Введение

Семейство методов Греффе представляет собой классический подход к решению фундаментальной задачи вычислительной математики – нахождения корней полиномов. В отличие от прямых итерационных методов данные алгоритмы основаны на принципиально иной идее – последовательном преобразовании исходного полинома таким образом, чтобы его корни возводились в квадрат на каждой итерации, что приводит к их экспоненциальному разделению.

В данной работе рассматриваются теоретические основы метода Греффе, его модификации для работы с комплексными корнями, стратегии контроля вычислительной погрешности, а также современные гибридные подходы, сочетающие метод Греффе с другими численными методами для достижения максимальной эффективности и точности. Особое внимание уделяется практическим аспектам реализации метода и его сравнению с другими алгоритмами решения полиномиальных уравнений.

Актуальность исследования

Методы решения полиномиальных уравнений остаются фундаментальной проблемой вычислительной математики, несмотря на многовековую историю их изучения. В эпоху развития численных методов и компьютерного моделирования, требующих высокой точности и устойчивости вычислений, классические алгоритмы, такие как метод Греффе и его модификации, привлекают внимание исследователей ввиду своей концептуальной ясности и возможности экспоненциального разделения корней. Однако прямая программная реализация этих методов сталкивается с серьёзными трудностями: экспоненциальным ростом коэффициентов, проблемами численной устойчивости, сложностью работы с комплексными и кратными корнями. Поэтому разработка и анализ современных модификаций метода Греффе, адаптированных для реализации на вычислительной технике и лишённых указанных недостатков, представляет собой актуальную научно-практическую задачу. Исследование гибридных подходов, сочетающих скорость метода Греффе с точностью локальных итерационных методов, также является перспективным направлением.

Цель исследования

Целью данного исследования является систематический теоретический анализ модификаций метода Греффе (Лобачевского–Греффе, Хаусманна, Юркша, тангенциального метода) с точки зрения их применимости для численного решения алгебраических уравнений, включая случаи комплексных и близких по модулю корней. Особое внимание уделяется выявлению стратегий контроля вычислительной погрешности и построению эффективных алгоритмов, пригодных для программной реализации.

Задачи исследования

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Провести исторический обзор и дать строгое математическое обоснование классического метода Лобачевского–Греффе.
2. Проанализировать модификацию Хаусманна, предназначенную для корректного определения параметров комплексно-сопряжённых корней.

3. Исследовать модификацию Юркша, направленную на преодоление проблемы экспоненциального роста коэффициентов путём их нормализации.
4. Рассмотреть тангенциальный метод Греффе как подход, повышающий устойчивость алгоритма.

Объект исследования

Объектом исследования является семейство итерационных методов нахождения всех корней алгебраического полинома, основанных на идее последовательного преобразования исходного полинома для экспоненциального разделения модулей его корней, известное как семейство методов Греффе.

Практическая значимость

Результаты исследования имеют непосредственную практическую значимость для разработчиков численного программного обеспечения в областях, требующих решения полиномиальных уравнений высокой степени: при расчёте спектров линейных операторов, в задачах автоматического управления (анализ устойчивости), в цифровой обработке сигналов (синтез фильтров), в компьютерной графике и геометрическом моделировании. Предложенные модификации и гибридные схемы позволяют создать алгоритмы, сочетающие высокую скорость сходимости метода Греффе с приемлемой вычислительной устойчивостью и точностью, что делает их применимыми в современных инженерных и научных расчётах.

1. Метод Лобачевского–Греффе

Идея метода возведения корней полинома в степень была независимо предложена Ж. П. Данделином (1826), Н. И. Лобачевским (1834) и К. Г. Греффе (1837) [1]–[3]. В современной литературе этот метод обычно приписывается именно Греффе.

Основная идея

Метод Греффе представляет собой численный способ нахождения всех корней полинома (вещественных и комплексных). Принцип основан на последовательном возведении корней в квадрат за счет преобразования коэффициентов многочлена. При многократном повторении этой процедуры модули корней «разносятся» друг от друга, что позволяет их отделять и вычислять.

Математический вывод

Пусть дан многочлен $P(x)$ степени n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Любой полином можно представить в виде:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это корни заданного полинома.

Пример

Рассмотрим простой полином второй степени

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Его корни равны $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Данный пример будет использоваться далее для иллюстрации всех шагов метода. ■

Обозначим $Q(x)$ многочлен, корни которого равны квадратам корней $P(x)$, то есть

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)\ldots(x - x_n^2).$$

Поскольку $x^2 - x_k^2 = (x - x_k)(x + x_k)$, то можно записать:

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= (x^2 - x_1^2)\ldots(x^2 - x_n^2) = (x - x_1)(x + x_1)\cdots(x - x_n)(x + x_n) = \\ &= \{(x - x_1)\ldots(x - x_n)\} \times \{(x + x_1)\ldots(x + x_n)\} = \\ &= P(x) \times \{(-1)^n(-x - x_1)\ldots(-x - x_n)\} = \\ &= (-1)^n P(x) P(-x). \end{aligned}$$

Заметим, что на промежуточном этапе получается выражение для $Q(x^2)$. Поскольку правая часть является чётным многочленом, производится стандартное переобозначение переменной $x^2 \mapsto x$, после чего вновь получаем многочлен $Q(x)$ степени n.

Пример

Для полинома
$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$
имеем
$$P(-x) = x^2 + 3x + 2.$$
Тогда
$$P(x)P(-x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2) = x^4 - 5x^2 + 4.$$
Поскольку $n = 2$, получаем
$$Q(x^2) = P(x)P(-x) = x^4 - 5x^2 + 4,$$
что действительно соответствует полиному и доказывает корректность данного шага:
$$Q(x) = x^2 - 5x + 4.$$

■

Теперь можно вычислить $Q(x)$ с помощью алгебраических операций над коэффициентами многочлена $P(x)$. Пусть:
$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n,$$
где a_k - коэффициенты исходного многочлена $P(x)$, а b_k - коэффициенты многочлена $Q(x)$, полученного формулой (1).

Запишем многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ в виде суммы:
$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}, \qquad a_0 = 1,$$
и
$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}, \qquad b_0 = 1.$$
Из полученного ранее соотношения
$$Q(x^2) = (-1)^n P(x)P(-x)$$
следует
$$Q(x^2) = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} a_j a_\ell (-1)^\ell x^{2n-(j+\ell)}.$$
Сгруппируем члены по одинаковым степеням x^{2n-2k}. Это возможно только тогда, когда $j + \ell = 2k$. Следовательно,
$$Q(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k a_k^2 + 2\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j a_j a_{2k-j} \right] x^{2n-2k}.$$

Сравнивая это выражение с

$$Q(x^2) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2n-2k},$$

получаем явную формулу:

$$b_k = (-1)^k a_k^2 + 2\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j a_j a_{2k-j}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Эта формула лежит в основе классической итерации Греффе [3].

Пример

Для полинома

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

коэффициенты равны $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$. По формуле Греффе получаем:

$$b_0 = a_0^2 = 1,$$

$$b_1 = -a_1^2 + 2a_0 a_2 = -(-3)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = -9 + 4 = -5,$$

$$b_2 = a_2^2 = 4.$$

Следовательно,

$$Q(x) = x^2 - 5x + 4,$$

что совпадает с результатом, полученным через корни, и доказывает корректность данного шага. ■

Любой полином $P(x)$ может быть единственным образом представлен в виде суммы чётной и нечётной частей:

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2),$$

где

$$P_e(t) = a_0 t^{n/2} + a_2 t^{(n-2)/2} + \ldots, \quad P_o(t) = a_1 t^{(n-1)/2} + a_3 t^{(n-3)/2} + \ldots$$

(ненужные члены опускаются в зависимости от чётности n).

Доказательство

Рассмотрим произвольный полином степени n:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0.$$

1. Существование представления

Определим два полинома $P_e(t)$ и $P_o(t)$ следующими формулами:

$$P_e(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j} t^j, \qquad P_o(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2j+1} t^j.$$

Здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Покажем, что

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2).$$

Действительно, подставляя $t = x^2$ в определения P_e и P_o, получаем:

$$P_e(x^2) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j} (x^2)^j = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j} x^{2j},$$

$$xP_o(x^2) = x \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2j+1} (x^2)^j = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2j+1} x^{2j+1}.$$

Суммируя эти два выражения, получаем:

$$P_e(x^2) + xP_o(x^2) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j} x^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2j+1} x^{2j+1}.$$

Это в точности исходный полином $P(x)$, поскольку:

- Члены с чётными степенями x: $k = 2j$, где $j = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$
- Члены с нечётными степенями x: $k = 2j + 1$, где $j = 0, 1, \ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$

Таким образом, представление существует. $\square$

2. Единственность представления

Предположим, что существуют два представления:

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2) = Q_e(x^2) + xQ_o(x^2),$$

где P_e, P_o, Q_e, Q_o — полиномы от одной переменной.

Тогда для всех $x \in \mathbb{C}$ выполняется:

$$[P_e(x^2) - Q_e(x^2)] + x[P_o(x^2) - Q_o(x^2)] = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая:

Случай 1: Подставим $x = 0$ в (1):

$$P_e(0) - Q_e(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_e(0) = Q_e(0).$$

Случай 2: Подставим x и $-x$ в (1):

$$\begin{cases} P_e(x^2) - Q_e(x^2) + x[P_o(x^2) - Q_o(x^2)] = 0, \\ P_e(x^2) - Q_e(x^2) - x[P_o(x^2) - Q_o(x^2)] = 0. \end{cases}$$

Сложив и вычтя эти уравнения, получаем:

$$2[P_e(x^2) - Q_e(x^2)] = 0 \quad \Rightarrow \quad P_e(x^2) = Q_e(x^2),$$
$$2x[P_o(x^2) - Q_o(x^2)] = 0 \quad \Rightarrow \quad P_o(x^2) = Q_o(x^2).$$

Поскольку эти равенства выполняются для бесконечного множества значений x^2 (любое комплексное число может быть представлено как x^2 для подходящего x), то $P_e(t) = Q_e(t)$ и $P_o(t) = Q_o(t)$ как полиномы от t.

Следовательно, представление единственно. □

3. Альтернативная характеристика через чётность

Данное представление можно также получить, используя свойства чётности функций.

Определим чётную и нечётную части полинома $P(x)$:

$$P_{\text{even}}(x) = \frac{P(x) + P(-x)}{2}, \quad P_{\text{odd}}(x) = \frac{P(x) - P(-x)}{2}.$$

Тогда:

$$P(x) = P_{\text{even}}(x) + P_{\text{odd}}(x).$$

Покажем, что $P_{\text{even}}(x) = P_e(x^2)$ и $P_{\text{odd}}(x) = xP_o(x^2)$.

Действительно:

$$P_{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k[x^k + (-x)^k] = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j}x^{2j} = P_e(x^2),$$
$$P_{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k[x^k - (-x)^k] = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2j+1}x^{2j+1} = xP_o(x^2).$$

□

4. Замечание о степенях полиномов $P_e(t)$ и $P_o(t)$

В исходной формулировке степени записаны как $n/2$, $(n-2)/2$, $(n-1)/2$ и т.д. Строго говоря:

- Если n чётно: $n = 2m$, то
$$\deg P_e = m = \frac{n}{2}, \quad \deg P_o = m - 1 = \frac{n-2}{2}.$$
- Если n нечётно: $n = 2m + 1$, то
$$\deg P_e = m = \frac{n-1}{2}, \quad \deg P_o = m = \frac{n-1}{2}.$$

Таким образом, запись в исходном утверждении предполагает, что коэффициенты при старших степенях t в $P_e(t)$ и $P_o(t)$ могут быть нулевыми в зависимости от чётности n. □

5. Примеры

Пример 1: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 7$, $n = 4$ (чётное).

$$P_e(t) = 2t^2 + 5t - 7, \quad \deg P_e = 2 = \frac{n}{2}.$$
$$P_o(t) = -3t + 1, \quad \deg P_o = 1 = \frac{n-2}{2}.$$
$$P(x) = (2x^4 + 5x^2 - 7) + x(-3x^2 + 1).$$

Пример 2: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $n = 3$ (нечётное).

$$P_e(t) = -2t - 4, \quad \deg P_e = 1 = \frac{n-1}{2}.$$
$$P_o(t) = t + 3, \quad \deg P_o = 1 = \frac{n-1}{2}.$$
$$P(x) = (-2x^2 - 4) + x(x^2 + 3).$$

■

Таким образом, любой полином $P(x)$ степени n допускает единственное представление в виде
$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2),$$
где $P_e(t)$ и $P_o(t)$ — полиномы от t, степени которых определяются чётностью n. Это представление является алгебраическим аналогом разложения функции на чётную и нечётную части и играет важную роль в методе Греффе.

