Projet 2024-2025 orienté MathFinance

Risque de défaut d'entreprise

Irina Kortchemski, CY TECH



Quelques désastres financiers

- L'industrie est sévèrement touchée par des désastres financiers:
 - Des entreprises industrielles et commerciales
 - Metallgesellschaft, Allemagne (1993)
 - Procter & Gamble, USA (1994)
 - o Codelco, Chili (1993)
 - Des institutions financières
 - S & L (savings and loans), USA (1980)
 - o Banque d'Angleterre, Grande Bretagne (1992)
 - Crédit Lyonnais, France (1994)
 - Barings PLC, Grande Bretagne (1995)
 - Daiwa, Japon (1995)
 - LTCM, USA (1998)
 - Mizuho securities, Japon, (2005)
 - Lehman Brothers, New York (2008)
 - Merill Lynch, Manhattan (2008)

Contexte de crise

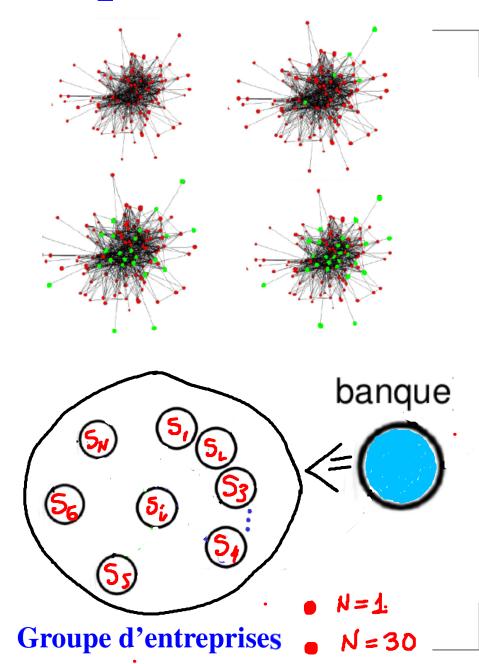
- Contexte de crise et de questionnement sur la pérennité de nos systèmes. ⇒ Préoccupation accrue pour l'anticipation et l'évaluation du risque.
- Directives Solvabilité II ou Bale III. ⇒ Le risque est placé au centre des exigences réglementaires, ils demande aux professionnels plus d'etudes quantitatives qu'auparavant.
- La réglementation actuelle cree une forte demande de modélisation financière. La quasi-totalité des etudes quantitatives passent par des simulations stochastiques, donc par la modélisation de l'environnement de marché et de la compagnie.

Risques financières

- Le risque systémique est le risque d'effondrement d'un système suite à un choc sur certaines institutions financières qui entrainent par un effet domino la dégradation brutale ou la faillite de beaucoup d'autres.
- Il y a défaillance lorsqu'une institution ne remplit pas une obligation
 - Les défaillances des institutions financières sont principalement dues à deux formes de détresse financière : l'illiquidité et l'insolvabilité.
 - L'insolvabilité survient lorsque le capital d'une institution est réduit à zéro ou à un seuil critique.
 - L'illiquidité se produit lorsque les réserves liquides, telles que la trésorerie, sont insuffisantes pour couvrir les engagements à court terme.
- Dans la pratique, l'insolvabilité conduit à l'illiquidité qui,
 à son tour conduit à la défaillance

Risque systémique. Risque de defaut.

- Un choc économique causant des pertes initiales et le défaut de quelques institutions sont amplifiés en raison de liens financiers complexes, pour finalement conduire à des faillites à plus grande échelle.
- Le risque de defaut (risque de crédit) est le risque qu'un emprunteur ne rembourse pas tout ou partie de son crédit aux échéances prévues par le contrat signé entre lui et l'organisme préteur (généralement une banque). La maîtrise du risque de crédit est au coeur du métier du banquier car il détermine la rentabilité des opérations effectuées.
- Notre étude concerne le RISQUE DE DEFAULT.



Value at risk

- Depuis une vingtaine d'années, sous l'impulsion du Comité de Bâle, se développe une vision globale des risques au niveau bancaire: risque de marché, risque opérationnel, risque de crédit.
- Cette vision globale a été adoptée dès 1998, avec la Value at Risk (VaR), indicateur de risque mesurant le seuil de pertes potentielles à un horizon donné et pour une probabilité donné (typiquement 99% à horizon 10 jours). Dans ce projet, nous considérons le risque associé à la défaillance d'entreprises dit risque de crédit ou risque de défaut.

