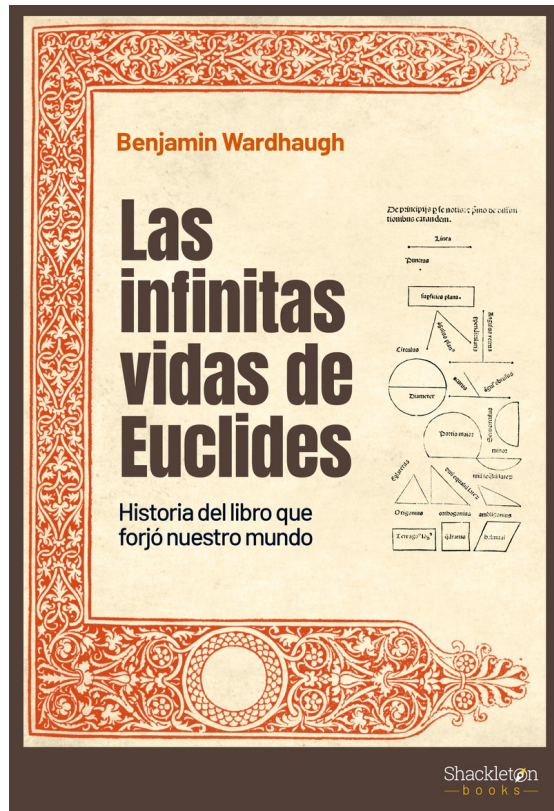


Las infinitas vidas de Euclides. La historia del libro que forjó nuestro mundo (Benjamin Wardhaugh - 2022)



- **Título:** Las infinitas vidas de Euclides. La historia del libro que forjó nuestro mundo
- **Título original:** The Book of Wonders. The Many Lives of Euclid's Elements (2020)
- **Año:** 2022
- **Autor:** Benjamin Wardhaugh
- **Páginas:** 480
- **Editorial:** Shackleton Books
- **ISBN:** 9788413611303

Cuando hablamos de los *Elementos* de Euclides no hablamos de un libro como los demás. Si bien no se trata de un ser vivo (atendiendo a la no poco controvertida concepción de “lo vivo” desde el punto de vista de la filosofía de la biología), sí que podemos considerarlo como una entidad compleja que ha sufrido una evolución dinámica desde que fue escrito hace unos 2300 años, y que ha sobrevivido a todas las culturas por las que ha pasado y formado parte.

De este proceso de cambio y adaptación nos da cuenta **Benjamin Wardhaugh** en esta maravillosa obra. Nos narra cómo se ha amoldado el libro a cada época, con las diferentes versiones que han variado su contenido y alcance; pero también nos habla del impacto y consecuente adaptación de las culturas y sociedades en las que el libro ha tenido repercusión, pues ha constituido un pilar fundamental del conocimiento a lo largo de los siglos, tanto en lo geométrico como en lo metodológico, a la hora de ejercitar nuestra capacidad intelectual.

Aunque a continuación sintetizaré las ideas principales de cada capítulo, las palabras que el autor emplea al final del libro a modo de epílogo hacen una exposición perfecta de su obra:

“La historia de los Elementos de Euclides es una historia sobre lo que pueden ser las ideas y lo que pueden hacer, y sobre cuánto puede viajar, cambiar y prosperar un libro. Es una historia sobre la matemáticas y su lugar en las vidas y las mentes de personas de muchas culturas. Es la historia de un libro de geometría nacido en el norte de África y que ha influido en el mundo durante dos mil trescientos años.

Este libro ha tenido un periplo extraordinario. Ha encontrado lectores por todo el mundo, que han hallado y realizado cosas con él, y sobre él, que les resultaban significativas. A lo largo del tiempo, la austeridad del texto ha permitido que la gente encontrara en él todo lo que necesitaban. Para algunos, Euclides era el gran autor de un gran

libro, una obra clásica de la literatura griega; para otros, era un filósofo cuya obra podía guiar a los lectores por los misterios del conocimiento y la existencia; para otros, era un héroe de la vida práctica que podía enseñarnos cómo diseñar una catedral o pintar un cuadro.

Con las presiones del mundo de la Ilustración, Euclides, como muchos otros autores y figuras de autoridad de la Antigüedad, empezó a verse con sospecha y sus virtudes tradicionales se desmoronaron. Luego, sin embargo, recuperó parte de su estatus, pues pasó a verse como una forma cambiante capaz de amoldarse a casi cualquier cosa y su maleabilidad se convirtió en una nueva virtud. Si bien el siglo XX, y de momento también el XXI, ha presenciado un cierto eclipse de su libro (se sospecha de él, se recela de él, se deja de usar), también ha visto un nuevo interés por aceptar sus ambigüedades e incertezas: se ha jugado con él y se ha dejado que juegue con sus lectores.

Nadie puede prever lo que sucederá con los Elementos de Euclides en el futuro, pues las culturas cambian sin cesar. Ahora bien, el libro parece adaptable como pocos, con más ideas que las que se pueden ocultar tras una máscara cualquiera, tal vez idealmente adecuado al mundo fluido y fragmentado de la era de la información. No cuesta imaginarlo saltando hacia el futuro, nunca comprendido del todo por las culturas con las que entra en contacto. Sin duda, seguirá viviendo sus incontables vidas; antiguo y nuevo, sabio y útil, complicado y juguetón y siempre ligerísimamente inasequible.”

El contenido del libro se estructura en cuatro bloques principales:

1. **EL AUTOR** – Donde se da cuenta de los orígenes del texto en la Alejandría de Ptolomeo I y de cómo éste fue propagándose por diferentes culturas, las sucesivas traducciones a diferentes idiomas hasta establecerse casi como el libro de texto predilecto para los estudiantes del Renacimiento, perpetuando así a Euclides, su autor, como el maestro por excelencia de la geometría.
2. **EL SABIO** – Donde se pone de manifiesto la relevancia que, cada vez más, tenía el conocimiento matemático en general (y los *Elementos* de Euclides en particular). De cómo trasciende fronteras y se consolida como pieza fundamental del saber, siendo una pieza fundamental en los propios planes de estudio.
3. **EL HÉROE** – Donde se nos cuentan casos prácticos de uso de la geometría, que hacen de valedores para su estudio y dedicación para con la disciplina, y que acabaría ensalzando la figura de Euclides a la de “Héroe”. Y donde su obra, los *Elementos*, pese a carecer de cualquier tipo de instrucción en cuanto a cómo usarse, ha sido revisada y aplicada de tantas maneras a lo largo de la historia que pareciera le hubieran dotado de vida propia.
4. **LA SOMBRA Y LA MÁSCARA** – Donde se nos muestra cómo los “*Elementos*” pierden su hegemonía, no tanto porque carezcan de valor (siguen siendo de relevancia en gran parte de la ciencia y conocimiento actuales), sino porque comienzan a cuestionarse las sucesivas versiones, con los errores y añadidos que desvirtúan la calidad de la obra, sino por las suspicacias que vienen generándose a raíz de sus postulados (en particular, el de las paralelas), que da lugar a la concepción de la geometría hiperbólica. Así, desde Lobachevski, queda claro que la de Euclides no es la única geometría. Ésta quedaría desterrada de su hegemonía geométrica, igual que hará, gracias a ella, Einstein con la física clásica de Newton, en beneficio de su teoría de la relatividad.

Lo que sigue a continuación es un breve resumen de los contenidos de cada capítulo, donde he tratado de sintetizar las ideas principales, procurando no desmerecer mucho la gran labor que Wardhaugh ha realizado en cada uno de ellos. Al final se encuentra una tabla donde se ordenan cronológicamente los principales eventos e historias que se narran en estos cuatro bloques.

1 – El autor

1.1 – Alejandría. El geómetra y el rey

Comienza el viaje en la ciudad natal del hombre culpable de todo esto: Euclides (ca. 325 a.e.c. - ca. 265 a.e.c.), geómetra griego del que apenas se dispone de datos biográficos fiables, pero del que sí sabemos que desempeñó su vida y labor intelectual en Alejandría en tiempos de Ptolomeo I Soter. Se trata de una ciudad que, si bien como tal no es griega (de hecho pasaría a convertirse en la capital egipcia), se convertirá en un punto de convergencia de todo el conocimiento griego clásico, entre cuyas razones para se encuentran los aportes de la matemática y geometría griegas que llegaron de la mano de Euclides.

Al respecto de la geometría griega cabe reseñar lo siguiente:

- No es sólo una herramienta para dilucidar problemas de índole geométrica, sino que el proceso demostrativo que la define es en sí mismo un modo de ejercer el razonamiento.
- Todo el historial de conocimientos geométricos griegos es de tal envergadura que no es posible que una sola mente humana pudiera poseerlos en su totalidad con un nivel de competencia lo suficientemente bueno. Lo que consigue Euclides con sus *Elementos* es aunar en un mismo compendio todo ese saber, que en gran medida ya estaba desarrollado en los trabajos de autores previos a él:
 - Trabajos previos de Eudoxo y su estudio de las proporciones, o los de Teeteto para el estudio de sólidos regulares.
 - Se cree que podrían existir compilaciones previas ya denominadas como “Elementos”.
- Euclides acomete la labor de recoger y aunar todos estos conocimientos preexistentes, amén de incluir algunos desarrollos nuevos, o de mejorar y extender los ya existentes, aunque siga sin estar del todo claros cuáles de dichos contenidos son de su autoría.

La estructura de su obra plantea y desarrolla los diferentes contenidos de manera argumentada, lo que permite poder realizar deducciones a partir de las bases que se han ido fundamentando previamente. Para ello parte de una serie de axiomas y postulados sobre los que efectúa desarrollos teóricos que darán lugar a las diferentes proposiciones de las que se compone (y se retroalimenta el libro), todo ello recogido en unas veinte mil líneas de texto en griego, que dan forma a trescientas cincuenta proposiciones geométricas recogidas en trece papiros.

No está claro si el contenido de los *Elementos* que nos ha llegado es la totalidad de la obra original de Euclides, además de que las sucesivas modificaciones que fueron realizándose a lo largo de los siglos llegan a diferir mucho entre sí, con copias que arrastran en ocasiones errores, y que desdibujan la que pudiera haber sido la obra original, donde además tenemos que no hay datos que permitan cerciorarnos de que no se hayan perdido fragmentos de la obra original.

1.2 – Elefantina. Cascotes de cerámica

Tras 2300 años de vida de la obra, no se conserva ningún papiro completo con la versión original completa de los *Elementos*, si acaso, disponemos de fragmentos con anotaciones sobre contenidos que parecen resúmenes simplificados del texto original, posiblemente apuntes de estudiantes de la época. Aún así, desde que apareció fue copiado y distribuido casi sin cesar por todos los lugares y en todos los formatos. Quizá el formato más curioso sean unos fragmentos cerámicos de una época cercana en el tiempo a su publicación, durante el mandato de Ptolomeo III. Estos fragmentos son conocidos como *óstracos*, y recogen las anotaciones bien en tinta o bien en grabados sobre su super-

ficie.

Fue en torno a 1906-07 que el arqueólogo Otto Rubensohn descubrió en la isla de Elefantina (isla del alto Egipto) unos óstracos con textos sobre geometría. No sería hasta 1930 que se transcribieran, y cuyo análisis permitiese constatar que se estaba ante la prueba física más antigua del contenido de los Elementos.

