi) \in (G \times F) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta)$$

Поэтому из ограниченности множества $(F \times G) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta)$ следует ограниченность и $(G \times F) \cap \operatorname{supp}\varphi(\xi+\eta)$, то есть существование свертки $g * f$. Равенство $f * g = g * f$ в этом случае является непосредственным следствием коммутативности прямого произведения.

3) Для произвольной функции $\varphi \in D$ справедлива цепочка равенств

$$\left(D^\alpha(f * g), \varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f * g, D^\alpha\varphi\right) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\left(f(\xi), \left(g(\eta), D^\alpha\varphi(\xi+\eta)\right)\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f(\xi), \left(g(\eta), D^\alpha_\eta\varphi(\xi+\eta)\right)\right) =$$

$$= \left(f(\xi), \left(D^\alpha g(\eta), \varphi(\xi+\eta)\right)\right) = \left(f * (D^\alpha g), \varphi\right),$$

то есть

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g).$$

С учетом коммутативности свертки получаем

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g,$$

что и требовалось доказать ■

Пример 3. Найти свертку произвольной обобщенной функции $f \in D'$ с $D^\alpha\delta$.

Решение. Так как носителем δ-функции является $\{0\}$, то свертка $f * \delta$ определена и

$$(f * \delta, \varphi) = \left(f(\xi), \left(\delta(\eta), \varphi(\xi+\eta)\right)\right) = \left(f(\xi), \varphi(\xi)\right) = (f, \varphi),\ \forall \varphi \in D,$$

то есть

$$f * \delta = f.$$

Дифференцируя это равенство с учетом свойства 2), получаем

$$f * (D^\alpha\delta) = D^\alpha f \qquad (27.5)$$

При рассмотрении обобщенных функций, зависящих от параметра будет полезна следующая

<u>Лемма 2 (непрерывность свертки по своим аргументам).</u> Пусть

последовательность обобщенных функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D'$ сходится к обобщенной функции f в D'. Тогда $f_k * g \xrightarrow{k\to\infty} f * g$ в D', если выполнено одно из следующих предположений:

а) все носители функционалов f_k содержатся в одном ограниченном множестве M;

б) носитель обобщенной функции g ограничен.

Доказательство леммы 2. По определению свертки для любой основной функции $\varphi \in D$ справедливо равенство

$$(f_k * g, \varphi) = (f_k(\xi), (g(\eta), \varphi(\xi + \eta))).$$

В случае а) функцию $\phi(\xi) = (g(\eta), \varphi(\xi + \eta))$ можно заменить согласно определению (27.1) основной функцией Φ такой, что $\operatorname{supp}\Phi \subset \operatorname{supp}\phi$ и значения функций $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ совпадают в некоторой окрестности множества M. Поэтому

$$(f_k * g, \varphi) = (f_k, \Phi) \xrightarrow{k\to\infty} (f, \Phi) = (f * g, \varphi),$$

то есть $f_k * g \xrightarrow{k\to\infty} f * g$ в D'.

В случае б) функция $\Phi(\xi) = (g(\eta), \varphi(\xi + \eta))$ есть основная функция, для которой справедливы написанные выше выражения ■

27.4. Оператор свертки в S'. Поскольку $D \subset S$ и $S' \subset D'$, то в S' естественно определить свертку обобщенных функций следующим образом.

Пусть $f, g \in S'$ и обобщенная функция g (как функционал из D') имеет ограниченный носитель. Тогда под сверткой $f * g$ будем понимать функционал, действующий по правилу (27.4).

Приведем без доказательства (и не будем использовать) следующее свойство свертки в S', связанное с преобразованием Фурье:

$$F(f * g) = (Fg)(Ff).$$

27.5. Дополнение. Пусть $\varphi(x)$ – функция из пространства D, M – ее носитель, $\{G_l\}_{l=1}^{L}$ – конечное открытое покрытие множества

M: $M \subset \bigcup_{l=1}^{L} G_l$. Докажем, что существуют функции $\varphi_l(x)$, $l = 1, \ldots L$ такие, что

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^{L} \varphi_l(x),$$

причем $\varphi_l \in D$ и $\operatorname{supp}\varphi_l \subset M$, $l = 1, \ldots L$.

Прежде всего заметим, что существует открытое покрытие $\{\tilde{G}_l\}_{l=1}^{L}$ множества M такое, что $\overline{\tilde{G}_l} \subset G_l$, $l = 1, \ldots L$. Действительно, пусть построены множества $\tilde{G}_1, \ldots \tilde{G}_{k-1}$ такие, что $\tilde{G}_1, \ldots \tilde{G}_{k-1}, G_k, \ldots G_L$ образуют открытое покрытие M, тогда множество $K = M \setminus (\tilde{G}_1 \cup \ldots \tilde{G}_{k-1} \cup G_{k+1} \cup \ldots G_L)$ является компактом и содержится в открытом множестве G_k, следовательно, в качестве $\tilde{G}_k$ можно взять достаточно малую открытую окрестность множества K, замыкание которой содержится в G_k. Выполнив описанный процесс последовательно для $k = 1, \ldots L$ получим покрытие $\{\tilde{G}_l\}_{l=1}^{L}$.

Далее, согласно рассуждениям, приведенным в конце пункта 1, существуют бесконечно дифференцируемые функции $A_l(x)$, $l = 1, \ldots L$ такие, что $A_l(x) = 1$ в $\tilde{G}_l$ и $\operatorname{supp} A_l \subset G_l$. Рассмотрим функцию

$$A(x) = \sum_{l=1}^{L} A_l(x).$$

Ее значение в каждой точке x множества M не меньше единицы, так как множества $\tilde{G}_l$ образуют покрытие M и $A_l(x) = 1$ в $\tilde{G}_l$. Следовательно, в качестве функций $\varphi_l(x)$ можно взять

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} \dfrac{A_l(x)}{A(x)} \varphi(x), & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}, \quad l = 1, \ldots L.$$

§28. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора. Фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbf{R}^3$

28.1. Элементы теории. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение k-ого порядка относительно функции $y(x) \in C^k(\mathbf{R}^n)$

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha y(x) = b(x)$$

Если коэффициенты $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то все операции, фигурирующие в данном уравнении, определены в D', и можно записать для обобщенной функции $f \in D'$ уравнение

$$Lf \equiv \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha y(x) = b(x),\ b \in D' \qquad (28.1)$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение с обобщенными функциями. Его решением является всякая обобщенная функция f, для которой выполнены равенства

$$\sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} \left(f, D^\alpha \left(a_\alpha(x) \varphi(x) \right) \right) = (b, \varphi),\ \forall \varphi \in D.$$

Пусть все коэффициенты a_α являются константами.

<u>Определение 1</u> *Фундаментальным решением оператора L* (или дифференциального уравнения (28.1)) называется обобщенная функция $E \in D'$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$LE = \delta. \qquad (28.2)$$

Замечание 1. Фундаментальное решение определено, вообще говоря, неодиозначно – с точностью до слагаемого, являющегося решением однородного уравнения.

Смысл введенного понятия раскрывает следующая

<u>Теорема 1.</u> Пусть $E \in D$ – фундаментальное решение оператора L, и обобщенная функция b такова, что существует свертка $b * E \in D'$. Тогда обобщенная функция

$$f = b * E \qquad (28.3)$$

является решением уравнения (28.1).

Доказательство теоремы 1. Действительно, из свойств свертки следует, что

$$Lf = L(b * E) = b * (LE) = b * \delta = b.$$

■

28.2. Пример применения. Получим формулу для решения задачи Коши

$$y''(x) + \mu^2 y(x) = B(x),\ x \in [0;\infty). \qquad (28.4)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \qquad (28.5)$$

где $B(x) \in C[0;\infty)$ – заданная функция, $y(x) \in C^2[0;\infty)$ – искомая функция, $\mu > 0$ – постоянный коэффициент.

Перейдем от уравнения (28.4) к уравнению в $\mathbf{R}$ для обобщенной функции $f \in D'$:

$$Lf \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2 \right) f = B\theta. \qquad (28.6)$$

Будем искать фундаментальное решение E оператора L в виде $E = z\theta$, где $z(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ – неизвестная функция, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – регулярная обобщенная функция. Вычислим первую производную фундаментального решения:

$$E' = z'\theta + z\theta' = z'\theta + z\delta = z'\theta + z(0)\delta.$$

Положим $z(0) = 0$, тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$E'' = z''\theta + z'\theta' = z''\theta + z'\delta = z''\theta + z'(0)\delta,$$

в завершение которой полагаем $z'(0) = 1$.

По определению фундаментальное решение удовлетворяет уравнению (28.2) с оператором L из формулы (28.6), то есть

$$E'' + \mu^2 E = \delta,$$

или

$$z''\theta + \delta + \mu^2 z\theta = \delta,$$

что выполняется при условии $z''(x) + \mu^2 z(x) = 0$. Вспомним, что

$z(0)=0$ и $z'(0)=1$, тогда $z(x)=\frac{1}{\mu}\sin\mu x$ и фундаментальное решение есть

$$E(x)=\frac{\sin\mu x}{\mu}\theta(x)$$

– регулярная обобщенная функция.

Поскольку носители обобщенных функций E и $B\theta$ ограничены с одной стороны ($x\geq 0$), то существует свертка $E*(B\theta)$, являющаяся регулярной обобщенной функцией, порожденной

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(x-\xi)B(\xi)\theta(\xi)d\xi=\int_{0}^{+\infty}E(x-\xi)B(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_{0}^{x}\sin\mu(x-\xi)B(\xi)d\xi$$

Функция $f(x)$ принадлежит классу $C^2[0;\infty)$ и удовлетворяет уравнению (28.4), причем $f(0)=f'(0)=0$. Следовательно, при $x\geq 0$ она является решением задачи (28.4),(28.5).

Итак,

$$y(x)=\frac{1}{\mu}\int_{0}^{x}\sin\mu(x-\xi)B(\xi)d\xi.$$

Полученный результат формулировался как лемма 1 §11.

28.3. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

Теорема 2. Фундаментальным решением дифференциального оператора $L=-\Delta$ в $\mathbf{R}^3$ является регулярная обобщенная функция

$$E(x)=\frac{1}{4\pi|x|}. \qquad (28.7)$$

Доказательство теоремы 2. Можно было бы проверить утверждение теоремы непосредственной подстановкой, но мы покажем, как найти фундаментальное решение (28.7).

Фундаментальное решение E по определению удовлетворяет уравнению

$$-\Delta E=\delta.$$

Произведем преобразование Фурье над обеими частями равенства,

предполагая, что $E\in S'(\mathbf{R}^3)$

$$|\xi|^2(FE)(\xi)=1$$

Функция $(FE)(\xi)=\frac{1}{|\xi|^2}$ порождает регулярный функционал, так как для произвольной функции $\varphi\in S(\mathbf{R}^3)$ интеграл $\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|\xi|^2}\varphi(\xi)dx$ сходится (особенность в нуле является интегрируемой, поскольку при переходе в сферические координаты (r,φ,θ) появится дополнительный множитель $r^2=|\xi|^2$ из якобиана $r^2\sin\theta$).

Произведем теперь над функцией $(FE)(\xi)=\frac{1}{|\xi|^2}$ обратное преобразование Фурье:

$$E(x)=F^{-1}(FE)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|\xi|^2}e^{-i(x,\xi)}d\xi$$

Сделаем поворот, совмещающий ось ξ^3 с направлением вектора x, и перейдем от переменной интегрирования ξ к сферическим координатам (r,φ,θ), при этом угол θ будет являться углом между векторами ξ и x ($0\leq\theta\leq\pi$)

$$E(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}dr\int_0^{\pi}\frac{e^{-i|x|r\cos\theta}}{r^2}r^2\sin\theta d\theta=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-i|x|r\cos\theta}}{i|x|r}\Bigg|_0^{\pi}dr=$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin|x|r}{|x|r}dr=\frac{2}{(2\pi)^2|x|}\int_0^{\infty}\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{4\pi|x|}$$

■

Замечание 2. Приведенное доказательство опирается на следующий факт, обычно не доказываемый в курсах математического анализа: обратное преобразование Фурье можно вычислять как интеграл в смысле главного значения не только в классическом

смысле ($\text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\bullet dy = \lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-N}^{N}\ldots\int\limits_{-N}^{N}\bullet dy^1 dy^2\ldots dy^n$), но и в смысле $\text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\bullet dy = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{|y|\le R}\bullet dy$.

Замечание 3. Для справки: при n>2 фундаментальное решение оператора $L=-\Delta$ в $\mathbf{R}^n$ является регулярной обобщенной функцией

$$E_n(x)=\frac{1}{(n-2)S_n|x|^{n-2}},\ x\in\mathbf{R}^n,$$

где $S_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь единичной сферы в $\mathbf{R}^n$ [1]); при $n=2$

$$E_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|},\ x\in\mathbf{R}^2$$

§29. Фундаментальное решение задачи Коши для простейших эволюционных уравнений

29.1. Обобщенные функции, зависящие от параметра. Пусть каждому значению скалярного параметра t из промежутка T поставлена в соответствие обобщенная функция из $D'(\mathbf{R}^n)$. Запишем

---

[1]) Для вычисления площади S_n n-мерной единичной сферы можно воспользоваться следующим приемом. Вычислим интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{-|x|^2}dx$ двумя способами: с одной стороны

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^k)^2}dx^k=\left(\sqrt{\pi}\right)^n,$$

а с другой

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\int\limits_0^\infty e^{-r^2}S_n r^{n-1}dr=\tfrac{1}{2}S_n\int\limits_0^\infty e^{-r^2}\left(r^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dr^2=\tfrac{1}{2}S_n\Gamma(n/2)$$

Следовательно $S_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$

это следующим образом. $f(x,t)\in D'\left(x\in\mathbf{R}^n\right)$, $t\in T$. Тогда $f(x,t)$ называется обобщенной функцией, зависящей от параметра t.

Как и для обычных функций вводятся понятия предела, непрерывности и дифференцируемости $f(x,t)$ по t.

<u>Определение 1.</u> Обобщенная функция $f(x)\in D'$ называется *пределом* $f(x,t)$ при $t\to t_0$, что обозначают $f(x,t)\overset{t\to t_0}{\to}f(x)$ или $\lim\limits_{t\to t_0}f(x,t)=f(x)$ если для любой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset T\setminus\{t_0\}$, сходящейся к t_0, $f(x,t_k)\overset{k\to\infty}{\to}f(x)$ в D'

Замечание 1. Единственность предела следует из единственности предела в D'.

Из определения сходимости в D' следует, что

$$\left(f(x,t)\overset{t\to t_0}{\to}f(x)\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varphi(x)\in D\ \left(f(x,t),\varphi(x)\right)\overset{t\to t_0}{\to}\left(f(x),\varphi(x)\right)\right).$$

<u>Определение 2.</u> Функция $f(x,t)$ называется *непрерывной* по параметру t в $G\subset T$, если для любого $t_0\in G$

$$f(x,t)\overset{t\to t_0}{\to}f(x,t_0)$$

Из непрерывности операции дифференцирования D^α в D' следует, что если $f(x,t)$ непрерывна по t, то и $D_x^\alpha f(x,t)$ непрерывна по t для любого мульти-индекса α.

<u>Определение 3.</u> Если для точки $t_0\in T$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}$, то он называется *производной* функции $f(x,t)$ по t в t_0 и обозначается $\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t_0)$

Производные высшего порядка определяются из равенства

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}f(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}f(x,t)\right].$$

Утверждение 1. Для существования производной $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)$ необходимо и достаточно, чтобы числовая функция $u_\varphi(t) = \left(f(x,t),\varphi(x)\right)$ для любой основной функции $\varphi(x)\in D$ была дифференцируемой в точке t_0

Доказательство утверждения 1.

Необходимость очевидна

Достаточность Рассмотрим на D функционал g, действующий по правилу

$$(g,\varphi) = u'_\varphi(t_0) = \lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0},\varphi(x)\right),\ \forall\varphi\in D$$

Из полноты пространства D' (теорема 1 §25) следует, что $g\in D'$ и $\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} \xrightarrow{t\to t_0} g(x)$ в D' ■

Определение 4 Функция $f(x,t)$ называется *дифференцируемой* по параметру t в G, если для любого значения параметра $t_0\in G$ существует производная $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)$.

Утверждение 2 Пусть $f(x)\in D'(\mathbf{R})$. Тогда обобщенная функция $f(x,t) = f(x+t)$, зависящая от параметра t, является бесконечно дифференцируемой по t, причем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(x,t) = f^{(k)}(x+t),\ k\in\mathbf{N}$$

Доказательство утверждения 2. Подействуем функционалом $f'(x+t)$ на произвольную основную функцию $\varphi(x)\in D(\mathbf{R})$ и воспользуемся определением линейной замены переменных:

$$\left(f'(x+t),\varphi(x)\right) = \left(f'(x),\varphi(x-t)\right) = -\left(f(x),\varphi'(x-t)\right) =$$

$$= \left(f(x),\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(x-t)\right)\right) \overset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(f(x),\varphi(x-t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(x+t),\varphi(x)\right)$$

В равенстве (*) мы воспользовались непрерывностью функционала $f(x)$. Следовательно, в соответствии с утверждением 1 существует

$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$, причем $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = f'(x+t)$ Утверждение для производных высшего порядка доказывается последовательным дифференцированием ■

Утверждение 3. Если $f(x,t)$ дифференцируема по параметру t, то и $D_x^\alpha f(x,t)$ дифференцируема по t, причем

$$\frac{\partial}{\partial t} D_x^\alpha f(x,t) = D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} f(x,t). \qquad (29.1)$$

Доказательство утверждения 3. Для любой основной функции $\varphi\in D$ числовая функция

$$w(t) = \left(D_x^\alpha f(x,t),\varphi(x)\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f(x,t),D^\alpha\varphi(x)\right)$$

дифференцируема и имеет производную

$$\frac{d}{dt} w(t) = (-1)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t),D^\alpha\varphi(x)\right) = \left(D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} f(x,t),\varphi(x)\right)$$

что доказывает равенство (29.1) ■

Из леммы о непрерывности оператора свертки по своим аргументам (лемма 2 §27) следует

Утверждение 4. Пусть функция $f(x,t)\in D'(x\in\mathbf{R}^n)$, $t\in T$ дифференцируема по t в точке t_0, $g\in D'(\mathbf{R}^n)$, причем выполнено одно из условий:

а) существует окрестность U точки t_0 такая, что носители обобщенных функций $f(x,t)$ для любого $t\in U\cap T$ содержатся в одном и том же ограниченном множестве;

б) носитель g ограничен.

Тогда результат свертки $f(x,t)*g(x)$, являющийся обобщенной функцией, зависящей от параметра t, дифференцируем по t в точке t_0, и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(x,t_0)*g(x)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)\right)*g(x) \qquad (29.2)$$

29.2. Фундаментальное решение задачи Коши. Рассмотрим задачу Коши для простейшего эволюционного уравнения

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t) = L_x u(x,t),\ x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \qquad (29.3)$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l}u(x,0) = u_l(x),\ l = 0, \quad k-1, \qquad (29.4)$$

где $L_x = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D_x^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор, k и m – фиксированные натуральные числа.

В классической задаче Коши на функции $u_l(x)$ накладываются условия $u_l(x) \in C^{k-1-l}(\mathbf{R}^n)$, $l = 0, \quad .k-1$, и требуется найти решение $u(x,t) \in C_{x,t}^{m,k}(\mathbf{R}^n \times (0;\infty)) \cap C_{x,t}^{m,k-1}(\mathbf{R}^n \times [0;\infty))$.

Аппарат обобщенных функций позволяет рассмотреть задачу (29 3),(29.4) в более широком смысле Пусть $u_l \in D'(\mathbf{R}^n)$, $l = 0, \quad k-1$ и требуется найти $u(x,t) \in D'(x \in \mathbf{R}^n)$, $t \ge 0$, k раз непрерывно дифференцируемую по параметру t.

Определение 5. Функция $E(x,t) \in D'(x \in \mathbf{R}^n)$, $t \ge 0$ называется *фундаментальным решением задачи Коши* (29 3),(29.4), если она удовлетворяет уравнению (29.3) и начальным условиям

$$E(x,0) = . = \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}E(x,0) = 0,\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}E(x,0) = \delta(x).$$

Полезность введения такого понятия демонстрирует следующая

Теорема 1 Пусть $E(x,t)$ – фундаментальное решение задачи Коши (29.3),(29 4), и выполнено одно из условий

а) для любого $t_0 \ge 0$ существует окрестность $U(t_0)$ такая, что носители обобщенных функций $E(x,t)$ для всех $t \in U(t_0)$, $t \ge 0$ содержатся в одном и том же (для данного t_0) ограниченном множестве,

б) носитель обобщенной функции u_{k-1} ограничен.

Тогда свертка $u(x,t) = E(x,t) * u_{k-1}(x)$ является решением задачи Коши (29.3),(29.4) с $u_0 = \quad = u_{k-2} = 0$ и $u_{k-1} \in D'(\mathbf{R}^n)$

Доказательство теоремы 1. В предположениях теоремы можно пользоваться леммой о непрерывности свертки по своим аргументам. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} - L_x\right)u(x,t) = \left[\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} - L_x\right)E(x,t)\right] * u_{k-1}(x) = 0 * u_{k-1}(x) = 0,$$

и

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l}u(x,0) = \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l}E(x,0)\right) * u_{k-1}(x) = 0 * u_{k-1}(x) = 0,\ l = 0,\dots,k-2,$$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}u(x,0) = \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}E(x,0)\right) * u_{k-1}(x) = \delta(x) * u_{k-1}(x) = u_{k-1}(x),$$

что и требовалось доказать ■

Решение задачи (29.3),(29.4) для заданных обобщенных функций $u_0(x), \ .,u_{k-1}(x)$ можно построить следующим образом Функция $u_{k-1}(x,t) = E(x,t) * u_{k-1}(x)$ согласно теореме удовлетворяет уравнению (29.4) и начальным условиям

$$u_{k-1}(x,0) = . \quad = \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}u_{k-1}(x,0) = 0,\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}u_{k-1}(x,0) = u_{k-1}(x).$$

Тогда функция

$$\tilde{u}_{k-2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(E(x,t) * u_{k-2}(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right) * u_{k-2}(x)$$

удовлетворяет тому же уравнению и условиям

$$\tilde{u}_{k-2}(x,0) = \quad = \frac{\partial^{k-3}}{\partial t^{k-3}}\tilde{u}_{k-2}(x,0) = 0,\ \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}\tilde{u}_{k-2}(x,0) = u_{k-2}(x).$$

Следовательно, у функции

$$u_{k-2}(x,t) = \tilde{u}_{k-2}(x,t) - E(x,t) * \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\tilde{u}_{k-2}(x,0)$$

при $t = 0$ отлична от нуля только производная $\frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}}u_{k-2}(x,0) = u_{k-2}(x)$. Учтем, что

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\tilde{u}_{k-2}(x,0) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}E(x,0)\right) * u_{k-2}(x) = (L_x E(x,0)) * u_{k-2}(x) = 0$$

следовательно,

$$u_{k-2}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right) * u_{k-2}(x).$$

Продолжая этот процесс в предположении существования всех сверток, получим решение

$$u(x,t) = u_{k-1}(x,t) + u_{k-2}(x,t) + \ldots + u_0(x,t).$$

Итак, для решения задачи Коши (29.3),(29.4) получаем формулу

$$u(x,t) = \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}E(x,t)\right) * u_0(x) + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right) * u_{k-2}(x) + E(x,t) * u_{k-1}(x).$$

29.3. Связь между фундаментальными решениями задачи Коши и соответствующего оператора. Рассмотрим задачу Коши (29.3),(29.4) при $k = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - L_x u(x,t) = 0, \qquad (29.5)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (29.6)$$

В уравнение (29.5) входит дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - L_x = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D_x^\alpha$$

Для него фундаментальное решение $E(x,t)$ согласно определению есть обобщенная функция из $D'(\mathbf{R}^{n+1})$, удовлетворяющая уравнению $LE(x,t) = \delta(x,t)$ Оказывается, что зная фундаментальное решение $E(x,t)$ задачи Коши (29 5),(29.6), можно построить фундаментальное решение $E(x,t)$ оператора L

<u>Теорема 2.</u> Пусть $E(x,t)$ – фундаментальное решение задачи Коши (29.5),(29.6). Тогда

$$E(x,t) = \theta(t) \times E(x,t) \qquad (29\ 7)$$

является фундаментальным решением оператора L.

Замечание 2. Формула (29.7) нуждается в дополнительных пояснениях Так определенная $E(x,t)$ является функционалом на $D(\mathbf{R}^{n+1})$, действующим на произвольную функцию $\varphi(x,t) \in D(\mathbf{R}^{n+1})$ по правилу

$$(\theta(t) \times E(x,t), \varphi(x,t)) = \int_0^{+\infty} (E(x,t), \varphi(x,t))dt.$$

Здесь $(E(x,t), \varphi(x,t))$ есть функция параметра t, равная результату действия обобщенной функции $E(x,t)$, зависящей от параметра t, на основную функцию $\varphi(x,t)$ при фиксированном t. Предполагается, что $E(x,t)$ обладает достаточной гладкостью по t, чтобы $\psi(t) = (E(x,t), \varphi(x,t)) \in D(\mathbf{R})$ для любой $\varphi(x,t) \in D(\mathbf{R}^{n+1})$, и $\theta(t) \times E(x,t) \in D'(\mathbf{R}^{n+1})$

Замечание 3. Формула (29.7) справедлива для любого натурального k. Требование $k = 1$ наложено для краткости и ясности доказательства

Доказательство теоремы 2. Прежде всего покажем, что $\delta(t) \times E(x,t) = \delta(x,t)$, для чего подействуем функционалом $\delta(t) \times E(x,t)$ на произвольную функцию $\varphi(x,t) \in D(\mathbf{R}^{n+1})$

$$(\delta(t) \times E(x,t), \varphi(x,t)) = (E(x,t), \varphi(x,t))\big|_{t=0} = (E(x,0), \varphi(x,0)) =$$

$$= (\delta(x), \varphi(x,0)) = \varphi(0,0) = (\delta(x,t), \varphi(x,t)).$$

Следовательно,

$$L[\theta(t) \times E(x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\theta(t) \times E(x,t)] - L_x[\theta(t) \times E(x,t)] =$$

$$= \theta'(t) \times E(x,t) + \theta(t) \times \left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right) - \theta(t) \times (L_x E(x,t)) =$$

$$= \delta(t) \times E(x,t) + \theta(t) \times (LE(x,t)) = \delta(x,t) + \theta(t) \times 0 = \delta(x,t),$$

что и доказывает теорему ■

Теорема 2 используется при решении задачи Коши для неоднородного эволюционного уравнения.

§30. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

30.1. Функция источника. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbf{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \ t > 0, \tag{30.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{30.2}$$

Построим ее фундаментальное решение $E(x,t)$. По определению $E(x,t)$ есть обобщенная функция из $D'(x \in \mathbf{R}^n)$, зависящая от параметра t и удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x,t) - a^2\Delta_x E(x,t) = 0 \tag{30.3}$$

$$E(x,0) = \delta(x) \tag{30.4}$$

Предположим, что $E(x,t) \in S'(x \in \mathbf{R}^n)$, $t \geq 0$, и произведем преобразование Фурье по x для обеих частей равенств (30.3) и (30.4). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(FE)(\xi,t) + a^2|\xi|^2(FE)(\xi,t) = 0, \ (FE)(\xi,0) = (F\delta)(\xi) = 1 \tag{30.5}$$

Здесь мы воспользовались тем, что преобразование Фурье F непрерывно отображает S' на S', и

$$F(\Delta_x\varepsilon)(\xi,t) = F\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2}E\right)(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2}E\right)(\xi,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(i\xi^k)^2(FE)(\xi,t) = -|\xi|^2(FE)(\xi,t).$$

Уравнениям (30.5) при каждом $t \geq 0$ удовлетворяет регулярная обобщенная функция из S', зависящая от параметра t

$$(FE)(\xi,t) = \exp\left(-a^2|\xi|^2 t\right)$$

По формуле обращения при $t > 0$ находим

$$E(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left(-a^2|\xi|^2 t\right)\exp(-i(x,\xi))d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left\{-\left(a^2 t\xi + ix,\xi\right)\right\}d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{-\frac{(x^k)^2}{4a^2 t}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left(a\sqrt{t}\xi^k + \frac{ix^k}{2a\sqrt{t}}\right)^2\right\}d\xi^k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{-\frac{(x^k)^2}{4a^2 t}\right\}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 t}\right)^n}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}$$

При вычислении интеграла мы пользовались известным результатом. $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-(\lambda\zeta + \mu)^2\right\}d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}$ для любого $\lambda > 0$ и любого $\mu \in \mathbf{C}$.

Итак, получено фундаментальное решение, являющееся при значениях параметра $t > 0$ регулярной обобщенной функцией

$$E(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 t}\right)^n}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \ t > 0 \tag{30.6}$$

– функция источника (см. §14).

30.2. Формула Пуассона. Если носитель обобщенной функции $u_0(x)$ ограничен, то согласно результату §29 функция

$$u(x,t) = E(x,t) * u_0(x)$$

является решением задачи Коши (30.1),(30.2). Для регулярной обобщенной функции $u_0(x)$ и $t > 0$ можно записать

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n}u_0(\xi)\varepsilon(x-\xi,t)d\xi = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 t}\right)^n}\int_{\mathbf{R}^n}u_0(\xi)\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right\}d\xi$$

– формула Пуассона.

В §15 было показано, что для непрерывной ограниченной $u_0(x)$ функция $u(x,t)$, даваемая формулой Пуассона, является решением классической задачи Коши (30.1),(30.2).

30.3. Интеграл Дюамеля. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \ t > 0. \qquad (30.7)$$

Пусть $f(x,t)$ – регулярная обобщенная функция из $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$. Тогда уравнение (30.7) можно записать следующим образом:

$$Lu(x,t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x\right)u(x,t) = f(x,t)\theta(t), \quad (x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

Согласно результатам предыдущего параграфа обобщенная функция

$$\mathcal{E}(x,t) = \theta(t) \times E(x,t)$$

является фундаментальным решением оператора L. Учитывая конкретный вид $E(x,t)$, получаем

$$\mathcal{E}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 t}\right)^n}\exp\left\{-\dfrac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, & t > 0 \\ 0, \ t \le 0 \end{cases}$$

– регулярная обобщенная функция из $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$. Тогда $u(x,t) = f(x,t) * \mathcal{E}(x,t)$ есть решение уравнения (30.7), что для абсолютно интегрируемой в $\mathbf{R}^{n+1}$ функции $f(x,t)$ можно переписать следующим образом:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\theta(\tau)f(\xi,\tau)\theta(t-\tau)E(x-\xi,t-\tau)d\xi\right)d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}\right)}\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(\xi,\tau)\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}d\xi\right)d\tau$$

– интеграл Дюамеля (см. §16).

§31. Фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения

31.1. Фурье образ фундаментального решения. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^n$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - a^2\Delta_x u(x,t) = 0, \ x \in \mathbf{R}^n, \ t > 0, \qquad (31.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = u_1(x). \qquad (31.2)$$

Фундаментальное решение $E(x,t)$ есть обобщенная функция, зависящая от параметра $t \ge 0$ и удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t) - a^2\Delta_x E(x,t) = 0, \qquad (31.3)$$

$$E(x,0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t}E(x,0) = \delta(x) \qquad (31.4)$$

Предположим, что $E(x,t) \in \mathcal{S}'(x \in \mathbf{R}^n)$, $t \ge 0$. Тогда в результате преобразования Фурье по x уравнения (31.3) и (31.4) перейдут в следующие:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(FE)(\xi,t) + a^2|\xi|^2(FE)(\xi,t) = 0, \qquad (31.5)$$

$$(FE)(\xi,0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t}(FE)(\xi,0) = 1 \qquad (31.6)$$

Предположим, что при каждом $t \ge 0$ $(F\varepsilon)(\xi,t)$ есть регулярная обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Тогда решая задачу Коши (31.5),(31.6) для обыкновенного дифференциального уравнения, получаем

$$(FE)(\xi,t) = \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} \qquad (31.7)$$

Следовательно,

$$E(x,t) = F^{-1}\left(\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right)$$

Конкретный вид $E(x,t)$ мы найдем в двух случаях: $n = 1$ и $n = 3$.

31.2. Одномерный случай. В случае $n = 1$ выражение (31.7) можно преобразовать следующим образом

$$(FE)(\xi,t)=\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}=\frac{\sin a\xi t}{a\xi}=\frac{e^{ia\xi t}-e^{-ia\xi t}}{2ia\xi}=$$

$$=\frac{F(\delta(x-at))-F(\delta(x+at))}{2ia\xi}$$

С другой стороны

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}E(x,t)\right)=i\xi(FE)(\xi,t)=F\left(\frac{\delta(x+at)-\delta(x-at)}{2a}\right).$$

Поскольку $\theta'=\delta$, то

$$E(x,t)=\frac{\theta(x+at)-\theta(x-at)}{2a} \qquad (31\ 8)$$

– фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения на прямой

Следовательно, для любых обобщенных функций u_0 и u_1, функция

$$u(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right)*u_0(x)+E(x,t)*u_1(x)$$

является решением задачи Коши (34.1),(34.2). Если при этом обобщенные функции u_0 и u_1 являются регулярными, то можно записать

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(u_0(x+at)+u_0(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\zeta)d\zeta,$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)=\frac{a\theta'(x+at)+a\theta'(x-at)}{2a}=\frac{1}{2}(\delta(x+at)+\delta(x-at))$$

Итак, получена уже известная формула Даламбера (см. §4).

31.3. Сферический слой. Перейдем теперь к рассмотрению трехмерного случая ($n=3$). Введем обобщение δ-функции.

<u>Определение 1</u> Функционал $\delta_{S(a,R)}$ ($a\in\mathbf{R}^3$, $R>0$), действующий на произвольную основную функцию $\varphi(x)$ по правилу

$$\left(\delta_{S(a,R)},\varphi\right)=\iint_{|x-a|=R}\varphi(x)ds_x,$$

называется *сферическим слоем.*

Легко проверить, что $\delta_{S(a,R)}\in S'\subset D'$.

Найдем результат преобразования Фурье сферического слоя:

$$\left(F\delta_{S(a,R)},\varphi\right)=\left(\delta_{S(a,R)},F\varphi\right)=\iint_{|x-a|=R}(F\varphi)(x)ds_x=$$

$$=\iint_{|x-a|=R}\left(\iiint_{\mathbf{R}^3}e^{i(x,\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right)ds_x=\iiint_{\mathbf{R}^3}\varphi(\xi)\left(\iint_{|x-a|=R}e^{i(x,\xi)}ds_x\right)d\xi$$

Следовательно, $\left(F\delta_{S(a,R)}\right)(\xi)$ есть регулярная обобщенная функция, равная

$$\left(F\delta_{S(a,R)}\right)(\xi)=\iint_{|x-a|=R}e^{i(x,\xi)}ds_x=e^{i(a,\xi)}\iint_{|x|=R}e^{i(x,\xi)}ds_x$$

Сделаем поворот, совмещающий ось x^3 с направлением вектора ξ, и перейдем к полярным координатам (r,φ,θ) (то есть θ – угол между векторами x и ξ):

$$\left(F\delta_{S(a,R)}\right)(\xi)=e^{i(a,\xi)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}e^{iR|\xi|\cos\theta}R^2\sin\theta d\theta=$$

$$=2\pi e^{i(a,\xi)}\int_{\pi}^{0}e^{iR|\xi|\cos\theta}R^2d\cos\theta=\frac{2\pi e^{i(a,\xi)}R}{i|\xi|}\left(e^{iR|\xi|}-e^{-iR|\xi|}\right)=$$

$$=4\pi R^2e^{i(a,\xi)}\frac{\sin R|\xi|}{R|\xi|}$$

Итак,

$$\left(F\delta_{S(a,R)}\right)(\xi)=4\pi R^2e^{i(a,\xi)}\frac{\sin R|\xi|}{R|\xi|} \qquad (31.9)$$

Возвращаясь к задаче Коши (31.1),(31 2) и формуле (31.7), получаем, что

$$E(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\delta_{S(0,at)} \qquad (31.10)$$

- фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве.