Value at risk

- ▶ La VaR répond à l'affirmation suivante : "Nous sommes certains à la probabilité $1 \alpha = 90\%$ que nous n'allons pas perdre plus de VAR euros sur T prochains jours"
- Value at Risk (VaR), indicateur réglementaire est relié au montant de fonds propres à immobiliser en regard des risques endossés, pour faire face à des pertes a priori rares. Une partie du projet se concentre sur l'évaluation des pertes sous l'angle de la probabilité, sévérité et scénario les engendrant, en considérant des seuils 99% et en particulier peut être des seuils à 99.99% voire plus.

Objectifs du Projet

- Etude des bases de la théorie de risque
 - Value at Risk (VaR)
 - Conditional VAR (Shortfall)
- I. Simuler par Monte-Carlo le mécanisme de fonctionnement d'une seule Entreprise
- II. Simuler par Monte-Carlo le mécanisme de fonctionnement d'un Groupe d'Entreprises
- Évaluer par Monte-Carlo les probabilités d'insolvabilité d'Entreprises et ceux de défaut
- Évaluer par Monte-Carlo Value at Risk (VaR)
- III. Simuler par Monte-Carlo l'evolution d'un Portefeuille d'options

Technique

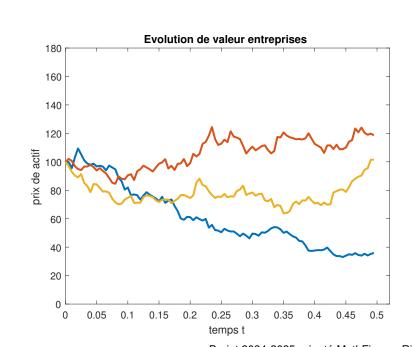
- Simulation Monte-Carlo
 - Simulation d'une Variable Aléatoire Logonormale
 - Fonctions de répartition, Méthode de Rejet
 - Simulation d'une probabilité conditionnelle
 - L'algorithme d'ordonnement pour calculer VAR
 - L'algorithme de Robins-Monro pour calculer VAR
- Evaluation par MC de la probabilité (infrieur à 10⁻⁴) d'un événement (ruine) rare.
 Théorie de Radon-Nicodym
 - Échantillonnage préférentielle (Importance Sampling)
 - Simulation des catastrophes. Calcule de VAR des pertes rares grace au changement de l'espace de probabilité.
- Programmation en PYTHON ou MATLAB

Modèle d'evolution d'entreprise

- N est l'ensemble d'entreprises dont les valeurs économiques sont des variables aléatoires
- La valeur de l'entreprise i est modélisée par un mouvement brownien géométrique

$$S^{i}(t) = S^{i}(0) \exp(-\frac{\sigma^{2}}{2}t + \sigma W^{i}(t)), \quad i \leq \mathbb{N}$$

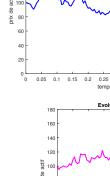
- $ullet W^i(t)$ est un mouvement brownien,
- σ est la volatilité

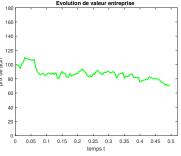


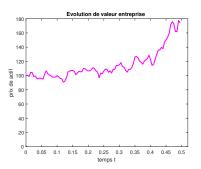
Une seule entreprise

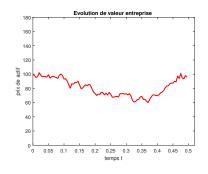
• On simule $N_{mc} = 10^5$ fois la dernière valeur de

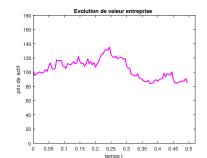
l'entreprise S_T :













. .

• On estime par MC la probabilité de la perte classique $\mathbb{P}[X < 0]$ où $X = S_T - B$.

$$\mathbb{P}[S_T - B < 0] = \mathbb{E}[1_{S_T - B < 0}] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} (1_{S_T^{(i)} - B < 0})$$

B est un seuil de faillite

B 1 10004 0005 1 1/4 1/51 B1 1/4 1/51 1

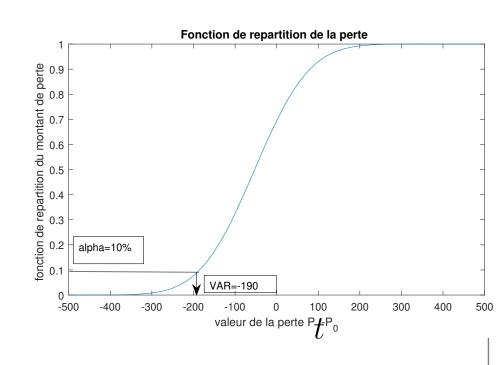
VAR d'une seule entreprise

• La VaR répond à l'affirmation suivante : "Nous sommes certains à la probabilité $1-\alpha=90\%$ que nous n'allons pas perdre plus de VAR euros sur T prochains jours"

$$\mathbb{P}[S_T - B \le VAR] = \alpha$$

Fonction de repartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}[S_T - B \le x]$$