No deja de ser curioso el hecho de que tal testimonio no sean más que unos fragmentos (en particular pertenecientes al libro XIII principalmente), pues nos muestra una analogía con la evolución que vendrían a experimentar a lo largo de los siglos posteriores: copias y versiones, que cogen este fragmento de aquí y que lo ubican allá, interpretado de esta manera; o el uso posterior que se daría al libro como manual básico en la educación, pero del que sólo se tomarían determinados fragmentos según el alcance buscado en cada caso. Esto hace de Euclides no un maestro en el sentido magistral, de pizarra, donde dicta los contenidos a estudiar y memorizar (como sí que harían algunos después con su obra), sino que más bien sienta unos preceptos, unas bases sobre las que partir y un método con el que razonar a partir de ellas para deducir y alcanzar nuevos conocimientos (como en efecto se estructura la propia obra). En palabras de Wardhaugh al final de este capítulo:

“Sus lectores sabían que siempre podían ir más al fondo, que podían profundizar más y crear todavía más, porque si bien los Elementos ya lo habían hecho todo, aún estaba todo por hacer.”

1.3 – Hipsicles. El decimocuarto libro

Muerto Euclides, y en parte gracias al legado que genera su obra, la tradición de geómetras que surge tras él es relevante, pues se progresa en conocimientos geométricos que poco a poco irían añadiéndose al contenido original de los *Elementos*. Algunos de estos primeros grandes geómetras fueron:

- Arquímedes (287 a.e.c. - 212 a.e.c.) estudia la relación entre volúmenes de esfera y cilindro de misma altura y diámetro están en relación 2:3
- Apolonio (262 a.e.c. - 190 a.e.c) que llevó a cabo una síntesis sobre el estudio de cónicas.
- Eratóstenes (276 a.e.c – 194 a.e.c) que sería director de la biblioteca de Alejandría, donde además introduciría la geometría en el museo. Fue el primero en dar una medición de la Tierra.

En la segunda mitad del siglo II anterior a nuestra era, unos 150 años después de Euclides, Hipsicles reúne y coordina los distintos avances geométricos acometidos desde éste. En particular toma el libro de Apolonio que trata sobre el icosaedro y el dodecaedro y lo mejora añadiéndole un mayor número de pruebas y demostraciones, estructurando dicho libro al modo de los *Elementos* con 5 proposiciones, 3 resultados subsidiarios (lemas) y una demostración alternativa a las ofrecidas por Apolonio.

Una mano anónima posterior incluiría esta versión revisada del libro de Apolonio a cargo de Hipsicles como si del libro XIV de los *Elementos* se tratase, y vinculándolo como continuación del libro XIII mediante la añadidura de una proposición adicional.

Parece un añadido sin importancia, fruto de la propia evolución del conocimiento que se construye sobre los pilares y fundamentos previos a éste, y sin embargo pasó a considerarse parte de los *Elementos* durante mil quinientos años como si de una parte más del original se tratase.

1.4 – Teón de Alejandría. La edición de los Elementos

Ya en nuestra era, en torno al 370, Teón es un maestro de geometría que se desempeña en una Alejandría que ha visto tiempos mejores, donde su Biblioteca ya no existe, y el Museo acoge al último reducto de académicos que verá la ciudad (quizá Teón fuera el último empleado del Museo).

Entre las labores que lleva a cabo además de la enseñanza se encuentra la re-edición de textos y libros para su uso como manuales de estudio, entre los que se encuentran los *Elementos* (otro de los títulos sobre los que trabajó fue el *Almagesto* de Claudio Ptolomeo). Dada la meticulosidad de su espíritu revisor, el resultado de su edición de los *Elementos* es una obra que en cierto modo simplifica la labor al futuro lector, lo que le hizo tener una gran acogida, hasta tal punto que la mayoría de manuscritos que han sobrevivido hasta nuestros días consisten en copias de la versión de Teón. Si bien es cierto que no ha quedado exento de críticas desde la historiografía actual, que lo tachan de realizar “refundiciones triviales” de los textos, y de presentar unos contenidos “matemáticamente banales”.

Otro aspecto reseñable de su biografía se centra en su árbol familiar, pues se trata del padre de Hipatia (nacida en el 355), que participaría tanto de la labor docente como de edición y revisión de textos que llevaba a cabo su padre. Por desgracia, y como ocurrirá demasiadas veces a lo largo de la historia, las trifulcas político-religiosas vinieron a dar al traste con su vida, pues se vio inmiscuida en mitad de unas discusiones entre el prefecto romano (de fe cristiana) y el patriarca de Alejandría, y que para desgracia de Hipatia terminó con su asesinato.

1.5 – Esteban el escriba. Euclides en Bizancio

Estamos en torno al año 888, en una Constantinopla que representa el último reducto de la cultura griega clásica y que adolece de la caída y declive del imperio romano oriental. En esta época los académicos bizantinos habían reestructurado el saber en las conocidas como 7 artes liberales:

- Artes liberales de carácter literario: gramática, retórica y dialéctica (~lógica)
- Artes liberales de carácter científico: aritmética, geometría, astronomía y música

Los *Elementos* son el texto fundamental en el estudio de la geometría, sin embargo, las sucesivas copias (y las interpretaciones que los escribas hacen del texto, en particular del contenido matemático que no siempre alcanzan a entender) suponen una sucesión de fallos y errores que se van acumulando en el tiempo y que desdibujan la voz original de Euclides en la obra que, sin embargo, queda atribuida en origen a él.

Casos como la añadidura del tratado de Hipsicles del libro XIV (probablemente en los siglos V o VI) forman parte de esta desviación del texto original de Euclides, así como un posible libro XV que trataría cuestiones geométricas de sólidos y que se atribuye a tres autores, entre los que se encontraría Isidoro de Mileto. Es decir, llevamos casi 1000 años de reescrituras y añadiduras al texto original.

Una de las múltiples versiones es la que Aretas de Patras (o Aretas de Cesárea) le encarga al escriba bizantino Esteban, que la lleva a cabo en el año 888 sería una de las copias completas más antiguas que se conservan, y que consistía en:

- Unas 20000 líneas de texto
- 388 hojas escritas con unas 26 líneas por hoja
- Se basa en la edición de Teón, especificando que los libros XIV y XV se deben a Hipsicles.
- Añade anotaciones personales en su “diálogo personal” con el libro durante el proceso de

edición del mismo, y que reflejan los contenidos de géometras posteriores a Euclides que el propio Estaban habría trabajado y estudiado.

Una de estas copias sobrevivió junto a otros títulos de la biblioteca personal de Aretas de Patras (obras de Platón y Aristóteles o la única copia conservada de las *Meditaciones* de Marco Aurelio) y que serían adquiridas en 1748 por Jacques Philippe d'Orville, y acabarían siendo vendidos en 1804 a la biblioteca Bodleiana de Oxford, donde aún perviven.

1.6 – Al-Hayyay. Euclides en Bagdad

Desde su llegada al poder en el 750, el califato de la dinastía al-Mamún nos presenta un entorno multicultural y cosmopolita, en el que judíos, cristianos (arameos) y musulmanes se tratan entre sí, ya sea en persa, árabe o griego (todavía usado en zonas de Siria, Palestina y Egipto), mediante los que realizan intercambios culturales que enriquecen a las diferentes sociedades.

Avances en la adquisición de nuevos conocimientos y el intercambio cultural puede apreciarse en la gran colección de cultura griega en posesión del califato, así como de las numerosas traducciones al árabe del saber que acometieron en aquellos años.

Como epítome de esta concentración cultural tenemos la ciudad de Bagdad, que sería una especie de imán para textos e ideas. En ella, al-Mamún fundaría “*La casa de la sabiduría*”, una suerte de biblioteca donde se almacenaría el conocimiento científico y filosófico que va recopilándose poco a poco desde el califato gracias a sus intercambios culturales, y que estaría cada vez más apoyado por las diferentes élites de la sociedad bagdadí.

Una de estas obras que será traducida serán los *Elementos*. La versión de la que parte esta traducción es un poco más corta que la que elaboraría Teón (y que fuera posteriormente usada por Esteban). De los cerca de 20 manuscritos de los *Elementos* que se tradujeron del griego al árabe, ninguno de ellos incluye los libros XIV ni XV, lo que nos lleva a pensar que las versiones de las que son traducción son anteriores a las que usara Teón y que incluían los añadidos de Hipsicles.

Es de notar que, dadas las diferencias lexico-semánticas entre un idioma y otro, los traductores árabes hubieron de acuñar una serie de nuevos términos científicos para las traducciones de los distintos textos sobre los que trabajaron. Una vez esta nueva terminología está desarrollada de manera solvente, al-Mamún manda elaborar una nueva versión de los elementos actualizada de modo que refleje la nueva terminología.

El encargado de llevar a cabo tal traducción es al-Hayyay, que sería el primer traductor (en el 819) de Euclides al árabe, quien además daría nombres singulares a algunas de las proposiciones (por ejemplo, el teorema de Pitágoras sería “el de los dos cuernos”, otras proposiciones tendrían nombres como “pata de ganso” o “cola de pavo real”) que ayudaría a una memorización más sencilla de las mismas. Hubo otras traducciones posteriores de los *Elementos* al árabe, en especial una del siglo IX que se convertiría en un elemento clave del saber matemático básico árabe.

1.7 – Adelardo. Euclides en latín

Más allá de la relevancia en lo religioso, que será mayor o menor según a quién preguntemos, tanto en las épocas de convivencia en las que se daba intercambio cultural entre los sabios de reinos cristianos y los sabios musulmanes de Al-Ándalus, como con la posterior reconquista de territorios de los primeros a los segundos, la consecuente traducción de textos del árabe al latín supuso un impulso considerable para el saber y el conocimiento de la época.

Fue durante el siglo XII cuando mayor cantidad de textos árabes fueron traducidos, en ciudades como Barcelona, Segovia, Tarragona, León, Tolousse, Narbona, Marsella o Toledo, donde esta últi-

ma devendría en una situación de esplendor cultural en cuanto a la integración de textos en diferentes idiomas con la posterior creación de la Escuela de Traductores en dicha ciudad.

De nuevo, los *Elementos* tienen una incidencia particular en esta etapa, ya que fue en este siglo XII que se tradujeron por primera vez al latín de la mano de Adelardo de Bath (en torno al 1130), un inglés viajero y con afán de conocimientos que también habría trabajado otra serie de textos matemáticos y científicos, como diferentes tratados y tablas de al-Jwārizmī.

Su traducción al latín probablemente fuese realizada a partir de una versión árabe, a su vez traducida de manuscritos previos anteriores; muy probablemente la versión de al-Hayyay. Para ello hubo de necesitar ayuda para con el árabe y el nuevo lenguaje y terminología científicos que éstos habían acuñado para dotar de entidad al texto griego de Euclides y que supondrían una dificultad en el trabajo de traducción de Adelardo.

Esta traducción sería la que introdujese a los *Elementos* en la Europa medieval, cuya relevancia e incidencia tendrán gran calado, con su posterior inclusión en las universidades que fueron creándose desde la Europa mediterránea hasta Inglaterra.