Следовательно, для любых обобщенных функций u_0 и u_1 функция

$$u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\right) * u_0(x) + E(x,t) * u_1(x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(E(x,t) * u_0(x)\right) + E(x,t) * u_1(x)$$

является решением задачи (31.1),(31 2). Если u_0 и u_1 являются регулярными обобщенными функциями, то

$$E(x,t) * u_0(x) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)ds_\xi ,$$

так как

$$\left(E(x,t) * u_0(x), \varphi(x)\right) = \left(u_0(\xi), \left(E(\eta,t), \varphi(\xi+\eta)\right)\right)$$

$$= \left(u_0(\xi), \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|\eta|=at}\varphi(\xi+\eta)ds_\eta\right) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} u_0(\xi)\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|x-\xi|=at}\varphi(x)ds_x\right]d\xi$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\iint\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)\varphi(x)ds_x d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\iint\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)\varphi(x)ds_\xi dx = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\varphi(x)\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)ds_\xi\right]$$

Таким образом, для решения получаем формулу Кирхгофа (см §6)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)ds_\xi\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|x-\xi|=at} u_1(\xi)ds_\xi$$

Глава VII

Свойства гармонических функций. Задача Пуассона. Задача Дирихле в $\mathbf{R}^3$

§32. Оператор Лапласа в сферических координатах. Интегральное представление для гладких функций

32.1. Оператор Лапласа в сферических координатах. Для дальнейшего потребуется вид оператора Лапласа в сферических координатах. По определению из §1 оператор Лапласа "Δ" в $\mathbf{R}^n$ есть $\Delta\bullet = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\bullet$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и перейдем в сферические координаты $(r,\varphi,\theta,\ldots)$, где $r = |x - x_0| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i - x_0^i)^2}$, $\varphi,\theta,\ldots$ – угловые координаты вектора $x - x_0$. Тогда оператор Лапласа перепишется в следующем виде:

$$\Delta\bullet = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial r}\bullet + \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\bullet + \frac{\partial\theta}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\theta}\bullet + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 r}{(\partial x^i)^2}\frac{\partial}{\partial r}\bullet + \left(\frac{\partial r}{\partial x^i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bullet + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^i)^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\bullet + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet + \ldots\right) =$$

$$= \Delta r\frac{\partial}{\partial r}\bullet + |\nabla r|^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bullet + \Delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\bullet + |\nabla\varphi|^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet + \ldots$$

Замечание 1. Поскольку $\nabla r = \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|}$ и φ, θ – угловые координаты вектора $x - x_0$, то $(\nabla r, \nabla\varphi) = 0$, $(\nabla r, \nabla\theta) = 0, \ldots$.

Вычислим лапласиан $r(x)$:

$$\Delta r = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{(x^i - x_0^i)^2}{r^3}\right) = \frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{n-1}{r}$$

Следовательно,

$$\Delta\bullet = \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bullet + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\bullet + \Delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\bullet + |\nabla\varphi|^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet + \ldots$$

или

$$\Delta\bullet = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\bullet\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\varphi,\theta}\bullet \qquad (32.1)$$

Здесь введено обозначение $\Delta_{\varphi,\theta,\ldots}$ для части оператора Лапласа зависящей только от углов [1]).

Найдем явный вид $\Delta_{\varphi,\theta,\ldots}$ в случае $n = 3$. Переход к сферическим координатам в $\mathbf{R}^3$ записывается следующим образом:

$$x^1 - x_0^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 - x_0^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 - x_0^3 = r\cos\theta$$

$$r \ge 0, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi.$$

Выразив φ и θ через x и проведя непосредственные вычисления, получаем

$$\Delta\varphi = 0, \ |\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}, \ \Delta\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \ |\nabla\theta|^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta_{\varphi\theta}\bullet = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\bullet\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet. \qquad (32.2)$$

<u>Определение 1.</u> Оператор "$-\Delta_{\varphi,\theta}$" называется *оператором Лапласа-Бельтрами.*

---

[1]) Уместность множителя $1/r^2$ перед оператором $\Delta_{\varphi,\theta,\ldots}$ можно понять из соображений размерности

32.2. Теоремы об интегральных представлениях. Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с кусочно гладкой границей ∂D. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in D$ и перейдем в сферические координаты.

Заметим, что функция $\dfrac{1}{r} \equiv \dfrac{1}{|x - x_0|}$ является гармонической в области $\mathbf{R}^3 \setminus \{x_0\}$. Действительно $\Delta\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\right) = 0$.

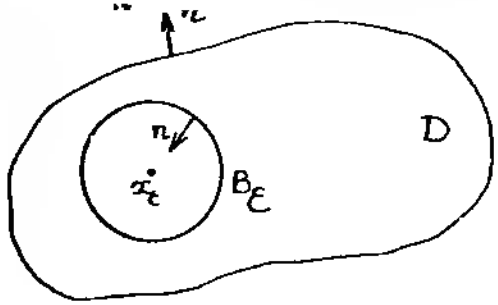

Рис. 15

Возьмем замкнутый шар $\overline{B_\varepsilon} = \{x : |x - x_0| \le \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε (чтобы $\overline{B_\varepsilon} \subset D$) и выпишем для области $D \setminus \overline{B_\varepsilon}$ вторую формулу Грина (см §19), считая, что $u(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\Delta u(x) \in L_2(D)$.

$$\iiint\limits_{D\setminus B_\varepsilon}\left((\Delta u)\frac{1}{r} - \left(\Delta\frac{1}{r}\right)u\right)dx = \iint\limits_{\partial D\cup\partial B_\varepsilon}\left(\left(\frac{\partial}{\partial n}u\right)\frac{1}{r} - \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)u\right)ds,$$

где n – внешняя единичная нормаль по отношению к области $D \setminus \overline{B_\varepsilon}$ (см рис. 15). Оценим интегралы, стоящие в этом равенстве, и выполним предельный переход при $\varepsilon \to +0$

Поскольку $\Delta\dfrac{1}{r} = 0$ в $D \setminus \overline{B_\varepsilon}$, а функция Δu непрерывна на D и, следовательно, ограничена на $\overline{B_\varepsilon} \subset D$, то справедлив следующий

предельный переход при $\varepsilon \to +0$:

$$\iiint\limits_{D\setminus B_\varepsilon}\left((\Delta u)\frac{1}{r}-\left(\Delta\frac{1}{r}\right)u\right)dx=\iiint\limits_{D\setminus B_\varepsilon}(\Delta u)\frac{1}{r}dx=$$

$$=\iiint\limits_{D\setminus B_\varepsilon}(\Delta u)\frac{1}{r}\sin\theta r^2 d\varphi d\theta dr\overset{\varepsilon\to+0}{\to}\iiint\limits_{D}(\Delta u)\frac{1}{r}dx.$$

Далее оценим интегралы по ∂D. Первый из них обращается в ноль при $\varepsilon \to +0$:

$$\left|\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}ds\right|\overset{(*)}{=}\left|\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r}ds\right|\le\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|\left|\frac{1}{r}\right|ds\le\sup_{\overline{D}}|\nabla u|\cdot\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2\overset{\varepsilon\to+0}{\to}0$$

Здесь равенство (*) следует из того, что n – внутренняя нормаль по отношению к шару B_ε (см. рис. 15), а $r=|x-x_0|$, следовательно, $\frac{\partial}{\partial n}\bullet=-\frac{\partial}{\partial r}\bullet$. Для второго интеграла по теореме о среднем предельный переход приводит к следующему результату:

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)uds=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}uds\overset{\varepsilon\to+0}{\to}4\pi u(x_0).$$

Таким образом, мы приходим к интегральному представлению для $u(x_0)$:

$$u(x_0)=\frac{1}{4\pi}\left(-\iint\limits_{\partial D}\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)uds+\iint\limits_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\frac{1}{r}ds-\iiint\limits_{D}(\Delta u)\frac{1}{r}dx\right).$$

Итак, доказана

<u>Теорема 1.</u> Пусть функция $u(x)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, $\Delta u(x)\in L_2(D)$, причем $u(x)\big|_{\partial D}=u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\partial D}=u_1(x)$, $\Delta u(x)\big|_D=f(x)$. Тогда для произвольной точки $x\in D$ справедливо следующее интегральное представление:

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\left(-\iint\limits_{\partial D}u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi-x|}ds_\xi+\iint\limits_{\partial D}u_1(\xi)\frac{1}{|\xi-x|}ds_\xi-\right.$$

$$\left.-\iiint\limits_{D}f(\xi)\frac{1}{|\xi-x|}d\xi\right)\equiv\frac{1}{4\pi}\left(-J_1(x)+J_2(x)-J_3(x)\right).\qquad(32.3)$$

<u>Определение 2.</u> J_1 – *потенциал двойного слоя*, J_2 – *потенциал простого слоя*, J_3 – *объемный потенциал* с плотностями u_0, u_1, f соответственно [1]).

<u>Следствие 1.</u> Если $u(x)$ – гармоническая в D функция из класса $C^1(\overline{D})$, удовлетворяющая на границе ∂D условиям $u(x)\big|_{\partial D}=u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\partial D}=u_1(x)$, то для $x\in D$ справедливо интегральное представление

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{\partial D}u_1(\xi)\frac{1}{|\xi-x|}ds-\iint\limits_{\partial D}u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi-x|}ds_\xi\right)\qquad(32.4)$$

Замечание 2. Если в формулу (32.4) подставить произвольные функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, то полученная функция $u(x)$, вообще говоря, не будет гармонической! На самом деле для гармонической $u(x)$ значения u_1 однозначно определяются функцией u_0 в силу доказанной единственности решения внутренней задачи Дирихле.

<u>Теорема 2</u> Для функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, справедливо следующее интегральное представление:

$$u(x)=-\iint\limits_{\partial D}u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(x,\xi)ds_\xi+\iint\limits_{\partial D}u_1(\xi)G(x,\xi)ds_\xi-$$

$$-\iiint\limits_{D}f(\xi)G(x,\xi)d\xi,\ x\in D\qquad(32.5)$$

где $G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi|x-\xi|}+g(x,\xi)$, $g(x,\xi)$ – функция на $D\times\overline{D}$, которая при каждом фиксированном $x\in D$ является гармонической в D по переменной ξ и принадлежит классу $C^1_\xi(\overline{D})$.

Доказательство теоремы 2. Запишем вторую формулу Грина

---

[1]) Подробнее о потенциалах см §46

для функций $u(\xi)$ и $g(x,\xi)$ $(x \in D)$:

$$\iiint\limits_D \left(g(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) - u(\xi)\Delta_\xi g(x,\xi)\right)d\xi -$$

$$= \iint\limits_{\partial D} g(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi - \iint\limits_{\partial D} u(\xi)\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi.$$

Учитывая, что $\Delta_\xi g(x,\xi) = 0$, приходим к следующему равенству.

$$\iiint\limits_D g(x,\xi)\Delta u(\xi)d\xi = \iint\limits_{\partial D} g(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi - \iint\limits_{\partial D} u(\xi)\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi$$

Остается сложить последнее равенство с формулой (32.3):

$$u(x) = -\iint\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} + g(x,\xi)\right)ds_\xi +$$

$$+ \iint\limits_{\partial D} u_1(\xi)\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} + g(x,\xi)\right)ds_\xi - \iiint\limits_D f(\xi)\left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} + g(x,\xi)\right)d\xi.$$

■

Замечание 3 Результаты этого пункта полностью переносятся на случай n-мерного пространства. Все доказанные выше формулы будут верны и в случае D из $\mathbf{R}^n$, если в них заменить функцию $\frac{1}{4\pi|x|}$ на фундаментальное решение оператора "$-\Delta$" в $\mathbf{R}^n$ (см. следующий пункт).

Замечание 4 Результаты этого пункта верны и для функций из класса $C^2(D)$, не принадлежащих $C^1(\overline{D})$, но имеющих правильную нормальную производную на достаточно гладкой границе ∂D области D (см. §19).

32.3. Интегральное представление как свертка с фундаментальным решением оператора Лапласа. Доказанный в этом параграфе результат (32.3) можно было легко получить, владея техникой работы с обобщенными функциями

Пусть теперь D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно гладкой границей, функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ заданы и непрерывны на ∂D. Определим в пространстве $D'(\mathbf{R}^n)$ функционалы $u_1\delta_{\partial D}$ и $u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D}$, которые действуют на произвольную функцию $\varphi(x)$ из основного пространства $D(\mathbf{R}^n)$ по правилам

$$(u_1\delta_{\partial D},\varphi) = \int\limits_{\partial D} u_1(\xi)\varphi(\xi)ds_\xi,$$

$$\left(u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D},\varphi\right) = -\int\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\varphi(\xi)ds_\xi.$$

Здесь, как всегда, n_ξ – внешняя единичная нормаль к границе ∂D области D. Линейность и непрерывность этих функционалов проверяются непосредственно

Справедлива следующая

<u>Теорема 3.</u> Пусть $u(x) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\Delta u(x) \in L_2(D)$, причем $u(x)|_{\partial D} = u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\partial D} = u_1(x)$, $\Delta u(x)|_D = f(x)$. Определим функцию $\tilde{u}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Тогда регулярный функционал $\tilde{u}$, порожденный функцией $\tilde{u}(x)$, является решением уравнения в обобщенных функциях

$$\Delta\tilde{u} = \tilde{f} - u_1\delta_{\partial D} - u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D},$$

где $\tilde{f}$ – регулярный функционал, порожденный функцией $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$.

Доказательство теоремы 3. Вычислим значение функционала $\Delta\tilde{u}$ на произвольной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$:

$$(\Delta\tilde{u},\varphi) = (-1)^2(\tilde{u},\Delta\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\tilde{u}(\xi)\Delta\varphi(\xi)d\xi = \int\limits_D u(\xi)\Delta\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\partial D}\left(-\varphi(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} + u(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n_\xi}\right)ds_\xi + \int\limits_D \varphi(\xi)\Delta u(\xi)d\xi =$$

$$= \left(-u_1\delta_{\partial D} - u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D} + \tilde{f}, \varphi\right)$$

Здесь мы в очередной раз воспользовались второй формулой Грина ■

Поскольку носители обобщенных функций $\tilde{f}$, $u_1\delta_{\partial D}$ и $u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D}$ содержатся в $\overline{D}$, а следовательно, ограничены, то согласно теореме 1 §28 получаем

<u>Следствие 2.</u> В условиях теоремы 3 справедлива формула

$$\tilde{u} = -\mathcal{E} * \left(\tilde{f} - u_1\delta_{\partial D} - u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D}\right), \qquad (32\ 6)$$

где $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение оператора "$-\Delta$" в $\mathbf{R}^n$ (см. п.3 §28).

Для <u>n=3</u>, пользуясь явным видом $\mathcal{E}$ в $\mathbf{R}^3$ и регулярностью обобщенных функций $\mathcal{E}$, $\tilde{f}$ è $\tilde{u}$, получим из следствия 2 формулу (32.3), для чего подействуем левой и правой частями равенства (32 6) на произвольную основную функцию $\varphi \in D(\mathbf{R}^3)$, воспользовавшись симметричностью свертки:

$$(\tilde{u}, \varphi) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\tilde{u}(x)\varphi(x)dx = \left((u_1\delta_{\partial D})(\xi), (\mathcal{E}(\eta), \varphi(\eta+\xi))\right) +$$

$$+\left(\left(u_0\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\partial D}\right)(\xi), (\mathcal{E}(\eta), \varphi(\eta+\xi))\right) - \left(\tilde{f}(\xi), (\mathcal{E}(\eta), \varphi(\eta+\xi))\right) =$$

$$= \iint\limits_{\partial D} u_1(\xi)\left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi|\eta|}\varphi(\xi+\eta)d\eta\right)ds_\xi -$$

$$- \iint\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi|\eta|}\varphi(\xi+\eta)d\eta\right)ds_\xi -$$

$$- \iiint\limits_D f(\xi)\left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi|\eta|}\varphi(\xi+\eta)d\eta\right)d\xi$$

Произведем в интегралах замену переменных, перейдя от η к $x = \xi + \eta$, тогда получим равенство

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\tilde{u}(x)\varphi(x)dx = \iint\limits_{\partial D} u_1(\xi)\left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\varphi(x)dx\right)ds_\xi -$$

$$- \iint\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\varphi(x)dx\right)ds_\xi -$$

$$- \iiint\limits_D f(\xi)\left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\varphi(x)dx\right)d\xi =$$

$$= \iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{\partial D} u_1(\xi)\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi - \iint\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi -\right.$$

$$\left. - \iiint\limits_D f(\xi)\frac{1}{|x-\xi|}d\xi\right)\cdot\varphi(x)dx.$$

В силу произвольности функции $\varphi(x)$ и равенства $\tilde{u}(x) = u(x)$ в D, отсюда следует формула (32 3).

§33. Гармонические функции: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, принцип максимума, теорема о стирании особенности

33.1. Бесконечная дифференцируемость. Результаты предыдущего параграфа дают возможность доказать основные свойства гармонических функций. Пусть функция $u(x)$ является гармонической в области $D \subset \mathbf{R}^n$. Докажем, что функция $u(x)$ в этом случае бесконечно дифференцируема в D, то есть принадлежит классу $C^\infty(D)$. ●

Проведем все рассуждения для случая <u>n=3</u>, чтобы не использовать общий вид фундаментального решения оператора "$-\Delta$" в $\mathbf{R}^n$

который приводился в §28 без доказательства.

Выберем и зафиксируем произвольную точку $x_0 \in D \subset \mathbf{R}^3$ И рассмотрим шар $B_r = \{x : |x - x_0| < r\} \subset D$ достаточно малого радиуса r. Тогда согласно формуле (32.4) для функции $u(x)$, $x \in B_r$ можно записать

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{\partial B_r} \frac{1}{|\xi - x|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} ds_\xi - \iint\limits_{\partial B_r} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi - x|} ds_\xi\right).$$

По теореме из курса математического анализа интеграл $I(\alpha) = \int\limits_M f(\xi,\alpha)d\xi$ на компакте M можно дифференцировать по параметру $\alpha^i \in \mathbf{R}$, формально дифференцируя подынтегральную функцию $f(\xi,\alpha)$, если последняя удовлетворяет следующему достаточному условию.

$$f(\xi,\alpha),\ \frac{\partial}{\partial \alpha^i} f(\xi,\alpha) \in C(M \times U)$$

Здесь U – некоторая окрестность точки параметра, в которой производится дифференцирование.

В нашем случае x – параметр, B_r – окрестность точки дифференцирования x_0, ∂B_r – компакт, по которому производится интегрирование Функция $\frac{1}{|\xi - x|}$ и все ее производные по x, очевидно, непрерывны на множестве $\{(\xi, x) : \xi \in \partial B_r,\ x \in B_r\}$. Функции $u(\xi)\big|_{\partial B_r}$ и $\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}\right|_{\partial B_r}$ не зависят от параметра (то есть от x). Таким образом условия теоремы выполнены для обеих подынтегральных функций, более того, они будут выполнены и после сколь угодно кратного дифференцирования по x в точке x_0.

Итак, в силу произвольности выбора точки $x_0 \in D$ получили, что $u(x) \in C^\infty(D)$.

33.2. Теорема о среднем. Для начала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно гладкой границей, $u(x)$ – гармоническая в D функция из класса $C^1(\overline{D})$ Тогда выполняется равенство

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} ds_\xi = 0. \qquad (33.1)$$

Замечание 1 Физический смысл этой леммы очевиден: поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность, ограничивающую свободный от зарядов объем, равен нулю.

Доказательство леммы 1. Выпишем вторую формулу Грина для области D и функций $u(x)$ и $v(x) \equiv 1$:

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)dx = 0 = \int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds = \int\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

■

Теорема 1 (о среднем) Пусть $u(x)$ – гармоническая в шаре $B_R = \{x : |x - x_0| < R\} \subset \mathbf{R}^n$ функция из класса $C^1(\overline{B_R})$. Тогда справедлива следующая формула:

$$u(x_0) = \frac{1}{C_{\partial B_R}} \int\limits_{\partial B_R} u(\xi)ds_\xi, \qquad (33.2)$$

где $C_{\partial B_R} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}R^{n-1}$ – площадь сферы ∂B_R. В частности, для n=3:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{|\xi - x_0| = R} u(\xi)ds_\xi. \qquad (33.2^*)$$

Замечание 2 Сравните с теоремой о среднем для функций, гармонических на плоскости, из курса теории функций комплексного переменного.

Доказательство теоремы 1. Как и раньше ограничимся рассмотрением случая n=3.

Для области B_R и функции $u(x)$ воспользуемся интегральным представлением (32.4):

$$u(x_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{|\xi-x_0|=R}\frac{1}{|\xi-x_0|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi-\iint\limits_{|\xi-x_0|=R}u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi-x_0|}ds_\xi\right).$$

Найдем производную по нормали:

$$\left.\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi-x_0|}\right|_{\partial B_R}=\left.\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right|_{r=R}=-\frac{1}{R^2}.$$

Следовательно,

$$u(x_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R}\iint\limits_{|\xi-x_0|=R}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi+\frac{1}{R^2}\iint\limits_{|\xi-x_0|=R}u(\xi)ds_\xi\right)\overset{(33.1)}{=}$$

$$\overset{(33.1)}{=}\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{|\xi-x_0|=R}u(\xi)ds_\xi.$$

■

33.3. Строгий принцип максимума. Утверждение теоремы 1 §23 (принцип максимума для гармонических функций) можно усилить.

Теорема 2 (строгий принцип максимума). Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $u(x)$ – гармоническая в D функция из класса $C(\overline{D})$. Тогда, если существует точка $x_0\in D$, в которой достигается максимум (минимум) функции $u(x)$ на $\overline{D}$, то $u(x)\equiv const=u(x_0)$ в $\overline{D}$.[1])

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем вспомогательное утверждение: если $C=\max\limits_{x\in\overline{B_R}}u(x)$ достигается в центре x_0 шара $B_R\subset D$, то $u(x)\equiv u(x_0)$ в $\overline{B_R}$.

Действительно, рассмотрим произвольную сферу S_r с центром в точке x_0 и радиусом $r<R$. Проведем рассуждения от противного. Если $u(x)$ не равна тождественно $u(x_0)$ на сфере S_r, то в силу непрерывности $u(x)$ с учетом теоремы о среднем справедливо неравенство:

$$u(x_0)=\frac{1}{C_S}\int\limits_S u(\xi)ds_\xi<\frac{1}{C_S}C\cdot C_S=u(x_0)$$

Таким образом мы пришли к противоречию, что доказывает наше утверждение.

Теперь перейдем к общему случаю с помощью стандартного рассуждения. Пусть в точке x_0 области D достигается максимум $C=\max\limits_{x\in\overline{D}}u(x)$. Рассмотрим произвольную точку $x\in D$. Поскольку D – область (связное открытое множество), то точки x_0 и x можно соединить непрерывной кривой Г, лежащей в D. Далее, построим для каждой точки кривой Г шар с центром в этой точке, лежащий вместе со своим замыканием в D, после чего выделим конечное покрытие кривой Г (это можно сделать по лемме Гейне-Бореля). Теперь измельчим это покрытие так, чтобы центр каждого следующего шара лежал внутри предыдущего, разместив при этом центр первого шара в точке x_0 (см. рис. 16). Это можно заведомо сделать, так как в конечном покрытии найдется шар минимального радиуса.

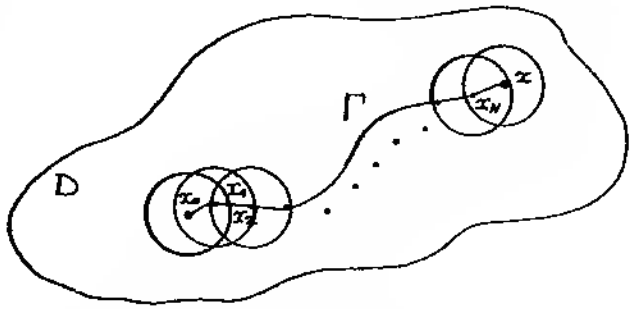

Рис. 16

По доказанному вспомогательному утверждению получаем, что в первом шаре функция $u(x)$ – константа. Но тогда в центре x_1 следующего шара опять достигается максимум $C=u(x_0)=u(x_1)$, поэтому и в этом шаре функция $u(x)$ постоянна. Продолжая этот

[1]) Отметим в очередной раз, что поскольку $\overline{D}$ – компакт, и $u(x)\in C(\overline{D})$, то максимум (минимум) функции $u(x)$ на $\overline{D}$ существует, конечен и достигается хотя бы в одной точке из $\overline{D}$

процесс, мы за конечное число шагов достигнем последнего шара, в котором содержится точка x. Получаем, что в произвольной точке $x \in D$ значение функции $u(x)$ равно $u(x_0) = C$. Следовательно, с учетом непрерывности u на $\overline{D}$ функция $u(x) \equiv const = u(x_0)$ в $\overline{D}$

Для того, чтобы получить утверждение теоремы для минимума, достаточно рассмотреть функцию $-u(x)$ (также является гармонической) и записать следующее равенство

$$\min_{x\in\overline{D}} u(x) = -\max_{x\in\overline{D}}(-u(x)).$$

■

Следствие 1. Если в условиях теоремы гармоническая функция $u(x)$ отлична от тождественной константы в $\overline{D}$, то

$$\min_{\xi\in\partial D} u(\xi) < u(x) < \max_{\xi\in\partial D} u(\xi), \ \forall x \in D.$$

33.4. Теорема о стирании особенности. В следующем параграфе мы перейдем к изучению функции Грина задачи Дирихле в $\mathbf{R}^3$, и там будет полезен следующий результат

Теорема 3 (о стирании особенности). Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$, точка $x_0 \in D$. Если функция $u(x)$ является гармонической в области $D \setminus \{x_0\}$, причем $u(x) = o(\mathrm{E}(x - x_0))$, $x \to x_0$, где $\mathrm{E}(x)$ – фундаментальное решение [1]) оператора "$-\Delta$" в $\mathbf{R}^n$, то $u(x)$ имеет конечный предел в точке x_0, и после доопределения ее по непрерывности, функция $u(x)$ становится гармонической во всей области D.

Доказательство теоремы 3. Проведем все рассуждения для случая n=3, когда $u(x) = o\left(\frac{1}{|x - x_0|}\right)$, $x \to x_0$.

Пусть B_R и B_ε – шары с центрами в точке x_0 и радиусами R и ε соответственно, причем $\overline{B_R} \subset D$ и $\varepsilon<R$. Для произвольного фиксированного $k>0$ рассмотрим функции w_+ и w_-:

[1]) Точнее сказать, локально интегрируемая функция, порождающая регулярный функционал, который является фундаментальным решением.

$$w_\pm(x) = \pm(u(x) - v(x)) + k\left(\frac{1}{|x - x_0|} - \frac{1}{R}\right),$$

где $v(x)$ – решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta v(x) = 0 \text{ в } B_R, \ v(x)|_{\partial B_R} = u(x)|_{\partial B_R}.$$

Существование такой функции $v(x)$ будет доказано в конце курса (конечно без использования этой теоремы).

Для точек $x \in B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$ выпишем очевидные соотношения:

$$\Delta w_\pm(x) = \pm(\Delta u - \Delta v) + k\left(\Delta\frac{1}{|x - x_0|} - \Delta\frac{1}{R}\right) = 0,$$

в силу того, что каждое слагаемое равно нулю.

Оценим функции $w_\pm(x)$ на границе $\partial B_R \cup \partial B_\varepsilon$ области $B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Для одной поверхности результат очевиден.

$$w_\pm(x)|_{\partial B_R} = \pm(u(x) - v(x))|_{\partial B_R} + k\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) = 0.$$

Введем обозначение $C = \max_{x\in B_R}|v(x)|$ ($C < \infty$, так как $v(x)$ – функция непрерывная на компакте $\overline{B_R}$). Далее, получаем

$$w_\pm(x)|_{\partial B_\varepsilon} = \pm(u(x) - v(x))|_{\partial B_\varepsilon} + k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R}\right) \geq$$

$$\geq k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R}\right) - \max_{x\in\partial B_\varepsilon}|u(x)| - \max_{x\in\partial B_\varepsilon}|v(x)| \geq \left(\frac{k}{\varepsilon} - \max_{x\in\partial B_\varepsilon}|u(x)|\right) - \left(\frac{k}{R} + C\right).$$

Поскольку по условию $\max_{x\in\partial B_\varepsilon}|u(x)| = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon \to +0$, то существует ε_0 $(0 < \varepsilon_0 < R)$ такое, что для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняется неравенство $\max_{x\in\partial B_\varepsilon}|u(x)| \leq \frac{k}{2\varepsilon}$, то есть

$$w_\pm(x)|_{\partial B_\varepsilon} \geq \frac{k}{2\varepsilon} - \left(\frac{k}{R} + C\right)$$

Таким образом, при фиксированном $k>0$ для произвольного поло-

жительного $\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_0, \dfrac{k}{2(k/R+C)}\right\} = \varepsilon_1$ выполняется условие

$$w_{\pm}(x)|_{\partial B_R \cup \partial B_\varepsilon} \geq 0.$$

Из принципа максимума (в данном случае минимума) для функций, гармонических в ограниченной области (в данном случае $B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$), получаем, что для всех положительных значений $\varepsilon < \varepsilon_1$ выполняется неравенство

$$w_{\pm}(x) \geq 0 \text{ â } \overline{B_R} \setminus B_\varepsilon$$

или, что тоже самое,

$$w_{\pm}(x) \geq 0 \text{ â } \overline{B_R} \setminus \{x_0\}.$$

Таким образом, пришли к тому, что

$$\mp(u(x) - v(x)) \leq k\left(\frac{1}{|x - x_0|} - \frac{1}{R}\right), \quad x \in \overline{B_R} \setminus \{x_0\},$$

то есть

$$|u(x) - v(x)| \leq k\left(\frac{1}{|x - x_0|} - \frac{1}{R}\right), \quad x \in \overline{B_R} \setminus \{x_0\}.$$

Фиксируя произвольную точку $x \in \overline{B_R} \setminus \{x_0\}$ и устремляя k к нулю, получаем, что $u(x)=v(x)$ в $\overline{B_R} \setminus \{x_0\}$. Теперь доопределение функции $u(x)$ в x_0 очевидно:

$$u(x_0) = v(x_0)$$

■

Замечание 3 Это доказательство без труда обобщается на случай $\mathbf{R}^n$, используя вид функций $\Gamma(x)$, приведенный в §28.

§34. Функция Грина задачи Дирихле. Симметричность функции Грина. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина

34.1. Определение функции Грина. Перейдем теперь к изучению задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в $\mathbf{R}^3$.

Определение 1. Пусть D – область в $\mathbf{R}^3$. *Функцией Грина* задачи Дирихле (оператора Лапласа) для этой области называется функция $G(x,\xi)$, определенная для любых $x \in D$ и $\xi \in \overline{D}$, $\xi \neq x$, принадлежащая при каждом фиксированном x из D классу $C_\xi^2(D \setminus \{x\}) \cap C_\xi(\overline{D} \setminus \{x\})$ по переменной ξ и удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $G(x,\xi)|_{\xi \in \partial D} = 0$;

2) $\Delta_\xi G(x,\xi) = 0$, $\xi \in D \setminus \{x\}$;

3) $G(x,\xi) = \dfrac{1}{4\pi|x-\xi|} + o\left(\dfrac{1}{|x-\xi|}\right)$ при $\xi \to x$.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что x здесь выступает в роли параметра.

Введем функцию $g(x,\xi)$:

$$g(x,\xi) = G(x,\xi) - \frac{1}{4\pi|x-\xi|}$$

Для фиксированного $x \in D$ эта функция принадлежит классу $C_\xi^2(D \setminus \{x\}) \cap C_\xi(\overline{D} \setminus \{x\})$ и является гармонической в области $D \setminus \{x\}$ по переменной ξ, как разность двух функций, обладающих этими свойствами. При $\xi \to x$ функция $g(x,\xi) = o\left(\dfrac{1}{|x-\xi|}\right)$ Следовательно, по теореме о стирании особенности $g(x,\xi)$ имеет предел при $\xi \to x$ и после доопределения по непрерывности в точке $\xi = x$ становится гармонической по ξ во всей области D

Таким образом условия 2 и 3 эквивалентны условию

2') $G(x,\xi) = \dfrac{1}{4\pi|x-\xi|} + g(x,\xi)$, где при каждом фиксированном $x \in D$ функция $g(x,\xi)$ является гармонической в области D функцией переменной ξ из класса $C_\xi(\overline{D})$

Следовательно, построение функции Грина эквивалентно реше-

нию задач Дирихле

$$g(x,\xi) \in C_\xi^2(D) \cap C_\xi(\overline{D}), \qquad (34.1)$$

$$\Delta_\xi g(x,\xi) = 0, \ \xi \in D, \qquad (34.2)$$

$$g(x,\xi)\big|_{\xi\in\partial D} = -\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \qquad (34.3)$$

для каждого $x \in D$.

34.2. Физический смысл функции Грина. Пусть граница ∂D области D – заземленная электропроводящая поверхность, в точке $x \in D$ расположен единичный электрический заряд. Тогда $G(x,\xi)$ есть значение потенциала, индуцированного в точке $\xi \in \overline{D}$ (см. рис 17).

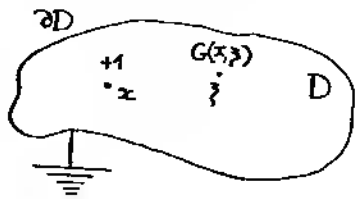

Рис. 17

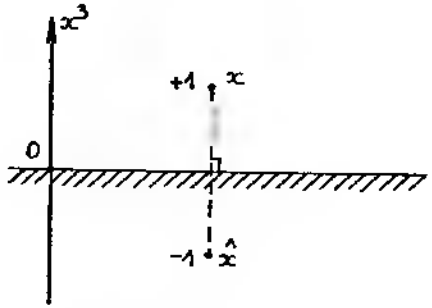

Рис. 18

Это дает возможность использовать для построения функций Грина для областей со свойствами симметрии метод отражения, известный из курса общей физики.

Пример 1. Найти функцию Грина для полупространства $D = \{x : x^3 > 0\}$.

Решение. Симметричной к точке $x = (x^1, x^2, x^3)$ относительно плоскости $\partial D = \{x : x^3 = 0\}$ является точка $\hat{x} = (x^1, x^2, -x^3)$. Будем искать функцию Грина в следующем виде

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi|x-\xi|} + \frac{Q}{4\pi|\hat{x}-\xi|},$$

что соответствует помещению в точку $\hat{x}$ воображаемого заряда Q (см. рис. 18). Постоянную Q найдем из условия $G(x,\xi)\big|_{\xi\in\partial D} = 0$, которое, как легко видеть, выполняется при $Q = -1$. Следовательно,

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi|x-\xi|} - \frac{1}{4\pi|\hat{x}-\xi|}.$$

Итак, построена функция Грина для полупространства. Отметим интересное свойство полученной функции – симметричность

$$G(x,\xi) = G(\xi, x)$$

Этот пример получит дальнейшее развитие в конце параграфа.

34.3. Свойства функции Грина. Естественно возникает вопрос о существовании, единственности и симметричности функции Грина.

<u>Теорема 1.</u> Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с такой достаточно гладкой границей ∂D, что можно определить правильную нормальную производную на ∂D (см §19) Тогда

1) существует и притом единственная функция Грина $G(x,\xi)$ для области D;

2) функция $G(x,\xi)$ имеет на границе ∂D области D правильную нормальную производную $\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(x,\xi)$, $(x,\xi) \in D \times \partial D$;

3) функция $G(x,\xi)$ является симметричной:

$$G(x,\xi) = G(\xi, x) \text{ для } x \text{ è } \xi \in D, \ x \neq \xi;$$

4) функция $G(x,\xi)$ является непрерывной на множестве $M = \{(x,\xi) \ . \ x \in D, \ \xi \in D, \ x \neq \xi\}$.