VAR d'une seule entreprise

• Calcul par MC du VaR avec une probabilité 99% à horizon d'un an (365 jours) et à 10 jours nécessite la simulation la fonction de répartition: $x \to F_X$

$$F_X(x) = \mathbb{P}[S_T - B \le x]$$

En utilisant les graphes de fonction de repartition on calcule VAR à l'aide des algorithmes:

- a) Algorithme de l'ordonnement des pertes
- b) Algorithme stochastique de Robins-Monro

Algorithme de Robbins-Monro

• On cherche zero d'une fonction $F(z) = \mathbb{E}[\Phi(z, Y)]$, Y est une variable aléatoire. C'est à dire on cherche z^* t.q.

$$F(z^*) = \mathbb{E}[\Phi(z^*, Y)] = 0.$$

L'algorithme de Robbins-Monro stochastique permet de trouver le zero d'une espérance.

- On introduit:
 - (Y_n) des réalisations d'une variable aléatoire (Y)
 - \bullet (Z_n) une suite de variables aléatoires définie par

$$Z_{n+1} = Z_n - \gamma_n \Phi(Z_n, \underline{Y_n})$$

- La série $\sum \gamma_n$ diverge
- La série $\sum (\gamma_n)^2$ converge , avec $\gamma_n = \frac{\beta}{(n+1)^{\lambda}}$

Alors la suite Z_n converge $\lim_{n\to\infty} Z_n = z^*$

VAR et l'Algorithme de Robbins-Monro

• On cherche $z^* = Var$ t.q.

$$F_X(z^*) = \mathbb{P}[X \le z^*] = \alpha, \quad X = S_T - B,$$

ce que revient de chercher z^* t.q. $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{X < z^*} - \alpha] = 0$ à l'aide de la suite Z_n : $Z_{n+1} = Z_n - \gamma_n(\Psi(Z_n, X_n) - \alpha)$.

Dans la fonction

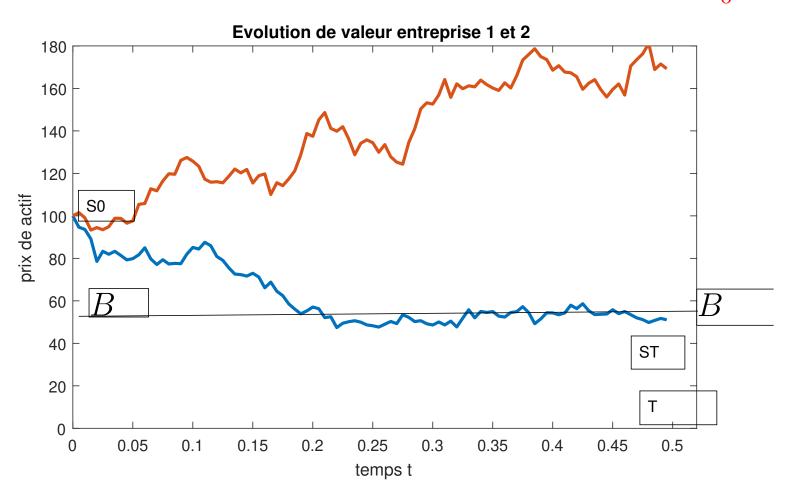
$$\Psi(z,x) = \mathbb{I}_{x < z} = \begin{cases} 1, & x \le z \\ 0, & x > z \end{cases}$$

au lieu de x on injecte des réalisations de X

 $X_n = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T} \cdot Y_n) - B$, où la v.a. Y_n suit la loi normale centrée réduite.

Groupe d'entreprises

• L'entreprise i est considérée en faillite si sa valeur est inférieure à une valeur B_i fixée, très inférieure à S_0^i .