Esta traducción de Adelardo no sería la única hecha en latín, y de hecho su versión quedaría eclipsada por otras realizadas posteriormente, como la de Roberto de Chester, también en el siglo XII, o la de Campano de Novara en 1250, quien además incluiría nuevas versiones en algunas de las demostraciones que se incluyen en el texto.

1.8 – Erhard Ratdolt. La impresión de los Elementos

En torno a 1450 Gutenberg dio un giro de 180 grados a la difusión del conocimiento gracias a la invención de la imprenta de tipos móviles. Lo que antes era una labor tediosa, cara, y en cierto modo monopolizada por aquellos a cargo de realizar las copias, se ve ahora como un proceso “trivial” en el que tiempo y costes se ven reducidos de un modo abismal.

Nos situamos en Venecia, en el 1482, donde en apenas unos meses se han realizado más copias de textos que todas las efectuadas por copistas durante los 1000 años anteriores. La impresión de los *Elementos* no queda fuera de esta plétora de impresiones, en un proyecto que acometería, no sin dificultades, Erhard Ratdolt, impresor alemán que desarrolló su carrera en Venecia. Algunos de los problemas a los que hubo de enfrentarse fueron:

- Los tipos móviles de la imprenta requieren de un tipo por cada letra que ha de plasmarse en cada página. Una peculiaridad en el caso de los *Elementos* fue la ingente cantidad de tipos para la letra “s” que se necesitaron, ya que incluye muchos enunciados en sus proposiciones de la forma “si...”
- La nomenclatura de puntos geométricos sobre los diagramas también requería tipos específicos, ya que estaban denominadas con las primeras letras mayúsculas del alfabeto: A, B, C...
- La gran cantidad de diagramas que alberga los *Elementos* necesitó de una gran minuciosidad por parte de Ratdolt.

Como consecuencia de estas complicaciones se desarrollaron nuevas técnicas y procesos de impresión, en particular en lo que a la inclusión de imágenes en el texto se refiere. También es de gran importancia la normativa que comenzó a establecerse en lo referente a la impresión de textos de carácter matemático y científico. Algunos estudiosos consideran a Ratdolt el impresor más innovador tras Gutenberg.

El asentamiento de esta nueva tecnología, así como los sucesivos desarrollos y mejoras en las técnicas de impresión, supusieron también un abaratamiento en los costes. Gracias a esto se posibilita

que entre el 1500 y el 1600 viesen la luz unas 40 ediciones diferentes de los *Elementos*, la mayoría en latín. De las realizadas en otros idiomas cabe resaltar:

- En 1533 Simon Grynäus realiza la primera versión impresa de los *Elementos* en griego antiguo.
- En 1543 Niccoló Tartaglia realiza la primera versión impresa de los *Elementos* en lengua vernácula (italiano en este caso). No sería la única, y posteriormente se crearían diferentes traducciones a los distintos idiomas europeos

1.9 – Marget Seymer de su puño y letra. La posesión de los Elementos

A medida que la impresión de libros va extendiendo su uso, no todas las versiones que se editan son para los mismos destinatarios, ni todos los bolsillos pueden permitirse adquirirlas por igual. En consecuencia ven la luz diferentes ediciones de los *Elementos*:

- Ediciones de mayor complejidad con un mayor número de comentarios y análisis de mayor profundidad que, en consecuencia, son de precio más elevado. Un ejemplo de este tipo sería la que en 1570 realizara Henry Billingsley, quien primero tradujese los *Elementos* al inglés y cuya versión incluyó tal número de anotaciones y apéndices que rondaba las 1000 páginas.
- Ediciones más sencillas y más fácil acceso, tanto en lo económico como en lo intelectual a la hora de asomarse a ellas. Un ejemplo de estas versiones es la que hizo Pierre de la Ramée, primero en 1545, con reedición posterior en 1549. Ramée era un fuerte crítico con la obra de Euclides, tanto con el contenido de la misma como en relación a la noción de autoridad asociada al griego, que éste negaba fuese al autor de todas las demostraciones que se incluían en las versiones de los *Elementos* de las que se disponía. En consecuencia, la versión que él crea se enfoca a una visión más práctica de la geometría y en la que prescinde de la práctica totalidad de las demostraciones, quedando así una versión muy reducida de tan sólo 45 páginas y que vendrían a conocerse como el *manual para el geómetra autodidacta*.

La gran disponibilidad de las versiones del libro, así como la presencia que había venido tomando en los entornos intelectuales, ayudó a que el libro se estableciese como obligatorio en la gran mayoría de estudios superiores. Este currículo que toma como base el texto de Euclides lo hace principalmente en base a los libros I a VI, XI y XII (la geometría del plano, la teoría de proporciones y la geometría espacial), lo que da pie a numerosas versiones reducidas que reflejan dichos contenidos únicamente.

Muchas de estas versiones reducidas orientadas al estudio han sobrevivido junto a las numerosas anotaciones en los márgenes de los estudiantes que las trabajaron, como es el caso de una edición de 1543 de la edición de Johannes Vögelin (un compendio breve del siglo XVI) perteneciente a Marget Seymer.

Con esto puede verse cómo los *Elementos* van mutando a través de los años, a partir de una serie de manuscritos mejor o peor tratados en los procesos de traducción en las diferentes lenguas (griego, árabe y latín), a divergir de manera considerable con la explosión de ediciones impresas tras la llegada de la imprenta, en la que las múltiples versiones diferían tanto en contenidos como en la profundidad de las explicaciones y comentarios que incluían, y que en cierto modo cobraban vida propia con cada estudiante que los trabajaba a medida que iba permeando en los intelectuales de la Europa del Renacimiento.

1.10 – Edward Bernard. Minerva en Oxford

Siguiendo el impulso en la generación de nuevas ediciones, a cada cual más variada y enfocada a uso y público concretos, nos encontramos con que entre los siglos XVII y XVIII llegan a convivir hasta 300 versiones distintas. Para un estudioso de Euclides lo normal sería la posesión de una o dos de estas ediciones, aunque tenemos casos como el de Robert Hooke, quién además de ser miembro fundador de la Royal Society y profesor de geometría en el Gresham College, también era orgulloso poseedor de 31 ediciones diferentes.

Del mismo modo que ocurrió en su día con los errores e inconsistencias arrastrados por los copistas anteriores a la imprenta, la coexistencia de tantas y tantas ediciones ocasionaron la ocasional pérdida de calidad en éstas, pues las diferentes motivaciones tras el editor de cada una de ellas nos aleja de los contenidos originales del texto de Euclides. Es por esto que en Oxford, en 1619, Henry Savile reclama la necesidad de adherirse a la fidelidad y contenidos del Euclides original, pues tanta síntesis hace perder el contenido y alcances de unos *Elementos* que ya rondaban los 2000 años de edad. Quizá como contrapartida a esta situación, durante 1620 impartió un curso en Oxford para aproximarse a los *Elementos* en su esencia original, y que recogió en 1621 en su *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis* (Trece lecciones introductorias para comenzar con los *Elementos* de Euclides).

Siguiendo la estela y puntos de vista de Savile aparece Edward Bernard, también profesor en Oxford, sólo que de astronomía y matemática antigua, y quien publicaría numerosos libros sobre temas dispares (pesos y medidas antiguos, etimologías, plegarias, catalogación de escritos en bibliotecas inglesas). Entre sus proyectos se encuentra el continuar el ambicioso plan de Savile de reeditar textos matemáticos antiguos, y al afrontar los *Elementos* de Euclides pretende tomar una edición limpia del mismo y lo más cercana al original, sobre el que iría añadiendo los múltiples comentarios y anotaciones aparecidos en ediciones anteriores tanto en griego, árabe como latín, con el fin de generar una versión lo más robusta posible expandiendo, en lo posible, los comentarios para cada proposición. Dado lo titánico de la empresa no consigue finalizarlo, resultando en una amalgama de hojas intercaladas en distintos idiomas, que no quedaría del todo en el olvido.

Sería David Gregory quien recogiese el testigo de tan magno fracaso para llevar a cabo una edición más terrenal de los *Elementos* (en griego y latín), y que recogería las proposiciones y comentarios de las ediciones de Savile y Bernard, así como algunas de las revisiones efectuadas por Bernard que no siempre quedan bien acreditadas en la versión de Gregory. Esta edición vería la luz en 1703 con el nombre de *Euclides quae supersunt omnia*.

2 – El sabio

2.1 – Platón. El filósofo y el esclavo

“No entre aquí quien no sepa geometría”.

Eso dicen que rezaba en la entrada de la Academia (o al menos así se cree desde la primera vez que se recoge una alusión al respecto en un texto del siglo IV). Pese a lo posiblemente apócrifo del enunciado, no le resta un ápice a la intencionalidad con la que se proclama, que es la de recalcar el valor que Platón le otorgaba al conocimiento matemático. De hecho, su interés por la geometría es latente en su propia obra:

- En el *Menón* aparece una escena donde su Sócrates establece un interesante diálogo con un esclavo en relación a la geometría, haciendo deducir a éste, mediante su método mayéutico, una serie de razonamientos geométricos que aquel no creía poseer, pero que eran fruto del conocimiento latente en su alma inmortal, por muy esclavo que fuese. Éste es un ejemplo de cómo era la enseñanza de la geometría, donde mediante una discusión en la que se entabla un diálogo acerca de las propiedades de los cuerpos geométrico hasta alcanzar una demostración “diagrama en mano”, que da cuenta del conocimiento desarrollado obtenido como consecución de dicho proceso dialógico.
- Es más que clara la importancia que tiene la geometría en su uso como ejemplos y fuentes de ideas a lo largo y ancho de su obra filosófica (sin ir más lejos, la relevancia que tienen los conocidos como sólidos platónicos y su relación para con los elementos fundamentales). Es curioso, también, que el estudio de los cinco sólidos regulares se encuentra ubicado en el libro final de los *Elementos*.
- Son numerosos los geómetras que aparecen representados en sus diálogos como Eudoxo de Cnido (que estudió las proporciones) o Teeteto (y su estudio de sólidos regulares), siendo los cuerpos de estudio de ambos los que supondrían una piedra fundacional para la posterior composición de los *Elementos*.

Como apuntaba al inicio, aunque la filia de Platón hacia la geometría ha sido, quizá, exagerada, sí que tenía una visión pragmática de la geometría en el uso que le daba en su idealismo, y no es de extrañar que las más que numerosas referencias a la geometría en su obra y su filosofía supongan una tentación a la hora de relacionarlo con Euclides. Sin ir más lejos, existe una leyenda medieval en la que se cuenta que Euclides (de Megara), ante la prohibición que caía sobre los megarienses de no poder acceder a Atenas, se hacía pasar por mujer para colarse y asistir a las clases de Sócrates, lo que le habría hecho ser contemporáneo de Platón en la asistencia a dichas sesiones. Este Euclides megariense existió y fue en efecto alumno de Sócrates, sin embargo, el Euclides alejandrino autor de los *Elementos* dista suficientes años en el tiempo como para poder desmentir la confusión, aunque en su día fuese un error arrastrado con demasiada frecuencia con el afán de establecer una conexión entre el idealismo platónico y la geometría de Euclides.