Доказательство теоремы 1

1) Для доказательства существования и единственности воспользуемся тем фактом, что построение функции Грина эквивалентно решению для каждого $x \in D$ внутренней задачи Дирихле (34.1),(34.2),(34.3). Заметим, что функция $-\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$, входящая в граничное условие, является непрерывной по ξ на ∂D для всех

$x \in D$. Следовательно, решения этих задач Дирихле существуют (этот факт будет доказан в завершение курса в §47). Единственность же функции Грина следует из единственности решения внутренней задачи Дирихле, доказанной в §23.

2) Факт существования правильной нормальной производной оставим без доказательства (см. [7]).

3) Вопрос о симметричности является содержательным, так как на функцию Грина по переменной x никаких ограничений не накладывалось. Пусть x_1 и x_2 – произвольные внутренние точки области D, $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим две функции переменной ξ:

$$f_1(\xi) = G(x_1, \xi) \text{ и } f_2(\xi) = G(x_2, \xi).$$

Пусть B_1 и B_2 – непересекающиеся шары с центрами в точках x_1 и x_2 соответственно, лежащие вместе со своими замыканиями внутри области D. Учтем, что функции f_1 и f_2 являются гармоническими в области $D \setminus (\overline{B_1} \cup \overline{B_2})$, и воспользуемся второй формулой Грина для этой области, разбив интеграл по поверхности на три (по ∂D, ∂B_1 è ∂B_2)

$$0 = \iiint\limits_{D \setminus (\overline{B_1} \cup \overline{B_2})} \left(f_2(\xi)\Delta f_1(\xi) - f_1(\xi)\Delta f_2(\xi) \right) d\xi =$$

$$= \iint\limits_{\partial D} \left(f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} \right) ds + \iint\limits_{\partial B_1} \left(f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} \right) ds +$$

$$+ \iint\limits_{\partial B_2} \left(f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} \right) ds, \qquad (34.4)$$

где n – внешняя единичная нормаль по отношению к области $D \setminus (\overline{B_1} \cup \overline{B_2})$. Интеграл по ∂D равен нулю, так как $f_1(\xi)\big|_{\partial D} = G(x_1, \xi)\big|_{\xi \in \partial D} = 0$ и $f_2(\xi)\big|_{\partial D} = G(x_2, \xi)\big|_{\xi \in \partial D} = 0$. Далее воспользуемся теоремой 2 из §32 для функций f_1 и f_2:

$$f_1(x_2) = -\iint\limits_{\partial B_2} f_1(\xi) \frac{\partial G(x_2, \xi)}{\partial n_\xi} ds_\xi + \iint\limits_{\partial B_2} G(x_2, \xi) \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial n_\xi} ds_\xi =$$

$$= \iint\limits_{\partial B_2} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} ds - \iint\limits_{\partial B_2} f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} ds,$$

аналогично

$$f_2(x_1) = \iint\limits_{\partial B_1} f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} ds - \iint\limits_{\partial B_1} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} ds.$$

Здесь учтено, что n_ξ – внешняя нормаль по отношению к шарам B_1 и B_2, а n – внутренняя. Объединяя эти выражения с равенством (34.4), получаем

$$0 = f_2(x_1) - f_1(x_2) = G(x_2, x_1) - G(x_1, x_2).$$

4) Непрерывность является следствием симметричности. Действительно, пусть (x_0, ξ_0) и (x, ξ) принадлежат M, тогда

$$|G(x, \xi) - G(x_0, \xi_0)| \le |G(x, \xi) - G(x, \xi_0)| + |G(x, \xi_0) - G(x_0, \xi_0)| =$$

$$= |G(x, \xi) - G(x, \xi_0)| + |G(\xi_0, x) - G(\xi_0, x_0)|.$$

Остается устремить (x, ξ) к (x_0, ξ_0) и учесть, что по определению функция $G(x, \xi)$ непрерывна по переменной ξ. Получим

$$|G(x, \xi) - G(x_0, \xi_0)| \to 0 \text{ при } (x, \xi) \to (x_0, \xi_0)$$

■

Замечание 2. Для изучения свойств функций Грина для неограниченных областей необходим более тонкий анализ

34.4. Использование функции Грина для решения задачи Дирихле. Перейдем к обсуждению главного вопроса – целесообразности построения функции Грина.

Теорема 2. Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с достаточно гладкой границей ∂D, $G(x, \xi)$ – функция Грина для D, $u_0(x) \in C(\partial D)$ и $f(x) \in C(D) \cap L_2(D)$ – заданные функции. Если решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x), \ x \in D \qquad (34.5)$$

с граничными условиями

$$u(x)\big|_{\partial D} = u_0(x) \qquad (34.6)$$

существует в классе $C^2(D) \cap \overline{C}(D)$, причем $u(x)$ имеет на границе

∂D области D правильную нормальную производную $\dfrac{\partial u}{\partial n_\xi}$, то справедлива следующая формула.

$$u(x) = -\iint\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi - \iiint\limits_{D} f(\xi)G(x,\xi)d\xi,\ x \in D \quad (34.7)$$

Доказательство теоремы 2. При условии существования решения для него можно воспользоваться теоремой 2 из §32:

$$u(x) = \iint\limits_{\partial D} G(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi - \iint\limits_{\partial D} u_0(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}ds_\xi -$$

$$-\iiint\limits_{D} f(\xi)G(x,\xi)d\xi,\ x \in D.$$

Учитывая, что $G(x,\xi)\big|_{\xi\in\partial D} = 0$, получаем формулу (34.7) ■

Замечание 3 Подчеркнем, что сформулированные требования на функцию $f(x)$ не обеспечивают, вообще говоря, существования решения

Замечание 4 Хотя теорема 2 сформулирована и доказана для случая ограниченной области , формула (34.7) иногда оказывается справедливой и для неограниченных областей (при дополнительных условиях на функции f и u_0), что иллюстрирует следующий

Пример 2 Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $D = \{x \quad x^3 > 0\}$

$$\Delta u(x) = 0,\ x^3 > 0;$$

$$u(x)\big|_{x^3=0} = u_0(x),\ u_0(x) \in C(\{x \quad x^3 = 0\})$$

Решение. В примере 1 была построена функция Грина для области D

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi|x-\xi|} - \frac{1}{4\pi|\hat{x}-\xi|}$$

Вычислим производную $\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}$ по внешней нормали n_ξ к ∂D.

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}\right|_{\xi^3=0} = \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^3=0} = \frac{x^3}{4\pi|x-\xi|^3} + \frac{\hat{x}^3}{4\pi|\hat{x}-\xi|^3}.$$

Далее, рассмотрим в D функцию $u(x)$, задаваемую формулой (34.7):

$$u(x) = \frac{x^3}{4\pi}\iint\limits_{\xi^3=0} u_0(\xi)\left(\frac{1}{|x-\xi|^3} + \frac{1}{|\hat{x}-\xi|^3}\right)d\xi^1 d\xi^2.$$

Легко видеть, что в случае, когда функция u_0 является, например, финитной, так построенная функция $u(x)$ является гармонической в D, а выполнение граничных условий можно проверить, совершив предельный переход при $x^3 \to +0$.

§35. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре (интеграл Пуассона). Преобразование Кельвина

35.1. Функция Грина для шара. Построим функцию Грина для шара $B_R \subset \mathbf{R}^3$ радиуса R с центром в точке O, в которую перенесем начало координат

Пусть x^* – образ точки $x \neq 0$ при инверсии относительно сферы ∂B_R, то есть

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x,\ x \neq 0. \quad (35.1)$$

Замечание 1 Обратным к этому отображению является оно само:

$$(x^*)^* = \frac{R^2}{|x^*|^2}x^* = \frac{R^2}{R^4/|x|^2}\cdot\frac{R^2}{|x|^2}x = x$$

Покажем, что для фиксированной точки $x \neq 0$ отношение расстояний $\dfrac{|\xi - x^*|}{|\xi - x|}$ при $\xi \in \partial B_R$ равно константе, и найдем эту константу·

$$|\xi - x^*|^2 = |\xi|^2 + |x^*|^2 - 2(\xi, x^*) = R^2 + \frac{R^4}{|x|^2} - 2(\xi, x)\frac{R^2}{|x|^2} =$$

$$= \frac{R^2}{|x|^2}\left(|x|^2 + R^2 - 2(\xi, x)\right) = \frac{R^2}{|x|^2}|\xi - x|^2,$$

следовательно,

$$\frac{|\xi - x^*|}{|\xi - x|} = \frac{R}{|x|}, \ x \neq 0, \ \xi \in \partial B_R \qquad (35.2)$$

Поместим в точку x^* воображаемый заряд Q, в каждой точке границы шара B_R "уравновешивающий" поле единичного заряда, расположенного в точке x:

$$\left(\frac{1}{|\xi - x|} + \frac{Q}{|\xi - x^*|}\right)\Bigg|_{\xi \in \partial B_R} = 0.$$

Отсюда находим

$$Q = -\frac{|\xi - x^*|}{|\xi - x|}\Bigg|_{\xi \in \partial B_R} = -\frac{R}{|x|}$$

Следовательно, функция Грина $G(x,\xi)$ для шара B_R при $x \neq 0$ имеет вид

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{R}{|x| \cdot |x^* - \xi|}\right).$$

Доопределим ее для $x = 0$ по непрерывности:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{|x - \xi|} - \dfrac{R}{|x| \cdot |x^* - \xi|}\right), & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{|\xi|} - \dfrac{1}{R}\right), & x = 0 \end{cases} \qquad (35.3)$$

Построенная функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет всем свойствам функции Грина:

1) она тождественно равна нулю при $\xi \in \partial B_R$;

2) $\Delta_\xi G(x,\xi) = 0$,

3) для фиксированного $x \in B_R$ при $\xi \to x$ функция

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi|x - \xi|} + O(1) = \frac{1}{4\pi|x - \xi|} + o\left(\frac{1}{|x - \xi|}\right).$$

35.2. Интеграл Пуассона. Найдем производную функции $G(x,\xi)$, определяемой равенством (35.3), по внешней единичной нормали $n_\xi = \dfrac{\xi}{R}$ к поверхности ∂B_R шара B_R. Для этого зафиксируем произвольную точку $y \in \mathbf{R}^3$ и проведем вспомогательные вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi - y|}\Bigg|_{\xi \in \partial B_R} = \left(\nabla_\xi \frac{1}{|\xi - y|}, \frac{\xi}{R}\right) = \left(-\frac{\xi - y}{|\xi - y|^3}, \frac{\xi}{R}\right) = \frac{(y,\xi) - R^2}{R \cdot |\xi - y|^3}.$$

Следовательно, для $x \neq 0$ справедлива цепочка равенств

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(x,\xi)\Bigg|_{\xi \in \partial B_R} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi - x|} - \frac{R}{4\pi|x|}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi - x^*|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(x,\xi) - R^2}{R|\xi - x|^3} - \frac{R}{|x|}\frac{(x^*,\xi) - R^2}{R|\xi - x^*|^3}\right) \overset{(35.2)}{=}$$

$$\overset{(35.2)}{=} \frac{1}{4\pi R|x - \xi|^3}\left((x,\xi) - R^2 - \frac{|x|^2}{R^2}\left((x,\xi)R^2/|x|^2 - R^2\right)\right) =$$

$$= \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R|x - \xi|^3},$$

а для $x = 0$ -

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(x,\xi)\Bigg|_{\xi \in \partial B_R} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi|} = -\frac{R}{4\pi|\xi|^3}$$

Объединяя, получаем

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(x,\xi)\Big|_{\xi\in\partial B_R} = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R|x-\xi|^3}$$

Применение этой формулы в сочетании с теоремой 2 из §34 дает интегральное представление для функции, гармонической в шаре.

Теорема 1. Пусть функция $u_0(x)$ непрерывна на сфере $\partial B_R = \{x : |x| = R\}$. Тогда решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $B_R = \{x . |x| < R\}$

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in B_R$$

с граничными условиями

$$u(x)\big|_{\partial B_R} = u_0(x)$$

представляется следующим *интегралом Пуассона*:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \iint\limits_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)}{|x-\xi|^3} ds_\xi . \qquad (35.4)$$

Замечание 2. Формула (35.4) получена в предположении, что решение существует. Однако гармоничность функции, задаваемой формулой (35.4), внутри шара B_R очевидна, а выполнение краевых условий можно было бы проверить непосредственным предельным переходом при $|x| \to R - 0$

Упражнение 1 Убедитесь, что при $u_0(x) \equiv 1$ по формуле (35.4) получается следующая функция:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R \\ -\dfrac{R}{|x|}, & |x| > R \end{cases}$$

35.3. Преобразование Кельвина. Заметим, что функция $u(x)$, задаваемая формулой (35.4), является гармонической и вне замыкания шара B_R, то есть при $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{B_R}$ или, что то же самое, $x^* \in B_R$. Это следует из того, что функция $\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}\Big|_{\xi\in\partial B_R}$ является

гармонической по x в областях $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{B_R}$ и B_R, и лапласиан можно вносить под знак интеграла из формулы (35 4) по компакту ∂B_R Пусть $v(x^*)$ – функция переменной x^*, определенная для $x^* \in B_R$ и задаваемая формулой (35 4). Выразим $v(x^*)$ через функцию $u(x)$ ·

$$v(x^*) = \frac{R^2 - |x^*|^2}{4\pi R} \iint\limits_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)}{|x^*-\xi|^3} ds_\xi = \frac{R^2 - R^4/|x|^2}{4\pi R} \frac{|x|^3}{R^3} \iint\limits_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)}{|x-\xi|^3} ds_\xi$$

$$= \frac{|x|}{R} \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R} \iint\limits_{|\xi|=R} \frac{u_0(\xi)}{|x-\xi|^3} ds_\xi = -\frac{|x|}{R} u(x) = -\frac{R}{|x^*|} u\left(\frac{R^2}{|x^*|^2} x^*\right)$$

Полученное соотношение дает основания для введения следующего понятия.

Определение 1. Пусть D и D^* – области, симметричные относительно сферы $S_R = \{x : |x| = R\}$ [1]), причем $0 \notin D$ и $0 \notin D^*$. *Преобразованием Кельвина* называется отображение, переводящее произвольную функцию $u(x)$, определенную в области D, в функцию $v(x^*)$, определенную на D^* и задаваемую формулой

$$v(x^*) = \frac{R}{|x^*|} u\left((x^*)^*\right) = \frac{R}{|x^*|} u\left(\frac{R^2}{|x^*|^2} x^*\right). \qquad (35\ 5)$$

Свойства такого преобразования устанавливает следующая

Теорема 2. Пусть D и D^* – области, симметричные относительно сферы $S_R = \{x : |x| = R\}$, причем $0 \notin D$ и $0 \notin D^*$. Тогда

1) преобразование Кельвина функций, заданных на области D^*, является обратным к преобразованию Кельвина функций, заданных на D;

2) если функция $u(x)$ является гармонической в D, то ее образ $v(x^*)$ при преобразовании Кельвина – гармоническая в D^* функ-

[1]) То есть точка x принадлежит D тогда и только тогда, когда $x^* \in D^*$

ция.

Доказательство теоремы 2

1) Пусть произвольная функция $u(x)$, заданная на D, при преобразовании Кельвина перешла в функцию $v(x^*)$, которая, в свою очередь, при повторном преобразовании Кельвина перешла в функцию $w((x^*)^*) \equiv w(x)$. Тогда из формулы (35.5) вытекает следующая цепочка равенств:

$$w(x) = \frac{R}{|x|} v(x^*) = \frac{R}{|x|} \frac{R}{|x^*|} u((x^*)^*) = u(x),$$

так как $|x| \cdot |x^*| = |x| \frac{R^2}{|x|} = R^2$

2) Справедливость этого утверждения для случая, когда область D является шаром с границей $\partial D = S_R$, следует из рассуждений, приведших к введению понятия преобразования Кельвина. Для произвольной области D необходимы более тонкие соображения Отметим, что преобразование Кельвина локальное, то есть связано с поведением функции только в окрестности точки, в которой оно производится. Кроме того, равенство нулю лапласиана в данной точке для преобразованной по Кельвину функции формально является фактом чисто алгебраическим, вытекающим из формул преобразования частных производных, которые от вида области никак не зависят. Следовательно, какова бы ни была форма области D, при преобразовании Кельвина образ гармонической в D функции гармоничен в D^* ■

Преобразование Кельвина применяется при решении задач Дирихле для уравнения Лапласа в неограниченных областях.

Пример 1 Рассмотрим еще один раз задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $D = \{x \quad x^3 > 0\}$:

$$\Delta u(x) = 0, \ x^3 > 0; \tag{35.6}$$

$$u(x)|_{x^3=0} = u_0(x), \ u_0(x) \in C(\{x : \ x^3 = 0\}). \tag{35.7}$$

Для решения этой задачи поступим иначе, чем в примере 2 из §34.

Пусть S_R – сфера радиуса R с центром в точке $x_0 = (0,0,-R)$. Проведем преобразование Кельвина относительно этой сферы Для начала заметим, что

$$D^* = B_{R/2} \equiv \{x \quad |x - \tfrac{1}{2}x_0| < \tfrac{1}{2}R\}.$$

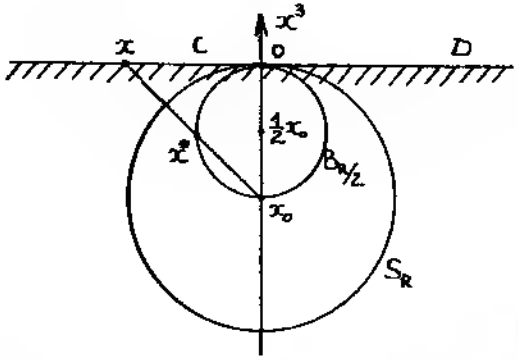

Рис 19

Действительно, пусть $x \in \partial D$ и $|x| = C$, проверим выполнение уравнения сферы $\partial B_{R/2}$ для x^* (см. рис. 19):

$$|x^* - \tfrac{1}{2}x_0|^2 = \left(\frac{C \cdot R^2}{R^2 + C^2}\right)^2 + \left(\frac{R^3}{R^2 + C^2} - \frac{R}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{C^2R^4 + \frac{1}{4}R^6 - \frac{1}{2}R^4C^2 + \frac{1}{4}R^2C^4}{(R^2 + C^2)^2} = \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R^4 + 2R^2C^2 + C^4}{(R^2 + C^2)^2} = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Таким образом, задача (35 6),(35.7) перейдет в следующую

$$\Delta v(x^*) = 0, \ x^* \in D^* = B_{R/2}; \tag{35.8}$$

$$v(x^*)|_{x^* \in \partial B_{R/2}} = v_0(x^*), \tag{35.9}$$

где $v_0(x^*) = \frac{R}{|x^* - x_0|} u_0\left(x_0 + \frac{R^2}{|x^* - x_0|^2}(x^* - x_0)\right)$, причем функция $v_0(x^*)$ определена и непрерывна в точке $x^* = x_0$ только при условии существования конечного предела

$$\lim_{\substack{x^* \to x_0 \\ x^* \in \partial B_{R/2}}} v_0(x^*) = \frac{1}{R} \lim_{\substack{|x| \to \infty \\ x^3 = 0}} |x - x_0| u_0(x). \qquad (35\ 10)$$

Следовательно, если выполнено требование (35 10), то для задачи (35 8),(35.9) можно воспользоваться теоремой 1:

$$v(x^*) = \frac{\frac{R^2}{4} - \left|x^* - \frac{x_0}{2}\right|^2}{2\pi R} \iint\limits_{\left|\xi - \frac{x_0}{2}\right| = \frac{R}{2}} v_0(\xi) \frac{1}{|x^* - \xi|^3} ds_\xi$$

Далее остается только совершить обратное преобразование Кельвина, чтобы вернуться к исходным функциям. После всех преобразований и упрощений из окончательной формулы для $u(x)$ должен исчезнуть радиус R, который изначально был выбран произвольным

§36. Регулярность гармонической функции на бесконечности. Задача Пуассона: единственность решения, формула Пуассона

36.1. Регулярность гармонической функции. Условие (35 10), возникшее в примере 1 предыдущего параграфа, является далеко не случайным

Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$.

Определение 1. Функция $u(x)$, гармоническая в $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$, называется *регулярной* (на бесконечности), если выполнены следующие условия:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \ |\nabla u(x)| = O(|x|^{-2}) \text{ при } |x| \to \infty.$$

Теорема 1. Если на бесконечности гармоническая в $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ функция $u(x)$ стремится к нулю, то она регулярна

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$. Произведем преобразование Кельвина относительно сферы единичного радиуса:

$$v(x^*) = \frac{1}{|x^*|} u\left(\frac{x^*}{|x^*|^2}\right).$$

Тогда $x^* = \frac{x}{|x|^2} \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$, а следовательно, $|x^*| v(x^*) = u(x) \xrightarrow{x^* \to 0} 0$, то есть $v(x^*) = o(|x^*|^{-1})$ при $x^* \to 0$. Поэтому по теореме о стирании особенности из §33 функцию $v(x^*)$ можно доопределить в нуле по непрерывности, после чего она станет гармонической в окрестности $x^* = 0$. Следовательно, существует проколотая окрестность $\mathring{U}$ точки $x^* = 0$ и постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$|v(x^*)| \le C_1, \ |\nabla v(x^*)| \le C_2 \text{ для } x^* \in \mathring{U}.$$

Произведем повторное преобразование Кельвина, которое переведет функцию $v(x^*)$ в исходную функцию $u(x)$. Тогда

$$u(x) = \frac{1}{|x|} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = O(|x|^{-1}), \ |x| \to \infty.$$

Теперь оценим частные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}$, $j = 1,2,3$ в окрестности $x = \infty$ ($x \in \mathring{U}^*$):

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{|x|} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right)\right| = \left|\frac{x^j}{|x|^2} v(x^*) - \frac{1}{|x|} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v(x^*)}{\partial (x^*)^i} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{x^i}{|x|^2}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{C_1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|} \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial v(x^*)}{\partial (x^*)^i}\right| \left(\frac{\delta^{ij}}{|x|^2} + 2\frac{|x^i x^j|}{|x|^4}\right) \le \frac{C_1}{|x|^2} + \frac{9C_2}{|x|^3},$$

где $\delta^{ij} \equiv \delta_{ij} \equiv \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$ – δ-символ Кронекера. Следовательно, для модуля градиента $u(x)$ в окрестности $x = \infty$ справедливо неравенство

$$|\nabla u(x)| \le \sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right| - \frac{3C_1}{|x|^2} + \frac{27C_2}{|x|^3},$$

то есть

$$|\nabla u(x)| = O\left(|x|^{-2}\right),\ |x| \to \infty.$$

■

36.2. Задача Пуассона формулируется следующим образом. *для данной непрерывной в* $\mathbf{R}^3$ *функции* $f(x)$ *найти функцию* $u(x)$ *из класса* $C^2(\mathbf{R}^3)$, *стремящуюся к нулю на бесконечности и удовлетворяющую в* $\mathbf{R}^3$ *уравнению*

$$-\Delta u(x) = f(x). \qquad (36.1)$$

Изучим вопросы существования и единственности решения этой задачи.

Теорема 2. Если решение задачи Пуассона существует, то оно единственно.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – два решения задачи Пуассона (36.1). Тогда их разность $\tilde{u}(x) = u_1(x) - u_2(x)$ – гармоническая в $\mathbf{R}^3$ функция, причем $\tilde{u}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Рассмотрим шары B_r и B_R с центрами в начале координат и радиусами r и R соответственно, $R>r$. Воспользуемся для функции $\tilde{u}(x)$ и шара B_R принципом максимума:

$$\max_{x\in B_r}|\tilde{u}(x)| \le \max_{x\in B_R}|\tilde{u}(x)| \le \max_{x\in\partial B_R}|\tilde{u}(x)|.$$

Сделаем предельный переход при $R \to \infty$:

$$\max_{x\in B_r}|\tilde{u}(x)| \le \max_{x\in\partial B_R}|\tilde{u}(x)| \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$$

Следовательно, $\tilde{u}(x) = 0$ в B_r, что в силу произвольности радиуса r означает равенство $u_1(x) = u_2(x)$ в $\mathbf{R}^3$ ■

Следствие 1. Единственной гармонической во всем пространстве и регулярной на бесконечности функцией является функция, тождественная нулю.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ – финитная функция из класса $C^2(\mathbf{R}^3)$. Тогда задача Пуассона разрешима, причем решение представляется следующей формулой:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{f(\xi)}{|x-\xi|}d\xi. \qquad (36.2)$$

Доказательство теоремы 3.

1) Приведем рассуждения, из которых получается представление (36.2). В предположении, что решение задачи Пуассона существует, для него можно воспользоваться интегральным представлением (32.3), выбрав в качестве области D шар B_R с центром в нуле и радиусом R:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{B_R}\frac{1}{|x-\xi|}\Delta u(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B_R}\left[\frac{1}{|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}\right]ds_\xi$$

Найдем порядки убывания при $|\xi| \to \infty$ некоторых подынтегральных функции, пользуясь регулярностью на бесконечности функции $u(x)$ ($f(x)$ – финитная, поэтому $u(x)$ в некоторой окрестности бесконечности является гармонической и по условию стремится к нулю):

$$\frac{1}{|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \sim \frac{1}{|\xi|^3},\ u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|} \sim \frac{1}{|\xi|^3} \text{ при } R = |\xi| \to \infty$$

Остается сделать предельный переход при $R \to \infty$ и учесть, что

$$\left|\iint_{|\xi|=R}\left[\frac{1}{|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}\right]ds_\xi\right| \le \frac{C}{R^3}4\pi R^2 \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

где C – постоянная, а неравенство справедливо для достаточно больших R.

Отметим еще раз, что выражение, стоящее справа в формуле (36.2), является объемным потенциалом с плотностью f.

2) Заметим, что из единственности представления (36.2) также следует единственность решения задачи Пуассона, но для функций $f(x)$ из более узкого класса, чем в доказанной выше теореме 2

3) Сложнее доказать, что решение поставленной задачи существует. Сделаем это непосредственной проверкой всех условий для

функции $u(x)$, задаваемой формулой (36.2)

Стремление $u(x)$ на бесконечности к нулю очевидным образом следует из ограниченности и финитности функции $f(x)$:

$$|u(x)| \le \frac{1}{4\pi}\operatorname{mes}(\operatorname{supp} f)\cdot \sup_{\xi\in\operatorname{supp} f} f(\xi)\cdot \sup_{\xi\in\operatorname{supp} f}\frac{1}{|x-\xi|} \xrightarrow{|x|\to\infty} 0 \text{ [1]}$$

Далее, перепишем формулу (36.2), пользуясь симметричностью свертки:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(x-\xi)\frac{1}{|\xi|}ds_\xi .$$

Интеграл, стоящий справа в этом равенстве можно два раза дифференцировать по параметру, внося знак дифференцирования под знак интеграла. Действительно, существует число $R_0 > 0$ такое, что $\operatorname{supp} f \subset B_{R_0} \equiv \{x : |x| < R_0\}$. Выберем произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}^3$. Тогда для x из достаточно малой окрестности U точки x_0 интегрирование сводится к интегрированию по компакту $M = \{\xi : |\xi| \le 2R_0 + |x_0|\}$. Остается перейти в сферические координаты

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{M} f(x-\xi(r,\varphi,\theta))r\sin\theta dr d\varphi d\theta$$

Теперь подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема по x в $U\times M$.

Итак, функция $u(x)$, задаваемая формулой (36.2), принадлежит классу $C^2(\mathbf{R}^3)$, и

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|\xi|}\Delta_x f(x-\xi)d\xi = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{|\xi|}\Delta_\xi f(x-\xi)d\xi .$$

Пусть $B_R = \{x : |x| < R\}$ и $B_\varepsilon = \{x : |x| < \varepsilon\}$ – шары, $R > \varepsilon$. Тогда $\Delta u(x)$ можно представить как следующий предел:

[1]) $\operatorname{mes} D$ – мера множества D

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to\infty}}\iiint\limits_{B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}}\frac{1}{|\xi|}\Delta_\xi f(x-\xi)d\xi = \frac{1}{4\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to\infty}}\left[\iiint\limits_{B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}} f(x-\xi)\Delta\frac{1}{|\xi|}d\xi + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\partial B_R\cup\partial B_\varepsilon}\left(\frac{1}{|\xi|}\frac{\partial}{\partial n_\xi}f(x-\xi) - f(x-\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi|}\right)ds_\xi\right].$$

Интеграл по границе ∂B_R равен нулю для достаточно больших радиусов R, поскольку функция f – финитная. Интеграл по области $B_R\setminus\overline{B_\varepsilon}$ также равен нулю, так как функция $\frac{1}{|\xi|}$ – гармоническая

Далее преобразуем оставшийся интеграл по ∂B_ε, учитывая, что на сфере ∂B_ε $n_\xi = -\frac{\xi}{|\xi|}$, $\frac{1}{|\xi|} = \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|\xi|} = \frac{1}{\varepsilon^2}$

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_\xi}f(x-\xi) - \frac{1}{\varepsilon^2}f(x-\xi)\right)ds_\xi$$

Необходимый результат получаем, воспользовавшись теоремой о среднем:

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_\xi}f(x-\xi_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2}f(x-\xi_\varepsilon)\right)4\pi\varepsilon^2 = -f(x),$$

где точка ξ_ε лежит на сфере ∂B_ε ■

Замечание 1. Теорема 3 справедлива для правой части из более широкого класса функций. Именно, достаточно только непрерывности функции $f(x)$, а вместо финитности – следующее требование на скорость убывания на бесконечности.

$$f(x) = O\left(|x|^{-2-\delta}\right),\ |x|\to\infty$$

при каком-нибудь положительном δ.

Замечание 2 С точки зрения теории обобщенных функции теорема 3 является следствием теоремы 1 §28.

§37. Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере (сферические функции)

1. Симметричность и неотрицательная определенность оператора Лапласа-Бельтрами. Целью данного параграфа является построение сферических и шаровых функций, которые используются при решении краевых задач для уравнения Лапласа в областях, обладающих сферической симметрией, например, в шаровом слое $B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}} = \{x:\ R_1 < |x| < R_2\} \subset \mathbf{R}^3$.

Перейдем в сферические координаты и рассмотрим дифференциальный оператор Лапласа-Бельтрами

$$-\Delta_{\varphi\theta}\bullet = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\bullet\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$$

$$\varphi \in [0;2\pi],\ \theta \in [0;\pi],$$

действующий на функции, заданные и дважды непрерывно дифференцируемые на единичной сфере S^2

<u>Теорема 1</u> Оператор Лапласа-Бельтрами симметричен и неотрицательно определен.

Доказательство теоремы 1 Рассмотрим две произвольные функции $u(\varphi,\theta)$ и $v(\varphi,\theta)$ из класса $C^2(S^2)$. Доопределим их на шаровом слое $D = \{(r,\varphi,\theta)\quad 1 < r < 2,\ (\varphi,\theta) \in S^2\}$

$$\tilde{u}(r,\varphi,\theta) = u(\varphi,\theta),\ \tilde{v}(r,\varphi,\theta) = v(\varphi,\theta)$$

Для доказательства теоремы надо установить следующее

1) $\iint\limits_{S^2} \Delta_{\varphi\theta} u \cdot \bar{v}\, ds = \iint\limits_{S^2} u\overline{\Delta_{\varphi\theta} v}\, ds;$

2) $-\iint\limits_{S^2} \Delta_{\varphi\theta} v \cdot \bar{v}\, ds \geq 0$

Здесь $ds = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$

Сделаем вспомогательные выкладки, учтя, что функции $\tilde{v}(r,\varphi,\theta)$ и $\tilde{u}(r,\varphi,\theta)$ не зависят от радиуса r:

$$\iiint\limits_D \tilde{v}\Delta\tilde{u}\, dx = \int\limits_1^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\varphi,\theta}\tilde{u}\right)\tilde{v}r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_1^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\tilde{v}\Delta_{\varphi\theta}\tilde{u}\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \left(\int\limits_1^2 dr\right)\left(\iint\limits_{S^2} v\Delta_{\varphi\theta} u\, ds\right) = \iint\limits_{S^2} v\Delta_{\varphi,\theta} u\, ds$$

1) Докажем теперь симметричность, используя вторую формулу Грина:

$$\iint\limits_{S^2}\Delta_{\varphi,\theta}u\cdot\bar{v}\,ds - \iint\limits_{S^2}u\overline{\Delta_{\varphi\theta}v}\,ds = \iiint\limits_D \Delta\tilde{u}\cdot\bar{\tilde{v}}\,dx - \iiint\limits_D \tilde{u}\overline{\Delta\tilde{v}}\,dx =$$

$$= \iint\limits_{\partial D}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\bar{\tilde{v}} - \tilde{u}\overline{\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}}\right)ds = 0,$$

так как $\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right| = 0$ и $\left|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}\right| = 0$.

2) Для доказательства неотрицательной определенности воспользуемся первой формулой Грина для функций $\tilde{v}$ и $\bar{\tilde{v}}$

$$-\iint\limits_{S^2}\Delta_{\varphi,\theta}v\cdot\bar{v}\,ds = -\iiint\limits_D\Delta\tilde{v}\cdot\bar{\tilde{v}}\,dx = \iiint\limits_D|\nabla\tilde{v}|^2\,dx - \iint\limits_{\partial D}\frac{\partial v}{\partial n}\bar{v}\,ds =$$

$$= \iiint\limits_D|\nabla\tilde{v}|^2\,dx \geq 0.$$

■

Доказанная теорема в сочетании с результатами §19 приводит к следующему утверждению

<u>Следствие 1.</u> Собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами неотрицательны. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

37.2. Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами. Найдем теперь собственные функции $Y_\lambda(\varphi,\theta) \in C^2(S^2)$ оператора "$-\Delta_{\varphi\theta}$"

$$-\Delta_{\varphi,\theta}Y_\lambda(\varphi,\theta) = \lambda^2 Y_\lambda(\varphi,\theta)$$

Произведем разделение переменных, то есть будем искать собственные функции вида $Y_\lambda(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi)Z(\theta)$:

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}Z(\theta)\right)\Phi(\varphi) - \frac{1}{\sin^2\theta}Z(\theta)\frac{d^2}{d\varphi^2}\Phi(\varphi) = \lambda^2 Z(\theta)\Phi(\varphi)$$

Из гладкости функции $Y_\lambda(\varphi,\theta)$ следует, что $Z(\theta) \in C^2[0;\pi]$ и

$\Phi(\varphi) \in C^2(S^1)$, где S^1 – единичная окружность (то есть $\Phi(\varphi) \in C^2[0;2\pi]$ и $\Phi^{(k)}(0) = \Phi^{(k)}(2\pi)$, $k = 0,1,2$).

Далее потребуем, чтобы функция $\Phi(\varphi)$ была собственной для оператора "$-\frac{d^2}{d\varphi^2}$" В §20 было показано, что такими функциями являются $\Phi_n(\varphi)$, $n \in \mathbf{Z}$:

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, & n \geq 0 \\ \sin|n|\varphi, & n < 0 \end{cases},$$

причем
$$-\frac{d^2}{d\varphi^2}\Phi_n(\varphi) = n^2\Phi_n(\varphi)$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}Z(\theta)\right) + \frac{n^2 Z(\theta)}{\sin^2\theta} = \lambda^2 Z(\theta) \qquad (37.1)$$

Из всех решений этого уравнения интерес представляют лишь функции из класса $\tilde{N}^2[0;\pi]$.