Modèle de risque de crédit

• D_T l'ensemble des indices des entreprises en défaut à la date T:

$$D_T = \{1 \le i \le N : S^i(t) \le B_i\}$$

 Nous nous intéressons à la distribution de la quantité des entreprises en défaut

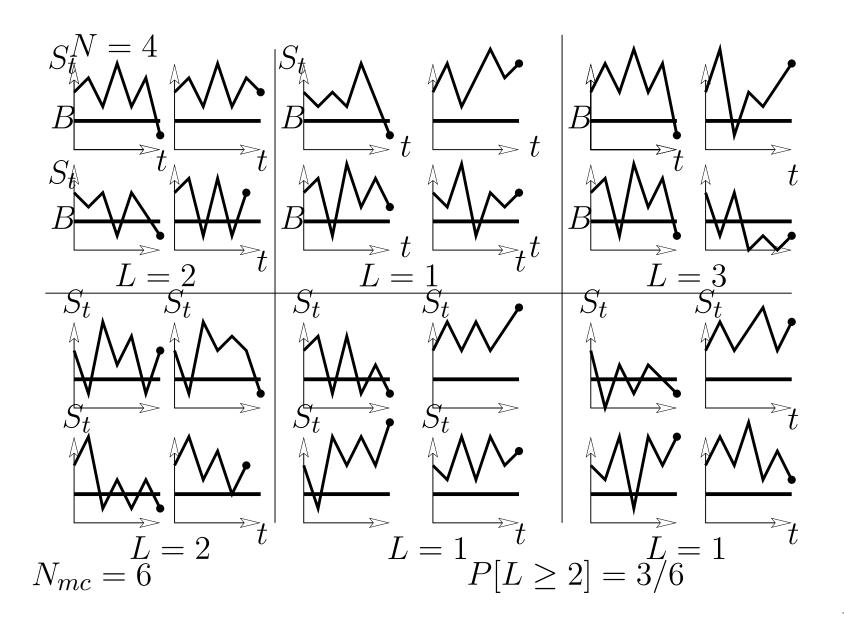
$$L = \# D_T$$
.

 Avoir beaucoup de faillites est un évènement rare, c'est-à-dire la probabilité

$$\mathbb{P}[L \ge K] \ll 1$$

pour K grand.

Modèle du risque de crédit



Etude de la dette

On définit la dette

$$\Pi_T = \sum_{i \in D_T} R_i S_T^i$$

associée au défaut à l'instant T où R_i est un taux de recouvrement.

- On s'interesse à la fonction de répartition de la dette.
- On évalue par MC l'espérance conditionnelle de la dette (expected Shortfall)

$$\mathbb{E}[\mathbf{\Pi}_T | L > K]$$

• On pourra considérer d'abord le cas où le taux de recouvrement $R_i = 30\%$, puis le cas de recouvrements indépendants et aléatoires de loi Beta(a,b).

Livrable 1: Une seule entreprise

- Simulation de valeurs économiques de l'entreprise ou du Mouvement Brownien Géométrique
- Simulation de fonction de repartition de la perte classique : $X = S_T B$
- **Proof:** Estimation de la VAR avec plusieurs seuil 1- α à horizon d'un an (365 jours) et à 10 jours
- En utilisant les graphes de fonction de répartition calculer VAR à l'aide des algorithmes:
 - a) Algorithme de l'ordonnement
 - b) Algorithme de Robbins-Monro

Livrable 1: Groupe d'entreprises

- Évaluer par MC le VaR avec un seuil à 99 % à horizon d'un an
- Etude de la distribution de la quantité des entreprises en défaut $L = \# D_T$.
 - Évaluer $\mathbb{P}[L \geq K]$ pour tous les K pour un seuil de faillite $B=50,\,36$
 - Analyser l'influence du seuil B
- On définit la perte $\Pi_T = \sum_{i \in D_T} R_i S_T^i$ associée au défaut à l'instant T où R_i est un taux de recouvrement.
 - Évaluer par MC $\mathbb{E}[\Pi_T | L > K]$ pour tous les K.

Evolution corrélées des entreprises

Supposons maintenant que les mouvements browniens sont corrélés positivement. Typiquement, la loi de

$$W(t) = (W^{1}(t), ..., W^{N}(t))$$

est gaussienne, centrée, de matrice de covariance

avec $\rho \in [0,1]$

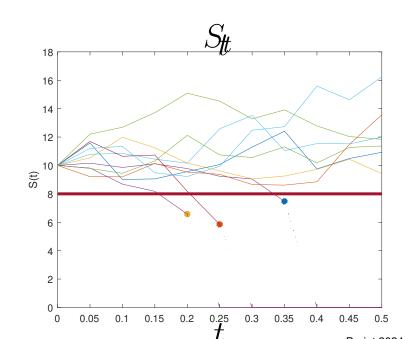
On identifie l'impact de la corrélation.