2.2 – Proclo Diádoco. Minerva en Atenas

En torno al 450, Proclo era el director de la Academia en Atenas, que regía mediante un comportamiento acorde a su propio modo de vida, ya sea en lo místico en cuanto a su religiosidad, como en tanto que enciclopédico en su lado intelectual. En ella enseña su filosofía de corte neoplatónica, para la cual se sustenta en la geometría de Euclides, amoldada a su visión de la realidad en la que identifica tres niveles que son, en cierto modo, una variación del idealismo platónico:

- El uno
- El nivel de los objetos matemáticos, que son perfectos e inmutables
- El mundo físico en que vagamos los humanos

Proclo entiende la matemática como algo crucial para la vida del filósofo. De hecho, basado en el modo argumentativo del razonamiento geométrico que despliegan los *Elementos* escribe sus obras *Elementos de teología* y *Elementos de física*. Para él los elementos geométricos pertenecen al nivel intermedio entre el mundo material y el eterno, y sirven como nexo entre ambos niveles al presentar una serie de características compartidas entre dichas realidades, como la longitud, el tamaño o la forma.

También realizó comentarios a la obra de Euclides, y si bien no son los más antiguos de los que se tiene constancia, sí son los más antiguos escritos en griego conservados en su totalidad.

El platonismo de su filosofía lo vuelca en su interpretación a Euclides (quizá de aquí el aparente interés por interpretar a Platón y Euclides en un mismo ángulo como se comentaba en el punto anterior. Su modo de entender la geometría y la filosofía se orientan hacia un enfoque práctico y crítico aplicable al razonamiento y la enseñanza. El método que desarrolla a tales efecto consta de varias fases, que fácilmente pueden ser empleados en la geometría o en la física como método general de razonamiento.

Método de Proclo:

1. Enunciado.
2. Exposición.
3. Definición del objetivo.
4. Construcción.
5. Demostración.
6. Conclusión.

Las enseñanzas y comentarios de Proclo son adoptados por aquellos que estudian los *Elementos* con y a partir de él, viajando incluso sus análisis como anotaciones al margen de las copias físicas del texto. Con él se ve alterado el modo de leer la obra de Euclides, que más allá del alcance geométrico de sus proposiciones, pasa a verse como un método de razonar, con la geometría como un modo de agudizar las capacidades intelectuales de la persona, si bien es cierto que este afán por desarrollar la metafísica de Proclo va en detrimento del carácter puramente matemático de Euclides.

2.3 – Hroswitha de Gandersheim. La Sabiduría y sus hijas

Desde que Euclides recogiera su estudio sobre números en los libros VII, VIII y IX pasarían unos 400 años hasta que se disponga de otro tratado completo que trate este campo de estudio. Será Nicómaco de Gerasa quien en torno al año 100 en su *Arithmetike eisagoge* (Introducción a la aritmética), un texto que bien podría haber sido empleado como manual de estudio.

En el 500, Boecio retoma el trabajo de Nicómaco de Gerasa y lo extiende añadiéndole mayor número de ejemplos en su *De institutione arithmetica*, cuya difusión permitió afianzar el estudio de la teoría de números en la Edad Media

Por otro lado tenemos a Hroswitha, que perteneciendo al convento de Gandersheim elaboró una notable labor literaria que incluye numerosas referencias intelectuales y filosóficas dentro de ellas. Un ejemplo de éstas obras es la dedicada a la *Sabiduría* (Sapientia) en la que tiene lugar un diálogo entre la *Sabiduría* y el emperador Adriano I, donde se establece una discusión sobre números, en particular sobre

- números deficientes : aquellos cuyos divisores suman menos que el número en cuestión. e.g. $8 : 4+2+1 = 7 < 8$
- números perfectos : aquellos cuyos divisores suman exactamente igual que el número en cuestión. e.g. $6 : 3+2+1 = 6$

- números abundantes : aquellos cuyos divisores suman más que el número en cuestión. e.g.
 $12 : 6+4+3+2+1 = 16 > 12$

Su obra es redescubierta a partir del año 1500, desatando un gran interés por dicho contenido en su obra que se aleja del tema religioso que cabría esperar en una novicia. A día de hoy sus obras siguen representándose.

2.4 – Levi ben Gershon. Euclides en hebreo

Las diferentes versiones de los *Elementos* que se vienen editando desde su gestación incluyen, todas, una serie postulados y definiciones comunes donde, si bien se mantienen más o menos constantes, pueden presentar variaciones entre unas versiones y otras. Lo que sí es constante es la problemática que subyace en torno al quinto postulado, el de las paralelas (que no vendría a quedar resuelto hasta los trabajos de Lobachevski varios siglos después). Uno de los intentos de análisis más interesantes a tales efectos fue realizado en Hebreo de la mano del rabino Levi ben Gershon en Orange, Francia, en el año 1336.

Hay que recalcar cómo la tradición hebrea difiere un poco del conocimiento de arraigo cristiano que dominaba la Europa continental. El saber hebreo ha bebido de los textos árabes y está ungido en la lógica aristotélica, y en vez de verse impregnado por el escolasticismo europeo, es la obra de Maimónides y su *Guía de perplejos*, donde enfatiza la importancia de la adquisición del conocimiento como paso necesario en el camino de la perfección del alma. Sin embargo, el pueblo judío sufre una constante política de expulsión en los distintos países en los que ha radicado, llegando muchos de ellos a Francia a partir del 1140, enriqueciendo a su país de destino con todo el saber que importan estos inmigrantes. Estos exiliados traen consigo un conocimiento férreo de la obra de Euclides, que era considerado una obra que toda persona culta había de conocer.

Uno de estos judíos de gran erudición es Levi ben Gershon, quien evolucionara el conocimiento de su comunidad a partir del trabajo y estudio de textos árabes, en particular sobre la física y la lógica de Aristóteles, que le dotan de un carácter racionalista fuertemente comprometido con la ciencia experimental. Es posiblemente el astrónomo más destacado de su generación, y entre sus logros en astronomía cabe destacar la invención de la Ballestilla, instrumento de navegación antiguo que utiliza la altura del Sol y otros astros para orientarse.

En contra del idealismo de Platón o Proclo, ben Gershon entendía los objetos matemáticos como abstracciones obtenidas a partir de datos sensoriales. La matemática no sería sino un modo de poder elaborar más y mejores ideas abstractas como ayuda en la identificación de pautas verdaderas, útiles y necesarias para la obtención de un mayor conocimiento.

Entre las obras que trabaja se encuentran los *Elementos*:

- Añade comentarios explicativos y aclaratorios en algunas proposiciones.
- No es partidario de alguna de las definiciones que emplea Euclides (el postulado de las paralelas).
- Consideraba que la geometría necesitaba de una nueva fundamentación con el fin de evitar las lagunas y dificultades que ya venían identificándose al analizar la obra de Euclides.

Fruto de estas discrepancias con el contenido y planteamiento en los *Elementos*, elabora su propio tratado de geometría, del que sólo se conserva un manuscrito con 24 proposiciones.

2.5 – Christopher Clavius. Los “Elementos” jesuíticos

En 1574, el jesuita Christopher Clavius elabora su propia versión de los *Elementos* a la que añade múltiples notas y demostraciones alternativas. Estas añadiduras sobrepasan con creces las de la obra original, al contener 1234 demostraciones (tres veces más), aunque quizá lo más importante sea el enfoque epistemológico con el que acomete su obra, y que supone un giro conceptual respecto a la deriva que venía tomando el saber hasta entonces.

Dentro de la labor intelectual que desarrolló Clavius destacan aquellas en el ámbito matemático y astronómico:

- Estuvo involucrado en la elaboración del calendario Gregoriano (entra en vigor en 1582).
- Promovió la enseñanza de las matemáticas como parte fundamental del plan de estudios de los jesuitas.
- Era consciente la importancia que tenían las matemáticas en su vertiente “religiosa”, y del carácter que la tradición intelectual había impregnado en éstas:
 - Agustín de Hipona y su influencia por el idealismo platónico de Proclo, donde se establece la relación de la geometría para con lo eterno e inmutable.
 - Boecio y Adelardo, cuyas obras están claramente familiarizada con las ideas platónicas.
 - Tomás de Aquino, quien alabara las matemáticas en su propia obra.
 - Alberto magno, quien escribiera comentarios matemáticos.

Clavius vive en una época en la que se da el cruce de posturas intelectuales tras el redescubrimiento de Aristóteles en el siglo XII, entre cuyas consecuencias se haya la relevancia al razonamiento silogístico propio de la lógica del estagirita. Sin embargo, Clavius es de los principales impulsores a la hora de dotar a las matemáticas de entidad propia en su modelo deductivo, con el fin de elaborar demostraciones cada vez más depuradas y alejadas de fallos. No es el único, y durante el siglo XVI las diferentes ediciones de los *Elementos* ofrecían versiones renovadas y cada vez más sólidas de los postulados que contenían, en la búsqueda quizá de conseguir unos *Elementos* intachables y que no adoleciesen de las carencias en la obra de Euclides.

Es en este panorama en el que Clavius elabora su versión, tratando de sintetizar lo mejor de las ediciones anteriores, añadiendo numerosos corolarios, lemas y comentarios propios, así como nuevas proposiciones. Clavius añade 4 postulados, 20 axiomas y 585 demostraciones adicionales, lo que da cuenta del carácter evolutivo que poseen los *Elementos* como un ente en sí mismo vivo y en continuo desarrollo.

Dentro de la importancia que otorgaba a las matemáticas lo hacía tanto en su vertiente teórica como práctica. El teórico ofrecía una llave de acceso para las verdades universales, donde la relación que establece entre la matemática y el cristianismo queda reflejada en sus propias palabras:

“nadie puede acceder a la metafísica si no es a través de las matemáticas”.

Por otro lado defendía el carácter práctico de la matemática y su utilidad en las labores mundanas.

Los *Elementos* de Clavius son considerados la edición más importante de la obra de Euclides jamás publicada. No sólo constataron el giro intelectual que se estaba viviendo en aquella época y que vendría en la conocida como “revolución científica”, sino que influyó directamente en alguno de sus principales protagonistas, como Galileo, quien defendiera la concepción de la naturaleza y nuestra interpretación de la misma a través del lenguaje matemático en que se hallaba escrita. Pero también tuvo una gran influencia indirecta, pues a él se debe la consolidación del estudio de Euclides

dentro del plan de estudios de las matemáticas de los jesuitas (a partir de 1599), donde el contenido de los *Elementos*, así como un incremento en contenidos de aritmética, trigonometría, astronomía o teoría musical marcaron el aprendizaje de tantos y tantos alumnos, entre los que se encuentran, por ejemplo, Descartes, Laplace, Diderot o Voltaire.

2.6 – Xu Guangqi. Euclides en China

Xu Guangqi era un mero funcionario pequinés con una visión pragmática que no estaba del todo contento con la interpretación tradicional que el confucianismo imprimía a la educación en China, lo que le hizo estar abierto a establecer intercambios culturales y escuchar alternativas.

En 1590 conoce a Cattaneo, un viajero occidental que la hace ver que existen religiones fuera de Confucio. En 1600 conoce a Matteo Ricci, un jesuita que había estudiado con Clavius y que viajaba a China con intenciones misioneras. Ayudados por el mecenazgo imperial que les facilitaba el llevar a cabo tal intercambio cultural, consiguen despertar el interés de muchos chinos, no sólo en lo religioso, sino también en lo intelectual, pues entre las cosas que traen consigo vienen diversos artilugios, mapamundis y numerosos libros.