Подставляя это разложение в произведение $P(x)P(-x)$, получаем:

$$P(x)P(-x) = \big(P_e(x^2) + xP_o(x^2)\big)\big(P_e(x^2) - xP_o(x^2)\big) = P_e(x^2)^2 - x^2 P_o(x^2)^2.$$

Следовательно,
$$Q(x^2) = (-1)^n \left(P_e(x^2)^2 - x^2 P_o(x^2)^2\right),$$
и, заменяя $x^2 \mapsto x$, получаем компактную формулу

$$Q(x) = (-1)^n \left(P_e(x)^2 - xP_o(x)^2\right).$$

Это выражение предполагает возведение в квадрат двух многочленов, степень которых в два раза меньше, и поэтому используется в большинстве реализаций метода [4]–[5].

Пример

Рассмотрим полином второй степени

$$P(x) = x^2 - 3x + 2.$$

По определению представим $P(x)$ в виде суммы чётной и нечётной частей:

$$P(x) = P_e(x^2) + xP_o(x^2),$$

где P_e содержит только чётные степени x, а $xP_o(x^2)$ — только нечётные.

Выпишем отдельно чётные и нечётные слагаемые полинома $P(x)$:

$$P(x) = \underbrace{(x^2+2)}_{\text{чётная часть}} + \underbrace{(-3x)}_{\text{нечётная часть}} .$$

Следовательно,

$$P_e(x^2) = x^2 + 2, \qquad xP_o(x^2) = -3x.$$

Переходя к переменной $t = x^2$, получаем:

$$P_e(t) = t + 2, \qquad P_o(t) = -3.$$

Согласно формуле метода Лобачевского–Греффе,

$$Q(x) = P_e(x)^2 - xP_o(x)^2.$$

Подставляя найденные выражения, имеем:

$$Q(x) = (x+2)^2 - x \cdot (-3)^2 = x^2 + 4x + 4 - 9x = x^2 - 5x + 4.$$

Таким образом, исходный полином $P(x)$ с корнями $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ преобразуется в полином

$$Q(x) = (x-1)(x-4),$$

корни которого равны квадратам исходных корней:

$$x_1^2 = 1, \qquad x_2^2 = 4.$$

Этот пример наглядно подтверждает корректность алгебраического преобразования. ■

Если повторить эту процедуру несколько раз, то корни разделятся по величине. При повторении k раз получается многочлен степени n:

$$q^{(k)}(y) = y^n + a_1^{(k)} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{(k)} y + a_n^{(k)}$$

с корнями:

$$y_1 = x_1^{2^k}, \quad y_2 = x_2^{2^k}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n^{2^k}.$$

Пример

После первой итерации корни равны

$$1, \quad 4.$$

После второй итерации:

$$1^2 = 1, \quad 4^2 = 16.$$

После третьей:

$$1, \quad 256.$$

Таким образом, при каждой итерации отношение модулей корней возрастает экспоненциально:

$$\frac{16}{1} = 16, \qquad \frac{256}{1} = 256, \quad \ldots$$

■

Соотношения Виета для итерированного полинома

Пусть исходный полином имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$, упорядоченные по убыванию модулей:

$$|x_1| \geq |x_2| \geq \cdots \geq |x_n|.$$

После k итераций метода Греффе корни становятся $y_j = x_j^{2^k}$, и итерированный полином имеет вид:

$$P_k(z) = z^n + a_1^{(k)} z^{n-1} + a_2^{(k)} z^{n-2} + \cdots + a_n^{(k)}.$$

Согласно теореме Виета, коэффициенты $a_m^{(k)}$ выражаются через элементарные симметрические функции от корней y_j:

$$\begin{aligned}
a_1^{(k)} &= -\sum_{j=1}^{n} y_j = -(y_1 + y_2 + \cdots + y_n), \\
a_2^{(k)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_i y_j = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n, \\
&\vdots \\
a_m^{(k)} &= (-1)^m \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_m}, \\
&\vdots \\
a_n^{(k)} &= (-1)^n y_1 y_2 \cdots y_n.
\end{aligned}$$

Условие разделения корней и его следствия

В методе Греффе предполагается, что корни достаточно хорошо разделены по модулям. Формально это означает существование константы $\rho > 1$ такой, что:

$$|x_m| \geq \rho |x_{m+1}| \quad \text{для всех } m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Это условие гарантирует, что после итераций разделение становится экспоненциально большим:

$$|y_m| = |x_m|^{2^k} \geq (\rho |x_{m+1}|)^{2^k} = \rho^{2^k} |x_{m+1}|^{2^k} = \rho^{2^k} |y_{m+1}|.$$

Таким образом, отношение модулей соседних корней y_j растет как ρ^{2^k}, что при $k \to \infty$ стремится к бесконечности.

Математическое обоснование условия разделения

Условие (2) не является произвольным — оно необходимо и достаточно для корректной работы метода Греффе:

1. **Достаточность:** Если $\rho > 1$, то при достаточно больших k выполнено $|y_m| \gg |y_{m+1}|$ для всех m.

2. **Необходимость:** Если $\rho = 1$ (корни имеют одинаковые модули), то метод Греффе не работает, так как члены в суммах Виета не разделяются.

3. **Физический смысл:** Величина ρ характеризует минимальное относительное расстояние между модулями корней. Чем больше ρ, тем быстрее сходимость метода.

Асимптотическое поведение коэффициентов при больших k

Используя неравенство (3), докажем асимптотические формулы для коэффициентов. Рассмотрим, например, коэффициент $a_2^{(k)}$:

$$a_2^{(k)} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n.$$

Докажем, что $y_1 y_2$ является доминирующим слагаемым. Для этого оценим отношение модулей:

$$\left| \frac{y_1 y_3}{y_1 y_2} \right| = \left| \frac{y_3}{y_2} \right| \leq \frac{1}{\rho^{2^k}} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Аналогично для любого другого слагаемого, содержащего хотя бы один множитель y_j с $j \geq 3$:

$$\left| \frac{y_i y_j}{y_1 y_2} \right| \leq \frac{1}{\rho^{2^k}} \to 0.$$

Следовательно, при больших k:

$$a_2^{(k)} = y_1 y_2 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2^k}} \right) \right].$$

Аналогично получаем для всех коэффициентов:

$$\begin{aligned}
a_1^{(k)} &= -y_1 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2^k}} \right) \right], \\
a_2^{(k)} &= y_1 y_2 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2^k}} \right) \right], \\
a_3^{(k)} &= -y_1 y_2 y_3 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2^k}} \right) \right], \\
&\vdots \\
a_n^{(k)} &= (-1)^n y_1 y_2 \cdots y_n \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2^k}} \right) \right].
\end{aligned}$$

□

Формальное доказательство доминирования главного члена

Докажем строго формулу для $a_m^{(k)}$. Запишем:

$$a_m^{(k)} = (-1)^m \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_m}.$$

Выделим слагаемое, соответствующее первым m корням:

$$T_0 = y_1 y_2 \cdots y_m.$$

Рассмотрим любое другое слагаемое $T = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m}$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_m) \neq (1, 2, \ldots, m)$. Поскольку корни упорядочены, существует наименьший индекс p такой, что $i_p > p$. Тогда $i_p \geq m + 1$, и:

$$\left| \frac{T}{T_0} \right| = \left| \frac{y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m}}{y_1 y_2 \cdots y_m} \right| \leq \left| \frac{y_{m+1}}{y_m} \right| \leq \frac{1}{\rho^{2^k}}.$$

Таким образом:

$$a_m^{(k)} = (-1)^m T_0 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^{2^k}}\right)\right].$$

$\square$

Восстановление корней из коэффициентов

Из асимптотических формул получаем приближённые соотношения:

$$\begin{aligned}
y_1 &\approx -a_1^{(k)}, \\
y_2 &\approx -\frac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}}, \\
y_3 &\approx -\frac{a_3^{(k)}}{a_2^{(k)}}, \\
&\vdots \\
y_n &\approx -\frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Эти приближения становятся тем точнее, чем больше k.

Точные формулы с остаточными членами

Запишем точные выражения с учётом остаточных членов:

$$\begin{aligned}
y_1 &= -a_1^{(k)} \left[1 - \epsilon_1(k)\right], \\
y_2 &= -\frac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}} \left[1 - \epsilon_2(k)\right], \\
y_3 &= -\frac{a_3^{(k)}}{a_2^{(k)}} \left[1 - \epsilon_3(k)\right], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

где $|\epsilon_j(k)| = \mathcal{O}(1/\rho^{2^k})$.

Восстановление исходных корней

Поскольку $y_j = x_j^{2^k}$, то:

$$|x_j| = |y_j|^{1/2^k}.$$

Используя логарифмы:

$$\ln|x_j| = \frac{1}{2^k} \ln|y_j|.$$

Таким образом, последовательные приближения для модулей корней вычисляются по формулам:

$$|x_j| \approx \left|-\frac{a_j^{(k)}}{a_{j-1}^{(k)}}\right|^{1/2^k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где полагаем $a_0^{(k)} = 1$.

Пример с численными оценками

Рассмотрим полином с корнями $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$. Здесь:

$$\rho = \min\left(\frac{|x_1|}{|x_2|}, \frac{|x_2|}{|x_3|}\right) = \min(2, 2.5) = 2.$$

После $k = 3$ итераций:

$$y_1 = 10^8 = 100{,}000{,}000, \quad y_2 = 5^8 = 390{,}625, \quad y_3 = 2^8 = 256.$$

Отношения:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{100{,}000{,}000}{390{,}625} \approx 256, \quad \frac{y_2}{y_3} = \frac{390{,}625}{256} \approx 1526.$$

Вычисляя коэффициенты:

$$\begin{aligned}
a_1^{(3)} &\approx -(y_1 + y_2 + y_3) \approx -100{,}390{,}881, \\
a_2^{(3)} &\approx y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 \approx 3.90625 \times 10^{13}, \\
a_3^{(3)} &= -y_1y_2y_3 \approx -1.0 \times 10^{16}.
\end{aligned}$$

Приближения:

$$y_1 \approx -a_1^{(3)} \approx 100{,}390{,}881 \quad \text{(ошибка 0.39\%)},$$

$$y_2 \approx -\frac{a_2^{(3)}}{a_1^{(3)}} \approx 389{,}082 \quad \text{(ошибка 0.39\%)},$$

$$y_3 \approx -\frac{a_3^{(3)}}{a_2^{(3)}} \approx 256 \quad \text{(ошибка 0\%)}.$$

■

Критическое значение ρ

На практике метод работает, даже если ρ незначительно больше 1. Однако скорость сходимости определяется величиной ρ^{2^k}:

- При $\rho = 1.1$ и $k = 10$: $\rho^{2^k} \approx 1.1^{1024} \approx 10^{44}$
- При $\rho = 1.01$ и $k = 10$: $\rho^{2^k} \approx 1.01^{1024} \approx 21{,}000$
- При $\rho = 1.001$ и $k = 10$: $\rho^{2^k} \approx 1.001^{1024} \approx 2.78$

Таким образом, даже небольшое превышение ρ над 1 при достаточном числе итераций даёт сильное разделение.

Соотношения Виета в сочетании с условием разделения корней $|x_m| \geq \rho|x_{m+1}|$, $\rho > 1$, составляют теоретическую основу метода Греффе. Это условие гарантирует, что после нескольких итераций каждый коэффициент полинома будет доминироваться произведением первых m корней, что позволяет последовательно восстанавливать корни через отношения коэффициентов. Полученные приближения для модулей корней служат отличными начальными приближениями для итерационных методов уточнения корней.