Extension 1.

La faillite est observée à la première date t_k , à laquelle la valeur de l'enterprise descend sous le seuil B_i .

$$\tau_i = \inf\{t_k \quad t.q. \quad S_{t_k}^i \le B_i\}$$

$$D_T^* = \{1 \le i \le N \ t.q. \ \tau_i \le T\}, \ L^* = \#D_T^*, \ \Pi_T^* = \sum_{i \in D_T^*} R_i S_{\tau_i}^i$$



Extension 2.

Etude de l'évolution des actifs avec des sauts

Equation de Black et Scholes.

• $V^{Call}(t,S)$ est la solution de l'équation de Black et Scholes suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0\\ V(t = T, S) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

- V(t,S) est le prix d'un contrat avec une banque pour pouvoir acheter au prix K une action à la date T.
- S est le prix d'une action r est le taux d'intêret
- σ est une volatilité K est le prix d'exércice
- T est le temps d'exércice
- Vous achetez au prix K une action qui vaut S à la date t = T. Si S > K vous gagnez S K. Si S < K vous n'exercez pas le contrat.

Solution de l'équation de BS

$$V^{Call}(t, S_t) = S_t N(d_1(t, S_t)) - KN(d_2(t, S_t, t))$$

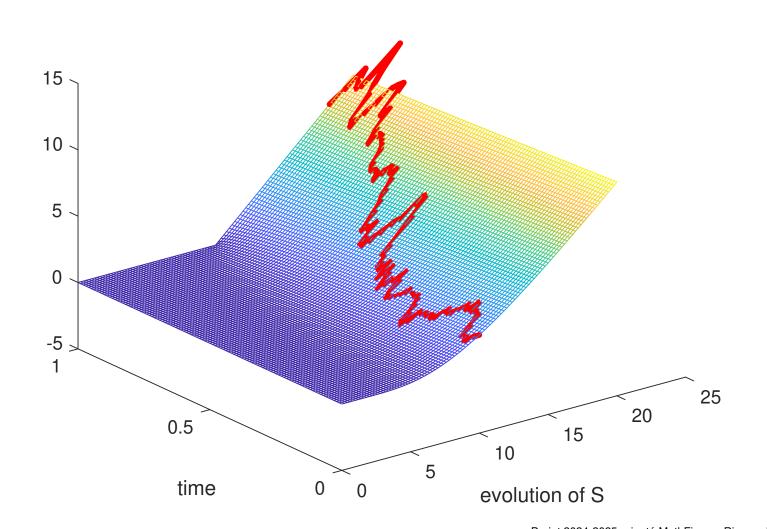
$$d_1(t, S_t) = \frac{\ln(S_t/K) + \sigma^2(T - t)/2}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2(t, S_t) = \frac{\ln(S_t/K) - \sigma^2(T - t)/2}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Option Call

Visualisation de l'évolution de l'option Call $V^{Call}(t, S_t)$:

evolution of portfolio



Portefeuille des Options Call et Put

• On considère un portefeuille combinant des calls/puts sur I_0 actions différentes. La valeur Π_t du portefeuille:

$$\Pi_{t} = \sum_{i=1}^{I_{0}} (\alpha_{i} V^{call}(t_{i}, S^{i}(t)) + \beta_{i} V^{put}(t_{i}, S^{i}(t)))$$

On prendra par exemple

- 1. $I_0 = 10, \alpha_i = -10, \beta_i = -5,$ pour tout i
- VAR d'un CALL

$$\mathbb{P}[\max(V^{call}(T, S_T) - K, 0) - V^{call}(t = 0, S_0)e^{rT} \le VaR] = \alpha$$

VAR d'un portefeuille:

$$\mathbb{P}[\Pi(T, S_T) - \Pi(t = 0, S_0)e^{rT} \le VaR] = \alpha$$

• On coloule le volour de VAD de niveeu 60.60% en 60.00%

Objectifs du Projet. Extensions.