La misión jesuita fue bastante exitosa, obteniendo conversiones a buen ritmo (1606: ~1000, 1610: ~2500, 1615: ~5000), y entre los que se encontraba nuestro Xu Guangqi, que además de adentrarse en una nueva religión, se introdujo también en el estudio de las matemáticas de la mano de Ricci, quien le presta su versión de los *Elementos* de Clavius, y de la cual acometerían la labor de traducirlo al chino. Aunque no libres de problemas en la traducción (muchos de los términos que acuñaron para tales efectos siguen siendo vigentes hoy en día), una primera versión ve la luz en 1607 incluyendo los libros I-VI.

Xu tenía intereses variados, entre los que se encontraba la hidráulica, que de hecho había puesto en práctica para la elaboración de varios proyectos civiles. Su entrada en los *Elementos* le lleva a identificar el gran interés práctico que éstos pueden ofrecer a tantas disciplinas diferentes mediante la correcta aplicación de la geometría, amén de su uso como trampolín en el estudio de la teología. Fruto de esta sed de conocimientos, y gracias a la ayuda de Ricci y los libros que trajo consigo, Xu acometió la tarea de realizar traducciones de éstos al chino, dando así lugar a un nuevo intercambio cultural en el que el conocimiento occidental expandía sus horizontes.

2.7 – No culpéis a nuestro autor. Geometría en escena

En 1635 ve la luz *Blame not our author*, una obra de teatro donde los entes matemáticos son sus personajes. En una historia en la que el cuadrado pretende redondearse y hacerse círculo, las diversas formas geométricas (cuadro, rectángulo, línea y círculo) se revelan contra la regla y el compás.

Algunas proposiciones de los *Elementos* (de la edición de Clavius) forman parte de los diálogos. Se hace uso de la geometría como forma de explorar la irracionalidad, lo que quizá reflejase la complejidad en el estudio del contenido de los *Elementos*, como de la matemática en general durante el siglo XVII.

“Squared angle was anything but right”

(“El ángulo recto era todo menos correcto”)

2.8 – Baruch Spinoza. El modo geométrico

En la Europa del siglo XVII era común emplear los *Elementos* como motor argumentativo e crítica y análisis de temas diversos, ya sean de lógica, medicina, jurisprudencia o teología; precisamente

por el modelo de certeza, claridad y transparencia que ofrecen los *Elementos*.

Uno de tantos que empleara este modo sistemático a la hora de exponer sus razonamientos fue Baruch Spinoza. Había estudiado a Descartes, publicando en 1663 unos apuntes de los *Principios de filosofía* de éste redactados al estilo de Euclides (empleando axiomas, definiciones y proposiciones). Este modo de razonar geométrico le hace sospechar del carácter heurístico que identifica en el empirismo, elaborando su propio pensamiento desde un punto de vista deductivista como el que ofrece el modo de razonar geométrico, donde se tendría que el conocimiento verdadero funciona como la deducción geométrica, en una sucesión lógica de consecuencias a partir de suposiciones previas. Su filosofía queda expuesta en diversos tratados:

- En 1665 desarrolla su *Tratado teológico-político* donde expone su idea de dios, si bien no lo realiza en este modo geométrico y no lo publica hasta 1670.
- En 1677 se publica tras su muerte su *Ética demostrada según el orden geométrico*, donde ahora sí hace uso de un estilo geométrico y austero, dando lugar a 207 proposiciones demostradas de modo deductivo. Influido por las obras de Descartes, Hobbes, Maimónides y Ben Gershon plantea en esta obra la búsqueda de respuesta a la pregunta de *qué existe*, para concluir que todo lo que existe es Dios, y cualquier otra cosa es deducible de ésta:
 - Dios equivaldría a la naturaleza.
 - No hay apego para con el ser humano, a diferencia del Dios abrahámico tradicional.
 - No existe nada sagrado en él, al ser un dios impersonal, lo que da muestra del desprecio que plantea Spinoza en relación al antropomorfismo.
 - Como consecuencia, desaparecen todo atisbo de azar y libre albedrío, pues si todo es consecuencia lógica de la naturaleza/Dios, no hay lugar para la voluntad ni la contingencia.

Esta equivalencia entre *Dios=Naturaleza=Realidad=Todo* nos ofrece una tautología de la que se extrae que si bien hay razones para todo, no hay causas para nada. Esta obra marca la senda del racionalismo, y se encuentra sometida a debate y discusión aún a día de hoy, siendo una publicación amada y odiada por igual.

2.9 – Anne Lister. La mejora del intelecto

En el siglo XVIII, el método geométrico que emplease Spinoza (entre otros) como nexo entre las ideas y la mente humana deja de estar en boga. Sin embargo, se consideraba la matemática, y en particular la geometría, como un estudio positivo para el desarrollo intelectual y de razonamiento de las personas.

En esta época los *Elementos* son todo un éxito comercial, y no cesan de producirse reediciones y nuevas traducciones, así como nuevas ediciones que incorporan demostraciones realizadas de manera algebraica, más presente en los estudios matemáticos de la época y que facilitan la comprensión respecto a las demostraciones geométricas.

Desde el punto de vista institucional, los *Elementos* forman parte de los planes de estudio tanto en escuelas como universidades, y es empleada para la formación autodidacta de muchos intelectuales.

Entre los estudiantes de Euclides de esta época se encuentra Anne Lister, quien dejara entre sus diarios numerosas referencias a Euclides y su obra, del que decía que

“(...) las razones para leer a Euclides van más allá de la mera mejora intelectual, dirigiéndose hacia la filosofía natural y su campo de acción e innovación mucho más mundano”

3 – El héroe

3.1 – Peteconsis. Impuestos y abusos

En el Egipto del siglo I antes de nuestra era, la técnica de la agrimensura para la ubicación, dimensionado y medición de superficies de los campos era una técnica de uso común, en particular para la resolución de disputas, así como para la tasación de impuestos. Esta técnica no es sino la herencia de prácticas similares empleadas 4000 años antes por los babilonios.

Cabe preguntarse si el contenido de los *Elementos* guarda algún tipo de relación con los problemas prácticos que tenían lugar en el Egipto que los vio nacer. El mero análisis etimológico de su campo de estudio (geometría = medición de la tierra) parece indicar que así es.

Esta no sería sino otro ejemplo más entre todos los acontecidos en la historia en los que se da una relación entre el carácter teórico y práctico de las matemáticas. Este carácter pragmático, junto a la rigurosidad que aporta ésta y so formalismo, convertirían a Euclides en una especie de héroe prometéico, que llevaría la luz de la deducción y la demostración rigurosas al mundo de las matemáticas prácticas, conectando así su estructura lógica con el mundo real.

3.2 – La división del monocordio

En la Alejandría del siglo III a.e.c nos encontramos con numerosas obras cuya autoría se vincula, quizá erróneamente, a Euclides. Entre ellas tenemos un tratado sobre óptica de 58 proposiciones que trata sobre la formación de imágenes en el ojo y cómo éstas dependen del tamaño, forma y posición relativa de los objetos. Este no sería sino otro ejemplo de cómo tratados de carácter geométrico encuentran aplicaciones prácticas. Otros serían los tratados de astronomía de Proclo, o los diversos tratados de música atribuidos a Euclides.

En uno de estos tratado de música se desarrolla una teoría musical más compleja, donde se estudian las vibraciones armónicas de cuerdas que se hallan en proporciones enteras entre sus longitudes (1:2, 2:3,...), y que hoy en día conocemos como los “trastes”.

Otro de los temas tratados es la división del monocordio, donde se trata de partir una cuerda musical dividiéndola de modo geométrico a fin de que genere una escala musical. Establece una argumentación sistemática sobre distintos valores probados, empleando para ello alguno de los resultados obtenidos en los *Elementos*, y relacionando su estudio con la matemática de números irracionales entre los que identifica los “números sordos”.

Si bien el texto no deja de ser un poco batiburrillo que discurre en un mundo idealizado, supuso ser influyente para los estudios posteriores de vibraciones y movimientos armónicos, y aunque el autor probablemente no fuese Euclides, no cabe duda de que es un texto de estilo euclidiano.

3.3 – Higinio. La agrimensura

En torno al año 100, Higinio es un topógrafo y registrador de la propiedad romano que hace uso de la **groma** entre sus labores agrimensoras para los repartos de tierras tras las conquistas romanas. En esta época de desarrollo tecnológico e ingenieril romano se generaron múltiples textos y compendios que tratan estos temas, aunque pocos quedan atribuidos a un autor en concreto. En torno al siglo IV, un editor desconocido compiló el *Corpus agrimensorum*, entre cuyos textos se encuentran algunos atribuidos a Higinio. En esta compilación se recogen:

- Textos sobre agrimensura y medición, así como de la inclusión de métodos iterativos de en-

sayo y error que, en conjunción con la mejora de la instrumentación posibilita los desarrollos en conocimientos de agrimensura.

- Discusiones sobre suministros de agua, disposición de campamentos militares, cartografía, trazado de itinerarios, listado de fincas, historia de varias colonias romanas, temas agrícolas, e incluso una profecía sobre una ninfa etrusca.
- Incluye definiciones geométricas que coinciden, en parte, con las de los *Elementos*.
 - Medición de áreas regulares (rectángulos, trapecios, triángulos, círculos) e irregulares
- Trucos para el uso de instrumentos de agrimensura, como por ejemplo para la medición de un río que no se puede vadear.

Existen diversos *Corpus agrimensorum*, pero éste es el más antiguo que se conserva (ca. 500), y se encuentra ricamente ilustrado. Fue largamente copiado en monasterios en los años sucesivos. Como suele ocurrir con las obras copiadas de manera reiterada, en particular cuando incluye un lenguaje y terminología más técnicos, suelen acarrear errores que suponen un desdibujamiento y pérdida de los conocimientos de agrimensura romana en tanto que nos adentramos en la Edad Media. Uno de estos monjes benedictinos confeccionó un *Arte de geometría y aritmética*, donde compiló partes de los *Elementos*, del *Corpus Agrimensorum* y de la propia obra de Boecio, y que fue empleado (entre otros) como texto de enseñanza de la geometría, pues las escuelas y monasterios medievales estaban incluyendo cada vez más la dedicación a esta disciplina, siendo sus textos principales aquellos asociados a Euclides (directa o indirectamente a través de Boecio), así como las técnicas y métodos descritos en los diferentes *Corpus Agrimensorum*, aunque su enseñanza no se enfocaba tanto a un uso práctico para con el campo, sino como una herramienta para el quehacer teológico a la *Platón*, mediante el que poder estudiar la naturaleza geoméricamente y así poder ampliar los horizontes de la meditación espiritual. El propio *Antiguo Testamento* habla de Dios como geómetra o agrimensor, donde la creación sería un acto geométrico. Un autor medieval anónimo recoge lo siguiente:

“La intención de Euclides es doble: se dirige al alumno y a la naturaleza de las cosas (..) porque es sabido que la ciencia de la naturaleza y la espléndida sabiduría de Timeo o Platón se demuestra geoméricamente.”

Todo esto da fuelle para considerar la agrimensura como una metáfora del cosmos ordenado, y la ciencia de la geometría como una imagen del acto de creación.