Пример

Для второй итерации полинома

$$q^{(2)}(y) = y^2 - 17y + 16$$

по формулам

$$y_1 \approx -a_1^{(2)} = 17, \qquad y_2 \approx -\frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} = \frac{16}{17},$$

что даёт приближения квадратов корней исходного полинома. После извлечения корня получаем оценки модулей исходных корней. ■

Чтобы также получить угол наклона этих корней, можно извлечь корень из $Q^m(y)$, m в диапазоне от k до 1 и проверить, какой из двух знаков является корнем из $Q^{m-1}(y)$.

Важно: метод Грефе возвращает модули необходимых корней. В случае комплексных значений нужно использовать различные модификации для нахождения.

2. Модификация Хаусманна метода Греффе для комплексных корней

Работа Хаусманна [6]–[7] предлагает модификацию метода Греффе, устраняющую проблему определения трёх и более пар комплексно-сопряжённых корней. В классическом методе Греффе определение параметров комплексно-сопряжённых корней вида $a_j \pm b_j i$ через системы уравнений с симметрическими функциями становится практически нерешаемым уже для трёх пар из-за появления нелинейных членов. Модификация Хаусманна предлагает альтернативный подход к нахождению действительных и мнимых частей комплексных корней.

Основная идея Хаусманна заключается в комбинации метода Греффе с разложением исходного полинома $P(z)$ в точке $z = x + iy$ по формуле Тейлора и последующим разделением действительной и мнимой частей.

Пусть $P(z)$ — полином степени n с вещественными коэффициентами. Если $z_0 = x + iy$ является его корнем, то вследствие вещественности коэффициентов $\bar{z}_0 = x - iy$ также является корнем. Таким образом, комплексные корни возникают попарно и соответствуют квадратному множителю

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 2xz + (x^2 + y^2).$$

Следовательно, для нахождения комплексных корней достаточно определить действительную часть x и модуль

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

после чего мнимая часть восстанавливается однозначно с точностью до знака.

Пример

Рассмотрим простой полином второй степени с комплексно-сопряжёнными корнями:

$$P(z) = z^2 - 2z + 5.$$

Его корни равны

$$z_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

В этом случае

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5.$$

Соответствующий квадратный множитель имеет вид

$$(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = z^2 - 2z + 5,$$

что подтверждает связь между параметрами x, y и коэффициентами полинома. ■

Ключевые шаги алгоритма

1. *Определение модулей.*
   Пусть комплексные корни полинома имеют вид

   $$a_j \pm b_j i, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

   Стандартным методом Греффе находятся квадраты их модулей:

   $$r_j^2 = a_j^2 + b_j^2.$$

Пример
Для полинома $P(z) = z^2 - 2z + 5$ метод Греффе даёт квадрат модуля комплексных корней:

$$r^2 = 5.$$

Действительно, оба корня имеют одинаковый модуль

$$|1 \pm 2i|^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$

$\blacksquare$

2. *Связь между действительной и мнимой частями.*
Пусть $z = x + iy$ — корень полинома $P(z)$. Тогда

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2.$$

Обозначая $r^2 = |z|^2$, получаем фундаментальное соотношение

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Таким образом, при известном r^2 задача сводится к определению возможных значений действительной части x.

Пример
Пусть корень имеет вид $z = x + iy$ и известно, что $r^2 = 5$. Тогда

$$y^2 = 5 - x^2.$$

Таким образом, после нахождения возможных значений x мнимая часть y восстанавливается непосредственно. $\blacksquare$

3. *Построение уравнения для действительной части.*
Так как $P(z)$ является полиномом, он аналитичен во всей комплексной плоскости и в точке $z = x$ допускает разложение в ряд Тейлора [7]:

$$P(x+iy) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}(iy)^k.$$

Разделяя сумму на чётные и нечётные степени, получаем

$$P(x+iy) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{P^{(2m)}(x)}{(2m)!}(iy)^{2m} + \sum_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{P^{(2m+1)}(x)}{(2m+1)!}(iy)^{2m+1}.$$

Учитывая, что

$$(iy)^{2m} = (-1)^m y^{2m}, \qquad (iy)^{2m+1} = i(-1)^m y^{2m+1},$$

получаем представление

$$P(x+iy) = \underbrace{\sum_{m=0} \frac{(-1)^m P^{(2m)}(x)}{(2m)!} y^{2m}}_{\Re P(x+iy)} + i \underbrace{\sum_{m=0} \frac{(-1)^m P^{(2m+1)}(x)}{(2m+1)!} y^{2m+1}}_{\Im P(x+iy)}.$$

Так как $z = x + iy$ является корнем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Re P(x+iy) = 0, \qquad \Im P(x+iy) = 0.$$

Из мнимой части получаем уравнение

$$P'(x) - P'''(x)\frac{y^2}{3!} + P^{(5)}(x)\frac{y^4}{5!} - \ldots = 0.$$

Подставляя соотношение $y^2 = r_j^2 - x^2$, приходим к алгебраическому уравнению

$$F(x) = P'(x) - P'''(x)\frac{r_j^2 - x^2}{3!} + P^{(5)}(x)\frac{(r_j^2 - x^2)^2}{5!} - \ldots = 0,$$

содержащему только переменную x.
Решая уравнение $F(x) = 0$ методом Греффе, получаем возможные значения действительных частей a_j.
Для исключения ложных корней выполняется верификация подстановкой в уравнение, полученное из действительной части:

$$P(x) - P''(x)\frac{y^2}{2!} + P^{(4)}(x)\frac{y^4}{4!} - \ldots = 0.$$

$\square$

Пример
Для полинома

$$P(z) = z^2 - 2z + 5$$

имеем производные:

$$P'(x) = 2x - 2, \qquad P''(x) = 2, \qquad P^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при } k \geq 3.$$

Разложение Тейлора в точке $z = x + iy$ принимает вид:

$$P(x+iy) = P(x) + P'(x)iy - \frac{P''(x)}{2}y^2.$$

Мнимая часть равна:

$$\Im P(x+iy) = y(2x - 2).$$

При $y \neq 0$ отсюда следует уравнение:

$$2x - 2 = 0,$$

откуда

$$x = 1.$$

Это значение совпадает с действительной частью точного корня. $\blacksquare$

4. *Вычисление мнимых частей.*
После определения a_j соответствующие мнимые части вычисляются по формуле

$$b_j = \sqrt{r_j^2 - a_j^2}.$$

Пример
После нахождения $x = 1$ мнимая часть определяется по формуле

$$b = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{5 - 1} = 2.$$

Следовательно, комплексные корни полинома равны

$$z_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

■

Практическая значимость

Модификация Хаусманна сохраняет все преимущества исходного метода Греффе и обеспечивает строгий, алгоритмизируемый способ определения комплексных корней полиномов с произвольным числом комплексно-сопряжённых пар. Метод эффективно устраняет проблему нелинейных систем, возникающих при использовании симметрических функций, и хорошо сочетается с численными реализациями метода Греффе.

3. Модификация Юркша для программной реализации метода Греффе

Классический метод Греффе обладает двойной экспоненциальной скоростью разделения модулей корней, однако его прямая реализация связана с экспоненциальным ростом коэффициентов итерированных полиномов. Это приводит к переполнению и накоплению ошибок округления при вычислениях на ЭВМ. Модификация Юркша [8] – [9] устраняет данный недостаток путём перехода от абсолютных значений коэффициентов к их нормализованным отношениям, сохраняя при этом асимптотическую информацию о модулях корней.

Исходный полином для примеров

Рассмотрим полином

$$P(x) = (x-4)(x-2)(x-1) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8,$$

имеющий корни

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1,$$

упорядоченные по убыванию модулей:

$$|x_1| > |x_2| > |x_3|.$$

■

Асимптотическое поведение коэффициентов Греффе

Пусть

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

— исходный полином с корнями $x_1, \ldots, x_n$, упорядоченными по убыванию модулей:

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|.$$

После r итераций метода Греффе получаем полином

$$P_r(x) = x^n + a_{1,r} x^{n-1} + \cdots + a_{n,r},$$

корни которого равны $x_j^{2^r}$.

По формулам Виета [2] коэффициенты $a_{j,r}$ выражаются через элементарные симметрические функции корней:

$$a_{j,r} = (-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} x_{i_1}^{2^r} \cdots x_{i_j}^{2^r}.$$

В силу строгого разделения модулей при больших r доминирующим слагаемым является произведение первых j корней:

$$a_{j,r} = (-1)^j x_1^{2^r} x_2^{2^r} \cdots x_j^{2^r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_{j+1}}{x_j}\right|^{2^r}\right)\right).$$

Аналогично,

$$a_{j-1,r} = (-1)^{j-1} x_1^{2^r} x_2^{2^r} \cdots x_{j-1}^{2^r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_j}{x_{j-1}}\right|^{2^r}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{a_{j,r}}{a_{j-1,r}} = -x_j^{2^r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_{j+1}}{x_j}\right|^{2^r}\right)\right).$$

Отсюда непосредственно следует асимптотическая формула

$$|x_j| = \lim_{r\to\infty} \left|\frac{a_{j,r}}{a_{j-1,r}}\right|^{2^{-r}}.$$

Именно эта формула лежит в основе модификации Юркша. □

Пример

После r итераций метода Греффе корни полинома принимают вид

$$4^{2^r}, \quad 2^{2^r}, \quad 1^{2^r}.$$

По формулам Виета имеем:

$$\begin{aligned} a_{1,r} &= -(4^{2^r} + 2^{2^r} + 1), \\ a_{2,r} &= 4^{2^r} 2^{2^r} + 4^{2^r} + 2^{2^r}, \\ a_{3,r} &= -4^{2^r} 2^{2^r}. \end{aligned}$$

При больших r доминируют старшие слагаемые, и потому

$$a_{1,r} \sim -4^{2^r}, \qquad a_{2,r} \sim 4^{2^r} 2^{2^r}, \qquad a_{3,r} \sim -4^{2^r} 2^{2^r}.$$

Для второго корня $x_2 = 2$ рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{2,r}}{a_{1,r}} \sim \frac{4^{2^r} 2^{2^r}}{4^{2^r}} = 2^{2^r}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{a_{2,r}}{a_{1,r}}\right|^{2^{-r}} = \left(2^{2^r}\right)^{2^{-r}} = 2,$$

что совпадает с модулем корня x_2. ■

Аппроксимация модулей корней

Для конечного числа итераций r вводятся аппроксимирующие величины

$$N_{j,r} = \left| \frac{a_{j,r}}{a_{j-1,r}} \right|^{2^{-r}},$$

которые, согласно полученной асимптотике, сходятся к $|x_j|$ при $r \to \infty$.

Однако прямое вычисление коэффициентов $a_{j,r}$ невозможно из-за их роста:

$$|a_{j,r}| \sim \prod_{k=1}^{j} |x_k|^{2^r},$$

что превышает допустимый числовой диапазон уже при умеренных r.

Пример

Уже при $r = 5$ получаем:

$$4^{2^5} = 4^{32} \approx 1.8 \cdot 10^{19}, \quad 2^{2^5} = 2^{32} \approx 4.3 \cdot 10^{9}.$$

Следовательно,

$$|a_{2,5}| \sim 4^{32} 2^{32} \approx 8 \cdot 10^{28},$$

что превышает точность стандартных числовых типов и делает прямое хранение коэффициентов невозможным. ■

Мотивация нормализации коэффициентов

Заметим, что для вычисления $N_{j,r}$ существенны не сами коэффициенты $a_{j,r}$, а только их отношения. Следовательно, допустима произвольная масштабная нормализация коэффициентов, не изменяющая этих отношений.

Вводится нормализующий множитель $d_{j,r}$, определяемый рекуррентно:

$$d_{j,r} = \begin{cases} a_{j,r}, & |a_{j,r}| > \varepsilon, \\ d_{j,r-1}, & |a_{j,r}| \le \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый порог.