Лемма 1. Для фиксированных n и λ не может быть более одного линейно независимого решения уравнения (37.1) из класса $\tilde{N}^1[0;\pi]$

Доказательство леммы 1 Запишем формулу Лиувилля для определителя Вронского $W(\theta)$ двух решений $Z_1(\theta)$ и $Z_2(\theta)$ обыкновенного дифференциального уравнения (37.1):

$$W(\theta) = \begin{vmatrix} Z_1(\theta) & Z_2(\theta) \\ Z_1'(\theta) & Z_2'(\theta) \end{vmatrix} = W(\pi/2)\cdot\exp\left(-\int_{\pi/2}^{\theta}\operatorname{ctg}\xi\, d\xi\right) = \frac{W(\pi/2)}{\sin\theta}$$

Для линейно независимых решений $W(\pi/2) \neq 0$, следовательно, вронскиан $W(\theta)$ неограничен в окрестности точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, что невозможно в случае, когда обе функции $Z_1(\theta)$ и $Z_2(\theta)$ непрерывны на отрезке $[0;\pi]$ вместе со своими производными первого порядка ■

Сделаем часто применяющуюся при работе в сферических координатах замену переменных: $t = \cos\theta$, $t \in [-1;1]$ Тогда оператор дифференцирования по θ преобразуется следующим образом $\frac{d}{d\theta}\bullet = -\sin\theta\frac{d}{dt}\bullet$. Вводя обозначение $Z(\theta(t)) = X(t)$, получаем на функцию $X(t)$ уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(-\sin^2\theta(t)\cdot\frac{d}{dt}X(t)\right) + \frac{n^2}{\sin^2\theta(t)}X(t) = \lambda^2 X(t)$$

или

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}X(t) - 2t\frac{d}{dt}X(t) + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{1-t^2}\right)X(t) = 0. \qquad (37.2)$$

Лемма 2. Нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (37.2), удовлетворяющее условию $Z(\theta) \equiv X(\cos\theta) \in C^1[0;\pi]$, является либо четной функцией (когда $X(0) \neq 0$), либо нечетной функцией (когда $X(0) = 0$).

Доказательство леммы 2. Заметим, что уравнение (37.2) инвариантно относительно замены t на $-t$, следовательно, функция $X(-t)$ так же является решением этого уравнения. И из леммы 1 получаем, что $X(t) = \alpha X(-t)$, где α – постоянная.

Если $X(0) \neq 0$, то $X(0) = \alpha X(0) \neq 0$, то есть $\alpha = 1$.

Если $X(0) = 0$, то $X'(0) \neq 0$, так как функция $X(t)$ отлична от тождественного нуля Следовательно, $X'(0) = -\alpha X'(0) \neq 0$, откуда получаем, что $\alpha = -1$ ■

Эта лемма позволяет обсудить взаимосвязь чисел n и λ.

Утверждение 1. Если для данных n и λ существует нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (37.2), удовлетворяющее условию $Z(\theta) \equiv X(\cos\theta) \in C^1[0;\pi]$, то выполняется неравенство $n^2 \leq \lambda^2$.

Доказательство утверждения 1. Допустим противное: для данных n и λ существует нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (37.2), причем $Z(\theta) \equiv X(\cos\theta) \in C^1[0;\pi]$ и $n^2 > \lambda^2$. Тогда из равенства $X''(0) = (n^2 - \lambda^2)X(0)$ следует, что вторая производная $X''(0)$ имеет тот же знак, что и $X(0)$. Далее рассмотрим два случая.

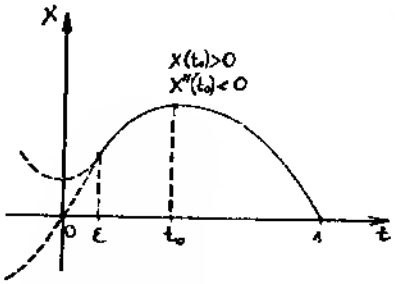

Рис. 20(а)

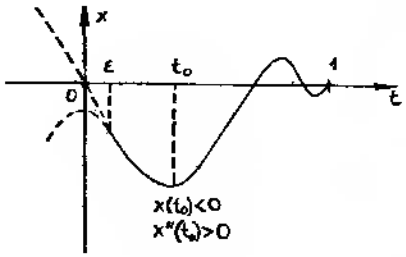

Рис. 20(б)

1) $X(0)=0$. Тогда $X'(0)\neq 0$, и следовательно, существует число $\varepsilon\in(0;1)$ такое, что $X(\varepsilon)X'(\varepsilon)>0$.

2) $X(0)\neq 0$. Тогда согласно лемме 2 функция $X(t)$ является четной, поэтому точка $t=0$ является либо точкой минимума при $X(0)>0$ ($X''(0)>0$), либо точкой максимума при $X(0)<0$ ($X''(0)<0$). Следовательно, в этом случае также существует $\varepsilon\in(0;1)$ такое, что $X(\varepsilon)X'(\varepsilon)>0$.

Итак, $X(\varepsilon)X'(\varepsilon)>0$, но из уравнения (37.2) вытекает, что $X(1)=0$, иначе производная $X'(1)$ обращалась бы в бесконечность ($n^2>\lambda^2\geq 0$, то есть $n^2\neq 0$). Следовательно, на интервале $(\varepsilon;1)$ есть точка t_0 максимума (рис. 20(а)) или минимума (рис. 20(б)), в которой $X(t_0)X''(t_0)<0$, что невозможно в силу уравнения (37.2).

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t_0)=\frac{n^2-\lambda^2\left(1-t_0^2\right)}{\left(1-t_0^2\right)^2}X(t_0),$$

так как по предположению $n^2-\lambda^2\left(1-t_0^2\right)\geq n^2-\lambda^2>0$ ■

Естественно задаться вопросом, существует ли при данных n и λ ($n^2\leq\lambda^2$) нетривиальное решение уравнения (37.1) из класса функций $\tilde{N}^2[0;\pi]$. Без доказательства приведем следующий результат: уравнение (37.1) имеет такое решение только при следующих значениях параметра λ.

$$\lambda^2=\lambda_k^2\equiv k(k+1),\ k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$$

Из утверждения 1 следует, что кратность собственного значения λ_k^2 равна $2k+1$. Действительно, при данном значении $\lambda^2=\lambda_k^2$ параметр n должен удовлетворять неравенству $n^2\leq k(k+1)$, то есть $n=-k,\ldots,-1,0,1$. k – всего $2k+1$ линейно независимых функций $\Phi_n(\varphi)$.

Выпишем ограниченные решения уравнения (37.2). При каждом значении пары параметров $\left(\lambda_k^2,n\right)$ получаем свою функцию $X_k^n(t)$, однако при фиксированном n для всех значений параметра $\lambda_k^2=k(k+1)\geq n^2$ справедлива общая формула для вычисления этой функции.

При $n=0$ уравнение (37.2) выглядит следующим образом:

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}X_k^0(t)-2t\frac{d}{dt}X_k^0(t)+k(k+1)X_k(t)=0. \qquad (37.3)$$

<u>Утверждение 2.</u> Ограниченным частным решением уравнения (37.3) является *полином Лежандра* степени k:

$$X_k^0(t)=P_k(t)\equiv\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^2-1\right)^k \qquad (37.4)$$

Замечание 1. Коэффициент $\dfrac{2k!}{2^k(k!)^2}$ при старшей степени t выбран так, чтобы выполнялось условие $P_k(1)=1$.

Замечание 2. Полиномы Лежандра $P_k(t)$ получаются также в результате ортогонализации системы функций $\left\{t^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ с нормировкой, указанной в замечании 1.

<u>Утверждение 3.</u> Ограниченным частным решением уравнения (37.2) для $\lambda_k^2=k(k+1)$, $0<n<k$ является *присоединенная функция Лежандра* порядка k:

$$X_k^n(t)=P_k^n(t)\equiv\left(1-t^2\right)^{n/2}\frac{d^n}{dt^n}P_k(t). \qquad (37.5)$$

В справедливости этих утверждений легко убедиться непосредственной подстановкой.

Далее для удобства записи будем понимать под P_k^0 полиномы Лежандра P_k

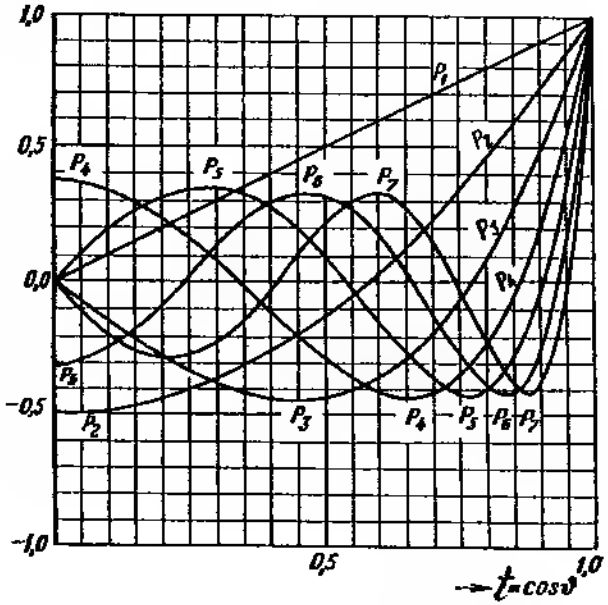

Рис. 21. Полиномы Лежандра $P_k(t)$

Для наглядности выпишем некоторые полиномы Лежандра $P_k(t)$ и присоединенные функции Лежандра $P_k^n(t)$

для $n=0$: $P_k^0(t) \equiv P_k(t)$, в частности,

$$P_0^0(t) = 1,$$

$$P_1^0(t) = t = \cos\theta,$$

$$P_2^0(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(3\cos 2\theta + 1\right),$$

$$P_2^0(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right) = \frac{1}{8}\left(5\cos 3\theta + 3\cos\theta\right);$$

для $n=1$: $P_k^1(t) = \sqrt{1-t^2}\,\dfrac{d}{dt}P_k(t)$, в частности,

$$P_1^1(t) = \sqrt{1-t^2} = \sin\theta,$$

$$P_2^1(t) = 3t\sqrt{1-t^2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta,$$

для $n=2$: $P_k^2(t) = \left(1-t^2\right)\dfrac{d^2}{dt^2}P_k(t)$, в частности,

$$P_2^2(t) = 3\left(1-t^2\right) = \frac{3}{2}\left(1-\cos 2\theta\right)$$

Итог подводят следующие определение и теорема.

Определение 1. Функции $Y_k^n(\varphi,\theta)$ следующего вида.

$$Y_k^n(\varphi,\theta) = \begin{cases} P_k^n(\cos\theta)\cos n\varphi, & n \ge 0 \\ P_k^{|n|}(\cos\theta)\sin|n|\varphi, & n < 0 \end{cases} \qquad (37\ 6)$$

$$n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ |n| \le k$$

называются *сферическими функциями*.

Теорема 2. Сферические функции $Y_k^n(\varphi,\theta)$ являются собственными функциями дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами, отвечающими собственным значениям $\lambda_k^2 = k(k+1)$ соответственно. Кратность λ_k^2 равна $2k+1$.

Обсудим теперь некоторые свойства полиномов Лежандра, присоединенных функций Лежандра и сферических функций.

Теорема 3. При фиксированном $n \ge 0$ присоединенные функции Лежандра или полиномы Лежандра $P_k^n(t)$ $(k = n, n+1, \ldots)$ ортогональны на отрезке $[-1;1]$.

Доказательство теоремы 3. Согласно следствию 1 сферические функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на единичной сфере S^2. Следовательно, для $k \ge n$ и $k' \ge n$, $k \ne k'$ справедливо равенство

$$\iint_{S^2} Y_k^n Y_{k'}^n ds = 0,$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi \int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta) P_{k'}^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0$$

Производя замену переменных $t = \cos\theta$, получаем

$$\int_{1}^{1} P_k^n(t)P_{k'}^n(t)dt = 0.$$

■

Вообще справедлива формула

$$\int_{-1}^{1} P_k^n(t)P_{k'}^n(t)dt = \frac{(k+n)!}{(k-n)!}\frac{2}{2k+1}\delta^{kk'} \text{ при } k.k' \geq n \geq 0.$$

Можно доказать, что присоединенные функции Лежандра или полиномы Лежандра при фиксированном $n \geq 0$ образуют полную ортогональную систему $\left\{P_k^n(t)\right\}_{k=n}^{\infty}$ в $L_2(-1;1)$. Как следствие, сферические функции образуют полную ортогональную систему $\left\{Y_k^{-k}, \quad Y_k^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2\left(S^2\right)$ (ортогональность сферических функций с разными n следует из ортогональности системы функций $\{\Phi_n(\varphi)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ на окружности S^1).

Каждая функция $u(\varphi,\theta) \in L_2\left(S^2\right)$ может быть разложена по сферическим функциям в ряд Фурье

$$u(\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta),$$

где $a_k^n = \left(\iint\limits_{S^2}\left(Y_k^n\right)^2 ds\right)^{-1} \iint\limits_{S^2} uY_k^n ds$ – коэффициенты Фурье.

37.3. Шаровые функции. Найдем гармонические в области $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ функции вида $R_k(r)Y_k^n(\varphi,\theta)$.

$$0 = \Delta\left(R_k Y_k^n\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_k\right)Y_k^n + \frac{1}{r^2}R_k\Delta_{\varphi\theta}Y_k^n.$$

Получаем на функцию $R_k(r)$ уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_k\right) - k(k+1)\frac{1}{r^2}R_k = 0,$$

или

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}R_k(r) + 2r\frac{d}{dr}R_k(r) - k(k+1)R_k(r) = 0$$

Это уравнение Эйлера и его частными решениями являются функ-

ции $R_{k1}(r) = r^k$ и $R_{k2}(r) = r^{-k-1}$.

<u>Определение 2</u> Функции вида $r^k Y_k^n(\varphi,\theta)$ и $\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$ называются *шаровыми функциями*.

Обратим внимание на доказанное свойство шаровых функций.

<u>Утверждение 4.</u> Шаровые функции $\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$ являются гармоническими в $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, а $r^k Y_k^n(\varphi,\theta)$ – во всем $\mathbf{R}^3$

Более того, функции $\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$ являются регулярными на бесконечности

Теперь можно обсудить применение построенных сферических и гармонических функций при решении краевых задач для уравнения Лапласа.

а) В шаре. Найдем гармоническую в шаре B_R ($r<R$) функцию $u(r,\varphi,\theta)$, непрерывно дифференцируемую в $\overline{B_R}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial}{\partial r}u\right)\right|_{r=R} = u_0, \ \alpha^2 + \beta^2 > 0 \qquad (37.7)$$

Для этого разложим функцию $u_0(\varphi,\theta)$ в ряд Фурье по сферическим функциям:

$$u_0(\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta). \qquad (37.8)$$

Тогда решение $u(r,\varphi,\theta)$ можно пытаться формально построить в виде суммы ряда

$$u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k} A_k^n r^k Y_k^n(\varphi,\theta),$$

где коэффициенты A_k^n находятся из условий

$$A_k^n\left(\alpha R^k + \beta k R^{k-1}\right) = a_k^n$$

(требуем почленное выполнение граничных условий), то есть

$$u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R}{\alpha R+\beta k}\left(\frac{r}{R}\right)^k \sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta).$$

Сходимость и дифференцируемость такого ряда в общем случае мы обсуждать не будем (такой вопрос представляет интерес лишь при необходимости доказательства существования решения поставленной задачи, что будет сделано в конце курса для широкого класса областей).

б) Вне замыкания шара. Найдем теперь гармоническую вне замыкания шара $\overline{B_R}$ ($r>R$) функцию $u(r,\varphi,\theta)$, регулярную на бесконечности, непрерывно дифференцируемую в $\mathbf{R}^3 \setminus B_R$ и удовлетворяющую граничным условиям (37.7) Для этого опять разложим функцию $u_0(\varphi,\theta)$ в ряд (37.8). Тогда с учетом условия регулярности решение $u(r,\varphi,\theta)$ можно пытаться строить в виде суммы ряда

$$u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} A_k^n \frac{1}{r^{k+1}} Y_k^n(\varphi,\theta).$$

Здесь коэффициенты A_k^n находятся из условий

$$A_k^n\left(\frac{\alpha}{R^{k+1}} - (k+1)\frac{\beta}{R^{k+2}}\right) = a_k^n$$

Следовательно,

$$u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R}{\alpha R-\beta(k+1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta)$$

в) В шаровом слое Найдем гармоническую в шаровом слое $B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$ ($R_1<r<R_2$) функцию $u(r,\varphi,\theta)$, непрерывно дифференцируемую в $\overline{B_{R_2}} \setminus B_{R_1}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left(\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial}{\partial r} u\right)\Bigg|_{r=R_1} = u_1,\ \alpha_1^2+\beta_1^2>0,$$

$$\left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial}{\partial r} u\right)\Bigg|_{r=R_2} = u_2,\ \alpha_2^2+\beta_2^2>0$$

Для чего разложим функции $u_1(\varphi,\theta)$ и $u_2(\varphi,\theta)$ в ряды Фурье по сферическим функциям:

$$u_1(\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta),\ u_2(\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} b_k^n Y_k^n(\varphi,\theta),$$

и построим формальное решение в виде суммы ряда

$$u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} \left(A_k^n r^k + \frac{B_k^n}{r^{k+1}}\right) Y_k^n(\varphi,\theta)$$

Пара коэффициентов A_k^n, B_k^n найдется из системы уравнений

$$\begin{cases} A_k^n\left(\alpha_1 R_1^k + \beta_1 k R_1^{k-1}\right) + B_k^n\left(\dfrac{\alpha_1}{R_1^{k+1}} - (k+1)\dfrac{\beta_1}{R_1^{k+2}}\right) = a_k^n \\ A_k^n\left(\alpha_2 R_2^k + \beta_2 k R_2^{k-1}\right) + B_k^n\left(\dfrac{\alpha_2}{R_2^{k+1}} - (k+1)\dfrac{\beta_2}{R_2^{k+2}}\right) = b_k^n \end{cases}$$

Проиллюстрируем эти соображения простыми примерами.

Пример 1. Найти гармоническую вне замыкания шара $\overline{B_R}$ функцию $u(r,\varphi,\theta)$

$$\Delta u = 0,\ r > R,$$

регулярную на бесконечности, непрерывно дифференцируемую в $\mathbf{R}^3 \setminus B_R$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left(u - \frac{\partial}{\partial r} u\right)\Bigg|_{r=R} = \sin\theta \cos^2\frac{\theta}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Решение. Заметим, что функция $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ является собственной функцией оператора "$-\frac{d^2}{d\varphi^2}$", отвечающей собственному значению $n^2 = 1$. Следовательно, функцию $\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}$ надо раскладывать в ряд по системе $\left\{P_k^1(\cos\theta)\right\}_{k=1}^{\infty}$

$$\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta =$$

$$= \frac{1}{2}P_1^1(\cos\theta) + \frac{1}{6}P_2^1(\cos\theta).$$

Как результат, решение следует искать в виде

$$u(r,\varphi,\theta)=\left(\frac{A}{r^2}P_1^1(\cos\theta)+\frac{B}{r^3}P_2^1(\cos\theta)\right)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$$

Для постоянных A и B из граничных условий получаем уравнения

$$\frac{A}{R^2}+\frac{2A}{R^3}=\frac{1}{2},\ \frac{B}{R^3}+\frac{3B}{R^4}=\frac{1}{6},$$

из которых находим, что $A=\dfrac{R^3}{4+2R}$ и $B=\dfrac{R^4}{18+6R}$. Следовательно,

$$u=\left(\frac{R}{4+2R}\left(\frac{R}{r}\right)^2P_1^1(\cos\theta)+\frac{R}{18+6R}\left(\frac{R}{r}\right)^3P_2^1(\cos\theta)\right)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right),$$

или

$$u=\left(\frac{R}{4+2R}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\theta+\frac{R}{6+2R}\left(\frac{R}{r}\right)^3\sin\theta\cos\theta\right)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right).$$

Пример 2. Найти гармоническую в шаровом слое $B_2\setminus\overline{B_1}$ функцию $u(r,\varphi,\theta)$:

$$\Delta u=0,\ 1<r<2,$$

непрерывно дифференцируемую в $\overline{B_2}\setminus B_1$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left(3u+\frac{\partial}{\partial r}u\right)\Big|_{r=1}=u_1=15\sin^2\theta\cos^2\varphi,\ u_{|r=2}=u_2=\frac{1}{4}\cos2\theta$$

Решение. Прежде всего разложим функции u_1 и u_2, входящие в граничные условия, по сферическим функциям:

$$u_1=\frac{15}{4}(1-\cos2\theta)(1+\cos2\varphi)=\frac{15}{4}(1-\cos2\theta)\Phi_0(\varphi)+$$

$$+\frac{15}{4}(1-\cos2\theta)\Phi_2(\varphi)=\left(-5P_2(\cos\theta)+5P_0(\cos\theta)\right)\Phi_0(\varphi)+$$

$$+\frac{5}{2}P_2^2(\cos\theta)\Phi_2(\varphi)=-5Y_2^0+5Y_0^0+\frac{5}{2}Y_2^2,$$

$$u_2=\frac{1}{4}\cos2\theta\Phi_0(\varphi)=\left(\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)-\frac{1}{12}P_0(\cos\theta)\right)\Phi_0(\varphi)=$$

$$=\frac{1}{3}Y_2^0-\frac{1}{12}Y_0^0$$

Далее, будем искать решение в виде суммы соответствующих шаровых функций:

$$u=\left(A_1+\frac{B_1}{r}\right)Y_0^0+\left(A_2r^2+\frac{B_2}{r^3}\right)Y_2^0+\left(A_3r^2+\frac{B_3}{r^3}\right)Y_2^0.$$

Для постоянных A_i и B_i, i=1,2,3 из граничных условий получаем три линейных системы уравнений:

$$\begin{cases}3A_1+2B_1=5\\ A_1+\dfrac{B_1}{2}=-\dfrac{1}{12}\end{cases},\ \begin{cases}5A_2=-5\\ 4A_2+\dfrac{B_2}{8}=\dfrac{1}{3}\end{cases};\ \begin{cases}5A_2=\dfrac{5}{2}\\ 4A_3+\dfrac{B_3}{8}=0\end{cases}$$

Здесь верхние уравнения в системах соответствуют граничным условиям при $r=1$, а нижние – при $r=2$. Решения этих линейных систем выглядят следующим образом.

$$A_1=-\frac{16}{3},\ B_1=\frac{21}{2};\ A_2=-1,\ B_2=\frac{104}{3};\ A_k=\frac{1}{2},\ B_3=-16$$

Следовательно,

$$u=\left(-\frac{16}{3}+\frac{21}{2r}\right)Y_0^0+\left(-r^2+\frac{104}{3r^3}\right)Y_2^0+\left(\frac{r^2}{2}-\frac{16}{r^3}\right)Y_2^2$$

Пример 3 Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в пересечении шара B_R с полупространством:

$$\Delta u=0,\ r<R,\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2},$$

с граничными условиями

$$u_{|r=R}=u_0=\cos^2\theta,\ u_{|\theta=\frac{\pi}{2}}=0$$

Решение Заметим, что значение функции u_0 не зависит от угла φ, а следовательно, u_0 надо раскладывать по полиномам Лежандра, причем из граничного условия $u_{|\theta=\frac{\pi}{2}}=0$ получаем, что подходят только полиномы Лежандра $P_k(t)$, обращающиеся в ноль при

$t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, что выполняется для нечетных степеней k:

$$k = 2l + 1,\ l = 0,1,2\ldots$$

(P_{2l+1} – нечетные функции t, P_{2l} – четные). Далее, продолжим функцию $u_0(\theta(t)) = t^2$ на отрезок $[-1;0]$ нечетным образом, тогда в ее разложении по полиномам Лежандра все коэффициенты при четных полиномах будут равны нулю:

$$u_0 = \cos^2\theta \sim \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta)$$

Вычислим коэффициенты a_{2l+1} для $l>1$

$$a_{2l+1} = (4l+3)\int_0^1 t^2 P_{2l+1}(t)dt =$$

$$= \frac{4l+3}{2^{2l+1}(2l+1)!}\int_0^1 t^2 \frac{d^{2l+1}}{dt^{2l+1}}\left(t^2-1\right)^{2l+1} dt =$$

$$= 2\frac{-4l-3}{2^{2l+1}(2l+1)!}\frac{d^{2l-2}}{dt^{2l-2}}\left(t^2-1\right)^{2l+1}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{-4l-3}{2^{2l}(2l+1)!}\frac{d^{2l-2}}{dt^{2l-2}}\left(\sum_{m=0}^{2l+1} C_{2l+1}^{m} t^{2m}(-1)^{2l+1-m}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= (-1)^{l+1}\frac{4l+3}{2^{2l}(2l+1)!}C_{2l+1}^{l-1}(2l-2)!$$

Здесь мы взяли интеграл по частям (необходимое число раз). Преобразуем последнее выражение с учетом того, что для произвольного натурального числа p справедливы равенства $p! = p!!(p-1)!!$ и $2^p p! = (2p)!!$ [1]):

$$a_{2l+1} = (-1)^{l+1}\frac{4l+3}{2^{2l}(2l+1)!}\frac{(2l+1)!}{(l-1)!(l+2)!}(2l-2)! =$$

$$= (-1)^{l+1}\frac{4l+3}{2^{2l}}\frac{(2l-2)!!(2l-3)!!}{(l-1)!(l+2)!} = (-1)^{l+1}\frac{4l+3}{2^{l+1}}\frac{(2l-3)!!}{(l+2)!} =$$

[1]) По определению $(2p)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2p)$, $(2p+1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p+1)$

$$= (-1)^{l+1}(8l+6)\frac{(2l-3)!!}{(2l+4)!!}$$

Если договориться, что $(-3)!! = -1$ и $(-1)!! = 1$, то полученная формула справедлива и для $l = 0,\ 1$ (это легко проверить, непосредственно вычислив интегралы для $l = 0$ и $l = 1$) Следовательно,

$$\cos^2\theta = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}(8l+6)\frac{(2l-3)!!}{(2l+4)!!}P_{2l+1}(\cos\theta)$$

(ряд, стоящий справа, сходится равномерно и абсолютно на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, так как $(8l+6)\frac{(2l-3)!!}{(2l+4)!!} \le \frac{8l+6}{(2l)(2l+2)(2l+4)} \sim \frac{1}{l^2}$)

Решение u будем искать в виде ряда

$$u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l+1} r^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{2l+1} находятся из равенств

$$A_{2l+1}R^{2l+1} = a_{2l+1}.$$

Итак,

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}(8l+6)\frac{(2l-3)!!}{(2l+4)!!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos\theta).$$

Полученный ряд сходится абсолютно и равномерно при $r \le R$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, и для произвольного фиксированного положительного числа δ этот ряд, сколь угодно раз почленно продифференцированный по r и θ, сходится абсолютно и равномерно при $r \le R - \delta$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

Теория Фредгольма для интегральных уравнений

§38. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма

38.1. Общие определения. Перейдем к изучению интегральных уравнений Фредгольма второго рода

Пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, комплекснозначная функция $K(x,y)$ задана на $M \times M$ и принадлежит классу $L_2(M \times M)$. Введем *интегральный оператор K*, действующий на функцию $\varphi(x) \in L_2(M)$ по формуле

$$(K\varphi)(x) = \int_M K(x,y)\varphi(y)dy. \qquad (38.1)$$

При этом функция $K(x,y)$ называется *ядром* интегрального оператора K.

Определение 1. *Интегральным уравнением Фредгольма второго рода* с ядром $K(x,y)$ называется уравнение вида

$$\varphi(x) = \int_M K(x,y)\varphi(y)dy + f(x) \qquad (38.2)$$

или, что тоже самое,

$$(E - K)\varphi = f, \qquad (38.2')$$

где $f(x)$ – заданная на M функция из класса $L_2(M)$, E – тождественный оператор.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (38.2) называют *однородным*.

Определение 2. Ядро $\overline{K(y,x)}$ называется (эрмитово) *сопряженным* к $K(x,y)$ и обозначается $K^*(x,y)$. Уравнение с ядром $K^*(x,y)$ называется *союзным* (к уравнению (38.1)).

Интегральный оператор с ядром $K^*(x,y)$ обозначим через K^* (пока это просто обозначение, подробнее см. §40).

Определение 3. Пусть функция $\varphi(x) \in L_2(M)$, отличная от тождественного нуля, удовлетворяет однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ядром $\lambda K(x,y)$:

$$(E - \lambda K)\varphi = 0, \qquad (38.3)$$

где λ – комплексное число. Тогда $\varphi(x)$ называется *собственной функцией* интегрального оператора K (или ядра $K(x,y)$), а λ – *характеристическим числом*.

Замечание 1 Функция $\varphi(x)$ из определения 3 является собственной функцией оператора K в смысле общего определения из §19, отвечающей собственному значению $1/\lambda$ ($\lambda \neq 0$, так как $\varphi(x)$ отлична от тождественного нуля), но в определении 3 мы отказываемся от нулевых собственных значений.

Замечание 2 Не все операторы вида (38.1) имеют собственные функции. Рассмотрим, например, компакт $M = [a,b] \subset \mathbf{R}$ и интегральный *оператор Вольтерра*

$$(K\varphi)(x) = \int_x^b \varphi(y)dy$$

с ядром

$$K(x,y) = \begin{cases} 1, & a \le x \le y \\ 0, & y < x \le b \end{cases}$$

Тогда уравнение (38.3) принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^b \varphi(y)dy.$$

Следовательно, $\varphi(x)$ дифференцируема и $\varphi'(x) = -\lambda\varphi(x)$, причем $\varphi(b) = \lambda \int_b^b \varphi(y)dy = 0$, откуда получаем, что $\varphi(x) \equiv 0$

Определение 4. Ядро $K(x,y)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде конечной суммы

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{m} g_j(x)h^j(y),$$

где $g_j(x)$, $h^j(y)$, $j=1,\dots m$ – непрерывные на компакте M функции.

Замечание 3 Каждая из систем функций $\{g_j(x)\}_{j=1}^{m}$ и $\{h^j(y)\}_{j=1}^{m}$, без ограничения общности, может считаться линейно независимой Действительно, пусть $h^m(y)=\sum_{j=1}^{m-1}\mu_j h^j(y)$, тогда можно перейти к новым системам функций $\{h^j(y)\}_{j=1}^{m-1}$ и $\{\tilde{g}_j(x)\}_{j=1}^{m-1}$, где $\tilde{g}_j(x)=g_j(x)+\mu_j g_m(x)$.

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{m} g_j(x)h^j(y)=\sum_{j=1}^{m-1} g_j(x)h^j(y)+g_m(x)\sum_{j=1}^{m-1}\mu_j h^j(y)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m-1}\tilde{g}_j(x)h^j(y)$$

При этом, если система функций $\{g_j(x)\}_{j=1}^{m}$ линейно независима, то система $\{\tilde{g}_j(x)\}_{j=1}^{m-1}$ также будет линейно независимой

38.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Опишем алгоритм решения интегральных уравнений с вырожденными ядрами.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$(E-\lambda K)\varphi=f \qquad (38.4)$$

с вырожденным ядром $\lambda K(x,y)=\lambda\sum_{j=1}^{m} g_j(x)h^j(y)$, $(x,y)\in M\times M$, λ – комплексное число. Здесь будем предполагать, что $f(x)\in C(M)$.

Обозначив интегралы

$$\int_M h^j(y)\varphi(y)dy=a^j,\ j=1,\dots m,$$

приходим к уравнению

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{j=1}^{m} a^j g_j(x)+f(x) \qquad (38.5)$$

В предположении существования решения с помощью простых преобразований можно получить систему линейных уравнений относительно m переменных a^j, а именно:

$$a^j=\int_M h^j(y)\varphi(y)dy=\int_M h^j(y)\left(\lambda\sum_{k=1}^{m} a^k g_k(y)+f(y)\right)dy=$$

$$\lambda\sum_{k=1}^{m} a^k\int_M g_k(y)h^j(y)dy+\int_M f(y)h^j(y)dy$$

Вводя обозначения $d_k^j=\int_M g_k(y)h^j(y)dy$ и $f^j=\int_M f(y)h^j(y)dy$, получаем для a^j систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\delta_k^j-\lambda d_k^j\right)a^k=f^j,\ j=1,\dots m,$$

что в матричной форме записи выглядит следующим образом

$$\left(E-\lambda\left\|d_k^j\right\|\right)\cdot\begin{Vmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^m\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}f^1\\ \vdots\\ f^m\end{Vmatrix}, \qquad (38.6)$$

где $\left\|d_k^j\right\|\equiv\begin{Vmatrix}d_1^1 & \cdots & d_m^1\\ \vdots & & \\ d_1^m & \cdots & d_m^m\end{Vmatrix}$, E – единичная матрица

Следующая цепочка равенств доказывает, что, если набор чисел a^j, $j=1,\dots m$ удовлетворяет линейной системе (38.6), то искомое решение задается формулой (38.5):

$$\lambda\int_M K(x,y)\varphi(y)dy\overset{(38.5)}{=}\lambda\int_M\left(\sum_{j=1}^{m} g_j(x)h^j(y)\right)\left(\lambda\sum_{k=1}^{m} a^k g_k(y)+f(y)\right)dy=$$

$$= \lambda\left(\sum_{j\,k=1}^{m}\lambda a^k g_j(x)\int_M h^j(y)g_k(y)dy + \sum_{j=1}^{m} g_j(x)\int_M h^j(y)f(y)dy\right) =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{m} g_j(x)\left(\lambda\sum_{k=1}^{m} d_k^j a^k + f^j\right) \overset{(38.6)}{=} \lambda\sum_{j=1}^{m} g_j(x)a^j \overset{(38.5)}{=} \varphi(x) - f(x).$$

Итак, доказано следующее

Утверждение 1 Решение интегрального уравнения (38.4) с вырожденным ядром эквивалентно решению системы линейных алгебраических уравнений (38.6).

Для однородного союзного уравнения

$$\left(E - \bar{\lambda}K^*\right)\psi = 0 \qquad (38.7)$$

аналогично получаем, что

$$\psi(x) = \bar{\lambda}\sum_{k=1}^{m} b_k \overline{h^k(x)},$$

где коэффициенты $b_k = \int_M \psi(y)\overline{g_k(y)}dy$ должны удовлетворять системе уравнений

$$b_k = \bar{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_j \int_M \overline{h^j(y)}\cdot\overline{g_k(y)}dy$$

или

$$\left\|b_1 \quad \ldots \quad b_m\right\|\cdot\left(E - \bar{\lambda}\left\|\overline{d_k^j}\right\|\right) = 0 \qquad (38.8)$$

Системы (38 6) и (38 8) союзны в смысле определения из линейной алгебры.

38.3. Теоремы Фредгольма для линейных систем. Напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Теорема 1. Пусть D – прямоугольная матрица $l \times m$ Рассмотрим систему относительно $a^1, \ldots a^m$

$$D\begin{Vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{Vmatrix} \qquad (38\ 9)$$

и союзную к ней однородную систему относительно $b_1, \ldots b_l$

$$\left\|b_1 \quad \ldots \quad b_l\right\| D = 0 \qquad (38.10)$$

Тогда справедливы следующие утверждения, называемые соответствующими теоремами Фредгольма:

1) в случае, если D – квадратная матрица (то есть $l = m$) и $\left\|f^j\right\| = 0$, однородная система (38 9) и союзная к ней система (38.10) имеют одинаковое количество линейно независимых решений (или обе не имеют нетривиальных решений);

2) для разрешимости системы (38.9) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $\left\|f^j\right\|$ была ортогональна любому решению $\left\|b_j\right\|$ союзной системы (38.9), то есть $\sum_{j=1}^{l} f^j\overline{b_j} = 0$;

3) (*альтернатива Фредгольма*) либо система (38 9) разрешима при любой правой части $\left\|f^j\right\|$, либо союзная однородная система (38.10) имеет нетривиальные решения

Доказательство теоремы 1.