3.4 – Muhammad Abu al-Wafa'al-Buzjani. La división del cuadrado

Abu al-Wafa'al-Buzjani fue un matemático que vivió en la segunda mitad del siglo X en Bagdad, donde tenía un trato frecuente con los artesanos y los problemas de índole geométrico con los que estos se enfrentaban, como la división de cuadrados en 2, 3, 5,... partes iguales para la teselación decorativa que imprimían en los azulejos.

A pesar de encontrarse en la decadencia del imperio islámico, éste estaba viviendo un renacimiento particular durante el gobierno de la dinastía búyida, que emprendió grandes construcciones y proporcionaron un gran impulso a la literatura, la filosofía y las ciencias.

Bagdad se erigía como el lugar de encuentro de los intelectuales del mundo musulmán, como Ibn Sina (Avicena) o el propio Al-Buzjani. Entre las hazañas de este último que cabe resaltar se encuentran:

- La construcción de un nuevo observatorio en Bagdad, desde el que realizó numerosas observaciones astronómicas que serían de relevancia para la astronomía posterior.

- Analiza y comenta obras de Euclides y al-Khwarizmi, aunque se han perdido.
- Realiza grandes avances en la trigonometría, en la que introdujo la función tangente y mejoró métodos de cálculo de tablas trigonométricas
- Realiza revisión y correcciones sobre diversos tratados de agrimensura, en particular para el cálculo de áreas de cuadriláteros.
 - Uno de estos métodos consistía en la suma de los lados opuestos, multiplicando sendas sumas y dividiendo por 4, que si bien ofrece una aproximación bastante acertada en ocasiones adolece de graves errores

En general, el trabajo de al-Wafa supone una combinación de conocimientos técnicos con el saber clásico, lo que le lleva a compilar un texto con aquellos saberes que todo artesano debía conocer en relación a las construcciones geométricas, corrigiendo algunos errores que los textos de geometría venían arrastrando con los años, y ampliando contenidos ya presentes en la obra de Euclides, Arquímedes, Herón, Teodosio o Pappus.

Se sale además de la limitación impuesta al proceder con regla y compás, y pasa a usar este último en su variante “oxidada”, donde se mantiene su apertura fija para la traslación de longitudes, lo que le permite dar solución a multitud de problemas prácticos. Incluye problemas y desarrollos provenientes de la práctica (de la arquitectura, carpintería, artesanía) para su aplicación en el trazado de ángulos e inscripción de figuras geométricas.

Esto puede verse reflejado en la presencia que tiene la teselación de planos y esferas en el arte islámico, que se correspondería con las características de un cosmos armónico, unificado y relacional.

3.5 – Señora geometría. Las artes liberales

En este punto, el libro nos evoca la puerta meridional de la catedral de Chartres (Francia), construida en torno al 1150 y que sobrevivió al incendio de 1194 que obligó a reconstruir el edificio. En ella, formando parte de la decoración se encuentra una representación escultural de *La Geometría*, como una mujer calculando sobre una tablilla, a cuyos pies se encuentra otra figura que probablemente hiciese referencia a Euclides. Junto a ella se encuentran otras tantas representaciones de los saberes que conforman las artes liberales, lo que es de reseñar pues se trata de la primera vez que se usa la personificación de practicantes de conocimientos seculares para enmarcar una escena teológica. En ella aparecen las siguientes artes y personajes: Pitágoras para la música; Nicómaco, Gerberto o Boecio para la aritmética; Quintiliano o Cicerón para la retórica; Arquímedes o Euclides para la geometría; Sócrates o Platón, incluso Aristóteles para la filosofía (la lógica); Ptolomeo para la astronomía; y Quilón o Donato para la gramática.

En su libro *Heptateuchon*, Thierry de Chartres habla de las artes liberales en una época coincidente con el tallado de estas esculturas de la fachada de la catedral, lo que nos permite atender a la relevancia de éstas en aquella época. Sobre ellas hay que tener presente que eran el medio con el que prepararse para comprender las verdades morales y teológicas, y no era común su uso como elemento decorativo.

Lo que sí parece cierto es que la asociación de Euclides con el arte de la geometría es una imagen que pasa a formar parte del patrimonio común como un símbolo general de conocimiento y del modo de proceder matemático.

3.6 – Piero della Francesca. Cuestión de perspectiva

La obra pictórica *La flagelación de Cristo* pintada por Piero della Francesca entre 1450-1460 presenta unas cualidades geométricas que la vinculan directamente a Euclides. Distintas líneas de horizonte y puntos de fuga nos dan una ilusión de posicionamiento espacial, reflejo del interés por la perspectiva que se viene trabajando desde el Renacimiento, donde esta palabra deja de equipararse a óptica para considerarse como la esencia de la pintura ilusionista (Brunelleschi, León Battista Alberti), que se cuestionan la transición entre la geometría pura y su plasmación en la pintura de la experiencia real. La obra de della Francesca da cuenta de esta transición entre estilos, arrastrando una amplia discusión histórica acerca de la composición del cuadro.

Además de pintor, della Francesca escribió tratados de matemáticas:

- *Trattato d'Abaco*: manual de enseñanza de aritmética, álgebra y geometría, con gran cantidad de problemas prácticos, en especial geométricos. De gran interés los problemas propuestos para la geometría tridimensional.
- *De prospectiva pigendi* (1460): tratado de perspectiva y sus aspectos técnicos (puntos, líneas, superficies), escrito con un estilo didáctico y repleto de numerosos ejemplos. Esta obra se estructura en proposiciones, como en los *Elementos*, siendo algunas de las primeras tomadas directamente de la *Óptica*, de Euclides, considerando la visión como la proyección geométrica del objeto observada sobre la pantalla de percepción que es el ojo.
- *Libellus de quinque corporibus regularibus* (1480): trabajo sobre los cinco sólidos regulares en el que se analizan a fondo los libros XIII y XIV de los *Elementos*.

Della Francesca define la pintura como una rama de la geometría y la perspectiva como la ciencia de la medición. Su obra se encuentra a medio camino entre dos tradiciones, la de los artesanos y la de los académicos.

Sus obras no se publicaron durante su vida, aunque sí fueron conocidas y empleadas por autores posteriores, como el *Divina proportione* de Luca Pacioli, que incluye (sin acreditar) el *Libellus* de della Francesca. Esta obra de Pacioli estaba ilustrada por su amigo Leonardo da Vinci, lo que ayudaba a una mejor comprensión del texto, influyendo en el resurgimiento del estudio de los sólidos regulares de la mano de autores como Durero o Wenzel Jamnitzer, quien escribiera *Perspectiva corporum regularium*.

3.7 – Euclid Speidell. Enseñar y aprender

Euclid Speidell era el ejemplo medio de “practicante de matemáticas”, pues se desempeñaba en labores que daban un uso práctico a las matemáticas: desde clases particulares de aritmética a revisor fiscal, hacía de Euclides y sus *Elementos* un herramienta de gran utilidad (trazado de planos, calibración de horóscopos, agrimensura, fabricación de instrumentos, docencia, contabilidad y fiscalidad, perspectiva, astronomía, hidráulica, arquitectura,...).

Las matemáticas que practicaba Speidell eran un modo de dotar de orden a un mundo caótico, lo cual plasmó en la extensión del manual de enseñanza de su padre (John Speidell) *An arithmetical extraction*, que permitió una popularización de la obra de Euclides más allá del ámbito de los eruditos.

3.8 – Isaac Newton. Principios matemáticos

La copia de los *Elementos* que Newton poseía (edición impresa en Cambridge en 1655) se encontraba ampliamente anotada a los márgenes tras el estudio profundo que el británico hiciera de Euclides. Si bien es cierto que en primera instancia sólo se aproximó a ella de modo superficial, y tras haber estudiado a Descartes, retomó el estudio de la geometría ahora sobre una edición de Isaac Barrow que prácticamente reescribió con sus anotaciones y reformulaciones algebraicas.

Newton toma y traduce las proposiciones de Barrow a lenguaje algebraico, empleando números y variables simbólicas (x e y). se centra en los cuatro libros de geometría y proporciones.

Este estudio sería la simiente con la que a mediados de 1660 se adentraría en el análisis matemático, lo que desembocaría en la publicación en 1687 de sus *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, el cual escribe con estilo y apariencia euclidianas, mediante una sucesión de teoremas y demostraciones, en el que hace uso de la geometría para tratar de comprender la realidad. Así, con la geometría y el álgebra se obtienen herramientas para leer el libro de la naturaleza característicos de la filosofía natural newtoniana.

Newton sería la evolución del “practicante de matemáticas” (como lo fuera Speidell), pero llevado al extremo. En sus estudios realiza un avance significativo al adentrar el estudio matemático en el mundo infinitesimal, pudiendo afirmarse que

“la matemática de Newton proviene de la de Euclides, pero es una matemática que Euclides no hubiera reconocido”

4 – La sombra y la máscara

4.1 – Mary Fairfax. Euclides y la camisa de fuerza

En 1795, en Burntisland (Escocia), nos encontramos con Mary Fairfax: mujer autodidacta cuyo desempeño intelectual no es bien visto por su propia familia, que la creía enloquecer.

Se debe esto a la visión neoplatónica de Thomas Taylor en relación de las bondades de la geometría para ordenar la mente y entrar en contacto con lo divino y lo eterno. Taylor publicó la traducción de los comentarios de Proclo de los *Elementos*.

Mary estudia en efecto la obra de Euclides, además de leer a poetas románticos (Blake, Shelley, Wordsworth). Como el resto de estudiantes de su época encuentra tedioso, aburrido e inútil el desempeño y esfuerzo que requieren los *Elementos*, donde el asno no era quien no pasaba del “*pons asinorum*”, sino quien lo cruzaba, signo manifiesto de locura.

A partir de 1800 se había extendido la idea de que mucha matemática podía volver loco al estudiante, y que se hacía necesario un estudio en dosis adecuada, siguiendo el equilibrio aristotélico. Se pensaba que volvía a uno antisocial y aislado de los sentimientos humanos, que no eran susceptibles de demostración ni deducción, facilitando por tanto el desequilibrio de la mente. En estos términos, William Paley dijo que

“El sistema de Cambridge quiebra a dos o tres cada año, donde algunos se vuelven locos y otros quedan tan debilitados en cuerpo y alma que son incapaces de hacer nada más el resto de sus vidas”

Se cuenta incluso con documentación de casos de crisis atribuidos al estudio de las matemáticas, como el de Francis Galton en 1840, o el de James Maurice Wilson de 1859.

Parece normal entonces la consternación de los padres de Mary Fairfax ante el interés de su hija por las matemáticas. Trataron de inculcarle los valores de la Biblia, pero Mary era curiosa y se adentró de modo autodidacta en la historia natural de la ciencia, la astronomía (de la mano del maestro del pueblo), del latín (que le enseña un tío suyo), de la costura, la danza, la aritmética o el piano. Debido a esta inquietud intelectual acaba topándose con el álgebra y con Euclides, que en aquellos tiempos eran el material recomendado para el estudio de la perspectiva, la astronomía y las ciencias mecánicas. Gracias al tutor de su hermano consigue una copia de los *Elementos* y la *Introducción al álgebra* de 1782 de John Bonnycastle.

En 1804 se casa con su primo y marcha a Londres donde trata de seguir sus estudios sin el apoyo de su marido, que murió 3 años después. Queda entonces liberada, pudiendo hacer grandes progresos, tanto en conocimientos como en contactos científicos y matemáticos. Vuelve a casarse, con William Somerville, quien si le mostrará apoyo y soporte.