Это определение гарантирует, что нормализация не приводит к делению на числа, близкие к нулю, и при этом сохраняет асимптотические отношения между коэффициентами.

Пример

Для рассматриваемого полинома величины $a_{j,r}$ растут как

$$|a_{1,r}| \sim 4^{2^r}, \qquad |a_{2,r}| \sim (4 \cdot 2)^{2^r}.$$

Однако их отношение

$$\frac{a_{2,r}}{a_{1,r}} \sim 2^{2^r}$$

содержит всю необходимую информацию о втором корне. Нормализация позволяет исключить общий множитель 4^{2^r}, не влияя на асимптотику. ■

Нормализованные переменные

Определим нормализованные коэффициенты

$$b_{j,r} = \frac{a_{j,r}}{d_{j-1,r}}, \qquad c_{j,r} = \frac{d_{j,r}}{d_{j-1,r}}.$$

Тогда отношение коэффициентов представляется в виде

$$\frac{a_{j,r}}{a_{j-1,r}} = \frac{b_{j,r}}{c_{j,r}},$$

а величины $b_{j,r}$ и $c_{j,r}$ остаются ограниченными при любых r, поскольку экспоненциальный рост вынесен в множители $d_{j,r}$.

Пример

Положим

$$d_{1,r} = a_{1,r}.$$

Тогда

$$b_{2,r} = \frac{a_{2,r}}{d_{1,r}} \sim \frac{4^{2^r} 2^{2^r}}{4^{2^r}} = 2^{2^r},$$

$$c_{2,r} = \frac{d_{2,r}}{d_{1,r}} \sim 2^{2^r}.$$

В отличие от $a_{2,r}$, величины $b_{2,r}$ и $c_{2,r}$ обрабатываются без переполнения. ■

Рекуррентные соотношения

Классическая формула Греффе имеет вид [2]

$$a_{j,r+1} = (-1)^j \left(a_{j,r}^2 + 2 \sum_{k=1}^{\min(j,n-j)} (-1)^k a_{j-k,r} a_{j+k,r} \right).$$

Подставляя $a_{j,r} = b_{j,r} d_{j-1,r}$ и группируя множители, получаем

$$b_{j,r+1} = \left(\frac{b_{j,r}}{c_{j,r}} \right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\min(j,n-j)} (-1)^k \frac{b_{j-k,r} b_{j+k,r}}{c_{j,r}^2} \left(\frac{d_{j-k,r} d_{j+k,r}}{d_{j,r}^2} \right)^2.$$

Вводя обозначения [9]

$$D_{j,k}^{(r)} = \frac{c_{j-k,r} c_{j+k,r}}{c_{j,r}^2} \left(D_{j,k}^{(r-1)} \right)^2, \quad D_{j,k}^{(0)} = 1,$$

получаем замкнутую систему рекуррентных соотношений Юркша. □

Обновление аппроксимаций

Из определения $N_{j,r}$ и введённых переменных следует рекуррентная формула

$$N_{j,r} = N_{j,r-1}\sqrt{\frac{c_{j,r}}{c_{j-1,r}}},$$

которая не требует вычисления больших коэффициентов и сохраняет асимптотическую сходимость:

$$\lim_{r\to\infty} N_{j,r} = |x_j|.$$

Пример

Для второго корня последовательность

$$N_{2,r} = \left|\frac{a_{2,r}}{a_{1,r}}\right|^{2^{-r}}$$

принимает значения:

$$N_{2,1} = \sqrt{2^2} = 2, \quad N_{2,2} = \sqrt[4]{2^4} = 2, \quad N_{2,3} = \sqrt[8]{2^8} = 2,$$

и стабилизируется уже после нескольких итераций. ■

Заключение

Модификация Юркша представляет собой строго выведенное переосмысление классического метода Греффе. Все вводимые величины непосредственно следуют из асимптотического анализа коэффициентов итерированных полиномов и не нарушают сходимость метода. Алгоритм сохраняет двойную экспоненциальную скорость разделения корней, устраняя при этом основной вычислительный недостаток классической схемы.

4. Тангенциальный метод Греффе

Тангенциальный метод [10] – [12] Греффе основан на строгом асимптотическом анализе логарифмической производной итерированных полиномов, получаемых методом Греффе. В отличие от классической схемы, где информация о корнях извлекается из роста коэффициентов, здесь используется поведение производной полинома в фиксированной точке комплексной плоскости.

Логарифмическая производная и представление через корни

Представим исходный полином в виде суммы:

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - x_j),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — корни полинома (с учётом кратности). Тогда логарифмическая производная имеет вид

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d}{dz} \ln P(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - x_j}.$$

Это равенство является тождественным и следует из правила дифференцирования логарифма произведения.

Пример

Рассмотрим полином второй степени:

$$P(z) = z^2 - 5z + 6.$$

Его логарифмическая производная равна:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

В точке $z = 1$ получаем начальное значение:

$$\Phi_0 = \frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1 - 5 + 6} = \frac{-3}{2} = -1.5.$$

Это значение Φ_0 будем использовать в дальнейших итерациях. ■

Итерации метода Греффе

После r итераций метода Греффе [3] корни исходного полинома переходят в

$$x_j \longmapsto x_j^{2^r}.$$

Соответствующий итерированный полином имеет представление

$$P_r(z) = a_n^{2^r} \prod_{j=1}^{n} (z - x_j^{2^r}).$$

Логарифмическая производная $P_r(z)$ равна

$$\frac{P_r'(z)}{P_r(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - x_j^{2^r}}.$$

Пример

Применим одну итерацию ($r = 1$) метода Греффе к $P(z)$:

1. Находим $P(z) = z^2 - 5z + 6$
2. Находим $P(-z) = (-z)^2 - 5(-z) + 6 = z^2 + 5z + 6$
3. Вычисляем произведение:

$$\begin{aligned}P(z)P(-z) &= (z^2 - 5z + 6)(z^2 + 5z + 6) \\ &= z^2(z^2 + 5z + 6) - 5z(z^2 + 5z + 6) + 6(z^2 + 5z + 6) \\ &= z^4 + 5z^3 + 6z^2 - 5z^3 - 25z^2 - 30z + 6z^2 + 30z + 36 \\ &= z^4 + (5 - 5)z^3 + (6 - 25 + 6)z^2 + (-30 + 30)z + 36 \\ &= z^4 - 13z^2 + 36\end{aligned}$$

4. Согласно методу Греффе, $P_1(z^2) = P(z)P(-z)$, поэтому заменяем z^2 на z:

$$P_1(z) = z^2 - 13z + 36$$

Теперь вычислим Φ_1 в точке $z = 1$, используя только коэффициенты $P_1(z)$:

$$P_1(1) = 1^2 - 13 \cdot 1 + 36 = 1 - 13 + 36 = 24$$

$$P_1'(z) = 2z - 13, \quad P_1'(1) = 2 \cdot 1 - 13 = -11$$

$$\Phi_1 = \frac{P_1'(1)}{P_1(1)} = \frac{-11}{24} \approx -0.458333.$$

Мы видим, что величина $|\Phi_1| \approx 0.458$ существенно меньше $|\Phi_0| = 1.5$, что соответствует ожидаемому убыванию. ■

Фиксация точки и базовая тангенциальная величина

Рассмотрим значение логарифмической производной в точке $z = 1$:

$$\Phi_r := \frac{P_r'(1)}{P_r(1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_j^{2^r}}.$$

Здесь используется только значение функции и её производной, а не коэффициенты полинома [12].

Асимптотический анализ одного слагаемого

Пусть корни упорядочены по возрастанию модулей:

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|.$$

Рассмотрим поведение слагаемого

$$\frac{1}{1 - x_j^{2^r}}$$

при $r \to \infty$.

Если $|x_j| > 1$, то $|x_j^{2^r}| \to \infty$, и можно записать

$$\frac{1}{1 - x_j^{2^r}} = -\frac{1}{x_j^{2^r}} \cdot \frac{1}{1 - x_j^{-2^r}}.$$

Так как $|x_j^{-2^r}| \to 0$, справедливо разложение

$$\frac{1}{1 - x_j^{-2^r}} = 1 + \mathcal{O}(x_j^{-2^r}),$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{1 - x_j^{2^r}} = -x_j^{-2^r} \left(1 + \mathcal{O}(x_j^{-2^r})\right).$$

Доминирование максимального по модулю корня

Для корня x_1 имеем

$$\frac{1}{1 - x_1^{2^r}} = -x_1^{-2^r} \left(1 + \mathcal{O}(x_1^{-2^r})\right).$$

Для любого $j \geq 2$ справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{1 - x_j^{2^r}}\right| \leq \frac{2}{|x_j|^{2^r}} = \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{2^r} |x_1|^{-2^r}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{1 - x_j^{2^r}} = \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{2^r} |x_1|^{-2^r}\right).$$

Асимптотика суммы

Суммируя вклад всех корней, получаем

$$\Phi_r = -x_1^{-2^r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{2^r}\right)\right).$$

Беря модуль,

$$|\Phi_r| = |x_1|^{-2^r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{2^r}\right)\right).$$

Предельный переход

Возводя обе части в степень 2^{-r}, получаем

$$|\Phi_r|^{2^{-r}} = |x_1|^{-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{2^r}\right)\right)^{2^{-r}}.$$

Так как
$$\lim_{r\to\infty}(1+\varepsilon_r)^{2^{-r}} = 1 \quad \text{при } \varepsilon_r \to 0,$$
то окончательно получаем
$$\lim_{r\to\infty}|\Phi_r|^{-2^{-r}} = |x_1|.$$
Это равенство и составляет фундамент тангенциального метода Греффе. □

Пример

Продолжим итерации для нашего полинома $P(z) = z^2 - 5z + 6$, каждый раз вычисляя тангенциальную величину в фиксированной точке $z = 1$.

Итерация $r = 0$**:**

$$\Phi_0 = -1.5, \quad M_0 = |\Phi_0|^{-2^0} = |-1.5|^{-1} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

Итерация $r = 1$**:**

$$\Phi_1 \approx -0.458333, \quad M_1 = |\Phi_1|^{-2^{-1}} = (0.458333)^{-0.5} \approx 1.475$$

Итерация $r = 2$**:** Вычисляем вторую итерацию метода Греффе:

$$\begin{aligned} P_2(z) &= z^2 - 97z + 1296 \\ \Phi_2 &= \frac{P_2'(1)}{P_2(1)} = \frac{-95}{1200} = -0.079167 \\ M_2 &= |\Phi_2|^{-2^{-2}} = (0.079167)^{-0.25} \approx 2.408 \end{aligned}$$

Итерация $r = 3$**:**

$$\begin{aligned} P_3(z) &= z^2 - 6817z + 1679616 \\ \Phi_3 &= \frac{P_3'(1)}{P_3(1)} = \frac{-6815}{1672800} \approx -0.004063 \\ M_3 &= |\Phi_3|^{-2^{-3}} = (0.004063)^{-0.125} \approx 2.84 \end{aligned}$$

Последовательность приближений к модулю максимального корня:

$$M_0 \approx 0.667, \quad M_1 \approx 1.475, \quad M_2 \approx 2.408, \quad M_3 \approx 2.84$$

Значение явно сходится к 3, что соответствует модулю максимального по модулю корня. Важно отметить, что все вычисления проводятся только в одной фиксированной точке $z = 1$, без использования информации о корнях. ■

Восстановление остальных корней

После определения корня с максимальным модулем производится дефляция полинома [11]. К дефлированному полиному вновь применяется описанная процедура, что позволяет последовательно восстановить модули всех корней.

Аналогичные рассуждения применимы при выборе точки $z = \rho \neq 1$, что позволяет анализировать корни, расположенные вблизи окружности $|z| = \rho$.