1) Первая теорема Фредгольма вытекает из того, что число линейно независимых решений однородной системы есть разность числа переменных и ранга матрицы. Действительно, ранги матриц D и $\overline{D}$ равны, и согласно формулировке количества переменных m и l также равны.

2) Уравнение (38.9) описывает следующую ситуацию в l-мерном пространстве $\mathbf{C}^l$: вектор-столбец $\left\|f^j\right\|$ является линейной комбинацией столбцов матрицы D, то есть принадлежит линейному многообразию L, натянутому на столбцы этой матрицы. Система (38.10), соответственно, описывает всевозможные векторы $\left\|b_j\right\|$, перпендикулярные столбцам матрицы D, то есть эта союзная система задает линейное многообразие $L^\perp$ – ортогональное дополнение [1]) L в $\mathbf{C}^l$. Воспользуемся тем, что в конечномерном случае

[1]) Множество $L^\perp$ называется ортогональным дополнением линейного многообразия L в (пред)гильбертовом пространстве H, если

$L^\perp = \{a \quad a \in H,\ (a,b) = 0\ \forall b \in L\}$

прямая сумма подпространств L и $L^{\perp}$ является всем пространством $\mathbf{C}^l$, поэтому $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$. Следовательно, принадлежность вектора-столбца $\left\|f^j\right\|$ подпространству L в точности означает, что этот вектор перпендикулярен всем векторам из $L^{\perp}$, то есть всем решениям уравнения (38.10).

3) Третья теорема Фредгольма является прямым следствием второй ■

38.4. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Вернемся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

В 1903 году для довольно широкого класса интегральных уравнений были сформулированы четыре следующих теоремы Фредгольма.

Теорема 2 (первая теорема Фредгольма). Однородные союзные интегральные уравнения $(E-\lambda K)\varphi = 0$ и $\left(E-\overline{\lambda}K^*\right)\psi = 0$ при фиксированном значении параметра $\lambda \in \mathbf{C}$ имеют либо лишь тождественно равные нулю решения, либо одинаковое количество линейно независимых решений (конечное).

Теорема 3 (вторая теорема Фредгольма). Для разрешимости неоднородного интегрального уравнения $(E-\lambda K)\varphi = f$ необходимо и достаточно, чтобы его правая часть f была ортогональна в $L_2(M)$ любому решению ψ однородного союзного уравнения $\left(E-\overline{\lambda}K^*\right)\psi = 0$, то есть $\int\limits_M f(x)\overline{\psi(x)}dx = 0$.

Теорема 4 (третья теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма). Либо неоднородное уравнение $(E-\lambda K)\varphi = f$ разрешимо при любой правой части f, либо соответствующее однородное уравнение $(E-\lambda K)\varphi = 0$ имеет не равные тождественному нулю решения.

Теорема 5 (четвертая теорема Фредгольма). Множество характеристических чисел интегрального оператора K не более чем счетно с единственной возможной предельной точкой на бесконечности, то есть в произвольном круге $|\lambda| < R$ содержится конечное число характеристических чисел оператора K.

Доказательство теорем Фредгольма для случая вырожденного ядра.

1) Первая теорема Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром является прямым следствием утверждения 1 и первой теоремы Фредгольма для линейной системы с квадратной матрицей $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} - \lambda\left\|d_k^j\right\|$.

2) Для доказательства второй теоремы Фредгольма опять достаточно воспользоваться результатами двух предыдущих пунктов и заметить, что

$$(f,\psi) = \int\limits_M f(x)\overline{\psi(x)}dx = \int\limits_M f(x)\left(\lambda\sum_{j=1}^{m}\overline{b_j}h^j(x)\right)dx =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{m}\overline{b_j}\int\limits_M f(x)h^j(x)dx = \lambda\sum_{j=1}^{m} f^j\overline{b_j},$$

причем в случае $\lambda = 0$ уравнения (38 7) и (38.8) имеют лишь тривиальные решения: $\psi(x) \equiv 0$ и $\left\|b_j\right\| = 0$ соответственно

3) Третья теорема Фредгольма является следствием соответствующей теоремы из предыдущего пункта и того факта, что для квадратной матрицы $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} - \lambda\left\|d_k^j\right\|$ однородные системы уравнений $\boldsymbol{D}\left\|a^j\right\| = 0$ и $\left\|b_j\right\|\boldsymbol{D} = 0$ либо обе имеют нетривиальные решения, либо обе не имеют таковых.

4) Четвертая теорема Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром является даже слабым утверждением, а именно из эквивалентности уравнений (38.4) и (38 6) следует, что комплексное число λ является характеристическим числом оператора K тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет алгебраическому уравнению степени m

$$\det\left(\boldsymbol{E} - \lambda\left\|d_k^j\right\|\right) = 0.$$

Так что для вырожденных ядер число характеристических чисел конечно ■

Замечание 4 Приведенное в предыдущем пункте доказательство трех теорем Фредгольма для линейных систем было бы соблаз-

нительно непосредственно перенести на интегральные уравнения, рассматривая в пространстве функций $L_2(M)$ линейное многообразие $L = \mathrm{Im}(E - \lambda K)$ значений оператора $E - \lambda K$. Но в бесконечномерных гильбертовых пространствах не всегда прямая сумма L и $L^{\perp}$ есть все пространство (необходима замкнутость L, что выполняется, например, для компактных операторов K).

Замечание 5 В §40 теоремы Фредгольма будут доказаны в более общем случае – для непрерывных ядер.

Пример 1 Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y)dy + A\sin x + B \qquad (38.11)$$

где A и B – постоянные

Решение. Ядро уравнения (38.11) является вырожденным:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

поэтому будем действовать по схеме п.2:

$$\varphi(x) = \lambda a^1 \cos x - \lambda a^2 \sin x + A\sin x + B.$$

Для коэффициентов a^1 и a^2 справедливы следующие равенства:

$$a^1 = \int_0^{\pi} \left(\lambda a^1 \cos y - \lambda a^2 \sin y + A\sin y + B\right)\cos y dy = \frac{\pi}{2}\lambda a^1.$$

$$a^2 = \int_0^{\pi} \left(\lambda a^1 \cos y - \lambda a^2 \sin y + A\sin y + B\right)\sin y dy$$

$$= -\frac{\pi}{2}\lambda a^2 + \frac{\pi}{2}A + 2B$$

Итак, решение уравнения (38.11) эквивалентно решению системы уравнений

$$\begin{cases} a^1(2 - \pi\lambda) = 0 \\ a^2(2 + \pi\lambda) = \pi A + 4B \end{cases}. \qquad (38.12)$$

Найдем характеристические числа λ. Для них должны существовать нетривиальные решения однородной системы

$$\begin{cases} a^1(2 - \pi\lambda) = 0 \\ a^2(2 + \pi\lambda) = 0 \end{cases}. \qquad (38.13)$$

Получаем два характеристических числа $\lambda_1 = 2/\pi$ и $\lambda_2 = -2/\pi$ (отметим выполнение четвертой теоремы Фредгольма). При $\lambda = \lambda_1$ существует только одно линейно независимое решение системы (38.13), в качестве которого мы выберем $a^1 = 1/\lambda_1$, $a^2 = 0$, то есть $\varphi_1(x) = \cos x$ – собственная функция. Для $\lambda = \lambda_2$ аналогично получаем $a^1 = 0$, $a^2 = 1/\lambda_2$, $\varphi_2(x) = \sin x$.

Рассмотрим теперь три случая.

1) Пусть $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$, тогда система (38.12) разрешима при любой правой части и притом единственным образом:

$$a^1 = 0,\ a^2 = \frac{\pi A + 4B}{2 + \pi\lambda},$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \frac{(2 + \pi + \lambda\pi)A + 4B}{2 + \lambda\pi}\sin x + B.$$

2) Пусть $\lambda = \lambda_1$, тогда система (38.12) разрешима при любой правой части, указанного вида, но не единственным образом:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\pi}{4}A + B\right)\sin x + C\cos x + A\sin x + B,$$

где C – произвольная постоянная

3) Пусть $\lambda = \lambda_2$, тогда система (38.12) выглядит следующим образом.

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ 0 = \pi A + 4B \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием ее разрешимости является равенство $B = -\frac{\pi}{4}A$, при выполнении которого

$$\varphi(x) = C\sin x - \frac{\pi}{4}A$$

Продемонстрируем теперь выполнение теорем Фредгольма. Однородное союзное уравнение имеет вид

$$\psi(x) = \bar{\lambda}\int_0^{\pi} \cos(x+y)\psi(y)dy.$$

Сравнивая его с уравнением (38.11), получаем, что нетривиальные решения $\psi(x)$ существуют только при $\lambda = \overline{\lambda_1} = \lambda_1 = 2/\pi$ и $\lambda = \overline{\lambda_2} = \lambda_2 = -2/\pi$, причем для $\lambda = \lambda_1$ существует единственное линейно независимое решение $\psi_1(x) = \cos x$, а для $\lambda = \lambda_2$ – $\psi_2(x) = \sin x$. Следовательно, первая теорема Фредгольма выполняется. Для проверки второй и третей теорем Фредгольма рассмотрим опять те же три случая.

1) Пусть $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$, тогда $\psi(x) \equiv 0$ и, следовательно, уравнение (38.11) должно иметь решение при любой правой части, что мы и получили.

2) Пусть $\lambda = \lambda_1$, тогда необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (38.11) является

$$0 = (A\sin x + B, \psi_1(x)) = \int_0^{\pi} (A\sin x + B)\cos x dx = 0,$$

то есть для любой правой части вида $A\sin x + B$ должны существовать решения. Это так же согласуется с полученными результатами

3) Дая $\lambda = \lambda_2$ аналогично получаем

$$0 = (A\sin x + B, \psi_2(x)) = \int_0^{\pi} (A\sin x + B)\sin x dx = \frac{\pi}{2}A + 2B.$$

Следовательно, $B = -\frac{\pi}{4}A$ (сравните с условием, приведенным выше для соответствующего случая).

§39. Интегральные уравнения с малым непрерывным ядром. Ряд Неймана. Резольвента и резольвентное ядро

39.1. Норма оператора. Для дальнейшего понадобятся очередные понятия из функционального анализа – норма и резольвента оператора.

Пусть E_1 и E_2 – линейные нормированные пространства с нормами $\|\bullet\|_1$ и $\|\bullet\|_2$ соответственно. И пусть оператор A действует из

E_1 в E_2 Тогда вводят следующие понятия.

Определение 1. *Нормой оператора A* называется величина, обозначаемая $\|A\|$ и определяемая формулой

$$\|A\| = \sup_{\varphi \in E_1,\ \varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_1}$$

Оператор с конечной нормой называется *ограниченным.*

Отметим, что для ограниченного оператора A и произвольного элемента $\varphi \in E_1$ выполняется неравенство $\|A\varphi\|_2 \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_1$

Пример 1. Если A – оператор умножения на число k, действующий из E_1 в E_1, то $\|A\| = |k|$. В частности, норма тождественного оператора E равна единице

Утверждение 1. Если A – линейный оператор, то

1) $\|A\| = \sup_{\varphi \in E_1,\ \|\varphi\|_1 = 1} \|A\varphi\|_2$;

2) непрерывность A равносильна ограниченности

Доказательство утверждения 1

1) Данное выражение для нормы очевидно эквивалентно определению.

2) Пусть A – ограниченный линейный оператор Рассмотрим произвольную последовательность $\{\varphi_p\}_{p=1}^{\infty} \subset E_1$, сходящуюся в E_1 к некоторому элементу $\varphi_0 \in E_1$. Тогда

$$\|A\varphi_p - A\varphi_0\|_2 = \|A(\varphi_p - \varphi_0)\|_2 \leq \|A\| \ \|\varphi_p - \varphi_0\|_1 \xrightarrow{p \to \infty} 0,$$

что и означает непрерывность A.

Обратно. Пусть A – неограниченный линейный оператор, тогда существует последовательность $\{\varphi_p\}_{p=1}^{\infty} \subset E_1$ такая, что $\|A\varphi_p\|_2 > p\|\varphi_p\|_1$, $p \in \mathbf{N}$. Рассмотрим новую последовательность $\{\psi_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\psi_p = \frac{1}{p}\frac{\varphi_p}{\|\varphi_p\|_1}$, которая сходится к нулевому элементу при $p \to \infty$. Для этой последовательности справедливо неравенство

$$\|A\psi_p\|_2 = \frac{\|A\varphi_p\|_2}{p\|\varphi_p\|_1} > 1,\ p \in \mathbf{N}$$

Следовательно, A не является непрерывным, так как для непрерывного A выполнялось бы $\|A\psi_p\|_2 \xrightarrow{p\to\infty} 0$ ■

Утверждение 2. Множество линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2, с введенными в нем операциями сложения и умножения на число (см. §1) и нормой (см. определение 1) является линейным нормированным пространством.

Доказательство утверждения 2. Линейность такого пространства очевидна. Остается доказать выполнение всех свойств нормы

1) $\|A\| \equiv \sup\limits_{\varphi\in E_1\setminus\{0\}} \frac{\|A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_1} = 0$ что равносильно равенству $A\varphi = 0$ для любого $\varphi \in E_1$, то есть равенству $A = 0$

2) $\|\lambda A\| \equiv \sup\limits_{\varphi\in E_1\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_1} = |\lambda| \sup\limits_{\varphi\in E_1\setminus\{0\}} \frac{\|A\varphi\|_2}{\|\varphi\|_1} = |\lambda|\ \|A\|$ для любого числа λ

3) Если A_1 и A_2 – линейные ограниченные операторы, то для нормы их суммы можно записать:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{\varphi\in E_1\ \|\varphi\|_1=1} \|A_1\varphi + A_2\varphi\|_2 \le \sup_{\varphi\in E_1\ \|\varphi\|_1=1} \|A_1\varphi\|_2 + \sup_{\varphi\in E_1\ \|\varphi\|_1=1} \|A_2\varphi\|_2 =$$
$$= \|A_1\| + \|A_2\|$$

Во всех трех случаях мы воспользовались выполнением соответствующих свойств для нормы $\|\bullet\|_2$ ■

Перейдем теперь конкретно к интегральному оператору Пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, K – интегральный оператор, задаваемый формулой (38.1), ядро $K(x,y) \in C(M \times M)$

Утверждение 3. Если рассматривать оператор K, как действующий из $C(M)$ в $C(M)$ [1]), то он является ограниченным и

[1]) Нормированное пространство $C(M)$ – линейное пространство, состоящее из

$$\|K\| \equiv \sup_{\substack{\varphi\in C(M)\\ \|\varphi\|_{C(M)}=1}} \|K\varphi\|_{C(M)} = \max_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy. \qquad (39.1)$$

Доказательство утверждения 3. Докажем, что

$$\|K\| \le \max_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy.$$

Пусть $\varphi(x) \in C(M)$, тогда

$$\|K\varphi\|_{C(M)} = \max_{x\in M}\left|\int_M K(x,y)\varphi(y)dy\right| \le \max_{x\in M} \int_M |K(x,y)|\cdot|\varphi(y)|dy \le$$
$$\le \max_{y\in M}|\varphi(y)| \cdot \max_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy = \|\varphi\|_{C(M)} \max_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy.$$

Поскольку $M \times M$ компакт и $K(x,y) \in C(M \times M)$, то $\max\limits_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy < \infty$. и следовательно, $\|A\| \le \max\limits_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy < \infty$

Приведем теперь идею доказательства того, что $\|K\| \ge \max\limits_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy$. Для начала заметим, что существует точка $x_0 \in M$ такая, что $\max\limits_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy = \int_M |K(x_0,y)|dy$, так как M – компакт, и $K(x,y) \in C(M \times M)$. Далее рассмотрим последовательность непрерывных функций $\{f_p(y)\}_{p=1}^{\infty}$, $\|f_p\|_{C(M)} \le 1$, стремящуюся по норме $L_2(M)$ к $\operatorname{sign} K(x_0,y)$. Тогда

$$\|K\| \ge \int_M K(x_0,y) f_p(y)dy,\ p \in \mathbf{N},$$

и выполняя предельный переход $p \to \infty$, получаем

$$\|K\| \ge \int_M |K(x_0,y)|dy = \max_{x\in M} \int_M |K(x,y)|dy$$

■

непрерывных на M функции, в котором введена норма $\|\varphi\|_{C(M)} = \sup\limits_{x\in M}|\varphi(x)|$ (метрика, порожденная такой нормой, называется равномерной).

39.2. Резольвента оператора. Пусть E_1 и E_2 – линейные нормированные пространства над полем **C**, причем E_1 – подпространство E_2 (чаще всего $E_1 = E_2$) И пусть A – линейный ограниченный оператор, отображающий E_1 в E_2. Рассмотрим уравнение для $\varphi \in E_1$:

$$(E - \lambda A)\varphi = f, \qquad (39.2)$$

где f – некоторый фиксированный элемент из E_2, λ – комплексное число.

<u>Определение 2.</u> Если для данного $\lambda \in \mathbf{C}$ существует ограниченный обратный оператор $(E - \lambda A)^{-1}$, то он называется *резольвентой оператора A* и обозначается R_λ:

$$R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}.$$

<u>Утверждение 4.</u> Если для данного $\lambda \in \mathbf{C}$ существует резольвента R_λ, то

1) $1/\lambda$ (при $\lambda \neq 0$) не является собственным значением оператора A (если A – интегральный оператор, то λ не является характеристическим числом);

2) уравнение (39 2) разрешимо и притом единственным образом:

$$\varphi = R_\lambda f.$$

Доказательство утверждения 4.

1) Допустим противное: существует элемент $\varphi_\lambda \neq 0$ такой, что $(E - \lambda A)\varphi_\lambda = 0$, но тогда как минимум два элемента из E_1 (0 и φ_λ) в результате действия оператора $E - \lambda A$ переходят в 0. Следовательно, не может существовать обратный оператор $(E - \lambda A)^{-1}$ (см. определение обратного оператора из §1).

2) То, что $\varphi = R_\lambda f$ является решением уравнения (39.2), следует из определения R_λ. Докажем теперь единственность. Пусть φ_1 и φ_2 – два решения уравнения (39.2), тогда их разность $\tilde{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет однородному уравнению

$$(E - \lambda A)\tilde{\varphi} = 0,$$

откуда с учетом предыдущей части утверждения получаем $\tilde{\varphi} = 0$.

Следовательно, решение единственно ■

Построим далее резольвенту для интегрального оператора K при помощи ряда Неймана.

39.3. Ряд Неймана. Пусть A – оператор умножения на число k, отображающий линейное (над полем **C**) нормированное пространство в себя. Тогда решением уравнения (39.2) является $\varphi = \dfrac{1}{1 - \lambda k}$ (при $\lambda k \neq 1$). Если $|\lambda k| < 1$, то есть $|\lambda| \cdot \|A\| < 1$ (см. пример 1), то раскладывая дробь $\dfrac{1}{1 - \lambda k}$ в сходящийся степенной ряд, получаем

$$\varphi = f + \lambda k f + (\lambda k)^2 f + \ldots,$$

или

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A^p f. \qquad (39.3)$$

Другой подход решать уравнение (39.2) – метод последовательных приближений:

$$\varphi_p = f + \lambda A \varphi_{p-1}, \; p = 1, 2 \ldots$$

Если положить начальное приближение $\varphi_0 = f$, то получим для предела $\lim\limits_{p \to \infty} \varphi_p$ в точности ряд (39 3).

Перейдем теперь к интегральному оператору K и воспользуемся этими идеями. Пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, ядро $K(x, y) \in C(M \times M)$. Как и в утверждении 3 будем рассматривать интегральный оператор K, действующий из $C(M)$ в $C(M)$. Тогда уравнение

$$(E - \lambda K)\varphi = f, \qquad (39.4)$$

где $\lambda \in \mathbf{C}$ и $f(x) \in C(M)$, необходимо решать в классе непрерывных на M функций $\varphi(x)$.

<u>Определение 3.</u> Ряд (39.3) для интегрального оператора $A = K$, определяемого формулой (38.1), называется *рядом Неймана.*

Естественно поставить следующие вопросы.

1) Сходится ли ряд Неймана и при каких условиях?

2) Является ли сумма ряда Неймана в случае сходимости решением уравнения (39.4)?

3) Единственно ли решение уравнения (39.4) в классе $C(M)$?

4) Будет ли сумма ряда Неймана представима как интегральный оператор?

Последовательно рассмотрим эти вопросы.

1) Изучим абсолютную и равномерную сходимость функционального ряда Неймана

$$\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p\left(K^p f\right)(x), \tag{39.5}$$

членами которого являются непрерывные на M функции. Для этого сделаем следующие оценки:

$$\max_{x\in M}\left|\lambda^p\left(K^p f\right)(x)\right| = |\lambda|^p\left\|K^p f\right\|_{C(M)} \le |\lambda|^p\|K\|\cdot\left\|K^{p-1} f\right\|_{C(M)} \le \ldots \le$$

$$\le \left|\lambda^p\right|\|K\|^p\|f\|_{C(M)},\ p=0,1,$$

Здесь мы воспользовались утверждением 3. Если потребовать, чтобы

$$|\lambda|\cdot\max_{x\in M}\int_M|K(x,y)|dy<1 \tag{39.6}$$

то с учетом формулы (39.1) ряд (39.5) будет сходиться абсолютно и равномерно на компакте M к некоторой функции $\varphi(x)\in C(M)$:

$$\varphi(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p\left(K^p f\right)(x). \tag{39.7}$$

Заметим также, что сумма мажорирующего числового ряда $\sum_{p=0}^{\infty}|\lambda|^p\|K\|^p\|f\|_{C(M)}$ равна $\frac{\|f\|_{C(M)}}{1-|\lambda|\ \|K\|}$, поэтому справедливо следующее неравенство

$$\|\varphi\|_{C(M)}\le\frac{\|f\|_{C(M)}}{1-|\lambda|\ \|K\|}. \tag{39.8}$$

2) Проверим, что формула (39.7) задает решение уравнения (39.4):

$$(E-\lambda K)\varphi=(E-\lambda K)\lim_{p\to\infty}\left(E+\lambda K+\ldots+\lambda^p K^p\right)f=$$

$$=\lim_{p\to\infty}(E-\lambda K)\left(E+\lambda K+\ldots+\lambda^p K^p\right)f=\lim_{p\to\infty}\left(E-\lambda^{p+1}K^{p+1}\right)f=Ef=f.$$

Здесь мы воспользовались возможностью внести оператор K (в составе оператора $E-\lambda K$) под знак предела, так как в случае равномерной сходимости функциональной последовательности ее можно почленно интегрировать.

Итак, при выполнении условия (39.6) формула (39.7) определяет оператор $(E-\lambda K)^{-1}$, обратный к оператору $E-\lambda K$, причем из неравенства (39.8) вытекает ограниченность $(E-\lambda K)^{-1}$. Следовательно, доказана следующая

<u>Лемма 1.</u> Если выполнено условие (39.6), то интегральный оператор K с непрерывным ядром $K(x,y)$, действующий из $C(M)$ в $C(M)$, имеет резольвенту $R_\lambda=\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p K^p$, причем

$$\|R_\lambda\|_{C(M)}\le\frac{1}{1-|\lambda|\cdot\|K\|}$$

3) Единственность решения уравнения (39.4) при выполнении условия (39.6) следует из утверждения 4 и леммы 1.

Приведем также другое доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ решения уравнения (39.4). Тогда их разность $\tilde\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\tilde\varphi(x)=\lambda\left(K\tilde\varphi\right)(x)$$

Следовательно,

$$\|\tilde\varphi\|_{C(M)}\le|\lambda|\ \|K\|\cdot\|\tilde\varphi\|_{C(M)}$$

что противоречит условию (39.6) в случае, когда $\|\tilde\varphi\|_{C(M)}\ne 0$.

4) Резольвента $R_\lambda=\sum_{p=0}\lambda^p K^p$ не представима как интегральный оператор из-за присутствия тождественного оператора $E=K^0$ (необходим аналог дельта-функции). Однако все остальные слагаемые можно заменить интегральным оператором.

Покажем, что ряд

$$\Re_\lambda=\sum_{p=1}^{\infty}\lambda^{p-1}K^p \tag{39.9}$$

при выполнении условия (39.6) можно рассматривать как интегральный оператор с непрерывным ядром. Для этого сначала убедимся в том, что все положительные степени оператора K тоже являются интегральными операторами.

Лемма 2. Оператор K^p, $p \geq 2$, является интегральным оператором с непрерывным ядром $K_{p-1}(x,y)$, которое определяется из рекуррентных соотношений

$$K_{p-1}(x,y) = \int_M K(x,z)K_{p-2}(z,y)dz, \quad K_0(x,y) = K(x,y),$$

причем

$$\|K_{p-1}(x,y)\|_{C(M\times M)} \leq \|K\|^{p-1}\|K(x,y)\|_{C(M\times M)}. \qquad (39.10)$$

Доказательство леммы 2 (по индукции). Справедливость леммы доказывают следующие преобразования

$$\left(K^p f\right)(x) = \int_M K(x,z)\left(K^{p-1}f\right)(z)dz = \int_M K(x,z)\left(\int_M K_{p-2}(z,y)f(y)dy\right)dz =$$

$$= \int_M\left(\int_M K(x,z)K_{p-2}(z,y)dz\right)f(y)dy = \int_M K_{p-1}(x,y)f(y)dy,$$

и

$$\|K_{p-1}(x,y)\|_{C(M\times M)} = \max_{(x,y)\in M\times M}\left|\int_M K(x,z)K_{p-2}(z,y)dz\right| \leq$$

$$\leq \max_{y\in M}\left(\max_{z\in M}|K_{p-2}(z,y)|\cdot\max_{x\in M}\int_M|K(x,z)|dz\right) = \|K_{p-2}(z,y)\|_{C(M\times M)}\|K\| \leq$$

$$\leq \|K\|^{p-1}\|K(x,y)\|_{C(M\times M)}.$$

Для $p=2$ мы воспользовались тем, что $K_0(x,y) = K(x,y)$, а для $p>2$ эти преобразования обосновывают справедливость шага индукции ■

Рассмотрим на $M \times M$ функциональную последовательность

$$S_p(x,y) = \sum_{l=0}^{p-1}\lambda^l K_l(x,y), \quad p = 1,2,$$

Если выполнено условие (39.6), то в силу неравенства (39.10) по-

следовательность $\{S_p\}_{p=1}^{\infty}$ сходится абсолютно и равномерно на $M \times M$ к некоторой функции $S(x,y) \in C(M \times M)$. Следовательно и последовательность $\{f(y)S_p(x,y)\}_{p=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $M \times M$, благодаря чему можно совершить предельный переход под знаком интеграла:

$$\Re_\lambda f = \lim_{p\to\infty}\left(K + \lambda K + \ldots + \lambda^p K^p\right)f = \lim_{p\to\infty}\int_M S_p(x,y)f(y)dy =$$

$$= \int_M \lim_{p\to\infty} S_p(x,y)f(y)dy = \int_M S(x,y)f(y)dy$$

Следовательно, оператор $\Re_\lambda$ является интегральным с непрерывным ядром $S(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p K_p(x,y)$

Определение 4. Оператор $\Re_\lambda$ называется *интегральной резольвентой ядра* $K(x,y)$, а его ядро $S(x,y)$ – *резольвентным ядром*

Именно такая терминология принята в работе с интегральными уравнениями.

Результаты этого параграфа можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть K – интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x,y) \in C(M \times M)$, действующий из $C(M)$ в $C(M)$. Тогда, если $|\lambda|\cdot\|K\| < 1$, то оператор $(E - \lambda K)$ обратим, причем обратный оператор ограничен и может быть представлен в виде ряда Неймана (39.7) или с помощью интегральной резольвенты (39.9): $(E - \lambda K)^{-1} = E + \lambda\Re_\lambda$.

Определение 5. Ядро $K(x,y)$ называется *полярным*, если оно представимо в виде

$$K(x,y) = \frac{\tilde{K}(x,y)}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < n,$$

где $\tilde{K}(x,y) \in C(M \times M)$, M – компакт в $\mathbb{R}^n$

Замечание 1. Сформулированная теорема 1 остается справедли-

вой и для полярных ядер $K(x,y)$, причем норма оператора K в этом случае также может быть вычислена по формуле (39.1) (особенность при $x=y$ интегрируется при переходе в сферические координаты за счет множителя r^{n-1} в якобиане).

§40. Интегральные уравнения с непрерывным ядром. Сведение к уравнениям с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма

40.1. Сопряженный оператор. Изучим как соотносятся интегральные операторы K и K^*.

Пусть H – (пред)гильбертово пространство над полем **C** (**R**), оператор A отображает H в H.

Определение 1. Оператор A^*, действующий из H в H, называется (эрмитово) *сопряженным* к A, если для любых двух элементов φ и ψ из H выполняется равенство

$$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A^*\psi).$$

Следующее утверждение перечисляет основные свойства сопряженных операторов

Утверждение 1. Пусть A и B – операторы действующие из H в H.

1) Не может существовать более одного сопряженного к данному оператора.

2) Для тождественного оператора E существует сопряженный.

$$E^*=E$$

3) Если существуют A^* и B^*, то существует и $(AB)^*$, причем

$$(AB)^*=B^*A^*$$

4) Если существуют операторы A^{-1}, $(A^{-1})^*$ и A^*, то оператор A^* обратим и

$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$$

5) Если существуют A^* и B^*, то для любых чисел α и β из **C** (**R**) существует $(\alpha A+\beta B)^*$, причем

$$(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$$

Доказательство утверждения 1.

1) Пусть существует два оператора A_1^* и A_2^*, сопряженных к A:

$$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A_1^*\psi),\ \forall\varphi,\psi\in H,$$

$$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A_2^*\psi),\ \forall\varphi,\psi\in H.$$

Тогда для любых φ и ψ из H справедливо равенство $(\varphi,(A_1^*-A_2^*)\psi)=0$. В частности для $\varphi=(A_1^*-A_2^*)\psi$ получаем

$$((A_1^*-A_2^*)\psi,(A_1^*-A_2^*)\psi)=0,\ \forall\psi\in H,$$

что с учетом свойств скалярного произведения равносильно равенству

$$(A_1^*-A_2^*)\psi=0,\ \forall\psi\in H$$

Следовательно, $A_1^*-A_2^*=0$

2) Очевидно

3) Для любых φ и ψ из H справедлива цепочка равенств

$$(AB\varphi,\psi)=(B\varphi,A^*\psi)=(\varphi,B^*A^*\psi).$$

Следовательно, $(AB)^*-B^*A^*$

4) Для доказательства достаточно проверить, что $E=(A^{-1})^*A^*$ и $E=A^*(A^{-1})^*$

$$E=E^*=(AA^{-1})^*=(A^{-1})^*A^*,$$

$$E=E^*=(A^{-1}A)^*=A^*(A^{-1})^*$$

5) Следует из свойств скалярного произведения ■

Утверждение 2. Пусть K – интегральный оператор с ядром $K(x,y)\in L_2(M\times M)$ (M – компакт в $\mathbf{R}^n$), действующий из $L_2(M)$ в $L_2(M)$. Тогда сопряженным к K является интегральный оператор K^* с ядром $K^*(x,y)=\overline{K(y,x)}$.

Доказательство утверждения 2. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – две произвольные функции из $L_2(M)$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$(K\varphi,\psi)=\int_M\left(\int_M K(x,y)\varphi(y)dy\right)\overline{\psi(x)}dx=\int_M\left(\int_M K(x,y)\overline{\psi(x)}dx\right)\varphi(y)dy=$$

$$=\int_M\varphi(y)\overline{\left(\int_M\overline{K(x,y)}\psi(x)dx\right)}dy=(\varphi,K^*\psi)$$

■

Из свойства 4 и утверждения 2 получаем

Следствие 1. Пусть при данном $\lambda\in\mathbf{C}$ существуют операторы $(E-\lambda K)^{-1}$ и $\left((E-\lambda K)^{-1}\right)^*$ Тогда оператор $E-\bar{\lambda}K^*$ обратим, причем

$$\left(E-\bar{\lambda}K^*\right)^{-1}=\left((E-\lambda K)^{-1}\right)^*$$

40.2. Сведение интегрального уравнения с непрерывным ядром к уравнению с вырожденным ядром. Пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, $K(x,y)$ – произвольное непрерывное на $M\times M$ ядро. По теореме Стоуна-Вейерштрасса из курса математического анализа функцию $K(x,y)$ можно сколь угодно точно (в равномерной метрике) приблизить полиномами. А именно, для любого $\varepsilon>0$ существуют полином $P_\varepsilon(x,y)=\sum\limits_{|\alpha|\le n_\varepsilon,\ |\beta|\le n_\varepsilon}C^\varepsilon_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ [1]) и непрерывная функция $K_\varepsilon(x,y)$ такие, что

$$K(x,y)=P(x,y)+K_\varepsilon(x,y),\ (x,y)\in M\times M,$$

причем

$$\|K_\varepsilon(x,y)\|_{C(M\times M)}<\varepsilon.$$

Отметим, что полином $P_\varepsilon(x,y)$ является вырожденным ядром.

---

[1]) $\alpha=(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ и $\beta=(\beta^1,\ldots,\beta^n)$ – мульти-индексы. $x^\alpha=\prod\limits_{i=1}^n\left(x^i\right)^{\alpha^i}$

Рассмотрим пространство $CL_2(M)$ непрерывных на M функций с введенным в нем скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)=\int_M\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

Решим в $CL_2(M)$ интегральное уравнение

$$(E-\lambda K)\varphi=f, \tag{40.1}$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$, $f(x)\in CL_2(M)$ и K – интегральный оператор с ядром $K(x,y)$, действующий из $CL_2(M)$ в $CL_2(M)$

Обозначим через P_ε и K_ε интегральные операторы с ядрами $P_\varepsilon(x,y)$ и $K_\varepsilon(x,y)$ соответственно, и перепишем уравнение (40.1) в этих обозначениях:

$$(E-\lambda P_\varepsilon-\lambda K_\varepsilon)\varphi=f.$$

Выберем при данном $\lambda\in\mathbf{C}$ число $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $|\lambda|\cdot\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(M)<1$. Тогда согласно теореме 1 из предыдущего параграфа оператор $E-\lambda K_\varepsilon$ обратим. Введем обозначение $(E-\lambda K_\varepsilon)^{-1}=R_{\varepsilon,\lambda}$ и подействуем на обе части уравнения (40.1) оператором $R_{\varepsilon,\lambda}$:

$$R_{\varepsilon,\lambda}(E-\lambda K_\varepsilon-\lambda P_\varepsilon)\varphi=R_{\varepsilon,\lambda}f,$$

или

$$(E-\lambda R_{\varepsilon,\lambda}P_\varepsilon)\varphi=R_{\varepsilon,\lambda}f \tag{40.2}$$

Уравнение (40.2) имеет те же решения, что и уравнение (40.1), так как оператор $R_{\varepsilon,\lambda}$ обратим ($R^{-1}_{\varepsilon,\lambda}=E-\lambda K_\varepsilon$), то есть является взаимно однозначным.

Далее заметим, что оператор $R_{\varepsilon,\lambda}P_\varepsilon$ является интегральным оператором с вырожденным ядром

$$R_{\varepsilon,\lambda}P_\varepsilon\varphi=R_{\varepsilon,\lambda}\int_M\left(\sum_{|\alpha|\le n_\varepsilon,\ |\beta|\le n_\varepsilon}C^\varepsilon_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta\right)\varphi(y)dy=$$

$$= \int_M \left(\sum_{|\alpha|\le n,\,|\beta|\le n} C^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left(R_{\varepsilon\lambda} x^{\alpha} \right) y^{\beta} \right) \varphi(y)\,dy.$$

Следовательно, доказано следующее

Утверждение 3. Для $\lambda \in \mathbf{C}$ и $\varepsilon > 0$ таких, что $|\lambda| \cdot \varepsilon \ \mathrm{mes}(M) < 1$, уравнение (40 1) с непрерывным ядром имеет те же решения, что и уравнение (40 2) с вырожденным ядром.