En los siguientes 50 años produjo publicaciones científicas y obras de divulgación de astronomía, física, meteorología y geografía; que fueron ampliamente traducidas e incluidas como material de estudio en diferentes universidades.

Muere en 1892, ante lo que el *Morning Post* publicó:

“Por muchas dificultades que podamos tener este siglo para escoger un rey de la ciencia, no tendremos ninguna duda para saber quién es la reina de la ciencia”

4.2 – François Peyrard. El manuscrito 190

Peyrard es un erudito con especial interés en geometría y matemáticas, que publica obras de filosofía e historia, y que fue cofundador de las *Grands Écoles* parisinas. Acometió la traducción de los *Elementos* al francés, a la par que realiza una crítica de las versiones previas existentes.

En 1808, mientras revisa unos manuscritos antiguos de los *Elementos* que parecen una versión "diferente", comienza a sospechar de la versión de Oxford que usa como base de su traducción, pues difería enormemente con el contenido de estos manuscritos. Comparó los contenidos con 23 manuscritos "prestados" (obtenidos tras las incursiones napoleónicas) de bibliotecas italianas. Se encontró con que el manuscrito 190 de la Biblioteca Vaticana, que dataría del siglo IX (en torno a los años 830-850), y que incluía los libros I-XIII además de los *Datos* y los libros XIV y XV, ofrecía diferencias sustanciales en cuanto a contenido en relación al resto de manuscritos, lo que le lleva a considerar que se encontraba ante una versión del "texto puro" de Euclides. Como consecuencia pasó a tomarlo como texto preferente para su traducción.

En 1809 presenta el manuscrito 190 y su versión de los *Elementos* al comité formado por Delambre, Lagrange y Legendre, que le animan a completar su trabajo que terminaría por ver la luz en tres volúmenes editados en 1814, 1816 y 1818, aunando en total más de 1600 páginas que incluyen las versiones en griego y latín a dos columnas, con la traducción al francés a pie de página, incluyendo referencias a las distintas fuentes (ediciones previas y manuscritos consultados), así como explicaciones a las erratas que corrige.

Su trabajo pone de manifiesto el carácter dinámico y sometido a alteraciones de los *Elementos*, en especial con las diferentes versiones desde la de Teón. Han pasado 2200 años desde el texto original, que ha quedado envuelto en dudas con cada versión que difiere de la primigenia, y donde la ajetreada vida de los palimpsestos, copias a medias (o directamente mal hechas), traducciones de mayor o menor fidelidad, así como el sin fin de añadiduras en función de los intereses de la edición, han dado lugar a numerosas variaciones y errores que se tornan difíciles, sino imposibles, de rastrear.

4.3 – Nikolái Ivánovich Lobachevski. Paralelas

Tras más de 2000 años en que los *Elementos* han disfrutado de una incontestabilidad fuera de toda duda (aunque siempre hubo cierto recelo en algunos aspectos), ¿que pasaría si se demuestra que alguno de sus postulados no es tan firme como se da por sentado? En la Rusia del Zar Nicolás (en torno a 1826), Lobachevski se adentra en analizar el postulado de las paralelas, que ya traía debate a sus espaldas aunque no hubiera conseguido fructificar hasta entonces.

Según él, el postulado de las paralelas contenía una "laguna crucial", siendo incompleta e imperfecta. A fin de poder dilucidar el problema de la aceptación sin más del postulado (recordemos: "*por un punto dado exterior a una recta sólo se puede trazar una línea paralela a ésta*"), trata de construir una nueva geometría que pueda prescindir del mismo. Redefine el concepto de paralela, de modo que para un punto y línea dados, todas las líneas que pasan por dicho punto son tales que, o bien cortan a la línea dada o no lo hacen, de modo que las paralelas vendrían a ser las líneas en la frontera de tales clases.

Teniendo esto en consideración, los primeras 28 proposiciones se mantenían invariables, ya que eran independientes de dicho postulado; pero a partir de aquí comienza a obtener resultados extraños, como que la suma de todos los ángulos pertenecientes a un triángulo no necesariamente hayan de sumar 180° .

Para tratar con esto, emplea métodos trigonométricos sobre triángulos que no pertenecen al plano,

sino que se encuentran sobre superficies esféricas (trigonometría esférica), permitiendo así obtener una nueva posibilidad de consideración del espacio. Anunció sus descubrimientos en una conferencia en 1826, aunque no gozó de una gran recepción. Sin embargo, a partir de los estudios de Riemann en la década de 1860, y el uso que de esta geometría hiciera Einstein para dar cuenta de su teoría general de la relatividad, posibilitó el que se hiciera justicia para con el descubrimiento de Lobachevski.

Tras Einstein, la geometría de Euclides queda relegada a un modo de entender la descripción real del espacio que no es el único, pues éste queda mucho mejor conceptualizado al hacer uso de la geometría no-euclídea desarrollada por Lobachevski.

4.4 – Maggie y Tom. La tortura de la mente

Tom y Maggie Tulliver son hermanos de grandes aptitudes matemáticas. Hijos de un molinero, éste pone a su hijo como pupilo de un graduado en Oxford que se rige por unos modelos clásicos de enseñanza que no terminan de encajar con la mentalidad de Tom, más intuitiva que deductiva, lo que le lleva a pedir “no más Euclides”, pues el tutor le hacía memorizar los postulados de los *Elementos*. Tenemos aquí un ejemplo de modelo educativo fallido del siglo XIX, al desvincularse de la humanidad, capacidades y necesidades del estudiante. Por su parte, Maggie fue ninguneada por Sterling (el tutor), que creía a las chicas incapaces de profundizar en nada.

El padre se arruina, lo que lleva a Tom a dejar sus estudios. Maggie toma los libros de texto de su hermano y comienza a estudiarlos, en parte como desprecio hacia la discriminación recibida, amén de la curiosidad e intereses personales.

El modelo seguido por el tutor, clásico y memorístico, estaba muy alejado de la realidad práctica que sí era considerada en otros lugares como Francia o Alemania, que no bebían las aguas por el estudio de Euclides como piedra angular, donde además disponían de mejores manuales de geometría. Sin embargo, el estilo de escritura y pedagógico de Euclides había calado hondo en el resto de disciplinas británicas.

En realidad, tanto el tutor de Oxford, Tom y Maggie, son personajes de *El molino del Floss*, de Mary Ann Evans (que publicaba con el pseudónimo masculino de George Elliot) quien era considerada la mejor novelista británica de su época, y que daba cuenta en sus obras de su interés por las matemáticas. En esta obra, Mary Ann Evans refleja su propia experiencia con el modelo educativo británico y las pocas opciones que ofrecía al sexo femenino, con salvedades como el *Ladies' Queen College* de Londres en el que ella cursó sus estudios. En este centro, el profesor Francis Norman enseñaba la geometría actualizada, más atractiva y mejor fundamentada para el aprendizaje que el arcaico modelo centrado en la geometría griega.

En *El molino del Floss* se analiza cómo puede llegar a fallar el sistema educativo, tanto para los discípulos en sí como para las personas en tanto que a sus intereses, aptitudes o sexo se refiere. Muestra claramente también los problemas de ceñirse a currículo académico arcaico y oxidado.

En el último libro de Elliot (Evans), *Daniel Deronda*, recoge una reflexión a tales efectos:

“Los hombres pueden soñar con demostraciones y extraer un mundo ilusorio en forma de axiomas, definiciones y proposiciones, con una omisión de los hechos final firmada Q.E.D., sin embargo, ninguna fórmula del pensamiento salvará a los mortales de los errores de nuestra apreciación imperfecta de los temas sobre los que hay que reflexionar.”

4.5 – Simson en urdú. El imperio euclidiano

En 1884 se publica un compendio de los *Elementos* de 275 proposiciones y escrito en urdú (el idioma que se hablaba en Pakistán en India).

Mientras tanto, en Gran Bretaña, cuando se habla de Euclides se hacía referencia a la edición en inglés de 1756 de Robert Simson (edición de carácter docente y enfocada a la pedagogía de la geometría). Esta versión sólo incluía 8 de los 13 libros (los seis primeros, el once y el doce: referentes a la geometría en dos y tres dimensiones y el estudio de proporciones), y sin embargo fue la versión predominante y que sirvió de base a versiones posteriores (como la de John Playfair de 1795 y la de Isaac Todhunter de 1862) que se basaban directamente en la de Simson.

Consecuencia de la ocupación británica de la India tiene lugar una mezcolanza de tradiciones científicas. Si bien los conocimientos indios, de todo menos pobres, fueron tratados con condescendencia por parte de los británicos, pues no los consideraban basados en el razonamiento deductivo de Euclides, negando la validez de tales conocimientos matemáticos o astronómicos. Es más, consideran que su misión como buenos colonizadores es la de instruir a estos pobres indios a fin de sacarles de su ignorancia. Esto da lugar a la traducción de diversos textos (entre ellos la versión de Simson de los *Elementos*) a las diferentes lenguas de la zonas colonizadas.

De esta manera, Euclides pasa a incorporarse al currículo educativo de estas zonas igual que pasara en Gran Bretaña.

El resto de las no pocas invasiones británicas pasó a suceder de manera análoga, institucionalizando el texto de Euclides allá donde toman por propia la tierra conquistada. Se podría decir que tuvo lugar una globalización de Euclides, de la que sin embargo han sobrevivido pocas copias de estas traducciones.

4.6 – Sus rivales modernos

A finales del siglo XIX no son pocos quienes dudan de la adecuación de los *Elementos* como texto base, al que además acusan de abuso de autoridad amparados en un Euclides cuya obra original está más que desvirtuada a lo largo de las diferentes versiones y ediciones.

Desde el punto de vista británico, además, se tenía una gran desconexión entre su matemática y la que se venía ejerciendo en el resto de Europa, lo que además requería una reforma profunda en la docencia y programas de investigación en matemáticas.

Por ejemplo, James Joseph Sylvester se autodenominaba un “odiador de la geometría” (en tanto que odiador de Euclides). Aparecen, a su vez, numerosos grupos de presión que exigen una reforma anti-Euclides.

Aún así, todavía contaba con defensores de la talla de Augustus de Morgan, Arthur Cayley o Lewis Carroll, quien escribiera *Euclides y sus rivales modernos* (1879), donde presenta un diálogo entre Minos (un tutor de Oxford) con el fantasma de Euclides.

Lo que se encuentra en cuestión es la propia verdad el sistema más allá de su utilidad. En palabras de William Kingdon Clifford:

“El geómetra de hoy no sabe nada sobre la naturaleza del espacio a una distancia infinita. No sabe nada sobre las propiedades de este espacio presente en una eternidad pasada o futura.”

Con el cambio de siglo se intentan fundamentar las matemáticas desde la lógica, labor que se extendió también hacia los *Elementos*, con resultado deficiente. Esto termina por confirmar las muchas lagunas que habían ido identificándose en la obra a través de los años por los diferentes estu-

diosos del texto. Bertrand Russell escribió:

“Sus definiciones no siempre definen, sus axiomas no siempre son indemostrables, sus demostraciones exigen muchos axiomas de los que no se es consciente”

Que Ian Mueller remataría con contundentes afirmaciones tales como:

“Es difícil ver que aquí haya demostración alguna (..) innecesariamente complejo (..) claramente insuficiente”

En 1901 el reformador educativo John Perry propone un enfoque práctico (aprender haciendo) en lugar de tanto razonamiento abstracto, dando lugar a que en 1904 Euclides deje de ser obligatorio en Cambridge, reflejo de lo que iría ocurriendo poco a poco en el resto del país. Euclides perdía así su hegemonía.