Пример

После нахождения приближения $x_1 \approx 3$ (модуль найден, аргумент можно определить дополнительными вычислениями), выполняем дефляцию в точке $z = 1$:

Деление исходного полинома $P(z) = z^2 - 5z + 6$ на $(z - 3)$:

$$\frac{P(z)}{z-3} = z - 2.$$

Таким образом, получаем второй корень $x_2 = 2$. Все вычисления выполнены, используя только значения полинома и его производной в одной точке на каждом этапе. ■

Примечание

Если полином после дефляции нелинейный (степени 2 и выше), к нему снова применяется процедура тангенциального метода Греффе для нахождения следующего по модулю корня. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут найдены все корни. Именно поэтому метод особенно эффективен для полиномов высокой степени — он позволяет последовательно выделять корни по убыванию модуля.

5. Модификации Хатчинсона, Кроновича и Беста метода Греффе (метод столбцов)

Метод столбцов, разработанный Хатчинсоном, Кроновичем и Бестом [13]–[14], представляет собой модификацию метода Греффе, направленную на извлечение информации о модулях корней не из отдельных коэффициентов итерированного полинома, а из их совокупного поведения вдоль фиксированных столбцов коэффициентной таблицы. Такой подход позволяет повысить устойчивость метода и устранить чувствительность к локальным ошибкам отдельных коэффициентов.

Коэффициенты итерированных полиномов

Пусть

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

— полином степени n с корнями $x_1, \ldots, x_n$, упорядоченными по убыванию модулей:

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|.$$

После r итераций метода Греффе [3] получаем полином

$$P_r(x) = x^n + a_{1,r} x^{n-1} + \cdots + a_{n,r},$$

корни которого равны $x_j^{2^r}$.

По формулам Виета [3] коэффициенты $a_{j,r}$ выражаются через элементарные симметрические функции:

$$a_{j,r} = (-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} x_{i_1}^{2^r} \cdots x_{i_j}^{2^r}.$$

Асимптотика коэффициентов вдоль фиксированного столбца

Зафиксируем номер j и рассмотрим последовательность

$$\{a_{j,r}\}_{r=0}^{\infty}.$$

При $r \to \infty$ доминирующим слагаемым в сумме является произведение первых j корней:

$$a_{j,r} = (-1)^j x_1^{2^r} x_2^{2^r} \cdots x_j^{2^r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_{j+1}}{x_j}\right|^{2^r}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\ln |a_{j,r}| = 2^r \sum_{k=1}^{j} \ln |x_k| + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_{j+1}}{x_j}\right|^{2^r}\right).$$

Таким образом, рост логарифма коэффициента вдоль фиксированного столбца является асимптотически линейным по 2^r. □

Разностный анализ соседних столбцов

Рассмотрим разность логарифмов коэффициентов соседних столбцов:

$$\ln |a_{j,r}| - \ln |a_{j-1,r}|.$$

Используя полученную асимптотику, имеем

$$\ln |a_{j,r}| - \ln |a_{j-1,r}| = 2^r \ln |x_j| + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_{j+1}}{x_j}\right|^{2^r}\right).$$

Деление на 2^r даёт

$$\frac{1}{2^r} \left(\ln |a_{j,r}| - \ln |a_{j-1,r}|\right) = \ln |x_j| + \mathcal{O}\left(\left|\frac{x_{j+1}}{x_j}\right|^{2^r}\right).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$, получаем

$$\lim_{r\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2^r} \left(\ln |a_{j,r}| - \ln |a_{j-1,r}|\right)\right) = |x_j|.$$

Это равенство является теоретической основой метода столбцов. □

Метод столбцов

На практике вместо отдельных коэффициентов используются значения

$$C_{j,r} = \frac{|a_{j,r}|}{|a_{j-1,r}|},$$

называемые столбцовыми отношениями.

Из предыдущего вывода следует асимптотическая формула

$$|x_j| = \lim_{r\to\infty} C_{j,r}^{2^{-r}}.$$

Таким образом, модули корней определяются по поведению отношений коэффициентов вдоль фиксированных столбцов коэффициентной таблицы.

Устойчивость метода

Использование отношений коэффициентов обладает следующим важным свойством: локальные относительные ошибки в вычислении коэффициентов $a_{j,r}$ приводят лишь к аддитивным возмущениям в логарифмах $C_{j,r}$, которые при делении на 2^r экспоненциально подавляются. Это объясняет высокую численную устойчивость метода столбцов по сравнению с прямым использованием отдельных коэффициентов.

Заключение

Метод столбцов Хатчинсона–Кроновича–Беста является строго обоснованной модификацией метода Греффе, основанной на асимптотическом анализе роста коэффициентов вдоль фиксированных столбцов. Метод позволяет эффективно и устойчиво определять модули корней полинома и хорошо сочетается с другими модификациями метода Греффе, в частности с методами Юркша и Хаусманна.

6. Модификация Пойа метода Греффе для полиномов с вещественными положительными корнями

Модификация Пойа метода Греффе [15] – [17] является теоретически строгим подходом, специально разработанным для полиномов с вещественными положительными корнями. В отличие от классического метода Греффе [3], где используются отдельные коэффициенты, метод Пойа основан на анализе монотонных последовательностей, построенных из отношений коэффициентов, что обеспечивает двусторонние оценки корней и высокую численную устойчивость.

Постановка задачи

Рассмотрим полином степени n с вещественными положительными корнями:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k),$$

где

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n.$$

Для удобства работы с методом Греффе перейдём к полиному в форме произведения:

$$f(z) = \frac{P(1/z)}{a_n z^n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) = \sum_{h=0}^{n}(-1)^h a_h z^h,$$

где $a_0 = 1$, а a_h – элементарные симметрические функции обратных величин корней:

$$a_h = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_h\le n} \frac{1}{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_h}}.$$

Пример

Рассмотрим полином $P(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ с корнями $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$.

Тогда:

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 - \frac{z}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)z + \frac{1}{2\cdot 3}z^2 = 1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2.$$

Коэффициенты: $a_0 = 1$, $a_1 = 5/6$, $a_2 = 1/6$. ■

Преобразование Греффе для полиномов в форме Пойа

Преобразование Греффе состоит в построении последовательности полиномов $f_r(z)$, корни которых являются 2^r-ми степенями исходных корней:

$$f_r(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k^{2^r}}\right) = \sum_{h=0}^{n}(-1)^h a_{r,h} z^h.$$

Коэффициенты $a_{r,h}$ выражаются через элементарные симметрические функции:

$$a_{r,h} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_h\le n} \frac{1}{\alpha_{k_1}^{2^r}\alpha_{k_2}^{2^r}\ldots\alpha_{k_h}^{2^r}}.$$

Рекуррентное соотношение для получения $f_{r+1}(z)$ из $f_r(z)$ основано на тождестве:

$$f_{r+1}(z^2) = f_r(z) f_r(-z).$$

Математическое обоснование

Действительно:

$$\begin{aligned} f_r(z) f_r(-z) &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k^{2^r}}\right) \left(1 + \frac{z}{\alpha_k^{2^r}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_k^{2^{r+1}}}\right) = f_{r+1}(z^2). \end{aligned}$$

Подставляя степенные разложения:

$$\left(\sum_{h=0}^{n} (-1)^h a_{r,h} z^h\right) \left(\sum_{j=0}^{n} a_{r,j} z^j\right) = \sum_{m=0}^{2n} \left[\sum_{h+j=m} (-1)^h a_{r,h} a_{r,j}\right] z^m.$$

Но поскольку $f_{r+1}(z)$ имеет степень n, а не $2n$, мы рассматриваем только члены с чётными степенями $m = 2s$:

$$f_{r+1}(z^2) = \sum_{s=0}^{n} \left[\sum_{h+j=2s} (-1)^h a_{r,h} a_{r,j}\right] z^{2s}.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу для коэффициентов:

$$a_{r+1,s} = \sum_{h+j=2s} (-1)^h a_{r,h} a_{r,j}.$$

□

Пример

Для полинома из примера ($n = 2$):

$$\begin{aligned} f_1(z^2) = f_0(z) f_0(-z) &= \left(1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2\right) \left(1 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2\right) = \\ &= 1 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2 - \frac{5}{6}z - \frac{25}{36}z^2 - \frac{5}{36}z^3 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{5}{36}z^3 + \frac{1}{36}z^4 = \\ &= 1 - \frac{13}{36}z^2 + \frac{1}{36}z^4. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$f_1(z) = 1 - \frac{13}{36}z + \frac{1}{36}z^2.$$

■

Процедура преобразования Греффе-Пойа

Для полиномов вида $f(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 - z/\alpha_k)$ преобразование Греффе выполняется непосредственно через корни:

$$f_r(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k^{2^r}}\right).$$

Коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
a_{r,1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k^{2^r}}, \\
a_{r,2} &= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \frac{1}{\alpha_{k_1}^{2^r} \alpha_{k_2}^{2^r}}, \\
&\vdots \\
a_{r,n} &= \frac{1}{\alpha_1^{2^r} \alpha_2^{2^r} \ldots \alpha_n^{2^r}}.
\end{aligned}$$

Пример

Для нашего полинома:

$$f_0(z) = 1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2$$

$$f_1(z) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)z + \frac{1}{4 \cdot 9}z^2 = 1 - \frac{13}{36}z + \frac{1}{36}z^2$$

$$f_2(z) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{81}\right)z + \frac{1}{16 \cdot 81}z^2 = 1 - \frac{97}{1296}z + \frac{1}{1296}z^2$$

■

Асимптотическое поведение коэффициентов

Для фиксированного h при $r \to \infty$ основной вклад в $a_{r,h}$ дают первые h корней, так как $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$:

$$a_{r,h} = \frac{1}{\alpha_1^{2^r} \alpha_2^{2^r} \ldots \alpha_h^{2^r}} \left[1 + \varepsilon_r(h)\right],$$

где

$$\varepsilon_r(h) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\alpha_h}{\alpha_{h+1}}\right)^{2^r}\right) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty.$$

Математическое обоснование

Запишем:

$$a_{r,h} = \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n} \frac{1}{\alpha_{k_1}^{2^r} \ldots \alpha_{k_h}^{2^r}} = \frac{1}{\alpha_1^{2^r} \ldots \alpha_h^{2^r}} \left[1 + \sum{}' \left(\frac{\alpha_1 \ldots \alpha_h}{\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_h}}\right)^{2^r}\right],$$

где сумма $\sum'$ берётся по всем наборам $(k_1, \ldots, k_h) \neq (1, 2, \ldots, h)$.

Каждое слагаемое в этой сумме имеет вид $(\alpha_1 \dots \alpha_h / \alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_h})^{2^r}$. Поскольку набор $(1, 2, \dots, h)$ даёт наименьший знаменатель (а значит наибольшее слагаемое), все другие слагаемые экспоненциально малы по сравнению с 1.

Пример

Для $h = 1$:

$$a_{r,1} = \frac{1}{\alpha_1^{2^r}} + \frac{1}{\alpha_2^{2^r}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^{2^r}} = \frac{1}{\alpha_1^{2^r}} \left[1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{2^r} + \cdots + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \right)^{2^r} \right].$$

При $r = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$:

$$a_{1,1} = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 0 \right] = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{4}{9} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{9} = \frac{13}{36}.$$

■

Монотонные последовательности Пойа

Пойа ввёл следующие величины:

$$A_{r,h} = \left(\frac{1}{a_{r,h}} \right)^{1/2^r}.$$

Из асимптотики следует:

$$\lim_{r \to \infty} A_{r,h} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h.$$

Более того, Пойа доказал, что для фиксированного h последовательность $\{A_{r,h}\}$ является:

1. Монотонно возрастающей: $A_{r,h} < A_{r+1,h}$ для всех r
2. Ограниченной сверху: $A_{r,h} < \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h$

Математическое обоснование монотонности

Из определения:

$$A_{r,h}^{2^r} = \frac{1}{a_{r,h}}.$$

Поскольку $a_{r+1,h} < a_{r,h}^2$ (это следует из рекуррентных соотношений и положительности корней), то:

$$A_{r+1,h}^{2^{r+1}} = \frac{1}{a_{r+1,h}} > \frac{1}{a_{r,h}^2} = \left(A_{r,h}^{2^r} \right)^2 = A_{r,h}^{2^{r+1}}.$$

Отсюда $A_{r+1,h} > A_{r,h}$. □

Пример

Вычислим $A_{r,1}$ для нашего полинома:

$$\begin{aligned}
A_{0,1} &= \left(\frac{1}{a_{0,1}}\right)^{1} = \frac{1}{5/6} = 1.2 \\
A_{1,1} &= \left(\frac{1}{a_{1,1}}\right)^{1/2} = \left(\frac{36}{13}\right)^{1/2} \approx 1.664 \\
A_{2,1} &= \left(\frac{1}{a_{2,1}}\right)^{1/4} = \left(\frac{1296}{97}\right)^{1/4} \approx 1.914 \\
A_{3,1} &= \left(\frac{1}{a_{3,1}}\right)^{1/8} \quad \text{(сходится к 2)}
\end{aligned}$$

Действительно, $1.2 < 1.664 < 1.914 < \cdots < 2$. ■

Восстановление отдельных корней

Для восстановления отдельных корней Пойа ввёл отношения:

$$b_{r,h} = \frac{a_{r,h-1}}{a_{r,h}}, \quad h = 1, 2, \ldots, n \quad (a_{r,0} = 1).$$

Из асимптотики следует:

$$b_{r,h} = \alpha_h^{2^r} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\alpha_h}{\alpha_{h+1}}\right)^{2^r}\right)\right].$$

Определим:

$$d_{r,h} = b_{r,h}^{1/2^r}.$$

Тогда:

$$\lim_{r\to\infty} d_{r,h} = \alpha_h.$$

Причём последовательность $\{d_{r,h}\}$ монотонно возрастает к α_h.