- Évaluer par MC la probabilité d'un événement rare $\mathbb{P}(A) \ll 1$ (inférieur à 10^{-4}).
 - Calculer la valeur de VAR de niveau 99.99%, 99.9999%
 - Transformation de Girsanov
- Étudier le mécanisme de fonctionnement d'un groupe d'entreprises dont les valeurs sont corrélées.
- Programmation en Python

Simulation aléatoire et évènements rares

- Définition d'un évènement A rare : $\mathbb{P}(A) \ll 1 (< 10^{-4})$.
- Difficulté intrinsèque : le temps calcul est extrêmement long.
 - Dans quels domaines applicatifs ? Dans les domaines de l'analyse et le contrôle des risques: neutronique (contrôle de réacteur nucléaire)
 - économie/finance/assurance
 - aéronautique et aérospatiale (sureté, risques de collision et planifications de plan de vol . .)
 - dynamique des populations, mutation d'un gene rare, épidémie et contagion
 - fiabilité et maintenance de systèmes
 - risques naturels (inondation, tremblement de terre)

Théorème Radon-Nicodym

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ deux espaces de probabilités.
 - Soit X une variable aléatoire normale dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
 - Soit $Y = X + \mu$
 - Y suit la loi $\mathbb{N}(\mu, 1)$ dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- ▶ Variable aléatoire \mathbb{Z} est une densité de probabilité sur \mathcal{F} qui définit une nouvelle probabilité \mathbb{Q} sous laquelle v.a. Y suit la loi $\mathbb{N}(0,1)$.

$$d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}} = \mathbb{Z} \cdot d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}}, \qquad \mathbb{Z} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\mu Y_Q - \frac{\mu^2}{2}}$$

- Y suit la loi normale $\mathbb{N}(0,1)$ dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.
- On note v.a. Y dans \mathbb{Q} par Y_Q .

- Application du théorème de Radon-Nicodym
- ▶ Variable aléatoire Y suit $\mathbb{N}(0,1)$ dans l'espace \mathbb{Q} , l'événement Y > 6 dans \mathbb{Q} est rare.
- Mesurée dans $\mathbb P$ la v.a. Y (on la note Y_P) suit la loi $\mathbb N(\mu,1)$
- Calcul de probabilité $\mathbb{P}[Y > 6]$ à l'aide de passage dans l'espace \mathbb{P} de facon générale:

$$\mathbb{P}[Y > 6] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{Y_{\mathbb{Q}} > 6}] =$$

$$\int \mathbb{I}_{Y_{\mathbb{Q}} > 6} d\mathbb{Q} = \int \mathbb{I}_{Y_{\mathbb{P}} > 6} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{Y_{\mathbb{P}} > 6} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$$

- On a introduit les variables aléatoires X et $Y = X + \mu$
 - V. a. X suit $\mathbb{N}(0,1)$ dans l'espace \mathbb{P} , l'événement X>6 dans \mathbb{P} est rare
 - V. a. Y dans suit la loi $\mathbb{N}(\mu, 1)$ dans l'espace \mathbb{P}
- Il existe une espace de probabilité \mathbb{Q} où Y suit la loi $\mathbb{N}(0,1)$
 - l'événement Y > 6 dans $\mathbb Q$ est rare
 - l'événement Y>6 dans $\mathbb P$ n'est pas rare
- Fonction de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ décrit une variable aléatoire Y dans Q qui suit la loi $\mathbb{N}(0,1)$. On la note Y_Q .

$$\mathbb{P}[Y > 6] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{Y_Q > 6}] = \int \mathbb{I}_{y > 6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

- Fonction de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$ décrit une variable aléatoire Y dans P qui suit la loi $\mathbb{N}(\mu,1)$. On la note Y_P .
- Fonction de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ décrit une variable aléatoire Y dans Q qui suit la loi $\mathbb{N}(0,1)$. On la note Y_Q .
- On passe à l'espérance dans l'espace P:

$$\mathbb{P}[Y > 6] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{Y_{Q} > 6}] = \int \mathbb{I}_{y > 6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{2}}{2}} dy$$

$$\int \mathbb{I}_{y > 6} \frac{e^{-\frac{y^{2}}{2}}}{e^{-\frac{(y-\mu)^{2}}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^{2}}{2}} dy$$

$$\int \mathbb{I}_{y > 6} e^{-\mu y + \mu^{2}/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^{2}}{2}} dy = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{Y_{P} > 6} e^{-\mu Y_{P} + \mu^{2}/2}]$$

Rélation entre les espérances

$$\mathbb{E}_{Q}[\mathbb{I}_{Y_{Q}>6}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{Y_{\mathbb{P}}>6} e^{-\mu Y_{\mathbb{P}} + \mu^{2}/2}]$$