40.3. Доказательство теорем Фредгольма для непрерывного ядра. Для уравнения (40 2) в §38 была доказана справедливость теорем Фредгольма. Благодаря утверждению 3 теперь можно провести доказательство и для уравнения (40.1) с произвольным непрерывным ядром.

Итак, пусть K – интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x,y)$, действующий из $CL_2(M)$ в $CL_2(M)$.

Теорема 1 (первая теорема Фредгольма). Однородные союзные интегральные уравнения $(E-\lambda K)\varphi = 0$ и $\left(E-\bar{\lambda}K^*\right)\psi = 0$ при данном $\lambda \in \mathbf{C}$ имеют одинаковое конечное количество линейно независимых решений (либо оба не имеют нетривиальных решений).

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbf{C}$ и выберем $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется неравенство $|\lambda| \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(M) < 1$ Тогда согласно утверждению 3 уравнение $(E-\lambda K)\varphi = 0$ имеет те же решения, что и уравнение

$$\left(E-\lambda R_{\varepsilon\lambda} P_{\varepsilon}\right)\varphi = 0 \qquad (40.3)$$

По первой теореме Фредгольма для случая вырожденных ядер уравнение (40.3) имеет столько же линейно независимых решений, сколько союзное уравнение

$$\left(E-\bar{\lambda}\left(R_{\varepsilon\lambda} P_{\varepsilon}\right)^*\right)\chi = 0. \qquad (40.4)$$

Согласно теореме 1 из §39 оператор $R_{\varepsilon\lambda}$ представим через интегральный оператор $\mathfrak{R}_{\varepsilon\lambda}$: $R_{\varepsilon\lambda} = E + \lambda\mathfrak{R}_{\varepsilon,\lambda}$, следовательно, существует сопряженный оператор $R^*_{\varepsilon\lambda} = E + \bar{\lambda}\mathfrak{R}^*_{\varepsilon\lambda}$. Преобразуем левую

часть уравнения (40.4), воспользовавшись утверждениями 1 и 2 и следствием 1

$$\left(E-\bar{\lambda}\left(R_{\varepsilon\lambda} P_{\varepsilon}\right)^*\right)\chi = \left(E-\bar{\lambda}P^*_{\varepsilon}R^*_{\varepsilon\lambda}\right)\chi = \left(\left(E-\bar{\lambda}K^*_{\varepsilon}\right)R^*_{\varepsilon\lambda} - \bar{\lambda}P^*_{\varepsilon}R^*_{\varepsilon\lambda}\right)\chi$$

Следовательно, уравнение (40 4) можно переписать в следующем виде:

$$\left(E-\bar{\lambda}K^*_{\varepsilon} - \bar{\lambda}P^*_{\varepsilon}\right)R^*_{\varepsilon\lambda}\chi = 0 \qquad (40\ 5)$$

Оператор $R^*_{\varepsilon,\lambda}$ обратим, то есть взаимно однозначен, поэтому уравнение (40.5) имеет столько же линейно независимых решений, сколько уравнение

$$\left(E-\bar{\lambda}K^*_{\varepsilon} - \bar{\lambda}P^*_{\varepsilon}\right)\psi = 0,$$

или

$$\left(E-\lambda K^*\right)\psi = 0.$$

■

Теорема 2 (вторая теорема Фредгольма) Уравнение $(E-\lambda K)\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $f \in CL_2(M)$ ортогональна любому решению однородного союзного уравнения $\left(E-\bar{\lambda}K^*\right)\psi = 0$

Доказательство теоремы 2. Решение уравнения $(E-\lambda K)\varphi = f$ сводится к решению уравнения (40.2) с вырожденным ядром. Следовательно, критерий разрешимости – ортогональность функций $R_{\varepsilon\lambda} f$ и χ, где χ – произвольное решение уравнения (40 4). Приходим к равенствам

$$\left(R_{\varepsilon\lambda} f, \chi\right) = \left(f, R^*_{\varepsilon\lambda}\chi\right) = \left(f, \psi\right)$$

Но $\psi = R^*_{\varepsilon\lambda}\chi$ – это решение уравнения $\left(E-\bar{\lambda}K^*\right)\psi = 0$ (см доказательство предыдущей теоремы) ■

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3 (третья теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма). Либо уравнение $(E-\lambda K)\varphi = f$ разрешимо при любой правой части $f \in CL_2(M)$, либо соответствующее однородное

уравнение $(E-\lambda K)\varphi=0$ имеет нетривиальные решения.

Остается доказать четвертую теорему Фредгольма.

Теорема 4 (четвертая теорема Фредгольма). В произвольном круге $|\lambda|<R$ содержится конечное число характеристических чисел интегрального оператора K.

Доказательство теоремы 4. Зафиксируем произвольный радиус $R>0$ и выберем $\varepsilon>0$ такое, что выполняется неравенство $R\cdot\varepsilon\ \mathrm{mes}(M)<1$. Тогда при $|\lambda|\le R$ однородное уравнение $(E-\lambda K)\varphi=0$ равносильно уравнению $\left(E-\lambda R_{\varepsilon,\lambda}P_\varepsilon\right)\varphi=0$ с вырожденным ядром. Согласно результатам §38 характеристические числа должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\det\left(E-\lambda\left\|d_k^j\right\|\right)=0,$$

где $d_k^j=C^\varepsilon_{\alpha_k\beta_j}\int\limits_M\left(R_{\varepsilon,\lambda}x^{\alpha_k}\right)x^{\beta_j}dx$, k и j нумеруют все мульти-индексы α и β, удовлетворяющие условиям $|\alpha|\le n_\varepsilon$ и $|\beta|\le n_\varepsilon$. Функции $d_k^j(\lambda)$ разлагаются в степенной ряд по λ при $|\lambda|\le R$:

$$d_k^j=C^\varepsilon_{\alpha_k\beta_j}\int\limits_M\left(\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^pK_\varepsilon^px^{\alpha_k}\right)x^{\beta_j}dx=C^\varepsilon_{\alpha_k\beta_j}\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p\int\limits_M\left(K_\varepsilon^px^{\alpha_k}\right)x^{\beta_j}dx.$$

Следовательно, $d_k^j(\lambda)$ – аналитические в круге $|\lambda|\le R$ функции. Допустим, что характеристических чисел в круге $|\lambda|\le R$ содержится бесконечно много, тогда аналитическая функция $\det\left(E-\lambda\left\|d_k^j(\lambda)\right\|\right)$ имеет в этом круге бесконечно много нулей, что согласно теореме единственности из курса теории функций комплексного переменного (ТФКП) возможно только в случае, когда $\det\left(E-\lambda\left\|d_k^j\right\|\right)\equiv0$ при $|\lambda|\le R$. Получили противоречие, так как, например, при $\lambda=0$ определитель $\det\left(E-\lambda\left\|d_k^j\right\|\right)$ равен единице ■

Замечание 1. Все четыре теоремы Фредгольма справедливы и для полярных ядер (см. [2]).

§41. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема Гильберта-Шмидта для истокообразно представимых функций

41.1. Интегральный оператор с эрмитовым ядром. Пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, K – интегральный оператор с ядром $K(x,y)\in L_2(M\times M)$, действующий из $L_2(M)$ в $L_2(M)$.

Определение 1. Ядро $K(x,y)$ называется *эрмитовым*, если выполняется условие $K(x,y)=K^*(x,y)$, $(x,y)\in M\times M$.

Из утверждения 2 §40 следует, что интегральный оператор с эрмитовым ядром является симметричным.

Для симметричных операторов в §19 были доказаны свойства

– все собственные значения симметричного оператора действительны (для интегрального оператора с эрмитовым ядром все характеристические числа действительны);

– собственные функции, отвечающие различным собственным значениям (для интегрального оператора характеристическим числам) симметричного оператора, ортогональны.

Нам потребуется еще одно свойство.

Лемма 1. Пусть L – линейное многообразие в (пред)гильбертовом пространстве H, симметричный оператор A действует из H в H, при этом образ линейного многообразия L лежит в L (то есть L – инвариантное относительно A подпространство). Тогда образ ортогонального дополнения $L^\perp$ лежит в $L^\perp$ (то есть $L^\perp$ – инвариантное относительно A подпространство).

Доказательство леммы 1. Пусть φ – произвольный элемент из L. Тогда согласно условиям леммы $A\varphi\in L$, то есть для любого $\psi\in L^\perp$ выполняется равенство $(A\varphi,\psi)=0$, что в силу симметричности A эквивалентно $(\varphi,A\psi)=0$. Следовательно, для любого $\psi\in L^\perp$ образ $A\psi$ содержится в $L^\perp$ ■

Приведем без доказательства следующее свойство симметричного интегрального оператора (доказательство приведено, например, в [2]).

Теорема 1. Всякое эрмитовое непрерывное ядро, не равное тож-

дественному нулю, имеет по крайней мере одно характеристическое число, причем, если λ_0 – наименьшее по модулю характеристическое число, то справедливо равенство

$$\frac{1}{|\lambda_0|} = \|K\| \equiv \sup_{\substack{\varphi\in L_2(M)\\ \|\varphi\|_{L_2(M)}=1}} \|K\varphi\|_{L_2(M)}. \qquad (41.1)$$

Замечание 1. Обратим внимание на то, что в данном случае норму $\|K\|$ нельзя вычислять по формуле (39.1), так как нормы пространств $C(M)$ и $L_2(M)$ различны (и пространство $L_2(M)$ содержит $C(M)$ в качестве подмножества). Норму интегрального оператора K, действующего из $L_2(M)$ в $L_2(M)$, можно оценить, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского:

$$\|K\varphi\|_{L_2(M)} = \sqrt{\int_M \left|\int_M K(x,y)\varphi(y)dy\right|^2 dx} \le$$

$$\le \sqrt{\int_M \left(\int_M |K(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_M |\varphi(y)|^2 dy\right) dx} = \|\varphi(y)\|_{L_2(M)} \|K(x,y)\|_{L_2(M\times M)}.$$

Следовательно,

$$\|K\| \equiv \sup_{\substack{\varphi\in L_2(M)\\ \|\varphi\|_{L_2(M)}=1}} \|K\varphi\|_{L_2(M)} \le \|K(x,y)\|_{L_2(M\times M)} < \infty$$

Замечание 2. Если непрерывное ядро не является эрмитовым, то оно может и не иметь характеристических чисел. Например, рассмотрим для компакта $M = [0;2\pi] \subset \mathbf{R}$ интегральный оператор K с непрерывным ядром

$$K(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin lx \cdot \sin(l+1)y}{l^2}$$

(стоящий справа ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0;2\pi]^2$, так как мажорируется сходящимся рядом $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}$). Для ядер $K_{p-1}(x,y)$ операторов K^p (см. §39) легко получить выражение

$$K_{p-1}(x,y) = \pi^{p-1}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin lx \cdot \sin(l+p)y}{l^2(l+1)^2 \quad (l+p-1)^2}, \quad p = 1,2,$$

так как $\int_0^{2\pi} \sin(l_1+1)z \cdot \sin l_2 z \cdot dz = \pi\delta_{l_2}^{l_1+1}$. Следовательно, при всех значениях $\lambda \in \mathbf{C}$ существует интегральная резольвента $\mathfrak{R}_\lambda$ с ядром $S(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{p-1} K_{p-1}(x,y)$, то есть оператор $E - \lambda K$ обратим для произвольного $\lambda \in \mathbf{C}$, и уравнение $(E-\lambda K)\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение.

41.2. Теорема Гильберта-Шмидта. В конечномерных пространствах симметричный линейный оператор имеет базис из собственных векторов. Оказывается, что для интегрального оператора с непрерывным эрмитовым ядром справедливо аналогичное утверждение.

Итак, пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, $K(x,y)$ – непрерывное эрмитовое ядро, отличное от тождественного нуля, интегральный оператор K с ядром $K(x,y)$ отображает $L_2(M)$ в $L_2(M)$.

Из непрерывности ядра $K(x,y)$ на компакте $M \times M$ следует его равномерная непрерывность. Следовательно, для произвольной функции $\varphi \in L_2(M)$ ее образ $K\varphi$ является непрерывной на M функцией.

$$|(K\varphi)(x_1) - (K\varphi)(x_2)| = \left|\int_M (K(x_1,y) - K(x_2,y))\varphi(y)dy\right| \le$$

$$\le \max_{y\in M}|K(x_1,y) - K(x_2,y)| \int_M |\varphi(y)|dy \xrightarrow{|x_1-x_2|\to 0} 0,$$

и можно конкретизировать оператор K отображает $L_2(M)$ в $CL_2(M)$.

Согласно приведенной без доказательства теореме 1 существует нормированная собственная функция $\varphi_0(x)$ оператора K, отвечающая наименьшему по модулю характеристическому числу λ_0:

$\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$ и $\|\varphi_0\|_{L_2(M)} = 1$. Отметим, что функция $\varphi_0(x)$ является непрерывной, то есть $\varphi_0 \in CL_2(M)$ Рассмотрим в $L_2(M)$ линейное многообразие $[\{\varphi_0\}]$ и его ортогональное дополнение $[\{\varphi_0\}]^{\perp} = \{\varphi \,.\, \varphi \in L_2(M),\ (\varphi, \varphi_0) = 0\}$ Легко видеть, что $L_2(M) = [\{\varphi_0\}] \oplus [\{\varphi_0\}]^{\perp}$, то есть для произвольной функции $\varphi \in L_2(M)$ справедливо представление следующего вида:

$$\varphi = \alpha\varphi_0 + \tilde{\varphi},$$

где $\alpha \in \tilde{\mathbf{N}}$ и $\tilde{\varphi} \in [\{\varphi_0\}]^{\perp}$ Действительно, для этого необходимо выполнение условия

$$(\varphi, \varphi_0) = \alpha(\varphi_0, \varphi_0) + (\tilde{\varphi}, \varphi_0) \equiv \alpha,$$

которому удовлетворяет функция $\tilde{\varphi} = \varphi - (\varphi, \varphi_0)\varphi_0$, ортогональная φ_0.

Введем новый оператор $K_{(1)}$, действующий на произвольную функцию $\varphi \in L_2(M)$ следующим образом:

$$K_{(1)}\varphi = K\tilde{\varphi} = K\varphi - (\varphi, \varphi_0)K\varphi_0 = K\varphi - \frac{(\varphi, \varphi_0)}{\lambda_0}\varphi_0$$

(композиция проектора на подпространство $[\{\varphi_0\}]^{\perp}$ и оператора K) Оператор $K_{(1)}$ является интегральным оператором с непрерывным эрмитовым ядром

$$K_{(1)}(x, y) = K(x, y) - \frac{1}{\lambda_0}\varphi_0(x)\overline{\varphi_0(y)}.$$

Из леммы 1 следует, что $[\{\varphi_0\}]^{\perp}$ – инвариантное относительно $K_{(1)}$ подпространство $L_2(M)$, так как $K_{(1)}\varphi_0 = 0 \in [\{\varphi_0\}]$. Это позволяет рассматривать сужение $\tilde{K}_{(1)}$ оператора $K_{(1)}$ на подпространство $[\{\varphi_0\}]^{\perp}$ Для оператора $\tilde{K}_{(1)}$ можно снова воспользоваться теоремой I если $\tilde{K}_{(1)} \neq 0$, то существует нормированная

собственная функция $\varphi_1 \in [\{\varphi_0\}]^{\perp}$ оператора $\tilde{K}_{(1)}$, отвечающая наименьшему по модулю характеристическому числу λ_1, то есть $\lambda_1\tilde{K}_{(1)}\varphi_1 = \varphi_1$ и $\|\varphi_1\|_{L_2(M)} = 1$. Более того, φ_1 является собственной функцией и оператора K:

$$K\varphi_1 = K\varphi_1 - \frac{(\varphi_1, \varphi_0)}{\lambda_0}\varphi_0 = K_{(1)}\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1$$

так как $(\varphi_1, \varphi_0) = 0$ Итак, полученное число λ_1 – характеристическое для оператора K, поэтому $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$.

Аналогично оператору $K_{(1)}$ введем оператор $K_{(2)}$, действующий на функцию $\varphi \in L_2(M)$ по формуле

$$K_{(2)}\varphi = K_{(1)}\varphi - \frac{(\varphi, \varphi_1)}{\lambda_1}\varphi_1.$$

Тогда выполняются следующие равенства:

$$K\varphi = K_{(1)}\varphi + \frac{(\varphi, \varphi_0)}{\lambda_0}\varphi_0 = K_{(2)}\varphi + \frac{(\varphi, \varphi_0)}{\lambda_0}\varphi_0 + \frac{(\varphi, \varphi_1)}{\lambda_1}\varphi_1.$$

Далее рассмотрим сужение $\tilde{K}_{(2)}$ оператора $K_{(2)}$ на $[\{\varphi_0, \varphi_1\}]^{\perp}$ и продолжим описанный процесс.

Возможны два варианта окончания процесса:

1) на очередном шаге получили оператор $K_{(m+1)}$ с ядром, тождественно равным нулю:

$$K_{(m+1)}(x, y) = K(x, y) - \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\lambda_l}\varphi_l(x)\overline{\varphi_l(y)} = 0,$$

что означает вырожденность ядра $K(x, y)$;

2) процесс бесконечен, тогда для образа $(K\varphi)(x)$ функции $\varphi \in L_2(M)$ возникает ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{\varphi_l(x)}{\lambda_l} \qquad (41.2)$$

с коэффициентами $c_l = (\varphi, \varphi_l) = \int\limits_M \varphi(y)\overline{\varphi_l(y)}dy$

Изучим сходимость ряда (41.2) в метриках $L_2(M)$ и $C(M)$

Сходимость ряда (41.2) к функции $(K\varphi)(x)$ в $L_2(M)$ (конкретнее в $CL_2(M)$) доказывают следующие выкладки:

$$\left\| K\varphi - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(\varphi, \varphi_l)}{\lambda_l}\varphi_l \right\|_{L_2(M)} = \|K_{(m)}\varphi\|_{L_2(M)} \le \sup_{\|\psi\|_{L_2(M)}=1} \|K_{(m)}\psi\| \cdot \|\varphi\|_{L_2(M)} \overset{(41.1)}{=}$$

$$\overset{(41.1)}{=} \frac{\|\varphi\|_{L_2(M)}}{|\lambda_m|} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

так как $|\lambda_m| \xrightarrow{m\to\infty} \infty$ согласно четвертой теореме Фредгольма.

Покажем теперь, что ряд (41.2) для произвольной функции $\varphi \in L_2(M)$ сходится равномерно на M, то есть имеет место сходимость в $C(M)$. Для этого удобно воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости. Сначала заметим, что при фиксированном значении переменной x, рассматриваемой как параметр, числа $\varphi_l(x)/\lambda_l$ являются коэффициентами Фурье в разложении ядра $K(x, y)$ по ортонормированной системе функций $\{\overline{\varphi_l(y)}\}_{l=0}^{\infty}$

$$K(x, y) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{c}_l(x)\overline{\varphi_l(y)},$$

и

$$\tilde{c}_l(x) = \int\limits_M K(x, y)\varphi_l(y)dy = (K\varphi_l)(x) = \frac{\varphi_l(x)}{\lambda_l}.$$

Сами же числа $c_l = (\varphi, \varphi_l)$ являются по определению коэффициентами Фурье разложения функции $\varphi(y)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$. Для ортонормированных систем вне зависимости от их полноты справедливо неравенство Бесселя. Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{\infty} |c_l|^2 \le \|\varphi\|^2_{L_2(M)} \text{ и } \sum_{l=0}^{\infty} \left|\frac{\varphi_l(x)}{\lambda_l}\right|^2 \le \int\limits_M |K(x, y)|^2 dy, \ x \in M$$

Таким образом, для произвольных неотрицательных целых чисел p и q ($q > p$) справедливы оценки:

$$\max_{x\in M}\left|\sum_{l=p}^{q} c_l \frac{\varphi_l(x)}{\lambda_l}\right| \le \sqrt{\sum_{l=p}^{q}|c_l|^2} \cdot \max_{x\in M}\sqrt{\sum_{l=p}^{q}\left|\frac{\varphi_l(x)}{\lambda_l}\right|^2} <$$

$$\le \sqrt{\sum_{l=p}^{q}|c_l|^2} \max_{x\in M}\sqrt{\int\limits_M |K(x, y)|^2 dy}$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty}|c_l|^2$ и ограниченности функции $K(x,y)$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N_ε такое, что для любых $p > N_\varepsilon$ и $q > p$, выполняется неравенство

$$\max_{x\in M}\left|\sum_{l=p}^{q} c_l \frac{\varphi_l(x)}{\lambda_l}\right| \le \varepsilon.$$

Тем самым доказана равномерная сходимость ряда (41.2). Более того, ряд (41.2) сходится к непрерывной функции $(K\varphi)(x)$, так как в противном случае получили бы, что ряд (41 2) сходится к двум различным непрерывным функциям в $CL_2(M)$.

Подведем итог.

<u>Определение 2.</u> Функция $f(x)$ *истокообразно представима* через ядро $K(x, y)$, если существует функция $\varphi(y) \in L_2(M)$ такая, что

$$f(x) = (K\varphi)(x) \equiv \int\limits_M K(x, y)\varphi(y)dy, \ x \in M.$$

<u>Теорема 2 (Гильберта-Шмидта).</u> Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ – все характеристические числа непрерывного эрмитова ядра $K(x, y)$, расположенные в порядке возрастания модуля ($|\lambda_0| \le |\lambda_1| \le \ldots$), $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ – соответствующие собственные функции, норми-

рованные в $L_2(M)$ ($\|\varphi_1\|_{L_2(M)} = \|\varphi_2\|_{L_2(M)} = \ldots = 1$). Если функция $f(x)$ истокообразно представима через ядро $K(x,y)$, то есть $f(x) = (K\varphi)(x)$, $\varphi \in L_2(M)$, то ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_l(x)\}$ сходится равномерно на M к этой функции:

$$f(x) = \sum_l \frac{(\varphi,\varphi_l)}{\lambda_l}\varphi_l(x) = \sum_l (f,\varphi_l)\varphi_l . \qquad (41\ 3)$$

Доказательство теоремы 2 Осталось обосновать второе равенство в формуле (41 3):

$$(f,\varphi_l) = (K\varphi,\varphi_l) = (\varphi,K\varphi_l) = \left(\varphi,\frac{1}{\lambda_l}\varphi_l\right) = \frac{1}{\lambda_l}(\varphi,\varphi_l),$$

так как $\lambda_l \in \mathbf{R}$ для симметричного оператора ■

Замечание 3. Отметим, что при такой формулировке теоремы потеряны собственные функции оператора K, отвечающие нулевому собственному значению (если таковое существует). По этой причине и присутствует требование истокообразной представимости функции f, то есть $f \in \operatorname{Im} K$.

Определение 3 Ядро $K(x,y)$ называется *слабо-полярным*, если оно представимо в виде

$$K(x,y) = \frac{\tilde{K}(x,y)}{|x-y|^{\alpha}},\ \alpha < \frac{n}{2},$$

где $\tilde{K}(x,y)$ – непрерывная на $M \times M$ функция, M – компакт в $\mathbf{R}^n$.

Замечание 4. Теорема Гильберта-Шмидта справедлива для более широкого класса ядер, в частности, для эрмитовых слабополярных ядер (см [2])

41.3. Заключительное замечание. В завершение данной главы сделаем следующее замечание, которое будет полезно в дальнейшем.

Пусть M – компакт в $\mathbf{R}^n$, причем на M введена мера μ. Тогда под классом $L_2(M)$ понимается множество определенных на M функций, квадрат модуля которых интегрируем в смысле меры μ:

$$f \in L_2(M) \Leftrightarrow \exists \int_M |f|^2 d\mu$$

Можно рассматривать следующий интегральный оператор K с ядром $K(x,y)$, $(x,y) \in M \times M$.

$$(K\varphi)(x) = \int_M K(x,y)\varphi(y)d\mu_y .$$

Для интегрального уравнения Фредгольма второго рода с таким интегральным оператором остается справедливой вся теория, изложенная в этой главе (достаточно заменить все интегралы по dy на соответствующие интегралы по $d\mu_y$)

Пусть, например, S – ограниченная кусочно гладкая поверхность в $\mathbf{R}^n$, интегральный оператор K действует на функцию $\varphi(y)$, $y \in S$ по правилу

$$(K\varphi)(x) = \int_S K(x,y)\varphi(y)ds_y,\ x \in S,$$

где $K(x,y)$ – заданная на $S \times S$ функция (ядро) Тогда остается в силе теория Фредгольма. Для ясности отметим, что ортогональность функций f и ψ будет записываться в этом случае следующим образом

$$(f,\psi) \equiv \int_S f(y)\overline{\psi(y)}ds_y = 0 .$$

Задача Штурма-Лиувилля

§42. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля

42.1. Оператор Штурма-Лиувилля. В главе рассматриваются оператор и задача Штурма-Лиувилля

Определение 1. Пусть $(a;b)$ – конечный или бесконечный интервал, на котором определены непрерывные действительнозначные функции $p(x)$ и $q(x)$, причем функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на $(a;b)$ и удовлетворяет на этом интервале неравенству $p(x)>0$. Дифференциальный оператор L, заданный равенством

$$L\bullet = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\bullet\right)+q(x)\bullet \qquad (42.1)$$

и определенный на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций (вообще говоря, комплекснозначных) из класса $L_2(a;b)$, удовлетворяющих определенным краевым условиям, называется *оператором Штурма-Лиувилля.*

Мы ограничимся изучением оператора Штурма-Лиувилля для конечного интервала $(a;b)$, при этом потребуем, чтобы $q(x)\in C[a;b]$, $p(x)\in C^1[a;b]$ и $p(x)>0$ для всех $x\in[a;b]$. В этом случае оператор L, заданный равенством (42.1), рассматривается на следующем подпространстве M_L пространства $L_2(a;b)$: множество M_L состоит из функций $u(x)$, принадлежащих классу $C^2(a;b)\cap C^1[a;b]$, $Lu\in L_2(a;b)$ и удовлетворяющих на концах отрезка $[a;b]$ следующим условиям:

$$\alpha_1 u(a)-\beta_1 u'(b)=0, \qquad (42.2^*)$$

$$\alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=0, \qquad (42.2^{**})$$

где $\alpha_i,\beta_i\ge 0$ и $\alpha_i+\beta_i>0$, $i=1,2$.

Замечание 1. Краевые условия (42.2*),(42.2**) являются частным случаем краевых условий вида

$$\left[\alpha(x)u(x)+\beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\right]_{x\in\partial D}=0,\ \alpha,\beta>0,$$

где n – внешняя нормаль к границе ∂D области D. В нашем случае область D – это интервал $(a;b)$

Теорема 1. Дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля L на множестве M_L симметричен

Доказательство теоремы 1. Пусть u и v – две произвольные функции из M_L. Преобразуем выражение для скалярного произведения (Lu,v), воспользовавшись правилом интегрирования по частям:

$$(Lu,v)=\int_a^b Lu\cdot\bar v\,dx=-\int_a^b\left(pu'\right)'\bar v\,dx+\int_a^b qu\bar v\,dx$$

$$-pu'\bar v\Big|_a^b+\int_a^b pu'\bar v'\,dx+\int_a^b qu\bar v\,dx. \qquad (42.3)$$

Аналогично, для скалярного произведения (u,Lv):

$$(u,Lv)=\int_a^b u\overline{Lv}\,dx=-up\bar v'\Big|_a^b+\int_a^b u'p\bar v'\,dx+\int_a^b uq\bar v\,dx \qquad (42.4)$$

Вычитая из равенства (42.3) равенство (42.4), получаем

$$(Lu,v)-(u,Lv)=p\left(-u'\bar v+u\bar v'\right)\Big|_a^b=\left(p\begin{vmatrix}u & \bar v\\ u' & \bar v'\end{vmatrix}\right)\Bigg|_a^b. \qquad (42.5)$$

Определитель, замыкающий цепочку равенств, обращается на концах отрезка $[a;b]$ в ноль, так как его строки в этом случае линейно зависимы в силу условий (42.2*) и (42.2**). Следовательно,

$$(Lu,v)=(u,Lv)$$

для любых функций u и v из множества M_L ■

Теорема 2. Если $q(x) > 0$ на интервале (a,b), то оператор Штурма-Лиувилля L на множестве M_L положительно определен.

Доказательство теоремы 2 Пусть u – произвольная функция из M_L, отличная от тождественного нуля. Воспользуемся формулой (42.3) для $v = u$:

$$(Lu,u) = -pu'\bar{u}\Big|_a^b + \int_a^b p|u'|^2 dx + \int_a^b q|u|^2 dx$$

Первое слагаемое в конечном выражении неотрицательно в силу граничных условий (42.2*) и (42.2**), второе слагаемое, очевидно, неотрицательно, а третье – положительно, так как функция u не тождественна нулю. Следовательно,

$$(Lu,u) > 0.$$

■

Полученные результаты в сочетании с теоремами 1-3 из §19 позволяют сформулировать

Следствие 1. Все собственные значения оператора Штурма-Лиувилля L, определенного на множестве M_L, являются действительными, при этом собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

Следствие 2. Если $q(x) > 0$ на интервале (a,b), то все собственные значения оператора Штурма-Лиувилля L, определенного на множестве M_L, положительны.

42.2. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля: существование, единственность, симметричность. В §34 было дано определение функции Грина $G(x,\xi)$ дифференциального оператора "$-\Delta$" в $\mathbf{R}^3$, и согласно теореме 2 из того же параграфа для решения $u(x)$ краевой задачи

$$-\Delta u(x) = F(x),\ x \in D,$$
$$u(x) = 0,\ x \in \partial D$$

справедливо равенство

$$u(x) = \iiint_D G(x,\xi)F(\xi)d\xi$$

Построим аналогичную теорию для оператора Штурма-Лиувилля.

Определение 2 *Функцией Грина* $G(x,\xi)$ оператора Штурма-Лиувилля L, определенного на множестве M_L и действующего по правилу (42.1), называется функция, определенная на $[a,b]\times[a,b]$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ функция $G(x,\xi)$ принадлежит классу $C[a,b] \cap C^1([a,b]\setminus\{x\}) \cap C^2((a,b)\setminus\{x\})$ по переменной ξ;

2) для любого $x \in (a,b)$ выполняются краевые условия (42.2*) и (42.2**):

$$\alpha_1 G(x,a) - \beta_1 G'_\xi(x,a) = 0,$$
$$\alpha_2 G(x,b) + \beta_2 G'_\xi(x,b) = 0;$$

3) $L_\xi G(x,\xi) = 0,\ \xi \in (a,b)\setminus\{x\}$;

4) на диагонали $x = \xi$ функция $G'_\xi(x,\xi)$ имеет разрыв первого рода, причем

$$G'_\xi(x,x+0) - G'_\xi(x,x-0) = -\frac{1}{p(x)}.$$

Обсудим основные свойства функции Грина $G(x,\xi)$

Теорема 3. Если существует функция Грина, то она симметрична по $(x,\xi) \in (a,b)\times(a,b)$: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть x_1 и x_2 – две произвольные точки из интервала (a,b), $x_1 < x_2$ Рассмотрим функции $g_1(\xi) = G(x_1,\xi)$ и $g_2(\xi) = G(x_2,\xi)$ переменной ξ. Надо доказать, что $g_1(x_2) = g_2(x_1)$. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на три: $[a,x_1]$, $[x_1;x_2]$, $[x_2,b]$, и для каждого из них воспользуемся формулой (42.5), учтя, что $Lg_1 = 0$ и $Lg_2 = 0$:

$$0 = \int_a^b (g_2Lg_1 - g_1Lg_2)d\xi = -p(g_2g_1' - g_1g_2')\Big|_a^{x_1-0} - p(g_2g_1' - g_1g_2')\Big|_{x_1+0}^{x_2-0}$$
$$- p(g_2g_1' - g_1g_2')\Big|_{x_2+0}^{b} = p(x_1)g_2(x_1)(g_1'(x_1+0) - g_1'(x_1-0)) -$$

$$- p(a)W(a) + p(b)W(b) + p(x_2)g_1(x_2)\left(g_2'(x_2-0) - g_2'(x_2+0)\right),$$

где $W = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{vmatrix}$ – вронскиан функций g_1 и g_2. Далее заметим, что

$g_1'(x_1+0) - g_1'(x_1-0) = G_\xi'(x_1, x_1+0) - G_\xi'(x_1, x_1-0) = -\dfrac{1}{p(x_1)}$ и

$g_2'(x_2+0) - g_2'(x_2-0) = -\dfrac{1}{p(x_2)}$, а вронскиан W в точках a и b равен нулю в силу краевых условий. Следовательно,

$$0 = -g_2(x_1) + g_1(x_2) = -G(x_2, x_1) + G(x_1, x_2).$$

■

Из симметричности функции Грина $G(x,\xi)$ следует ее непрерывность на $[a;b]\times[a;b]$ (аналогичное утверждение доказывали в §34).

Теорема 4 Если $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля L, определенного на множестве M_L, то функция Грина существует и притом единственная.

Доказательство теоремы 4.

Единственность. Если $G_1(x,\xi)$ и $G_2(x,\xi)$ – две функции Грина, то для произвольного фиксированного x функция $u(\xi) = G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)$ не имеет особенностей при $\xi = x$ и, следовательно, тождественно равна нулю (иначе бы $u(\xi)$ являлась собственной функцией, отвечающей $\lambda = 0$).

Существование. Построим функцию Грина. Пусть u_1 и u_2 – нетривиальные действительные решения однородного уравнения $Lu = 0$, причем u_1 удовлетворяет краевому условию (42.2*), а u_2 – (42.2**) Если бы эти функции оказались линейно зависимыми, то они были бы собственными функциями оператора Штурма-Лнувилля, отвечающими значению $\lambda = 0$. Следовательно, u_1 и u_2 линейно независимы, и вронскиан

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix}$$

нигде не обращается в ноль. По теореме Лиувилля выполняется соотношение

$$W(\xi) = W(a)\exp\left(-\int_a^\xi \frac{p'(\tau)}{p(\tau)}d\tau\right) = W(a)\exp\left(-\ln\frac{p(\xi)}{p(a)}\right) = \frac{W(a)p(a)}{p(\xi)}$$

Следовательно, $k = -W(\xi)p(\xi)$ является константой, отличной от нуля. Легко проверить, что функция

$$G(x,\xi) = \frac{1}{k}\begin{cases} u_1(x)u_2(\xi), & a \le x \le \xi \\ u_2(x)u_1(\xi), & \xi < x \le b \end{cases} \qquad (42.6)$$

удовлетворяет всем условиям, содержащимся в определении функции Грина ■

Из представления (42.6) вытекает

Следствие 3. В условиях теоремы 4 функция Грина $G(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве $[a;b]\times[a;b]$ за исключением диагонали $x = \xi$, на которой первые и вторые производные функции $G(x,\xi)$ терпят разрыв первого рода.

Пример 1. Построить функцию Грина для дифференциального оператора

$$Lu = -\left(\frac{1}{x+2}u'\right)'$$

на отрезке $[-1;0]$ с граничными условиями

$$u'(-1) = 0, \quad u'(0) + u(0) = 0.$$

Решение. В соответствии со схемой, приведенной в доказательстве теоремы 4, решим однородное уравнение

$$Lu \equiv -\left(\frac{1}{x+2}u'\right)' = 0.$$

Его общим решением является функция $u(x) = C_1(x^2 + 4x) + C_2$ Выберем в качестве функции, для которой выполняется краевое условие на левом конце, функцию $u_1(x) = 1$. Аналогично $u_2(x) = x^2 + 4x - 4$, для которой $u_2'(0) + u_2(0) = 0$ Далее вычислим вронскиан:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix}1 & \xi^2+4\xi-4\\ 0 & 2\xi+4\end{vmatrix}=2\xi+4=2(\xi+2).$$

Следовательно, $k=-p(\xi)W(\xi)=-2$, и

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{2}\begin{cases}\xi^2+4\xi-4, & -1\le x\le\xi\\ x^2+4x-4, & \xi<x\le 0\end{cases}$$

42.3. Обратимость оператора Штурма-Лиувилля. Функция Грина позволяет построить оператор, обратный к оператору L

<u>Теорема 5.</u> Пусть $\lambda=0$ не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля L с областью определения M_L, $G(x,\xi)$ – функция Грина этого оператора. Тогда оператор L взаимно однозначно отображает M_L на множество $C(a,b)\cap L_2(a,b)$, причем обратный оператор – это интегральный оператор G с ядром $G(x,\xi)$, функцией Грина.