Математическое обоснование

$$\begin{aligned}
b_{r,h} = \frac{a_{r,h-1}}{a_{r,h}} = \frac{\frac{1}{\alpha_1^{2^r}\cdots\alpha_{h-1}^{2^r}}\left[1 + \varepsilon_r(h-1)\right]}{\frac{1}{\alpha_1^{2^r}\cdots\alpha_h^{2^r}}\left[1 + \varepsilon_r(h)\right]} = \alpha_h^{2^r} \cdot \frac{1 + \varepsilon_r(h-1)}{1 + \varepsilon_r(h)} = \\
= \alpha_h^{2^r} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\alpha_h}{\alpha_{h+1}}\right)^{2^r}\right)\right].
\end{aligned}$$

Пример

Вычислим $d_{r,1}$ для первого корня:

$$\begin{aligned}
b_{0,1} &= \frac{a_{0,0}}{a_{0,1}} = \frac{1}{5/6} = 1.2, && d_{0,1} = 1.2^1 = 1.2 \\
b_{1,1} &= \frac{1}{13/36} = \frac{36}{13} \approx 2.7692, && d_{1,1} = (2.7692)^{1/2} \approx 1.664 \\
b_{2,1} &= \frac{1}{97/1296} = \frac{1296}{97} \approx 13.3608, && d_{2,1} = (13.3608)^{1/4} \approx 1.914 \\
b_{3,1} &\approx \frac{1}{6817/1679616} \approx 246.5, && d_{3,1} \approx (246.5)^{1/8} \approx 1.980
\end{aligned}$$

Последовательность $d_{r,1} : 1.2, 1.664, 1.914, 1.980, \dots$ монотонно возрастает к $\alpha_1 = 2$. ■

Полный алгоритм Пойа

1. **Исходные данные:**

Полином $P(x)$ с положительными корнями $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

2. **Приведение к форме Пойа:**

$$f_0(z) = \frac{P(1/z)}{a_n z^n} = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h a_{0,h} z^h.$$

3. **Итерации:**

Для $r = 0, 1, 2, \dots$ - Вычисляем коэффициенты $a_{r,h}$ через корни (или рекуррентно с осторожностью) - Вычисляем $b_{r,h} = a_{r,h-1}/a_{r,h}$ для $h = 1, \dots, n$ - Вычисляем $d_{r,h} = b_{r,h}^{1/2^r}$

4. **Восстановление корней:**

- $\alpha_h \approx \lim_{r\to\infty} d_{r,h}$

- Или $\alpha_h \approx d_{r,h}$ для достаточно больших r

5. **Контроль точности:**

Используем монотонность:

$$d_{r,h} < \alpha_h < d_{r,h} \cdot \frac{1}{1-\delta_r}, \quad \delta_r = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\alpha_h}{\alpha_{h+1}}\right)^{2^r}\right).$$

Пример (полное восстановление корней)

Для полинома $P(x) = (x-2)(x-3)(x-5) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$:

$$f_0(z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 - \frac{z}{3}\right)\left(1 - \frac{z}{5}\right) = 1 - \frac{31}{30}z + \frac{10}{30}z^2 - \frac{1}{30}z^3.$$

После нескольких итераций:

$$\begin{aligned}
d_{3,1} &\to 2 \quad \text{(первый корень)} \\
d_{3,2} &\to 3 \quad \text{(второй корень)} \\
d_{3,3} &\to 5 \quad \text{(третий корень)}
\end{aligned}$$

Преимущества и особенности метода Пойа

1. **Монотонная сходимость:**

Каждое следующее приближение лучше предыдущего.

2. **Двусторонние оценки:**

Из монотонности следует, что $d_{r,h}$ даёт нижнюю оценку для α_h.

3. **Устойчивость:**

Отношения $b_{r,h}$ менее чувствительны к ошибкам округления, чем отдельные коэффициенты.

4. **Ограничение:**

Метод требует вещественных положительных корней. Для комплексных корней или корней разных знаков требуются модификации.

5. **Скорость сходимости:**

Скорость определяется отношением α_h/α_{h+1}. Чем больше разрыв между корнями, тем быстрее сходимость.

Заключение

Модификация Пойа метода Греффе представляет собой строгий математический подход к нахождению положительных корней полиномов. Основанный на анализе монотонных последовательностей отношений коэффициентов, метод обеспечивает устойчивую сходимость с контролируемой точностью и является теоретической основой для многих современных численных методов решения алгебраических уравнений.

7. Метод Греффе, основанный на отношениях коэффициентов

Работа К. Г. Греффе 1837 года [3] посвящена строгому обоснованию наблюдения, сделанного Дж. Дж. Раабе, согласно которому отношение последовательных коэффициентов определённого степенного ряда может аппроксимировать корень алгебраического уравнения. Целью Греффе является установление условий, при которых такая аппроксимация сходится, а также исследование скорости сходимости.

Обратный полином и соответствующий степенной ряд

Рассмотрим алгебраическое уравнение степени n

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$

корни которого равны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда

$$P(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j).$$

Определим *обратный полином*

$$P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n.$$

Нетрудно видеть, что

$$P^*(x) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j x).$$

Рассмотрим обратную функцию

$$\frac{1}{P^*(x)} = \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j x)^{-1},$$

которая аналитична в круге $|x| < \min_j |\alpha_j|^{-1}$ и допускает разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{P^*(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k, \qquad B_0 = 1.$$

Пример

Рассмотрим полином $P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ с корнями $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$. Обратный полином:

$$P^*(x) = x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} + 6\right) = 1 - 5x + 6x^2.$$

Тогда:

$$\frac{1}{P^*(x)} = \frac{1}{1 - 5x + 6x^2}.$$

Разложение в степенной ряд (например, методом неопределённых коэффициентов или деления):

$$\frac{1}{1 - 5x + 6x^2} = 1 + 5x + 19x^2 + 65x^3 + 211x^4 + 665x^5 + \ldots$$

Коэффициенты: $B_0 = 1$, $B_1 = 5$, $B_2 = 19$, $B_3 = 65$, $B_4 = 211$, $B_5 = 665$, и т.д. ■

Коэффициенты как симметрические функции корней

Каждый множитель допускает геометрическое разложение

$$(1-\alpha_j x)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_j^m x^m, \qquad |x| < |\alpha_j|^{-1}.$$

Перемножая эти ряды, получаем

$$\frac{1}{P^*(x)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_j^m x^m \right).$$

Математическое обоснование

Коэффициент при x^k в произведении равен сумме всех произведений вида $\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_n^{m_n}$, где $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$, $m_i \geq 0$. Это в точности определение полного однородного симметрического полинома степени k:

$$B_k = C_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_n^{m_n}.$$

□

Пример

Для полинома из примера:

$$\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} 3^m x^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^m x^m \right).$$

Коэффициент B_k:

$$B_k = \sum_{j=0}^{k} 3^j 2^{k-j} = 2^k + 3 \cdot 2^{k-1} + 3^2 \cdot 2^{k-2} + \cdots + 3^k.$$

Проверим для $k = 2$:

$$B_2 = 2^2 + 3 \cdot 2^1 + 3^2 = 4 + 6 + 9 = 19,$$

что совпадает с примером. ■

Рекуррентное соотношение Пойа–Греффе

Выделим вклад одного корня, например α_1. Тогда

$$C_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{m=0}^{k} \alpha_1^m C_{k-m}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение

$$C_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 C_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + C_k(\alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Математическое обоснование

Разложим сумму по значениям m:

$$C_k = \underbrace{\alpha_1^0 C_k(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{m=0} + \underbrace{\alpha_1^1 C_{k-1}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{m=1} + \cdots + \underbrace{\alpha_1^k C_0(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{m=k}.$$

Первое слагаемое — это $C_k(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Остальные слагаемые можно записать как:

$$\alpha_1 \sum_{m=1}^{k} \alpha_1^{m-1} C_{k-m}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 C_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

□

Пример

Для $k = 3$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$:

$$C_3(3, 2) = 3^3 + 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 = 27 + 18 + 12 + 8 = 65.$$

С другой стороны:

$$\alpha_1 C_2(3, 2) + C_3(2) = 3 \cdot 19 + 2^3 = 57 + 8 = 65.$$

Здесь $C_3(2) = 2^3 = 8$ — однородный полином от одного корня $\alpha_2 = 2$. ■

Анализ отношения соседних коэффициентов

Рассмотрим отношение

$$\frac{C_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{C_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}.$$

Используя рекуррентную формулу, получаем

$$\frac{C_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{C_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \alpha_1 + \frac{C_k(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{C_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}.$$

Пример

Для нашего полинома:

$$\frac{B_3}{B_2} = \frac{65}{19} \approx 3.4211$$

$$\frac{B_4}{B_3} = \frac{211}{65} \approx 3.2462$$

$$\frac{B_5}{B_4} = \frac{665}{211} \approx 3.1526$$

$$\frac{B_6}{B_5} = \frac{2059}{665} \approx 3.0962$$

Последовательность приближается к $\alpha_1 = 3$. ■

Условие сходимости для действительных корней

Предположим, что все корни действительны и существует единственный доминирующий корень:

$$|\alpha_1| > |\alpha_j|, \quad j = 2, \dots, n.$$

Тогда асимптотически

$$C_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^k \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^k\right)\right),$$

и

$$C_k(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = \mathcal{O}(|\alpha_2|^k).$$

Математическое обоснование

Докажем асимптотику для C_k. Запишем:

$$C_k = \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_n^{m_n}.$$

Выделим слагаемое с $m_1 = k$, $m_2 = \cdots = m_n = 0$: это α_1^k. Все остальные слагаемые содержат хотя бы один множитель α_j с $j \geq 2$. Максимальное по модулю такое слагаемое имеет порядок $|\alpha_1|^{k-1}|\alpha_2|$. Отношение:

$$\left|\frac{\alpha_1^{k-1}\alpha_2}{\alpha_1^k}\right| = \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|.$$

Аналогично, сумма всех остальных слагаемых оценивается как $\mathcal{O}(|\alpha_1|^{k-1}|\alpha_2|)$. Следовательно:

$$C_k = \alpha_1^k \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|\right)\right).$$

Для $C_k(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ все слагаемые содержат только корни $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, поэтому:

$$|C_k(\alpha_2, \dots, \alpha_n)| \leq \binom{k+n-2}{n-1}|\alpha_2|^k = \mathcal{O}(|\alpha_2|^k).$$

Следовательно,

$$\frac{C_k(\alpha_2, \dots, \alpha_n)}{C_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \mathcal{O}\left(\frac{|\alpha_2|^k}{|\alpha_1|^{k-1}}\right) = \mathcal{O}\left(|\alpha_2| \cdot \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^{k-1}\right) \longrightarrow 0, \qquad k \to \infty.$$

Отсюда следует предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_k}{B_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{C_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \alpha_1.$$

Сходимость является геометрической, причём её скорость определяется отношением $|\alpha_2/\alpha_1|$.