- On applique MC dans l'espace \mathbb{P} . Dans cette espace $\mathbb{P}[Y_{\mathbb{P}} > 6]$ n'est pas petite!
- Changement de l'espace de probabilité modifie la densité de v.a. Y
 - Notation Y_P signifie qu'on simule Y à partir de la loi $\mathbb{N}(\mu,1): \ Y_P = Y_Q + \mu = randn + \mu$.
 - Notation Y_Q signifie qu'on simule Y à partir de la loi $\mathbb{N}(0,1): Y_Q = randn$.
- Petite valeur de la probabilité est restaurée par le petit facteur $\mathbb{Z}=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=e^{-\mu Y_P+\mu^2/2}=e^{-\mu Y_Q-\mu^2/2}$

Théorème de Girsanov

- Soit W_t , $0 \le t \le T$ un Mouvement Brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \bullet \mathcal{F}$ est une filtration générée pae le mouvement Brownien
 - $\theta(t)$ est un processus adapté
- On définit un processus $Z_t = e^{-\int_0^t \theta(t) dW_t \frac{1}{2} \int \theta^2(\tau) d\tau}$
- On définit un processus $B_t = W_t + \int_0^t \theta(\tau) d\tau$
- Il existe un espace de probabilité $(Ω, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ tel que $\mathbb{Q}(A) = \int Z(ω)d\mathbb{P}(ω) \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t = T$
- On dit que Z est la dérivée Radon-Nikodym $Z=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}},\quad \mathbb{E}[Z(T)]=1$
- Le processus B_t est un Mouvement Brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$

Théorème de Girsanov, θ =Const

- Soit W_t , $0 \le t \le T$ un Mouvement Brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \bullet \mathcal{F}$ est une filtration générée pae le mouvement Brownien $\bullet \theta$ est une constante
- On définit un processus $Z_t = e^{-\theta W_T \frac{1}{2}\theta^2 T}$
- On définit un processus $B_t = W_t + \int \theta(\tau) d\tau$
- Il existe un espace de probabilité $(Ω, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ tel que $\mathbb{Q}(A) = \int Z(ω)d\mathbb{P}(ω) \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t = T$
- On dit que Z est la dérivée Radon-Nikodym $Z=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}},\quad \mathbb{E}[Z(T)=1]$
- Le processus B_t est un Mouvement Brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$

Application du théorème de Girsanov

- Il existe deux processus stochastique W_t et $B_t = W_t + \theta t$ qui se comporte différemment dans les différents espaces de probabilités \mathbb{P} et \mathbb{Q} .
- W_T est le Mouvement Brownien dans \mathbb{P} . Il suit la loi $\mathbb{N}(0,T)$ dans \mathbb{P} .
- Dans $\mathbb Q$ W_T n'est pas le Mouvement Brownien. On le note W_T^Q . W_T^Q suit la loi $\mathbb N(-\theta T,T)$
- B_T est le Mouvement Brownien dans \mathbb{Q} . Il suit la loi $\mathbb{N}(0,T)$ dans \mathbb{Q} .
- **∍** B_T n'est pas le Mouvement Brownien dans \mathbb{P} . Il suit la loi $\mathbb{N}(\theta T, T)$ dans \mathbb{P} . $\mathbb{E}_Q[\Phi(B_T)] =$

$$\int \Phi(y) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \int \Phi(y) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{e^{-\frac{(y-\theta T)^2}{2}}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\theta T)^2}{2}} \\
= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\Phi(B_T^{\mathbb{P}}) e^{-B_T^{\mathbb{P}} \cdot \theta + \theta^2 T/2}] =$$

Lien entre les espérances dans les espaces différents:

$$\mathbb{E}_{Q}[\Phi(B_{T}^{\mathbb{P}})] = \mathbb{E}_{P}[\Phi(B_{T}^{\mathbb{P}}) e^{-B_{T}^{\mathbb{P}} \cdot \theta + \theta^{2}T/2}] =$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Phi(W_T + \theta T) e^{-W_T \cdot \theta - \theta^2 T/2}]$$

On a utilisé

$$B_T^{\mathbb{P}} = \theta T + W_T$$

Monte Carlo dans \mathbb{P}

- Calcul par MC: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Phi(W_T)] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i}^{N_{mc}} \Phi((W_T)_i)$
 - Dans $\mathbb{P}(W_T)_i$ suit la loi de $\mathbb{N}(0,T) \Rightarrow$

$$(W_T)_i = \sqrt{T} \cdot randn$$

Calcul par MC:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Phi(W_T + \theta T) e^{-W_T \cdot \theta - \theta^2 T/2}] =$$

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{i}^{N_{mc}} \Phi((W_T)_i + \theta T) e^{-(W_T)_i \cdot \theta - \theta^2 T/2}$$