Доказательство теоремы 5. Образ множества M_L заведомо лежит в $C(a,b)\cap L_2(a,b)$, поэтому остается доказать, что для любой функции $F(x)\in C(a,b)\cap L_2(a,b)$ функция

$$u(x)=(GF)(x)\equiv\int_a^b G(x,\xi)F(\xi)d\xi \qquad (42.7)$$

принадлежит множеству M_L и является единственным решением уравнения

$$Lu=F \qquad (42.8)$$

из этого множества

Произведем следующие выкладки.

$$\frac{d}{dx}\int_a^b G(x,\xi)F(\xi)d\xi=\int_a^b G'_x(x,\xi)F(\xi)d\xi=\int_a^x G'_x(x,\xi)F(\xi)d\xi+$$

$$+\int_x^b G'_x(x,\xi)F(\xi)d\xi,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\int_a^b G(x,\xi)F(\xi)d\xi\right)=\int_a^b\frac{d}{dx}\left(p(x)G'_x(x,\xi)\right)F(\xi)d\xi+$$

$$+p(x)\left(G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0)\right)F(x)$$

Упростим конечное выражение, пользуясь симметричностью функции Грина:

$$G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0)=G'_\xi(x,x+0)-G'_\xi(x,x-0)=-\frac{1}{p(x)}$$

Получаем следующий результат:

$$Lu=L\left(\int_a^b G(x,\xi)F(\xi)d\xi\right)=\int_a^b L_xG(x,\xi)F(\xi)d\xi+F(x). \qquad (42.9)$$

Остается учесть, что $L_xG(x,\xi)=L_\xi G(x,\xi)=0$

$$Lu=F.$$

Существование непрерывных второй производной функции $u(x)=(GF)(x)$ на интервале (a,b), первой производной на отрезке $[a,b]$, как, впрочем, и правомерность проведенных выше выкладок, обеспечиваются теоремой о дифференцировании несобственного интеграла по параметру (см. курс математического анализа). Действительно, в нашем случае исходный интеграл $\int_a^b G(x,\xi)F(\xi)d\xi$ сходится для любого $x\in[a,b]$, производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(G(x,\xi)F(\xi)\right)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(G(x,\xi)F(\xi)\right)$ непрерывны на множестве $[a,b]\times[a,b]$ за исключением диагонали $x=\xi$, на которой, возможно, терпят разрыв первого рода; а соответствующие, вообще говоря, несобственные [1]) интегралы $\int_a^b G'_x(x,\xi)F(\xi)d\xi$ и $\int_a^b G''_{xx}(x,\xi)F(\xi)d\xi$ сходятся равномерно относительно параметра $x\in[a,b]$, так как справедливы не зависящие от x оценки:

$$\left|G'_x(x,\xi)F(\xi)\right|<C_1\left|F(\xi)\right|,\ \left|G''_{xx}(x,\xi)F(\xi)\right|<C_2\left|F(\xi)\right|,$$

[1]) У функции $F(\xi)$ возможны особенности в точках $\xi=a$ и $\xi=b$

где $C_1 = \sup\limits_{\substack{x\in[a;b]\\ \xi\in[a;b]}} \left|G'_x(x,\xi)\right| < \infty$, $C_2 = \sup\limits_{\substack{x\in[a;b]\\ \xi\in[a;b]}} \left|G''_{xx}(x,\xi)\right| < \infty$, и интеграл $\int\limits_a^b \left|F(\xi)\right| d\xi$ сходится: $F \in L_2(a;b) \subset L_1(a;b)$

Замечание 2. Возможная неограниченность функции Lu (как и второй производной u'') на концах отрезка $[a;b]$ связана с поведением функции F на его концах. Действительно, в конечном выражении из цепочки равенств (42.9) первое слагаемое – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, а вот второе слагаемое, то есть функция $F(x)$, может быть неограниченно в точках $x = a$ и $x = b$

Выполнение граничных условий (42.2*),(42.2**) для функции $u(x)$, задаваемой выражением (42 7), следует из перестановочности оператора дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$ с интегралом и условия 2) из определения функции Грина.

Остается доказать, что уравнение (42.8) имеет единственное решение. Пусть функции u_1 и u_2 – решения уравнения (42 8) из множества M_L, тогда их разность $u = u_1 - u_2$ принадлежит M_L и удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ Следовательно, $u \equiv 0$, в противном случае функция u была бы собственной и отвечала собственному значению $\lambda = 0$, что исключено по условию ■

Следствие 4. Ядро $G(x,\xi)$ не является вырожденным

Доказательство следствия 4 Допустим противное: $G(x,\xi)$ – вырожденное ядро, тогда образ оператора G есть конечномерное пространство, что противоречит теореме 5, согласно которой образ G – это множество M_L

Замечание 3. В случае, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора Штурма-Лиувилля, построение обратного оператора принципиально невозможно, так как нет взаимной однозначности.

Пример 2. Найти функцию $u(x) \in C^2(0;1) \cap C[0;1]$, удовлетворяющую на интервале $(0;1)$ дифференциальному уравнению

$$-u''(x) = f(x) \qquad (42\ 10)$$

и краевым условиям

$$u(0) = u(1) = 0, \qquad (42\ 11)$$

где $f(x)$ – заданная функция из класса $C(0;1) \cap L_2(0;1)$.

Решение. Построим функцию Грина оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, определенного на множестве M_L функций $u(x)$ из класса $C^2(0;1) \cap C^1[0;1]$, $u'' \subset L_2(0;1)$, удовлетворяющих краевым условиям (42.11). Функции $u_1 = x$ и $u_2 = x - 1$ удовлетворяют уравнению $-u'' = 0$ и краевым условиям на левом и правом концах соответственно Отсюда находим функцию Грина $G(x,\xi)$:

$$G(x,\xi) = -\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{cases} x(\xi-1), & 0 \le x \le \xi \\ \xi(x-1), & \xi < x \le 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi \\ \xi(1-x), & \xi < x \le 1 \end{cases}.$$

По теореме 5 искомая функция $u(x)$ представляется интегралом

$$u(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi = (1-x)\int\limits_0^x \xi f(\xi) d\xi + x\int\limits_x^1 (1-\xi) f(\xi) d\xi$$

Замечание 4 Разумеется, решение задачи (42 10),(42.11) можно было получить, последовательно интегрируя обе части равенства (42 10), используя краевые условия (42.11) для определения констант интегрирования.

Пример 3 Найти непрерывное на числовой оси $\mathbf{R}$ решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi) d\xi = e^{-x^2}, \ x \in \mathbf{R}. \qquad (42.12)$$

Решение.

Первый способ. Перепишем уравнение (42.12) в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\xi - x}\varphi(\xi) d\xi + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{x-\xi}\varphi(\xi) d\xi = e^{-x^2}, \ x \in \mathbf{R}. \qquad (42.13)$$

В предположении равномерной сходимости интеграла

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)d\xi$ на множестве **R** продифференцируем обе части равенства (42.13) по x, внося знак дифференцирования под знаки интегралов. После первого дифференцирования получим

$$\varphi(x) - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\xi-x}\varphi(\xi)d\xi - \varphi(x) + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{x-\xi}\varphi(\xi)d\xi = -2xe^{-x^2},$$

то есть

$$-\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\xi-x}\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{x-\xi}\varphi(\xi)d\xi = -2xe^{-x^2}$$

Дифференцируя второй раз, приходим к равенству

$$-\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\xi-x}\varphi(\xi)d\xi - \varphi(x) + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{x-\xi}\varphi(\xi)d\xi = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2},$$

или

$$2\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)d\xi + 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} \overset{(36.5)}{=} 3e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right)e^{-x^2} \qquad (42.14)$$

Отметим, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)d\xi$ действительно сходится равномерно на **R**, так как

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)\right| \le |\varphi(\xi)| = \left|\frac{3}{2} - 2\xi^2\right|e^{-\xi^2}$$

и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{3}{2} - 2\xi^2\right|e^{-\xi^2}d\xi$ сходится

Второй способ. Изложенная выше теория Штурма-Лиувилля (в частности, теорема 5) не может быть буквально применена в данном случае в силу неограниченности интервала $(-\infty;+\infty)$. Однако можно сделать обобщение, рассмотрев дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля

$$Lu(x) = -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) \qquad (42.15)$$

на интервале $(-\infty;+\infty)$ с краевыми условиями

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0, \qquad (42.16^*)$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0 \qquad (42.16^{**})$$

При определенных условиях на коэффициенты p и q и требовании быстрого убывания функции F на бесконечности формула (42 7) остается справедливой для решения u уравнения $Lu = F$ на интервале $(a;b) = (-\infty;+\infty)$ с краевыми условиями (42 16*), (42.16**).

Допустим, что ядро $e^{-|x-\xi|}$ интегрального оператора, входящего в уравнение (42.12), является функцией Грина $G(x,\xi)$ оператора Штурма-Лиувилля на интервале с краевыми условиями (42.16*), (42.16**) Тогда для решения $\varphi(x)$ уравнения (42.12) получаем формулу

$$\varphi(x) = Le^{-x^2} = \left(2xe^{-x^2}p(x)\right)' + q(x)e^{-x^2}.$$

Построим оператор L, для чего перепишем функцию $G(x,\xi) = e^{-|x-\xi|}$ в следующем виде:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} e^{x}e^{-\xi}, & x < \xi \\ e^{-x}e^{\xi}, & x \ge \xi \end{cases},$$

откуда следует, что $u_1(x) = e^{x}$ и $u_2(x) = e^{-x}$ – решения дифференциального уравнения $Lu(x) = 0$, причем функция $u_1(x)$ удовлетворяет условию (42.16*), а функция $u_2(x)$ – условию (42.16**) (см. доказательство теоремы 4). Найдем функцию $p(x)$:

$$1 = k \equiv -\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} p(x) = -\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-x} \end{vmatrix} p(x) = 2p(x),$$

откуда

$$p(x) = 1/2.$$

Функцию $q(x)$ найдем из равенства $Lu_1(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}\left(e^{x}\right)'' + q(x)e^{x} = 0,$$

откуда

$$q(x) = 1/2.$$

Отметим, что оператор L можно построить, не прибегая к доказательству теоремы 4, а используя непосредственно определение функции Грина: во-первых,

$$-\frac{1}{p(x)} = G_\xi(x, x+0) - G_\xi(x, x-0) = -1 - 1 = -2,$$

следовательно,

$$p(x) = 1/2;$$

во-вторых, при $\xi \neq x$

$$0 = L_\xi G(x,\xi) = -\frac{1}{2}e^{-|x-\xi|} + q(\xi)e^{-|x-\xi|},$$

откуда

$$q(x) = 1/2.$$

Таким образом, построен оператор $L\bullet = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\bullet + \frac{1}{2}\bullet$ такой, что функция $G(x,\xi) = e^{-|x-\xi|}$ является функцией Грина оператора Штурма-Лиувилля L на интервале $(-\infty;+\infty)$ с краевыми условиями (42.16*),(42.16**). Следовательно, для решения $\varphi(x)$ уравнения (42.12) можно записать

$$\varphi(x) = Le^{-x^2} = \frac{1}{2}\left(2xe^{-x^2}\right)' + \frac{1}{2}e^{-x^2} = \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right)e^{-x^2}$$

что совпадает с результатом (42.14).

Замечание 5. На предложенный второй способ решения уравнения (42.12) можно смотреть как на метод формального построения функции, претендующей на роль решения, после чего должна быть сделана подстановка полученной функции в уравнение (42.12) для проверки.

§43. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром

42.1. Постановка задачи Штурма-Лиувилля. Сведение задачи на собственные значения дифференциального оператора к задаче Штурма-Лиувилля.

Определение 1. Пусть $(a;b)$ – конечный или бесконечный интервал на числовой оси $\mathbf{R}$, L – дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля, действующий по правилу (42.1) и определенный на некотором множестве M_L функций, принадлежащих классу $C^2(a;b) \cap L_2(a;b)$ и удовлетворяющих определенным краевым условиям. *Задача Штурма-Лиувилля* состоит в решении на множестве M_L уравнения

$$Lu(x) \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x) = \lambda a(x)u(x), \qquad (43.1)$$

где $a(x)$ – заданная непрерывная функция, $a(x) > 0$ при $x \in (a;b)$, λ – комплексный параметр.

Замечание 1. Пусть $a(x) \equiv 1$. Тогда существование нетривиального решения $u(x)$ уравнения (43.1) означает, что λ – собственное значение оператора Штурма-Лиувилля , определенного на множестве M_L, а $u(x)$ – отвечающая ему собственная функция. Для того, чтобы каждый раз не оговаривать область определения оператора L, его собственные значения λ называют *собственными значениями* соответствующей *задачи Штурма-Лиувилля*. Функцию Грина оператора L, определенного на множестве M_L, также называют *функцией Грина задачи Штурма-Лиувилля*

Лемма 1. Пусть $\tilde{L}$ – дифференциальный оператор второго порядка:

$$\tilde{L}\bullet = -\tilde{p}(x)\frac{d^2}{dx^2}\bullet + b(x)\frac{d}{dx}\bullet + \tilde{q}(x)\bullet,$$

где $\tilde{p}(x)$, $b(x)$ и $\tilde{q}(x)$ – непрерывные на интервале $(a;b)$ функции, причем $\tilde{p}(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$. Тогда существует такая непрерывная функция $a(x)$, $a(x) > 0$ на $(a;b)$, что уравнение

$$\tilde{L}u(x) = \lambda u(x) \qquad (43.2)$$

эквивалентно уравнению (43.1):

$$Lu(x) \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x) = \lambda a(x)u(x),$$

где $p(x) = a(x)\tilde{p}(x)$ и $q(x) = a(x)\tilde{q}(x)$, то есть

$$L\bullet = a(x)\tilde{L}\bullet.$$

Доказательство леммы 1. Умножим обе части уравнения (43 2) на функцию $a(x)$, получим

$$-a(x)\tilde{p}(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + a(x)b(x)\frac{d}{dx}u(x) + a(x)\tilde{q}(x)u(x) = a(x)\lambda u(x).$$

Для эквивалентности этого уравнения и уравнения (43.1) необходимо, чтобы

$$a(x)b(x) = -\frac{d}{dx}(a(x)\tilde{p}(x)),$$

откуда

$$a(x) = \frac{1}{\tilde{p}(x)}\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{b(\xi)}{\tilde{p}(\xi)}d\xi\right\},$$

где x_0 – произвольная фиксированная точка из интервала $(a;b)$.

Отметим, что полученная функция $a(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и удовлетворяет на нем неравенству $a(x) > 0$, так что умножение обеих частей уравнения (43.2) на $a(x)$ решений не меняет ■

Замечание 2. Существование нетривиального решения $u(x)$ уравнения (43.2) из определенного класса функций означает, что λ – собственное значение, а $u(x)$ – отвечающая ему собственная функция оператора $\tilde{L}$. Таким образом, задачу на нахождение собственных значений оператора $\tilde{L}$ всегда можно свести к задаче Штурма-Лиувилля По этой причине задачу Штурма-Лиувилля часто называют "задачей на собственные значения"

43.2. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Далее будем считать, что интервал $(a;b)$ ограничен, функции $p(x)$ и $q(x)$ принадлежат классам $C^1[a;b]$ и $C[a;b]$ соответственно, причем $p(x) > 0$ для всех $x \in [a;b]$, оператор Штурма-Лиувилля L определен на подпространстве

$$M_L = \{u\ .\ u \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b],\ Lu \in L_2(a;b),\ (42\ 2^*),(42.2^{**})\}$$

гильбертова пространства $L_2(a;b)$.

Теорема 1. Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля L с областью определения M_L. В этом случае функция $u(x) \in M_L$ является решением уравнения

$$Lu = \lambda u + f,\ f \in C(a;b) \cap L_2(a;b) \qquad (43.3)$$

тогда и только тогда, когда она является решением неоднородного интегрального уравнения Фредгольма 2-ого рода

$$u(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)u(\xi)d\xi + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \qquad (43.4)$$

где $G(x,\xi)$ – функция Грина оператора Штурма-Лиувилля L, определенного на множестве M_L.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1 является следствием теоремы 5 из §42: достаточно в предположении существования решения $u(x)$ в формуле (42.7) положить $F(x) = \lambda u(x) + f(x)$ ■

Следствие 1. Пусть функция $u(x)$ принадлежит M_L и удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$\tilde{L}u = \lambda u + \tilde{f}, \qquad (43.5)$$

где $\tilde{L}$ – оператор из леммы 1, $\tilde{f} \in C(a;b) \cap L_2(a;b)$. Тогда функция $u(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda\int_a^b a(\xi)G(x,\xi)u(\xi)d\xi + \int_a^b a(\xi)G(x,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi, \qquad (43.6)$$

где $G(x,\xi)$ – функция Грина оператора Штурма-Лиувилля $L = a(x)\tilde{L}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1, $a(x)$ – участвующая в лемме 1 функция

Пример 1 Свести к интегральному уравнению дифференциальное уравнение

$$-(x+2)^2u''(x) + (x+2)u'(x) = \lambda u(x) + \tilde{f}(x),\ \tilde{f} \in C[-1;0] \qquad (43.7)$$

на отрезке $[-1;0]$ с граничными условиями

$$u'(-1)=0,\quad u'(0)+u(0)=0.$$

Решение Прежде всего, приведем дифференциальное уравнение к виду, в котором участвует оператор Штурма-Лиувилля (дивергентному виду) Для этого воспользуемся леммой 1, а именно, умножим обе части дифференциального уравнения на некоторую функцию $a(x)$:

$$-\left((x+2)^2a(x)u'(x)\right)'=\lambda a(x)u(x)+a(x)\tilde{f}(x)$$

Необходимо выполнение условия $-\left((x+2)^2a(x)\right)'=a(x)(x+2)$, которому удовлетворяет функция $a(x)=(x+2)^{-3}$ Тем самым приходим к дифференциальному уравнению

$$Lu\equiv-\left(\frac{1}{x+2}u'\right)'=\lambda\frac{u(x)}{(x+2)^3}+\frac{\tilde{f}(x)}{(x+2)^3}\qquad(43\ 8)$$

Воспользуемся функцией Грина $G(x,\xi)$, построенной в примере 1 из §42. Получаем интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_{-1}^{0}G(x,\xi)\frac{u(\xi)}{(\xi+2)^3}d\xi+\int_{-1}^{0}G(x,\xi)\frac{\tilde{f}(\xi)}{(\xi+2)^3}d\xi.$$

Другим подходом является формальное применение алгоритма построения функции Грина к исходному дифференциальному уравнению, подразумевая под $-p(x)$ коэффициент при $u''(x)$ (конечно при этом k уже может зависеть от ξ). А именно, решаем однородное уравнение

$$-(x+2)^2u''(x)+(x+2)u'(x)=0$$

с условием на левом конце и получаем $u_1(x)=1$, с условием на правом конце – $u_2(x)=x^2+4x-4$. Тогда

$$k=-p(\xi)W(\xi)=-(\xi+2)^2\begin{vmatrix}1 & \xi^2+4\xi-4\\ 0 & 2\xi+4\end{vmatrix}=-2(\xi+2)^3,$$

и

$$\tilde{G}(x,\xi)=-\frac{1}{2(\xi+2)^3}\begin{cases}\xi^2+4\xi-4 & 1\le x\le\xi\\ x^2+4x-4, & \xi<x\le 0\end{cases}$$

Приходим к интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_{-1}^{0}\tilde{G}(x,\xi)u(\xi)d\xi+\int_{-1}^{0}\tilde{G}(x,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi$$

которое эквивалентно полученному ранее, так как $\tilde{G}(x,\xi)=\dfrac{1}{(\xi+2)^3}G(x,\xi)$

43.3. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению в случае, когда $\lambda=0$ – собственное число. В предыдущем пункте (как и в §42) мы полагали, что функция $q(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Следовательно, она ограничена, и существует такое число m, что функция $q_1(x)=q(x)+m$ положительна на $[a,b]$

Далее заметим, что оператор $L_1=L+mE$:

$$L_1\bullet=-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\bullet\right)+q_1(x)\bullet$$

– уже положительно определен, и все его значения положительны (теорема 2 и следствие 2 из §42) Таким образом, для оператора L_1 всегда можно построить функцию Грина $G(x,\xi)$, и к интегральному уравнению можно сводить уравнение

$$L_1u=(\lambda+m)u+f,$$

эквивалентное уравнению (43 3).

Аналогично сводится к интегральному уравнению и уравнение вида (43.5).

Пример 2. Свести к интегральному уравнению дифференциальное уравнение (43.7) на отрезке $[-1,0]$ с краевыми условиями

$$u'(-1)=0,\ u'(0)=0\qquad(43.9)$$

Решение. Уравнение (43 7) в примере 1 уже было приведено к дивергентному виду (43.8). Однако $\lambda=0$ является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля $Lu=\lambda u$ с краевыми условиями (43.6) (соответствующая собственная функция $u\equiv const$). Перепишем тогда уравнение (43 7) следующим образом.

$$\tilde{L}_1u(x)\equiv-(x+2)^2u''(x)+(x+2)u'(x)+mu(x)=(\lambda+m)u(x)+\tilde{f}(x)$$

Здесь константу m выберем так, чтобы дифференциальное уравне-

ние

$$\tilde{L}_1 u = 0 \qquad (43.10)$$

несложно решалось. Дело в том, что впоследствии при построении функции Грина будут участвовать решения этого уравнения. В данном случае мы получаем так называемое уравнение Эйлера, решения которого имеют вид $(x+2)^s$. Например, если выбрать $m = 3$, то общее решение уравнения (43.10) есть

$$u(x) = C_1(x+2)^3 + \frac{C_2}{x+2}.$$

Тогда функция $u_1(x) = (x+2)^3 + \dfrac{3}{x+2}$ удовлетворяет краевым условиям (43.9) при $x = -1$, а $u_2(x) = (x+2)^3 + \dfrac{48}{x+2}$ – при $x = 0$.

Аналогично примеру 1 приходим к уравнению

$$L_1 u(x) \equiv -\left(\frac{1}{x+2}u'(x)\right)' + \frac{3}{(x+2)^3}u(x) = (\lambda+3)\frac{u(x)}{(x+2)^3} + \frac{\tilde{f}(x)}{(x+2)^3}.$$

Здесь уже оператор Штурма-Лиувилля L_1 положительно определен. Уравнения $L_1 u = 0$ и $\tilde{L}_1 u = 0$, очевидно, эквивалентны, поэтому функция Грина $G_1(x,\xi)$ оператора L_1 с краевыми условиями (43.9) имеет следующий вид:

$$G_1(x,\xi) = \frac{1}{k}\begin{cases}\left((x+2)^3 + \dfrac{3}{x+2}\right)\left((\xi+2)^3 + \dfrac{48}{\xi+2}\right), & -1 \le x \le \xi \\ \left((\xi+2)^3 + \dfrac{3}{\xi+2}\right)\left((x+2)^3 + \dfrac{48}{x+2}\right), & \xi < x \le 0\end{cases},$$

где $k = -\dfrac{1}{x+2}\begin{vmatrix}(x+2)^3 + \dfrac{3}{x+2} & (x+2)^3 + \dfrac{48}{x+2} \\ 3(x+2)^2 - \dfrac{3}{(x+2)^2} & 3(x+2)^2 - \dfrac{48}{(x+2)^2}\end{vmatrix} = 180.$

Искомое интегральное уравнение выглядит так.

$$u(x) = (\lambda+3)\int_{-1}^{0} G_1(x,\xi)\frac{u(\xi)}{(\xi+2)^3}d\xi + \int_{-1}^{0} G_1(x,\xi)\frac{\tilde{f}(\xi)}{(\xi+2)^3}d\xi$$

§44. Свойства спектра задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова

44.1. Кратность собственных значений. Пусть по-прежнему $(a;b)$ – ограниченный интервал, L – оператор Штурма-Лиувилля:

$$L\bullet = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\bullet\right) + q(x)\bullet,$$

$q(x) \in C[a;b]$, $p(x) \in C^1[a;b]$ и $p(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Продолжим рассмотрение задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$Lu = \lambda u$$

на множестве

$$M_L = \left\{u:\ u \in C^2(a;b) \cap C^1[a;b],\ Lu \in L_2(a;b),\ (42.2^*), (42.2^{**})\right\}.$$

Согласно общим результатам §42 собственные значения этой задачи – действительные числа, собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(a;b)$. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. Спектр оператора Штурма-Лиувилля L на множестве M_L простой, то есть кратность каждого собственного значения равна единице.

Доказательство теоремы 1. Пусть u_1 и u_2 – две собственные функции оператора L из класса M_L, отвечающие собственному значению λ. Тогда функции u_1 и u_2 являются решениями дифференциального уравнения второго порядка

$$Lu - \lambda u = 0.$$

Заметим, что в точке $x = a$ выполняются краевые условия

$$\alpha_1 u_1(a) - \beta_1 u_1'(a) = 0,$$
$$\alpha_1 u_2(a) - \beta_1 u_2'(a) = 0,$$

откуда $W(a) \equiv \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{vmatrix} = 0$, и по соответствующей теореме из курса дифференциальных уравнений $W(x) \equiv 0$, то есть решения u_1 и u_2 линейно зависимы ■

44.2. Теорема Стеклова.

Лемма 1. Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением поставленной выше задачи Штурма-Лиувилля, $G(x,\xi)$ – функция Грина этой задачи, G – интегральный оператор с непрерывным невырожденным эрмитовым ядром $G(x,\xi)$ Тогда функция $u(x) \in M_L$ является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, отвечающей собственному значению λ, тогда и только тогда, когда $u(x)$ является собственной функцией интегрального оператора G, отвечающей характеристическому числу λ

Доказательство леммы 1 Утверждение леммы 1 является частным случаем теоремы 1 из §43 ■

Для оператора G можно воспользоваться результатами предыдущей главы: множество характеристических чисел счетно и имеет единственную предельную точку на бесконечности.

Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ – характеристические числа оператора G (собственные значения оператора L), занумерованные в порядке возрастания $(0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots)$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ – соответствующие нормированные в $L_2(a,b)$ собственные функции Рассмотрим произвольную функцию $u(x)$ из M_L. Ее образ $v = Lu$ принадлежит классу $L_2(a,b) \cap C(a,b)$, и u истокообразно представима через ядро $G(x,\xi)$:

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)v(\xi)d\xi .$$

Следовательно, по теореме Гильберта-Шмидта (см. §41) имеет место следующее разложение в равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд:

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(v,\varphi_l)}{\lambda_l}\varphi_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(Gv,\varphi_l)\varphi_l(x),$$

или

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(u,\varphi_l)\varphi_l(x) \qquad (44.1)$$

Тем самым, в случае, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля, доказана следующая

Теорема 2 (Стеклова). Любая функция $u(x)$ из класса M_L разлагается в равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд Фурье (44.1) по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

Доказательство теоремы 2. Осталось показать, что теорема 2 остается справедливой и в случае, когда $\lambda = 0$ – собственное значение. Сделаем сдвиг по спектру, рассмотрев оператор $L_1 = L - \gamma E$, где γ – произвольное число, отличное от всех собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для оператора L. Оператор L_1 обратим, поэтому функция $u(x) \in M_L$ истокообразно представима через ядро $G_1(x,\xi)$, функцию Грина оператора L_1, следовательно, $u(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд (44.1) по собственным функциям оператора L_1. Остается заметить, что у оператора L_1 собственные функции те же, что и у оператора L ■

Решение краевых задач для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^3$ с помощью потенциалов простого и двойного слоя

§45. Постановка основных краевых задач для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^3$. Вопросы единственности

45.1. Внутренние задачи Дирихле и Неймана. В заключение курса рассмотрим основные краевые задачи для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^3$. По типу области эти задачи делятся на внутренние и внешние, а по типу граничных условий – на задачи Дирихле и Неймана.

Сформулируем основные задачи для ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^3$ с достаточно гладкой границей ∂D (должно иметь смысл понятие правильной нормальной производной на поверхности ∂D).

Внутренняя задача Дирихле: найти гармоническую в области D функцию $u(x)$, непрерывную на замыкании $\overline{D}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u(x)\big|_{x\in\partial D} = u_0(x), \tag{45.1}$$

где $u_0(x)$ – заданная и непрерывная на ∂D функция.

Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в области D функцию $u(x)$, непрерывную на замыкании $\overline{D}$, имеющую на поверхности ∂D правильную нормальную производную $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{x\in\partial D} = u_1(x), \tag{45.2}$$

где $u_1(x)$ – заданная и непрерывная на ∂D функция, n – внешняя единичная нормаль к границе ∂D области D.

Теорема 1. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет не более одного решения. Разность двух любых решений внутренней задачи Неймана (если таковые существуют) тождественно равна константе.

Доказательство теоремы 1. Для задачи Дирихле утверждение теоремы уже доказывалось в §23, исходя из принципа максимума для гармонических функций.

Для того, чтобы доказать часть утверждения теоремы, касающуюся внутренней задачи Неймана, воспользуемся третей формулой Грина. Пусть $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{\tilde{u}}(x)$ – два решения внутренней задачи Неймана. Тогда их разность $u(x) = \tilde{u}(x) - \tilde{\tilde{u}}(x)$ является решением внутренней задачи Неймана с однородными граничными условиями. Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = \iiint\limits_D u\Delta u dx = \iint\limits_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial n}ds - \iiint\limits_D |\nabla u|^2 dx = -\iiint\limits_D |\nabla u|^2 dx,$$

откуда получаем, что градиент ∇u тождественно равен нулю в D, и следовательно, функция u является константой ■

Теорема 2 (необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана). Для разрешимости внутренней задачи Неймана необходимо, чтобы граничная функция удовлетворяла условию

$$\iint\limits_{\partial D} u_1(x)ds_x = 0 \tag{45.3}$$

(сравните с леммой 1 §33).

Доказательство теоремы 2. Пусть решение $u(x)$ внутренней задачи Неймана существует. Запишем вторую формулу Грина для функций $u(x)$ и $v(x) \equiv 1$

$$0 = \iiint\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)dx = \iint\limits_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \iint\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}ds = \iint\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint\limits_{\partial D} u_1 ds,$$

то есть для $u_1(x)$ должно выполняться условие (45.3) ■

45.2. Внешние задачи Дирихле и Неймана. Пусть попрежнему D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с достаточно гладкой границей ∂D. Рассмотрим задачи для уравнения Лапласа в неограниченной области $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ функцию $u(x)$, непрерывную на замыкании $\mathbf{R}^3 \setminus D$, регулярную на бесконечности и удовлетворяющую граничным условиям (45 1)

Внешняя задача Неймана найти гармоническую в области $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ функцию $u(x)$, непрерывную на замыкании $\mathbf{R}^3 \setminus D$, регулярную на бесконечности, имеющую на поверхности ∂D правильную нормальную производную $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и удовлетворяющую граничным условиям (45.2).

Замечание 1. Здесь как и в предыдущем пункте нормаль n является внешней по отношению к области D (то есть внутренней по отношению к области $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$).

Замечание 2 Нормальные производные, участвующие в граничных условиях внутренней и внешней задач Неймана, являются по сути разными. А именно, пусть $\partial D_\rho = \{x : x + \rho n \in \partial D\}$ – эквидистантная поверхность (см. §19), тогда граничные условия для внутренней задачи Неймана запишутся в виде

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n^-}\right|_{\partial D} = \lim_{\rho \to +0} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D_\rho} = u_1,$$

а для внешней -

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n^+}\right|_{\partial D} = \lim_{\rho \to -0} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D_\rho} = u_1.$$

Введенные здесь обозначения $\dfrac{\partial u}{\partial n^-}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial n^+}$ будут использоваться в дальнейшем

<u>Теорема 3.</u> Внешние задачи Дирихле и Неймана могут иметь не более одного решения

Доказательство теоремы 3 Пусть $\tilde{u}$ и $\tilde{\tilde{u}}$ – два решения внешней задачи Дирихле. Тогда их разность $u = \tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}$ является решением внешней задачи Дирихле с однородными граничными условиями. Рассмотрим два шара B_r и B_R с центрами в начале координат и достаточно большими радиусами r и R соответственно, причем $R > r$ и $\overline{D} \subset B_r$. Далее воспользуемся принципом максимума для функции u в ограниченной области $B_R \setminus \overline{D}$:

$$\max_{B_r \setminus D} |u| \le \max_{B_R \setminus D} |u| \le \max\left\{\max_{\partial D} |u|, \max_{\partial B_R} |u|\right\} = \max_{\partial B_R} |u|.$$

Устремим радиус R к бесконечности и учтем, что функция u является регулярной на бесконечности, и следовательно, $\max\limits_{\partial B_R} |u| \xrightarrow{R \to \infty} 0$. Получим $\max\limits_{B_r \setminus D} |u| = 0$, то есть функция u равна тождественному нулю в $\overline{B_r} \setminus D$. Остается учесть, что радиус r может быть выбран сколь угодно большим, следовательно, $u \equiv 0$ в $\mathbf{R}^3 \setminus D$

Пусть теперь $\tilde{u}$ и $\tilde{\tilde{u}}$ – два решения внешней задачи Неймана Тогда их разность $u = \tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}$ является решением внешней задачи Неймана с однородными граничными условиями. Рассмотрим шар B_R с центром в начале координат и достаточно большим радиусом R (чтобы $\overline{D} \subset B_R$) и выпишем для функции u и области $B_R \setminus \overline{D}$ третью формулу Грина.

$$\iiint\limits_{B_R \setminus \overline{D}} u \Delta u \, dx = \iint\limits_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint\limits_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iiint\limits_{B_R \setminus \overline{D}} |\nabla u|^2 dx$$

Обратим внимание на знак минус перед вторым интегралом в правой части правильная нормальная производная на границе ∂D по отношению к области $B_R \setminus \overline{D}$ является производной по внутренней нормали (см. рис. 19). Учтем теперь, что $\Delta u = 0$ в $B_R \setminus \overline{D}$ и $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0$:

$$\iint\limits_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_{B_R \setminus \overline{D}} |\nabla u|^2 dx. \qquad (45\ 4)$$

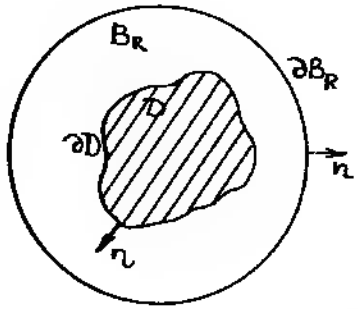

Рис. 22

Далее устремим радиус R к бесконечности и воспользуемся тем, что функция u является регулярной, то есть $u = O(|x|^{-1})$ и $|\nabla u| = O(|x|^{-2})$ при $|x| \to \infty$, поэтому из очевидной оценки

$$\left| \iint\limits_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \le O(R^{-3}) \cdot 4\pi R, \ R \to \infty$$

вытекает, что левая часть равенства (45.4) стремится к нулю при $R \to \infty$. Следовательно, стремится к нулю и правая часть равенства (45.4), что возможно лишь в случае, когда интегрируемая неотрицательная функция $|\nabla u|^2$ тождественно равна нулю во всей области $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$. Получили, таким образом, что $u \equiv const$ в $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$, но $u \underset{|x| \to \infty}{\to} 0$, то есть $u \equiv 0$ в $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ ■

§46. Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства (без доказательства). Потенциал двойного слоя в случае постоянной плотности

46.1. Основные определения. Реализуем идею доказательства существования решений основных краевых задач для уравнения Лапласа, состоящую в сведении этих задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, для которых доказаны одно-

именные теоремы. При этом используются потенциалы простого и двойного слоя.