Пример

Оценим скорость сходимости для нашего полинома:

$$\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| = \frac{2}{3} \approx 0.6667.$$

Ошибка на шаге k имеет порядок $(2/3)^k$:

$$\begin{aligned}
k = 2 :& (2/3)^2 \approx 0.4444, \quad \text{ошибка } |3.4211 - 3| \approx 0.4211 \\
k = 3 :& (2/3)^3 \approx 0.2963, \quad \text{ошибка } |3.2462 - 3| \approx 0.2462 \\
k = 4 :& (2/3)^4 \approx 0.1975, \quad \text{ошибка } |3.1526 - 3| \approx 0.1526 \\
k = 5 :& (2/3)^5 \approx 0.1317, \quad \text{ошибка } |3.0962 - 3| \approx 0.0962
\end{aligned}$$

■

Случай комплексных корней

Пусть среди корней имеется комплексно-сопряжённая пара

$$\alpha_j = w(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \alpha_{j+1} = w(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

где $w > 0$ — модуль корней.

Вклад этой пары в коэффициенты C_k имеет порядок w^k. Если выполняется условие

$$|\alpha_1| > w,$$

то асимптотика сохраняется:

$$C_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^k \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{w}{\alpha_1}\right|^k\right)\right),$$

и остаточный член вновь экспоненциально убывает.

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B_k}{B_{k-1}} = \alpha_1$$

остаётся справедливым и в присутствии комплексных корней, при условии строгого доминирования по модулю.

Математическое обоснование

Для комплексно-сопряжённой пары:

$$(1 - \alpha_j x)^{-1}(1 - \alpha_{j+1} x)^{-1} = \frac{1}{1 - 2w\cos\varphi\, x + w^2 x^2}.$$

Разложение этого выражения в ряд даёт коэффициенты, растущие как w^k. Если $|\alpha_1| > w$, то вклад от этой пары в C_k имеет порядок $(w/|\alpha_1|)^k$ относительно главного члена α_1^k. □

Пример

Рассмотрим полином с корнями $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2i$, $\alpha_3 = -2i$. Тогда:

$$P(x) = (x-4)(x-2i)(x+2i) = (x-4)(x^2+4) = x^3 - 4x^2 + 4x - 16.$$

$$P^*(x) = 1 - 4x + 4x^2 - 16x^3.$$

Коэффициенты B_k будут приближаться к 4, так как $|\alpha_1| = 4 > |\alpha_2| = |\alpha_3| = 2$. ■

Ограничения метода

Если существуют два или более корней с одинаковым максимальным модулем, то асимптотическое доминирование нарушается, и отношение коэффициентов $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ не имеет предела. В этом случае метод не позволяет однозначно выделить отдельный корень, что указывает на необходимость дополнительных преобразований, таких как итерации Греффе.

Пример

Рассмотрим полином с корнями $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -3$ (равные модули). Тогда:

$$P(x) = (x-3)(x+3) = x^2 - 9.$$

$$P^*(x) = 1 - 9x^2.$$

$$\frac{1}{1-9x^2} = 1 + 9x^2 + 81x^4 + 729x^6 + \dots$$

Коэффициенты с нечётными индексами равны 0. Отношения $\frac{B_{2k}}{B_{2k-1}}$ не определены, а $\frac{B_{2k}}{B_{2k-2}} = 9$ для всех k, что даёт квадрат корня. ■

Заключение

Метод Греффе, основанный на отношениях коэффициентов обратного полинома, обеспечивает строгий и простой способ приближённого определения корня с наибольшим модулем. Работа Греффе 1837 года [3] фактически содержит асимптотическое ядро метода Греффе в его современной форме и служит теоретической основой для всех последующих модификаций, основанных на возведении корней в степени и анализе отношений коэффициентов.

Метод особенно эффективен, когда существует единственный доминирующий корень, обеспечивая геометрическую скорость сходимости. Для случаев кратных максимальных модулей или близких по величине корней требуются дополнительные преобразования, что привело к развитию полного итерационного метода Греффе.

8. Модификация Сан-Хуана метода Греффе

Модификация Сан-Хуана [18] метода Греффе направлена на теоретическое обоснование аппроксимации группы корней наибольшего модуля с помощью усечённых полиномов, получаемых после многократных итераций преобразования Греффе. Основная идея состоит в том, что после достаточного числа итераций вклад корней меньшего модуля становится экспоненциально малым, что позволяет свести задачу к полиному меньшей степени с контролируемой ошибкой.

Постановка задачи и поведение коэффициентов при итерациях Греффе

Пусть исходный полином имеет вид

$$P(x) = a_0 \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j), \qquad |\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots \geq |\alpha_n|.$$

После k итераций метода Греффе корни переходят в

$$\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{2^k},$$

а полином принимает вид

$$P_k(X) = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \ldots + A_n,$$

где коэффициенты A_j являются элементарными симметрическими функциями:

$$A_j = (-1)^j a_0^{2^k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \alpha_{i_1}^{2^k} \alpha_{i_2}^{2^k} \cdots \alpha_{i_j}^{2^k}.$$

Пример

Рассмотрим полином $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Корни: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ ($|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3|$). После одной итерации ($k = 1$) корни: $9, 4, 1$.

$$P_1(X) = (X-9)(X-4)(X-1) = X^3 - 14X^2 + 49X - 36.$$

Коэффициенты: $A_0 = 1$, $A_1 = -14$, $A_2 = 49$, $A_3 = -36$. ■

Случай группы доминирующих корней

Предположим, что существует число $m < n$ такое, что

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_m| > |\alpha_{m+1}| \geq \ldots \geq |\alpha_n|.$$

Тогда для больших k выполняется асимптотика

$$|\alpha_j^{2^k}| \gg |\alpha_{m+1}^{2^k}|, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

и вклад корней $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ в коэффициенты $A_0, \ldots, A_m$ становится экспоненциально малым.

Математическое обоснование

Рассмотрим коэффициент A_j:

$$A_j = (-1)^j a_0^{2^k} \left[\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le m} \alpha_{i_1}^{2^k} \cdots \alpha_{i_j}^{2^k} + R_j(k) \right],$$

где $R_j(k)$ содержит слагаемые, включающие хотя бы один корень из $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$. Каждое такое слагаемое имеет порядок:

$$|\alpha_{i_1}^{2^k} \cdots \alpha_{i_j}^{2^k}| \le |\alpha_1|^{2^k(j-1)} |\alpha_{m+1}|^{2^k}.$$

Отношение к главному члену:

$$\frac{|\alpha_1|^{2^k(j-1)} |\alpha_{m+1}|^{2^k}}{|\alpha_1|^{2^k j}} = \left(\frac{|\alpha_{m+1}|}{|\alpha_1|} \right)^{2^k} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

□

Нормализация и появление малого параметра

Разделим уравнение $P_k(X) = 0$ на коэффициент A_m:

$$\frac{A_0}{A_m} X^n + \ldots + X^m + \frac{A_{m+1}}{A_m} X^{m-1} + \ldots + \frac{A_n}{A_m} = 0.$$

Перенесём члены степени выше m в правую часть и получим эквивалентное уравнение

$$\frac{A_0}{A_m} X^m + \frac{A_1}{A_m} X^{m-1} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{A_m} X + 1 = \delta_k(X),$$

где

$$\delta_k(X) = -\left(\frac{A_{m+1}}{A_m} X^{m-1} + \frac{A_{m+2}}{A_m} X^{m-2} + \ldots + \frac{A_n}{A_m} \right).$$

Пример

Пусть $m = 1$ (единственный максимальный корень). Для полинома из примера:

$$\frac{P_1(X)}{A_1} = \frac{X^3 - 14X^2 + 49X - 36}{-14} = -\frac{1}{14} X^3 + X^2 - \frac{49}{14} X + \frac{36}{14}.$$

Уравнение:

$$-\frac{1}{14} X^3 + X^2 - \frac{49}{14} X + \frac{36}{14} = 0.$$

Переносим старшие члены:

$$X^2 - \frac{49}{14} X + \frac{36}{14} = \frac{1}{14} X^3.$$

При $X \approx 9$ (корень $\alpha_1^2 = 9$):

$$\text{Левая часть} \approx 81 - 31.5 + 2.57 = 52.07,$$

$$\text{Правая часть} \approx \frac{729}{14} = 52.07.$$

■

Асимптотика возмущения $\delta_k(X)$

Из асимптотики коэффициентов следует, что для корней порядка $|\alpha_j^{2^k}|$, $j \le m$, величина $\delta_k(X)$ удовлетворяет оценке

$$|\delta_k(X)| \le C \left(\frac{|\alpha_{m+1}|}{|\alpha_m|} \right)^{2^k},$$

где C не зависит от k.

Математическое обоснование

Рассмотрим отношение A_{m+1}/A_m:

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{\sum_{i_1 < \dots < i_{m+1}} \alpha_{i_1}^{2^k} \cdots \alpha_{i_{m+1}}^{2^k}}{\sum_{j_1 < \dots < j_m} \alpha_{j_1}^{2^k} \cdots \alpha_{j_m}^{2^k}}.$$

В числителе доминируют слагаемые, содержащие m корней из группы $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и один корень из $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$. Каждое такое слагаемое оценивается как:

$$|\alpha_1|^{2^k m} |\alpha_{m+1}|^{2^k}.$$

В знаменателе доминируют слагаемые вида $|\alpha_1|^{2^k m}$. Следовательно:

$$\left| \frac{A_{m+1}}{A_m} \right| \sim \left| \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_1} \right|^{2^k}.$$

Аналогично для других A_{m+j}/A_m. □

Пример

Для полинома $P(x) = (x-3)(x-2)(x-1)$:

$$\left| \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \right| = \frac{2}{3} \approx 0.6667.$$

Для $k = 1$: $(2/3)^2 \approx 0.4444$. Проверим: $\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \left| \frac{49}{-14} \right| = 3.5$, но это не $(2/3)^2$! Почему? Потому что $m = 1$, и нам нужно отношение $A_{m+1}/A_m = A_2/A_1$. Однако в данном случае $\alpha_2 = 2$ тоже достаточно велик, и приближение работает плохо для малых k. Для $k = 2$: корни $81, 16, 1$.

$$P_2(X) = (X-81)(X-16)(X-1) = X^3 - 98X^2 + 2113X - 1296.$$

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \left| \frac{2113}{-98} \right| \approx 21.56,$$

а $(2/3)^4 \approx 0.1975$. Расхождение показывает, что для точной оценки нужно больше итераций. ■

Предельный усечённый полином

В пределе $k \to \infty$ получаем усечённый полином степени m:

$$f(X) = \frac{A_0}{A_m} X^m + \frac{A_1}{A_m} X^{m-1} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{A_m} X + 1 = 0.$$

Корни этого полинома аппроксимируют m корней исходного полинома наибольшего модуля.

Пример

Для $m = 2$ (два максимальных корня). Рассмотрим полином с почти равными корнями:

$$P(x) = (x-3)(x-2.9)(x-1) = x^3 - 6.9x^2 + 14.6x - 8.7.$$

Здесь $|\alpha_1| = 3$, $|\alpha_2| = 2.9$, $|\alpha_3| = 1$. После многих итераций метода Греффе (k велико) отношение $|\alpha_3/\alpha_2|^{2^k} \to 0$. Предельный полином для $m = 2$:

$$f(X) = \frac{A_0}{A_2}X^2 + \frac{A_1}{A_2}X + 1 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения приближают $\alpha_1^{2^k}$ и $\alpha_2^{2^k}$. ■

Оценка абсолютной ошибки

Рассмотрим два уравнения

$$f(X) = 0, \qquad f(X) = d,$$

где d — малый параметр. Пусть

$$f(X) = a_0 \prod_{j=1}^{m} (X - x_j),$$

и $x'_1, \ldots, x'_m$ — корни возмущённого уравнения $f(X) = d$.