Un example à verifier

• Verification à l'aide d'un exemple $\Phi(W_T) = W_T$

$$\bullet \ \mathbb{E}_Q[B_T] = 0$$

$$\mathbb{E}_{Q}[B_{T}] = \mathbb{E}_{P}[(W_{T} + \theta T) e^{-(W_{T}) \cdot \theta + \theta^{2} T/2}]$$

On peut montrer par MC que

$$\mathbb{E}_P[(W_T + \theta T) e^{-(W_T) \cdot \theta + \theta^2 T/2}] = 0$$

Pour cela on calcule sachant que $(W_T)_i = randn$

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{i}^{N_{mc}} ((W_T)_i + \theta T) e^{-(W_T)_i \cdot \theta - \theta^2 T/2}$$

Le résultat doit etre très proche de zero.

MC pour des évènements rares.

- Prix de l'actif $S_T = S(0) \exp(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T)$ $\Phi(W_T) = \mathbb{I}_{S_T < B_0}(W_T) = \mathbb{I}_{S(0)exp(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T) < B_0}(W_T)$ $\Phi(B_T) = \mathbb{I}_{S_T < B_0}(B_T) = \mathbb{I}_{S(0)exp(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma B_T) < B_0}(B_T)$
- Probabilité de l'événement rare $(B_0 = 36)$ à horizon fini

$$\mathbb{P}[S_{T} < B_{0}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{S_{T} < B_{0}}] = \int \mathbb{I}_{S_{T} < B_{0}} d\mathbb{Q} = \int \Phi(B_{T}^{\mathbb{P}}) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} =$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Phi(B_T^{\mathbb{P}})\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Phi(W_T + \theta T)e^{-\theta W_T - \theta^2 T/2}]$$

• On utilise le fait que B_T dans l'espace $\mathbb P$ suit la loi $\mathbb N(0,T)$ ce que equivalent à la rélation $B_T=W_T+\theta T$

Calcul de la ruine rare.

- La probabilité $\mathbb{P}[S_T < B_0]$ est très petite (parfois 10^{-30} !). Pour pouvoir calculer cette probabilité par Monte Carlo on génère (dans \mathbb{P} !) les évènements avec la moyenne de $S_T^{\mathbb{P}}$ beaucoup plus petite ($\theta < 0$) ce que permet de compter $\mathbb{I}_{S_T^{\mathbb{P}} < B_0}$. Cependant pour compenser cette valeur élevée on ajoute un coefficient de passage (la dérivée Radon Nicodym) $\mathbb{Z}_T = e^{-\theta W_T + \theta^2 T/2}$ dont la valeur est très petite. On restore donc pour la probabilité recherchée une très petite valeur.
- Cette méthode de Monte-Carlo s'appelle l'Échantillonnage Préférentiel or "Importance Sampling".

Références

- Cours sur la simulation d'evolution de variable aléatoire S_t , sur sa fonction de repartition, de densité, sur "Value at Risk" (VAR), sur l'algorithme stochastique de Robbins-Monro, simulation des évènements rares et transformation de Girsanov est en preparation par I.K.
- \blacksquare https://fr.wikipedia.org/wiki/Solvabilit_{II}
- P. Glasserman. Monte Carlo methods in Financial Engineering. Springer Verlag, New York, 2003.
- Nicole El Karoui et Emmanuel Gobet "Les outils stochastiques des marchés financiers". Les éditions de l'Ecole Polytechnique.
- R. G Gallager, MIT OpenCourse Ware 6.262 Discrete Stochastic Processes https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-262discrete-stochastic-processes-spring-2011/course-notes/
- S. Asmussen and B. Tuffin, "Stochastic simulation" (2007)

Références

- J.A. Bucklew: "Large deviation techniques in decision, simulation, and estimation" (1990)
- J.H. Blanchet, K. Leder, and P.W. Glynn. "Efficient simulation of light-tailed sums: an old-folk song sung to a faster new tune": In Monte-Carlo and quasi-Monte-Carlo methods 2008, pages 227 248. Springer, Berlin, 2009.
- Jean-Pierre Gueyié, Guy Charest. "VALEUR À RISQUE ET CRÉDIT À RISQUE" http://www.fsa.ulaval.ca/fineco/volume14/gueyiem.pdf
- P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. Variance reduction techniques for estimating value-at-risk. Management Science, 46:13491364, 2000.
- R. Carmona, J.P. Fouque, and D. Vestal. Interacting particle systems for the computation of rare credit portfolio losses. Finance Stoch., 13(4):613633, 2009.