Пусть S – кусочно гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^3$.

Определение 1. Пусть функция $\mu(x)$ задана и непрерывна на поверхности S *Потенциалом простого слоя* с плотностью $\mu(x)$ называется функция $V^{(0)}(x)$, определяемая по формуле

$$V^{(0)}(x) = \iint\limits_S \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|} ds_\xi . \qquad (46.1)$$

Физический смысл потенциала простого слоя соответствует его названию А именно, пусть на поверхности S расположены электрические заряды с плотностью μ (на единицу площади). Тогда $V^{(0)}(x)$ есть потенциал электростатического поля, создаваемого заряженной поверхностью S в точке x

Рис. 23(а)

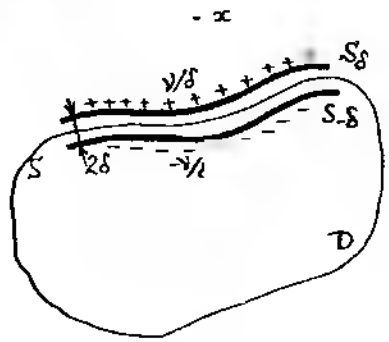

Рис 23(б)

Определение 2 Пусть функция $\nu(x)$ задана и непрерывна на поверхности S *Потенциалом двойного слоя* с плотностью $\nu(x)$ называется функция $V^{(1)}(x)$, определяемая по формуле

$$V^{(1)}(x) = \iint\limits_S \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} ds_\xi , \qquad (46.2)$$

где n_ξ – внешняя единичная нормаль по отношению к области D

Физический смысл потенциала двойного слоя следующий. Пусть на поверхности с плотностью ν расположены электрические диполи, с единичным электрическим дипольным моментом направленным вдоль нормали к S. Тогда потенциал электростатического поля, создаваемого такой поверхностью в точке x, равен $V^{(1)}(x)$ (см. рис. 23(а)). Более того, если рассматривать каждый диполь, как два противоположных заряда, расположенные на исчезающе малом расстоянии 2δ, то $V^{(1)}(x)$ – потенциал электростатического поля, созданного двумя заряженными поверхностями $S_\delta = \{\xi : \xi - n_\xi\delta \in S\}$ и $S_{-\delta} = \{\xi : \xi + n_\xi\delta \in S\}$ с плотностями зарядов ν/δ и $-\nu/\delta$ соответственно (см. рис. 23(б)). Этим и обусловлено название потенциала $V^{(1)}(x)$.

При обсуждении свойств потенциалов понадобится следующее понятие.

<u>Определение 3.</u> Поверхность S в пространстве $\mathbf{R}^3$ называется *поверхностью Ляпунова*, если выполнены следующие три условия Ляпунова:

1) в каждой точке x поверхности S существует касательная плоскость, и следовательно, единичная нормаль n_x;

2) существует такое число $r_0 > 0$, что для каждой точки x часть поверхности S, заключенная внутри сферы радиуса r_0 с центром в этой точке x, является связным множеством и пересекается не более одного раза любой прямой, параллельной нормали n_x;

3) существуют такие числа $C > 0$ и α, $0 < \alpha \le 1$, что для единичных нормалей n_x и n_y в произвольных двух точках x и y поверхности S выполняется неравенство

$$|n_x - n_y| \le C|x - y|^\alpha$$

Поверхностями Ляпунова являются, например, дважды непрерывно дифференцируемые поверхности.

46.2. Потенциал двойного слоя с постоянной плотностью. Изучим свойства потенциала двойного слоя с постоянной плотностью.

<u>Теорема 1.</u> Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова S. Тогда значение потенциала двойного слоя $V^{(1)}(x)$ с постоянной плотностью $\nu \equiv const$ зависит только от расположения точки x по отношению к области D (вне, внутри, на границе), а от самой области не зависит.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\tilde{D}$ – произвольная область в $\mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\tilde{S}$, причем $\overline{\tilde{D}} \subset D$. Рассмотрим произвольную фиксированную точку x, лежащую вне множества $\overline{D} \setminus \tilde{D}$, и воспользуемся для области $D \setminus \overline{\tilde{D}}$ и гармонических в ней функций $u(\xi) = \dfrac{1}{|x-\xi|}$ и $v(\xi) \equiv const = \nu$ второй формулой Грина:

$$0 = \iiint\limits_{D\setminus\overline{\tilde{D}}} (v\Delta_\xi u - u\Delta_\xi v)d\xi = \iint\limits_{S\cup\tilde{S}} \left(v\frac{\partial}{\partial n_\xi}u - u\frac{\partial}{\partial n_\xi}v\right)ds_\xi =$$

$$= \nu\iint\limits_{S}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi + \nu\iint\limits_{\tilde{S}}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi,$$

здесь n_ξ – внешняя единичная нормаль по отношению к области $D \setminus \overline{\tilde{D}}$.

Далее рассмотрим три случая.

1) Пусть точка x лежит вне замыкания $\overline{D}$. Выберем и зафиксируем произвольную точку $y \in D$ и окружим ее шаром $B_\varepsilon = \{\xi : |\xi - y| < \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε такого, что $\overline{B_\varepsilon} \subset D$. В качестве поверхности $\tilde{S}$ выберем границу шара B_ε. Тогда

$$V^{(1)}(x) = \nu\iint\limits_{\tilde{S}}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi = -\nu\iint\limits_{\tilde{S}}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi$$

Устремим ε к нулю, стягивая тем самым поверхность $\tilde{S}$ в точку, тогда $\iint\limits_{\tilde{S}}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi \xrightarrow{\varepsilon\to+0} 0$. Следовательно, $V^{(1)}(x) = 0$. Отметим,

что для доказательства этого факта мы использовали только кусочную непрерывность поверхности S.

2) Пусть теперь точка x лежит на границе S области D. Окружим x шаром $B_\varepsilon = \{\xi : |\xi - x| < \varepsilon\}$ радиуса ε такого, что $\varepsilon < r_0$ (r_0 – число из второго условия Ляпунова для поверхности S), и введем следующие обозначения: $\tilde{\Gamma}_\varepsilon = \partial B_\varepsilon \cap D$ – часть сферы ∂B_ε, лежащая внутри области D, $\Gamma_\varepsilon = S \cap B_\varepsilon$ – часть поверхности S, лежащая внутри шара B_ε (см. рис. 24). Без доказательства примем справедливость следующего утверждения:

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi \xrightarrow{\varepsilon \to +0} 0. \qquad (46.3)$$

Теперь "заменим" часть Γ_ε поверхности S на $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ и воспользуемся результатом, доказанным для предыдущего случая:

$$0 = \iint\limits_{(S\setminus\Gamma_\varepsilon)\cup\tilde{\Gamma}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = \iint\limits_{S\setminus\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi + \iint\limits_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi .$$

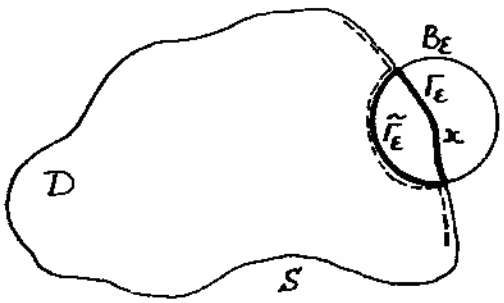

Рис. 24

Далее, представим потенциал двойного слоя как сумму двух интегралов:

$$V^{(1)}(x) = \nu \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi + \nu \iint\limits_{S\setminus\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi =$$

$$= \nu \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi - \nu \iint\limits_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi =$$

$$= \nu \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi - \nu \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} ds_\xi .$$

Устремим ε к нулю и учтем свойство (46.3)

$$V^{(1)}(x) = -2\pi\nu$$

3) Остается рассмотреть случай, когда точка x лежит в области D. Выберем в качестве поверхности $\tilde{S}$ сферу малого радиуса ε: $\tilde{S} = \{\xi : |x-\xi| = \varepsilon\}$. Тогда

$$V^{(1)}(x) = -\nu \iint\limits_{\tilde{S}} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = -\frac{\nu}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\tilde{S}} ds_\xi = -4\pi\nu .$$

■

В ходе доказательства получено

<u>Следствие 1.</u> В условиях теоремы 1 потенциал двойного слоя равен следующим значениям:

$$V^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{D} \\ -2\pi\nu, & x \in S \\ -4\pi\nu, & x \in D \end{cases}.$$

Можно показать (см. [2]), что потенциал двойного слоя имеет разрыв на поверхности S при любой непрерывной плотности $\nu(x)$, причем для точки x_0, лежащей на поверхности Ляпунова S, всегда выполняются соотношения

$$V_-^{(1)}(x_0) \equiv \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} V^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x_0) + V^{(1)}(x_0), \qquad (46.4^*)$$

$$V_+^{(1)}(x_0) \equiv \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overline{D}}} V^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x_0) + V^{(1)}(x_0) \qquad (46.4^{**})$$

46.3. Потенциал простого слоя в частном случае. В отличие от рассмотренного потенциала двойного слоя, потенциал простого слоя – функция непрерывная во всем пространстве $\mathbf{R}^3$. В качестве примера рассмотрим опять случай постоянной плотности ($\mu \equiv const$), но уже для поверхности конкретной формы – сферы

S_R с центром в начале координат и радиусом R. Найдем потенциал $V^{(0)}(x)$ в этом случае непосредственным вычислением интеграла из формулы (46 1), для чего перейдем от переменной интегрирования ξ к сферическим координатам (r,φ,θ), выбрав в качестве оси, от которой отсчитывается угол θ, вектор x:

$$V^{(0)}(x) = \mu \iint\limits_{S_R} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\theta}{\sqrt{|x|^2 - 2R|x|\cos\theta + R^2}} d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \mu \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{|x|^2 + R^2 - 2R|x|t}} =$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mu \dfrac{R}{|x|}\left(|x| + R - \big||x| - R\big|\right), & x \neq 0 \\ 4\pi\mu R, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4\pi\mu \dfrac{R^2}{|x|}, & |x| \geq R \\ 4\pi\mu R, & |x| < R \end{cases}.$$

Для вычисления интеграла по $d\theta$ мы перешли к переменной $t = \cos\theta$

Разрыв, как видно, имеет нормальная производная на сфере S_R (см рис. 25)

$$\frac{\partial}{\partial n^-} V^{(0)}\Big|_{S_R} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n^+} V^{(0)}\Big|_{S_R} = -4\pi\mu,$$

где n — внешняя по отношению к области $D = B_R$ нормаль, и использованы обозначения, введенные в предыдущем параграфе.

Для точек x, лежащих на поверхности S, рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi, \quad x \in S$$

Он представляет собой формально продифференцированный потенциал простого слоя и не имеет прямого отношения к нормальной производной, однако в литературе его иногда называют прямым значением нормальной производной на поверхности S. В рассматриваемом случае этот интеграл легко вычисляется:

$$\iint\limits_{S_R} \mu \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = \frac{\mu}{R} \iint\limits_{S_R} \frac{R^2 - (x,\xi)}{|x-\xi|^3} ds_\xi =$$

$$= -2\pi\mu R \int_0^{2\pi} \frac{R^2(1-\cos\theta)}{\left(2R^2 - 2R^2\cos\theta\right)^{3/2}} \sin\theta d\theta = -\sqrt{2}\pi\mu \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} =$$

$$= -2\pi\mu, \quad x \in S.$$

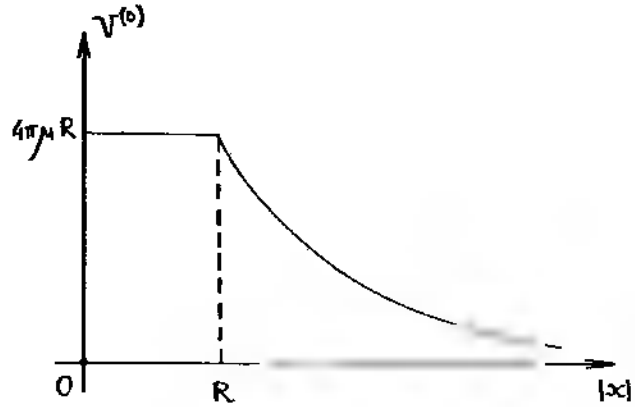

Рис 25

Здесь мы воспользовались теми же приемами, что и при вычислении $V^{(0)}(x)$.

Можно показать (см. [2]), что для произвольной непрерывной плотности $\mu(x)$ потенциал простого слоя $V^{(0)}(x)$ имеет правильные нормальные производные $\frac{\partial}{\partial n^-} V^{(0)}$ и $\frac{\partial}{\partial n^+} V^{(0)}$ на поверхности Ляпунова S, причем для точки $x_0 \in S$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial n^-} V^{(0)}(x_0) = 2\pi\mu(x_0) + \iint\limits_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{|x_0-\xi|} ds_\xi, \qquad (46.5^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial n^+} V^{(0)}(x_0) = -2\pi\mu(x_0) + \iint\limits_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{|x_0-\xi|} ds_\xi. \qquad (46.5^{**})$$

46.4. Свойства потенциалов простого и двойного слоя. Пусть S – поверхность Ляпунова, являющаяся границей ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^3$, $\mu(x)$ и $\nu(x)$ – непрерывные на S плотности потенциалов простого и двойного слоя соответственно. Тогда справедливы следующие свойства потенциалов:

1) потенциалы $V^{(0)}(x)$ и $V^{(1)}(x)$ являются гармоническими в областях D и $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ функциями;

2) потенциалы $V^{(0)}(x)$ и $V^{(1)}(x)$ являются регулярными на бесконечности;

3) потенциал $V^{(0)}(x)$ непрерывен в $\mathbf{R}^3$, а потенциал $V^{(1)}(x)$ терпит разрыв первого рода на поверхности S, причем выполняются равенства (46.4*) и (46.4**);

4) правильные нормальные производные $\frac{\partial}{\partial n^-}V^{(0)}$ и $\frac{\partial}{\partial n^+}V^{(0)}$ на поверхности S существуют и подчиняются равенствам (46.5*) и (46.5**) соответственно.

Доказательство свойств. Мы уже обсудили и оставили без доказательства свойства 3 и 4. Обоснуем теперь остальные свойства.

Свойство 1 очевидно, так как для $\xi \in S$ функции $\frac{1}{|x-\xi|}$ и $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}$ являются гармоническими по x в D и $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$. и дифференциальные операторы первого и второго порядков (в том числе и лапласиан "Δ_x") можно внести под знак интеграла по компакту S.

Для доказательства второго свойства воспользуемся теоремой 1 §36, согласно которой достаточно доказать стремление $V^{(0)}(x)$ и $V^{(1)}(x)$ к нулю при $|x| \to \infty$. Поскольку S является компактом и функции $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ непрерывны на S, то существует постоянные C и a такие, что для x, по модулю превосходящих a, выполняются неравенства

$$\sup_{\xi \in S}\frac{|\mu(\xi)|}{|x-\xi|} \le \frac{C}{|x|}, \quad \sup_{\xi \in S}\frac{|\nu(\xi)|}{|x-\xi|^2} \le \frac{C}{|x|^2}.$$

Следовательно,

$$|V^{(0)}(x)| \le \iint_S \frac{|\mu(\xi)|}{|x-\xi|}ds_\xi \le \frac{C}{|x|}\operatorname{mes}S, \ |x| > a,$$

и

$$|V^{(1)}(x)| \le \iint_S |\nu(\xi)| \cdot \left|\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}, n_\xi\right)\right| ds_\xi \le \frac{C}{|x|^2}\operatorname{mes}S, \ |x| > a.$$

Тем самым доказали стремление $V^{(0)}(x)$ и $V^{(1)}(x)$ к нулю при $|x| \to \infty$ ■

Для дальнейшего полезно обратить внимание на следующие замечания.

Замечание 1 Потенциал $V^{(1)}(x)$ не просто регулярная на бесконечности функция, на самом деле он убывает при $|x| \to \infty$ как $O(|x|^{-2})$.

Замечание 2. Из следствия 1 вытекает, что функция $\nu(x) \equiv const$, $x \in S$ является собственной для интегрального оператора с полярным ядром $K(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}$, $(x,\xi) \in S \times S$, а число $\lambda = -\frac{1}{2\pi}$ – характеристическим. Позже будет доказано, что кратность этого характеристического числа равна единице.

§47. Сведение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана к интегральным уравнениям. Применение теории Фредгольма

47.1. Сведение внутренней задачи Дирихле к интегральному уравнению. В этом параграфе считаем, что D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова S.

Рассмотрим для уравнения Лапласа в области D внутреннюю задачу Дирихле с граничными условиями (45.1). Потенциал двойного слоя является гармонической в D функцией, причем для его

значений на поверхности S справедливо равенство (46.4*) По этой причине имеет смысл искать решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле в следующем виде.

$$u(x)=\begin{cases}V^{(1)}(x), & x\in D\\ V_{-}^{(1)}(x), & x\in S\end{cases},$$

где $V^{(1)}(x)=\iint\limits_S \nu(\xi)\dfrac{\partial}{\partial n_\xi}\dfrac{1}{|x-\xi|}ds_\xi$ – потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью $\nu(\xi)$, которую необходимо найти, исходя из граничных условий (45.1):

$$u_0(x)=V^{(1)}(x)=-2\pi\nu(x)+\iint\limits_S \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi,\ x\in S.$$

Таким образом, для решения внутренней задачи Дирихле достаточно найти решение $\nu(\xi)\in C(S)$ неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\nu(x)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S K_1(x,\xi)\nu(\xi)ds_\xi=-\frac{1}{2\pi}u_0(x),\ x\in S \qquad (47.1)$$

с полярным ядром $\dfrac{1}{2\pi}K_1(x,\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial n_\xi}\dfrac{1}{|x-\xi|}$, $(x,\xi)\in S\times S$.

47.2. Сведение внешней задачи Неймана к интегральному уравнению. Рассмотрим теперь внешнюю задачу Неймана для уравнения Лапласа с граничными условиями (45.2). Ее решение $u(x)$ имеет смысл искать в виде потенциала простого слоя $V^{(0)}(x)$, поскольку существует правильная нормальная производная $\dfrac{\partial}{\partial n^+}V^{(0)}$ на поверхности S, для которой к тому же выполняется равенство (46.5**):

$$u(x)=V^{(0)}(x)=\iint\limits_S \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi.$$

Граничные условия (45.2) приводят к следующему уравнению на плотность $\mu(\xi)$:

$$u_1(x)=\frac{\partial}{\partial n^+}V^{(0)}(x)=-2\pi\mu(x)+\iint\limits_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi,\ x\in S$$

Итак, для решения внешней задачи Неймана достаточно найти решение $\mu(\xi)\in C(S)$ неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\mu(x)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S K_0(x,\xi)\mu(\xi)ds_\xi=-\frac{1}{2\pi}u_1(x),\ x\in S \qquad (47.2)$$

с полярным ядром $\dfrac{1}{2\pi}K_0(x,\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial n_x}\dfrac{1}{|x-\xi|}$, $(x,\xi)\in S\times S$.

47.3. Анализ полученных интегральных уравнений. Конечно мы рассмотрели пару именно таких краевых задач не случайно интегральные уравнения (47.1) и (47.2) являются союзными и для них справедливы теоремы Фредгольма. Следовательно, достаточно выяснить, является ли число $\lambda=\dfrac{1}{2\pi}$ характеристическим для ядра $K_0(x,\xi)$ или ядра $K_1(x,\xi)$. Проще это сделать для ядра $K_0(x,\xi)$.

Лемма 1. Число $\lambda=\dfrac{1}{2\pi}$ не является характеристическим числом для ядра $K_0(x,\xi)$, и следовательно, для сопряженного ядра $K_1(x,\xi)$

Доказательство леммы 1. Допустим противное: $\lambda=\dfrac{1}{2\pi}$ – характеристическое число для ядра $K_0(x,\xi)$, $\mu_0(\xi)$ – соответствующая собственная функция, то есть выполняется следующее соотношение:

$$\mu_0(x)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S K_0(x,\xi)\mu_0(\xi)ds_\xi=0,\ x\in S$$

Рассмотрим функцию $w(x)$, равную потенциалу простого слоя с плотностью $\mu_0(\xi)$:

$$w(x)=\iint\limits_S \mu_0(\xi)\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi.$$

Согласно свойствам потенциала простого слоя сужение $w(x)|_{\mathbf{R}^3\setminus D}$ является решением внешней задачи Неймана с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial n^+} w(x) = -2\pi\mu_0(x) + \iint_S K_0(x,\xi)\mu_0(\xi)ds_\xi = 0.$$

Следовательно, по теореме 3 §45 $w(x)|_{\mathbf{R}^3\setminus D} \equiv 0$

Вспомним теперь, что $w(x)$ – непрерывная в $\mathbf{R}^3$ функция, гармоническая в D, и мы доказали, что $w(x)|_S \equiv 0$, поэтому сужение $w(x)|_{\bar{D}}$ можно рассматривать как решение внутренней задачи Дирихле с однородными граничными условиями. Следовательно, по теореме 1 §45 $w(x)|_{\bar{D}} \equiv 0$.

Итак, $w(x) \equiv 0$ в $\mathbf{R}^3$ Остается воспользоваться равенствами (46 5*) и (46.5**):

$$4\pi\mu(x) = \frac{\partial}{\partial n^-} w(x) - \frac{\partial}{\partial n^+} w(x) = 0,\ x \in S,$$

то есть $\mu(x) \equiv 0$, что противоречит определению собственной функции ■

Из леммы 1 согласно альтернативе Фредгольма вытекает

Следствие 1. Интегральные уравнения (47.1) и (47.2) разрешимы в классе $C(S)$ при любых непрерывных правых частях.

Тем самым доказана следующая

Теорема 1. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана разрешимы для любых непрерывных граничных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ соответственно.

§48. Сведение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана к интегральным уравнениям. Потенциал Робэна

48.1. Сведение внутренней задачи Неймана к интегральному уравнению. В этом параграфе будем опять полагать, что D – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова S

Рассмотрим для уравнения Лапласа в области D внутреннюю задачу Неймана. Ищем решение $u(x)$ этой задачи в виде потенциала простого слоя $V^{(0)}(x)$ с некоторой непрерывной плотностью $\mu(\xi)$:

$$u(x) = V^{(0)}(x) = \iint_S \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi$$

Граничные условия (45.2) в сочетании с равенством (46.5*) приводят к следующему уравнению на плотность $\mu(\xi) \in C(S)$:

$$u_1(x) = \frac{\partial}{\partial n^-} V^{(0)}(x) = 2\pi\mu(x) + \iint_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-\xi|}ds_\xi,\ x \in S.$$

Таким образом, для решения внутренней задачи Неймана достаточно решить неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\iint_S K_0(x,\xi)\mu(\xi)ds_\xi = \frac{1}{2\pi}u_1(x),\ x \in S, \qquad (48.1)$$

где $K_0(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-\xi|}$, $(x,\xi) \in S\times S$ – полярное ядро.

48.2. Потенциал Робэна. Выясним, при каких условиях на правую часть интегральное уравнение (48.1) разрешимо. Для этого рассмотрим союзное однородное уравнение

$$\nu(x) + \frac{1}{2\pi}\iint_S K_1(x,\xi)\nu(\xi)ds_\xi = 0,\ x \in S, \qquad (48.2)$$

где $K_1(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}$, $(x,\xi) \in S\times S$ – сопряженное к $K_0(x,\xi)$ ядро

Уравнение (48.2) заведомо имеет как минимум одно линейно независимое решение $\nu \equiv 1$ (см. §46). Согласно второй теореме Фредгольма для разрешимости уравнения (48 1) необходима ортогональность функций u_1 и $\nu \equiv 1$, то есть выполнение условия

$$\iint_S u_1(\xi)ds_\xi = 0. \qquad (48.3)$$

Необходимость этого условия уже доказывалась и из других соо-

ражений (см теорему 2 §45). Обоснуем теперь достаточность условия (48.3), показав, что кратность характеристического числа $\lambda = -\frac{1}{2\pi}$ для ядра $K_1(x,\xi)$ равна единице.

Этот факт проще доказать для сопряженного однородного уравнения

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\iint_S K_0(x,\xi)\mu(\xi)ds_\xi = 0,\ x \in S. \qquad (48.4)$$

По первой теореме Фредгольма уравнения (48.2) и (48.4) имеют одинаковое количество линейно независимых решений. Следовательно, достаточно доказать, что существует только одно линейно независимое решение уравнения (48.4), которое мы обозначим $\mu_0(x)$ Для этого понадобятся две следующие леммы

Лемма 1. Пусть непрерывная на S функция $\mu(x)$ удовлетворяет уравнению (48 4) Тогда потенциал простого слоя $V^{(0)}(x)$ с плотностью $\mu(x)$ тождественно равен константе в замыкании $\overline{D}$

Доказательство леммы 1. Потенциал $V^{(0)}(x)$ из формулировки леммы 1 является гармонической в D функцией, причем в силу равенства (48 4) выполняются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial}{\partial n^-}V^{(0)}(x) = 2\pi\mu(x) + \iint_S K_0(x,\xi)\mu(\xi)ds_\xi = 0,\ x \in S.$$

Следовательно, $V^{(0)}(x)\big|_{\overline{D}}$ решение внутренней задачи Неймана с однородными граничными условиями, то есть $V^{(0)}(x) \equiv const$ в D ■

Лемма 2. Пусть $\mu(x)$ решение уравнения (48.4), при котором потенциал простого слоя $V^{(0)}(x)$ с плотностью $\mu(x)$ обращается в ноль на замыкании $\overline{D}$ Тогда функция $V^{(0)}(x)$ тождественно равна нулю во всем пространстве $\mathbf{R}^3$, а плотность $\mu(x)$ тождественно равна нулю на поверхности S.

Доказательство леммы 2 Потенциал $V^{(0)}(x)$ из формулировки леммы 2 является гармонической в $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ функцией, регулярной

на бесконечности, причем $V^{(0)}(x)\big|_S = 0$, так как по условию $V^{(0)}(x) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следовательно, сужение $V^{(0)}(x)\big|_{\mathbf{R}^3\setminus D}$ можно рассматривать как решение внешней задачи Дирихле с однородными граничными условиями, что в силу теоремы 3 §45 означает равенство $V^{(0)}(x)$ тождественному нулю в $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$. Таким образом, $V^{(0)}(x) \equiv 0$ в $\mathbf{R}^3$. Остается учесть, что

$$4\pi\mu(x) = \frac{\partial}{\partial n^-}V^{(0)}(x) - \frac{\partial}{\partial n^+}V^{(0)}(x) = 0,\ x \in S,$$

то есть $\mu(x) \equiv 0$ на S ■

Рассмотрим теперь потенциал простого слоя $w(x)$ с плотностью $\mu_0(x)$. По лемме 1 этот потенциал тождественно равен в $\overline{D}$ некоторой константе C_0, причем по лемме 2 $C_0 \neq 0$, так как $\mu_0(x)$ – нетривиальное решение. Следовательно, потенциал простого слоя с плотностью $\mu_R = \mu_0(x)/C_0$ будет тождественно равен единице в $\overline{D}$.

Определение 1. Потенциал простого слоя, тождественно равный единице в замыкании $\overline{D}$, называется *потенциалом Робэна.*

Корректность этого определения очевидна: существование потенциала Робэна мы только что доказали, а его единственность следует из леммы 2 (в классе $C(S)$ существует единственная функция, являющаяся плотностью потенциала Робэна).

Более того, лемма 2 позволяет доказать единственность линейно независимого решения уравнения (48.4). В самом деле, пусть $\mu_1(x)$ – произвольное нетривиальное решение уравнения (48.4), тогда согласно лемме 1 потенциал простого слоя с плотностью $\mu_1(x)$ тождественно равен константе $\tilde{N}_1$ в $\overline{D}$, причем по лемме 2 $\tilde{N}_1 \neq 0$. Следовательно, функция $\mu_1(x)/C_1$ является плотностью потенциала Робэна, что в силу единственности последнего означает $\frac{\mu_1(x)}{C_1} \equiv \frac{\mu_0(x)}{C_0}$, $x \in S$, то есть функции $\mu_1(x)$ и $\mu_0(x)$ линейно

зависимы.

Итак, доказали следующую теорему.

Теорема 1. Интегральное уравнение (48.1) разрешимо в классе $C(S)$ при любой непрерывной правой части, ортогональной на поверхности S функции, тождественно равной единице.

Следствие 1. Внутренняя задача Неймана разрешима для любой непрерывной граничной функции $u_1(x)$, удовлетворяющей условию (48.3).

Замечание 1 Факт определенности решения внутренней задачи Неймана с точностью до постоянного слагаемого в рамках теории интегральных уравнений вытекает из того, что существует нетривиальное решение однородного интегрального уравнения (48.1), являющееся к тому же плотностью потенциала Робэна.

Обсудим некоторые особенности потенциала Робэна.

Замечание 2. Потенциал Робэна – регулярная на бесконечности гармоническая функция, поэтому вне области он заведомо отличен от константы.

Замечание 3 Физический смысл потенциала Робэна следующий. Пусть S – проводящая поверхность, на которую подан единичный (относительно бесконечно удаленных точек) потенциал. Тогда электрический заряд сам будет распределяться по поверхности S. В результате возникнет электростатическое поле, потенциал которого и будет являться потенциалом Робэна

Пример 1 Пусть потенциал простого слоя на поверхности S тождественен единице, будет ли он тождественен единице в области D?

Решение. Из физических соображений ответ утвердительный. Формально этот результат следует из единственности решения внутренней задачи Дирихле с граничной функцией, тождественно равной единице.

Пример 2. Доказать, что плотность потенциала простого слоя, равного на поверхности единице, удовлетворяет уравнению (48.4).

Решение. Такой потенциал можно рассматривать, как решение внутренней задачи Неймана, граничные условия в которой однородны в силу предыдущего примера. Остается воспользоваться равенством (46.5*)

48.3. Существование решения внешней задачи Дирихле. Осталось рассмотреть внешнюю задачу Дирихле Искать ее решение в виде потенциала двойного слоя заведомо бессмысленно, так как этот потенциал слишком быстро убывает при $|x| \to \infty$ (как $O(|x|^{-2})$). Попробуем к этому потенциалу добавить гармоническое слагаемое, имеющее "утерянный" потенциалом двойного слоя порядок $O(|x|^{-1})$. Именно, решение $u(x)$ внешней задачи Дирихле будем искать в следующем виде.

$$u(x) = \frac{A}{|x - x_0|} + \begin{cases} V^{(1)}(x), & x \notin \overline{D} \\ V_+^{(1)}(x), & x \in S \end{cases},$$

где x_0 – произвольная фиксированная точка, принадлежащая области D, A – неизвестная постоянная, $V^{(1)}(x)$ – потенциал двойного слоя с неизвестной плотностью $\nu(x)$.

Граничные условия (45.1) в этом случае запишутся следующим образом

$$u_0(x) = \frac{A}{|x - x_0|} + V_+^{(1)}(x) = \frac{A}{|x - x_0|} + 2\pi\nu(x) + \iint_S \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} ds_\xi,$$

или

$$2\pi\nu(x) + \iint_S K_1(x, \xi)\nu(\xi) ds_\xi = u_0(x) - \frac{A}{|x - x_0|}, \quad x \in S \qquad (48.5)$$

Согласно второй теореме Фредгольма и результатам предыдущего пункта интегральное уравнение (48.5) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна плотности потенциала Робэна $\mu_R(x)$:

$$\iint_S \left(u_0(\xi) - \frac{A}{|\xi - x_0|} \right) \mu_R(\xi) ds_\xi = 0. \qquad (48.6)$$

По определению потенциала Робэна для точки $x_0 \in D$ выполнено равенство

$$\iint_S \mu_R(\xi) \frac{1}{|x - \xi|} ds_\xi = 1,$$

поэтому легко выбрать константу A так, чтобы условие (48.6) выполнялось:

$$A = \iint_S u_0(\xi)\mu_R(\xi)ds_\xi$$

Доказана

Теорема 2. Для любой непрерывной функции $u_0(x)$ существует постоянная A такая, что интегральное уравнение (48.5) разрешимо в классе $C(S)$.

Следствие 2. Решение внешней задачи Дирихле существует для любой непрерывной граничной функции $u_0(x)$

48.4. Заключительные замечания.

1) Описанные в двух последних параграфах способы отыскания решений краевых задач для уравнения Лапласа удобны с теоретической точки зрения, но не являются единственными [1]). На практике иногда используют другие приемы.

Пример 3 Пусть область $D \subset \mathbf{R}^3$ является шаром радиуса R с центром в начале координат Найти решения внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа.

Решение В обоих случаях будем искать решение $u(x)$ в виде суммы потенциала простого слоя $V^{(0)}(x)$ с неизвестной плотностью $\mu(x)$ и потенциала двойного слоя $V^{(1)}(x)$ с неизвестной плотностью $\nu(x)$:

$$u(x) = V^{(0)}(x) + V^{(1)}(x),\ |x| \neq R$$

Граничные условия (45 1) приводят к следующим уравнениям:

$$u_0(x) = V^{(0)}(x) + V_-^{(1)}(x) = V^{(0)}(x) - 2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x),\ |x| = R$$

– для внутренней задачи Дирихле, и

$$u_0(x) = V^{(0)}(x) + V_+^{(1)}(x) = V^{(0)}(x) + 2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x),\ |x| = R$$

– для внешней задачи Дирихле

[1]) Это связано с тем, что представление функции в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя не является единственным

Учтем, что $\left.\dfrac{\partial}{\partial n_\xi}\dfrac{1}{|x-\xi|}\right|_{|\xi|=R} = \dfrac{(x,\xi)-R^2}{R|x-\xi|^3}$, и преобразуем полученные уравнения следующим образом:

$$u_0(x) \pm 2\pi\nu(x) = \iint_{|\xi|=R} \frac{(2R\mu(\xi) - \nu(\xi))(R^2 - (x,\xi))}{R|x-\xi|^3} ds_\xi,\ |x| = R.$$

Здесь и везде далее верхний знак соответствует внутренней задаче Дирихле, а нижний – внешней. Уравнения будут выполнены, если потребовать

$$\nu(x) = \mp\frac{1}{2\pi}u_0(x) \text{ и } \mu(x) = \frac{1}{2R}\nu(x).$$

Таким образом, для решения $u(x)$ получаем выражение

$$u(x) = \mp\frac{1}{4\pi R}\iint_{|\xi|=R}\frac{u_0(\xi)}{|x-\xi|}ds_\xi \mp \frac{1}{2\pi}\iint_{|\xi|=R} u_0(\xi)\frac{(x,\xi)-R^2}{R|x-\xi|^3}ds_\xi,$$

или

$$u(x) = \pm\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\iint_{|\xi|=R}\frac{u_0(\xi)}{|x-\xi|^3}ds_\xi.$$

Получен уже знакомый результат – интеграл Пуассона (см. §35).

2) Мы рассматривали краевые задачи только для уравнения Лапласа, то есть однородного уравнения Пуассона, без ущерба общности, поскольку от уравнения Пуассона при условии достаточной гладкости правой части можно перейти к уравнению Лапласа с помощью объемного потенциала (см. §36).

3) Можно построить аналогичную теорию и для других размерностей n пространства, например для $n = 2$. Мы же рассмотрели случай $n = 3$ по причине наибольшей практической значимости.

Учебное пособие
Владимир Михайлович Уроев
Уравнения математической физики

Редактор *А. Е. Бибичев*

ЛР 063994 от 24 марта 1995 г.

Формат 60x90 1/16. 24 п.л.
Тираж 5 000 экз. Заказ 87079

Отпечатано с диапозитивов заказчика В. Секачева
в АО «Молодая Гвардия»,
г. Москва, ул. Сущевская, 21