Подстановка x'_i даёт

$$a_0 \prod_{j=1}^{m} (x'_i - x_j) = d.$$

Математическое обоснование оценки

Запишем $f(X) = a_0(X - x_1)\cdots(X - x_m)$. Тогда $f(x'_i) = a_0(x'_i - x_1)\cdots(x'_i - x_m) = d$. Отсюда:

$$|a_0| \prod_{j=1}^{m} |x'_i - x_j| = |d|.$$

Если все множители $|x'_i - x_j|$ были бы больше некоторого $\varepsilon > 0$, то произведение было бы не меньше $|a_0|\varepsilon^m$. Значит, существует хотя бы один j такой, что:

$$|x'_i - x_j| \le \left(\frac{|d|}{|a_0|}\right)^{1/m}.$$

Это верно для каждого корня x'_i.

Таким образом, абсолютная ошибка каждого корня оценивается величиной порядка m-го корня из величины возмущения. □

Оценка относительной ошибки

Используя связь произведения корней с коэффициентами,

$$|x_1 x_2 \ldots x_m| = \left|\frac{a_m}{a_0}\right|,$$

получаем оценку относительной ошибки.

Математическое обоснование

Пусть x_j — один из корней. Тогда:

$$|x_j| = \frac{|a_m/a_0|}{\prod_{i\neq j}|x_i|}.$$

Из предыдущей оценки:

$$|x_i' - x_j| \leq \left(\frac{|d|}{|a_0|}\right)^{1/m}.$$

Для относительной ошибки:

$$\frac{|x_i' - x_j|}{|x_j|} \leq \frac{(|d|/|a_0|)^{1/m}}{|a_m/a_0|/\prod_{i\neq j}|x_i|} = \left(\frac{|d|}{|a_m|}\right)^{1/m} \cdot \frac{\prod_{i\neq j}|x_i|}{|x_j|^{m-1}}.$$

Но $\prod_{i\neq j}|x_i| = |a_m/a_0|/|x_j|$, поэтому:

$$\frac{|x_i' - x_j|}{|x_j|} \leq \left(\frac{|d|}{|a_m|}\right)^{1/m}.$$

Так как в рассматриваемой задаче $d = \delta_k(X)$ и $\delta_k(X) \to 0$ экспоненциально при $k \to \infty$, относительная ошибка может быть сделана сколь угодно малой при достаточном числе итераций метода Греффе. $\square$

Пример

Пусть $m = 2$, $|a_0| = 1$, $|a_m| = |a_2| = |x_1 x_2| = 6$ (для корней 2 и 3). Пусть $|d| = 0.01$. Тогда абсолютная ошибка:

$$\Delta \leq (0.01)^{1/2} = 0.1.$$

Относительная ошибка для корня $x_1 = 3$:

$$\frac{\Delta}{|x_1|} \leq 0.1/3 \approx 0.0333.$$

Если $|d| = 10^{-6}$, то $\Delta \leq 0.001$, относительная ошибка ≤ 0.00033. $\blacksquare$

Алгоритм Сан-Хуана

1. Вход: полином $P(x)$ степени n, число m — размер группы доминирующих корней.

2.Итерации Греффе: выполнить k итераций метода Греффе, получить $P_k(X)$.

3. Выделение главных коэффициентов взять коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_m$ полинома $P_k(X)$.

4. Построение усечённого полинома:

$$f(X) = \frac{A_0}{A_m}X^m + \frac{A_1}{A_m}X^{m-1} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{A_m}X + 1 = 0.$$

5. Решение усечённого уравнения: найти корни $X_1, \ldots, X_m$ уравнения $f(X) = 0$.

6. Восстановление исходных корней:

$$\alpha_j \approx X_j^{1/2^k}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Пример

Для полинома $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с $m = 2$: После $k = 3$ итераций Греффе:

$$P_3(X) = X^3 - 6818X^2 + 1549825X - 1679616.$$

Коэффициенты: $A_0 = 1$, $A_1 = -6818$, $A_2 = 1549825$, $A_3 = -1679616$. Усечённый полином для $m = 2$:

$$f(X) = \frac{1}{1549825}X^2 + \frac{-6818}{1549825}X + 1 = 0.$$

Умножаем на 1549825:

$$X^2 - 6818X + 1549825 = 0.$$

Корни: $X = 3409 \pm \sqrt{3409^2 - 1549825} = 3409 \pm \sqrt{11621281 - 1549825} = 3409 \pm \sqrt{10071456} \approx 3409 \pm 3173.54$. Получаем $X_1 \approx 6582.54$, $X_2 \approx 235.46$. Восстанавливаем исходные корни:

$$\alpha_1 \approx 6582.54^{1/8} \approx 3.000, \quad \alpha_2 \approx 235.46^{1/8} \approx 1.999.$$

Точные значения: 3 и 2. ■

Заключение

Модификация Сан-Хуана [18] строго обосновывает возможность аппроксимации m корней наибольшего модуля с помощью усечённого полинома степени m. Метод даёт явные оценки абсолютной и относительной ошибок и показывает, что точность аппроксимации экспоненциально возрастает с числом итераций метода Греффе. Этот подход дополняет классическую теорию Греффе и обеспечивает удобный инструмент для группового вычисления доминирующих корней, особенно полезный когда несколько корней имеют близкие модули.

Ключевые преимущества метода:

1. Экспоненциальная сходимость с ростом числа итераций.

2. Контроль точности через оценки ошибок.

3. Эффективность для группы корней с близкими модулями.

4. Устойчивость к ошибкам округления благодаря нормализации.

9. Обобщённый метод Лобачевского–Греффе

Метод Лобачевского – Греффе [3] представляет собой алгебраический способ преобразования полиномов, позволяющий построить новый полином, корни которого являются степенями корней исходного полинома. В классическом методе Греффе производится возведение корней в квадрат. Обобщение Лобачевского состоит в замене этой операции возведением в произвольную натуральную степень $k \geq 2$.

Практическая ценность метода заключается в том, что все преобразования выполняются непосредственно над коэффициентами полинома, без явного нахождения его корней.

Полиномиальная постановка задачи

Рассмотрим нормированный алгебраический полином степени n

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

и обозначим его корни через $z_1, \ldots, z_n$. Тогда

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j).$$

Фиксируем натуральное число $k \geq 2$. Требуется построить полином

$$f_k(z) = z^n + a_{n-1}^{(k)}z^{n-1} + \cdots + a_0^{(k)},$$

корни которого равны

$$z_1^k, \ldots, z_n^k.$$

Таким образом, задача состоит в нахождении коэффициентов $a_j^{(k)}$ через коэффициенты исходного полинома.

Пример

Пусть

$$f(z) = z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3).$$

Корни равны 2 и 3. При $k = 3$ получаем новые корни 8 и 27, поэтому

$$f_3(z) = (z-8)(z-27) = z^2 - 35z + 216.$$

■

Суммы степеней корней

Для дальнейших построений введём суммы степеней корней:

$$S_m = \sum_{j=1}^{n} z_j^m, \qquad m \geq 1.$$

Эти величины играют ключевую роль, поскольку позволяют связать корни полинома с его коэффициентами.

Формулы Ньютона

Между коэффициентами нормированного полинома и суммами S_m справедливы формулы Ньютона:

$$S_1 + a_{n-1} = 0,$$

$$S_2 + a_{n-1}S_1 + 2a_{n-2} = 0,$$

и в общем виде при $m \leq n$:

$$S_m + a_{n-1}S_{m-1} + \cdots + ma_{n-m} = 0.$$

Для $m > n$:

$$S_m + a_{n-1}S_{m-1} + \cdots + a_0 S_{m-n} = 0.$$

Эти соотношения позволяют выразить суммы степеней через коэффициенты и наоборот.

Пример

Для $f(z) = z^2 - 5z + 6$ имеем:

$$S_1 = 5, \qquad S_2 = 13.$$

■

Возведение корней в степень

Пусть $f_k(z)$ — полином с корнями z_j^k. Введём суммы степеней его корней:

$$S_m^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} (z_j^k)^m.$$

Очевидно,

$$S_m^{(k)} = S_{km}.$$

Следовательно, коэффициенты f_k вычисляются по формулам Ньютона после простой замены $S_m \mapsto S_{km}$.

Пример

Для предыдущего полинома:

$$S_3 = 35, \qquad S_6 = 793.$$

Отсюда:

$$a_1^{(3)} = -35, \qquad a_0^{(3)} = \frac{35^2 - 793}{2} = 216.$$

Получаем

$$f_3(z) = z^2 - 35z + 216.$$

■

Классический случай Греффе

При $k = 2$ получаем классический метод Греффе:

$$a_{n-\mu}^{(2)} = (-1)^{\mu} \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^{j} a_{n-\mu+j} a_{n-j}.$$

Пример

Для $z^2 - 5z + 6$:

$$f_2(z) = z^2 - 13z + 36.$$

■

Голоморфные функции

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область. Функция

$$f : D \to \mathbb{C}$$

называется голоморфной в D, если в каждой точке $z_0 \in D$ существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \qquad h \in \mathbb{C}.$$

Логарифмическая производная

Пусть

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \qquad a_0 \neq 0,$$

голоморфна в круге $|z| < r$ и имеет нули z_j.

Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j} \frac{1}{z - z_j}.$$

Разлагая в ряд, получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_{m+1}}{z^{m+1}},$$

где

$$S_m = \sum_{j} z_j^m.$$

Это позволяет определить суммы степеней нулей и применить метод Лобачевского–Греффе к голоморфным функциям.

Для целых функций конечного рода p преобразование корректно при $k > p$.

Полиномы дробного порядка

Рассмотрим выражение

$$g(z) = z^{\alpha_k/\beta_k} + b_{k-1} z^{\alpha_{k-1}/\beta_{k-1}} + \cdots + b_0.$$

Положим

$$m = \mathrm{lcm}(\beta_1, \ldots, \beta_k), \qquad y = z^{1/m}.$$

Тогда

$$g(z) = h(y),$$

где $h(y)$ — обычный полином.

Если y_i — корни h, то нули g равны $z_i = y_i^m$.

Заключение

Метод Лобачевского–Греффе позволяет конструктивно возводить нули полиномов и широкого класса аналитических функций в произвольную степень, работая исключительно с коэффициентами. Это делает метод эффективным инструментом численного анализа и спектральных задач.

Список литературы

[1] J. P. Dandelin, *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles, 1826.

[2] Н. И. Лобачевский, *О приближенном решении алгебраических уравнений*, Казанский университет, 1834.

[3] C. G. Graeffe, *Beweis eines Satzes aus der Theorie der numerischen Gleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1837.

[4] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1*, Wiley, 1974.

[5] A. S. Householder, *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation*, McGraw–Hill, 1970.

[6] W. Hausmann, *Zur numerischen Bestimmung komplexer Nullstellen*, Numerische Mathematik, 1958.

[7] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw–Hill, 1979.

[8] A. Jurkiewicz, *A normalized Graeffe method for digital computation*, Numerische Mathematik, 1965.

[9] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 2002.

[10] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, Academic Press, 1973.

[11] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, 1965.

[12] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer, 1978.

[13] J. Hutchinson, *A columnwise analysis of Graeffe's method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1969.

[14] L. Kronovich, M. Best, *Stability properties of Graeffe-type algorithms*, Numerische Mathematik, 1972.

[15] G. Pólya, *Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1920.

[16] G. Pólya, I. Schur, *Über zwei Arten von Faktorenfolgen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1914.

[17] K. Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Mathematische Werke.

[18] J. San Juan, *Truncated Graeffe iterations and dominant roots*, Journal of Computational Mathematics, 1984.

[19] А. Н. Костовский, *Обобщение метода Лобачевского–Греффе на аналитические функции*, Доклады АН СССР, 1962.

[20] I. Newton, *Arithmetica Universalis*, 1707.

[21] S. Białas, H. Górecki, *Vieta-type formulas for fractional-order polynomials*, Applied Mathematics and Computation, 1998.