4.7 – Thomas Little Heath. Con verdadero amor

Tras el descalabro en su hegemonía, un improbable héroe surge en socorro de la causa de Euclides. Thomas Little Heath, de origen humilde, se gradúa en la universidad y entra a trabajar en el ministerio de hacienda, donde alcanza la jefatura del mismo. Vivió una época de caos en el ministerio debido a los enormes gastos derivados de la Primera Guerra Mundial, en los que estuvo a cargo de administrar y controlar los gastos, que llevó a cabo de manera metódica e inflexible.

Entre sus hobbies estaba la matemática griega antigua. Entre 1885 y 1940 publicó unas 500 páginas con versiones en inglés de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Euclides; una historia de la matemática griega en dos volúmenes y un libro sobre la matemática de Aristóteles.

Publica su propia versión de los *Elementos* (1908) tomando como base la de Heiberg, pues era partidario de la pulcritud y lo genuino de la versión dada por el *manuscrito 190*. En su versión busca presentar un Euclides que sea coherente, accesible y, en lo posible, sencillo. Para ello enriquece su versión con anotaciones, tanto históricas como aclaratorias del contenido para facilitar la tarea al lector. Su versión no ha dejado de ser reeditada y empleada como base para nuevas ediciones desde su publicación hasta el día de hoy.

Era partidario de la trasladabilidad de la matemática griega al álgebra moderna, y pretendía combatir el abandono reciente a Euclides dentro del sistema educativo británico, defendiendo la robustez de los *Elementos* frente a la “nueva geometría” y los manuales alternativos que se consideraban mejores que la obra de Euclides, posiblemente movido por su gran amor y pasión por la matemática griega antigua.

4.8 – Max Ernst. La máscara de Euclides

Uno de los cuadros del artista alemán Max Ernst lleva por título *Euclides*¹ (1945), cuadro que se resiste a una interpretación sencilla, como podría equipararse a la interpretación de la obra del griego. La disposición del mismo parece darnos a ver una figura humana, una figura que no está ahí, y donde una pirámide invertida en lo que vendría a ser el rostro hace las veces de máscara ocultando el rostro del supuesto Euclides que queremos ver retratado en él. Sin embargo, una máscara no garantiza que haya un rostro tras ella, ocultándonos a su portador del mismo modo que Euclides y su obra se ocultan y mutan a través de la historia, en un relato que en ocasiones parece imposible de acometer.

1 <https://www.menil.org/collection/objects/1789-euclid>

4.9 – Diseños euclidianos

El gran viaje de Euclides y su obra, transformados a través de los años, con sus altos y bajos en lo que a su relevancia se refiere, no pasa desapercibido para los artistas. Muestra de ello son las numerosas referencias que a él se hacen en la producción artística reciente. Por ejemplo:

- La obra *Euclides* de Max Ernst vista en el punto anterior.
- El ilustrador Crockett Johnson tiene toda una colección de pinturas matemáticas² entre las que caben destacar:
 - *Demostración del teorema de Pitágoras* (1965)
 - Un total de 25 pinturas basadas en *The world of Mathematics*, conjunto de ensayos matemáticos escrito en 1956 por James R. Newman
 - Exposición llevada a cabo en 1967 en Nueva York con el nombre *Abstracciones de abstracciones*.

Su arte le lleva a obtener nuevas aproximaciones geométricas para el valor de π , así como un nuevo modo de construir un heptágono regular, que se publica en la *Mathematical Gazette*.

- La edición de los *Elementos* de Oliver Byrne, profesor irlandés de matemáticas que proyectaba una reforma en la docencia de las matemáticas en la que la geometría se enseñara mediante diagramas en color. Publica su edición en colores de los seis primeros libros en 1847 llamada *The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. Si bien su edición no tuvo mucho éxito (además de su coste), lo cual le llevó a la bancarrota, desde el punto de vista estético recibió una valoración muy positiva. Además, en tiempo reciente, Nicholas Rougeaux la publica libre de derechos en una versión interactiva disponible online, donde se extiende el proyecto inicial de Byrne (6 libros) para acometer la totalidad de volúmenes de los *Elementos*.
- En el mundo de la moda también se ve reflejado, en particular en la colección *Zodiac* de 1938/39 de Elsa Schiaparelli, que se considera que está inspirada en los *Elementos*.
- También en el sector modista tenemos a Madeleine Vionnet, a la que se calificó como la “Euclides de la moda” por lo geométrico en las formas de sus diseños.
- La artista de Oriente Medio, Monir Shahroudy Farmanfarmaian, realiza mosaicos con espejos de carácter geométrico, empleando técnicas artesanales que se remontan a la Edad Media, y que nos recuerda a la relación que mantenía al-Buzjani para con los artesanos.

4.10 – Lambda. Espacio curvo y energía oscura

Euclides es todo un icono cultural en el siglo XX, y su geometría, si bien no hegemónica, no había desaparecido de los libros de texto. Es más, las olimpiadas matemáticas que tienen lugar cada año incluyen, desde 1959, al menos un problema de geometría euclídea en su prueba final.

Su nombre no ha quedado tampoco relegado al olvido, y no es extraño verlo denominar calles, plazas, animales... o el telescopio espacial “Euclid”, que fue definitivamente lanzado el 1 de julio de 2023 por la ESA con la finalidad de explorar el espacio lejano y así poder estudiar mejor las propiedades de la energía oscura y su ritmo de expansión.

2 <https://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/mathematical-paintings-of-crockett-johnson>

Los resultados que se obtendŕan se consideran relevantes para entender mejor el corrimiento al rojo que nos permita estudiar el ritmo de expansi3n del universo, que parece darse a ritmos ḿs acelerados a d́a de hoy que lo que se estimo lo haća en el pasado.

Las iḿgenes de alta resoluci3n que recoge la sonda “Euclid” permiten determinar c3mo se distorsionan las iḿgenes de 1000 millones de galaxias a causa de la masa de objetos cercanos, pudiendo aś elaborar un mejor mapa de la distribuci3n de masas del universos, pudiendo calcular mejores valores para el estudio de la expansi3n c3smica. Quiźa aś podamos conocer un poco mejor la enerǵa oscura de este universo en expansi3n, aś como su geometŕa a grandes escalas, sea esta euclidiana o no.

Cronología de los Elementos de Euclides	
AÑO	QUÉ
ca. 325 a.e.c.	Nacimiento de Euclides
ca. 300 a.e.c.	Euclides compila su obra <i>Elementos</i> donde recoge compendios previos de geometría griega (Eudoxo y Teeteto entre otros) a los que añade demostraciones adicionales y nuevas proposiciones de autoría propia
ca. 265 a.e.c.	Muerte de Euclides
ca. 250 a.e.c.	Registros sobre cerámica (óstracos) del contenido de los <i>Elementos</i> , durante el reinado de Ptolomeo III. Serán descubiertos en 1906-07 por Otto Rubensohn
siglo III a.e.c.	Numerosos tratados de base geométrica son atribuidos a Euclides, como las 58 proposiciones de óptica que tratan geoméricamente el proceso de visión, o tratados de música que analizan las vibraciones armónicas, como el tratado sobre la división del monocordio.
ca. 150 a.e.c.	Hipsicles recoge los nuevos contenidos geométricos elaborados a partir de Euclides, en particular los de Apolonio y los compila en un tomo que una mano anónima incluiría como el libro XIV de los <i>Elementos</i> .
siglo I a.e.c.	La agrimensura empleada en Egipto para medir tierras (tasación impositiva) es un ejemplo práctico de cómo la matemática puede tener valor en el “mundo real”. Esto da pie a considerar a Euclides (y su obra) como “héroe prometéico” que trae la luz de la deducción y demostración rigurosas para ser empleadas de modo pragmático
siglo I	Higino, agrimensor romano, es un ejemplo de aquellos expertos en hacer uso de la geometría para la medición de tierras e ingeniería romanas, de vital importancia en su proceso expansionista. Fruto de estos conocimientos se compilan diversos <i>Corpus agrimensorum</i> , que serían largamente copiados a través de los años, suponiendo una piedra de toque para la incursión de la geometría en la Edad Media.
100	Nicómaco de Gerasa escribe <i>Arithmetike eisagoge</i> (Introducción a la aritmética), primer texto sobre teoría de números desde que Euclides trabajase lo propio en los libros VII, VIII y IX de los <i>Elementos</i>
370	Teón de Alejandría refunde su propia versión de los <i>Elementos</i> , de un carácter más sencillo y accesible y sobre la que añade anotaciones explicativas. Es la principal versión completa de que se dispone hasta que en 1808 François Peyrard descubre manuscritos más antiguos sobre los que compila una versión de los <i>Elementos</i> más fiel a la original de Euclides.
siglo IV en adelante	Se exageran ciertas posturas en relación a la importancia de la geometría en Platón con, quizá, una supuesta intención de vincular a Euclides hacia una filosofía idealista de corte platónico. Se arrastra y consolida una falsa leyenda acerca de cómo “Euclides” se colaba en Atenas para aprender junto a Platón de Sócrates

	(en realidad era Euclides de Megara), o de cómo el ateniense tenía tal filia por la geometría que la convertiría en condición indispensable para ser admitido en su Academia.
ca. 450	Proclo ensalza la geometría de Platón y su interpretación neoplatónica dentro del corpus teórico de los <i>Elementos</i> de Euclides, que comenta y estudia más allá del alcance geométrico de sus proposiciones para extraer de ellos un modo de razonar y desarrollar la capacidad intelectual de la persona, enfatizando la metafísica del neoplatonismo de Proclo más allá de las intenciones originales de los <i>Elementos</i> .
500	Boecio elabora <i>De institutione arithmetica</i> , una expansión de la obra de Nicómaco de Gerasa que extiende con numerosos ejemplos y que ayuda a afianzar el estudio de la teoría de números en la Edad Media
819	Al-Hayyay realiza la primera traducción de los <i>Elementos</i> al árabe, en una Bagdad multicultural que se enriquecería de múltiples traducciones de textos griegos y que ampliaría, en consecuencia, la riqueza gramatical de su idioma para dar cuenta de los nuevos conceptos matemáticos que incluiría a su saber.
888	En una época donde las sucesivas copias y reescrituras de los <i>Elementos</i> ha dejado un panorama plagado de errores e imprecisiones, Aretas de Patras encarga al escriba bizantino Esteban una versión de los <i>Elementos</i> de mejor calidad, donde éste añade a la versión de Teón en la que se basa comentarios a partir de escritos de geómetras posteriores a Euclides. Una copia de esta versión hallada en 1748 por Jacques Philippe d'Orville sería la versión completa más antigua de una edición de los <i>Elementos</i>
segunda mitad del siglo X	al-Wafa al-Buzjani lleva a cabo su labor intelectual en la que trabaja la astronomía, la geometría, la trigonometría (introduce la función tangente y elaboro métodos de cálculo de tablas trigonométricas), la aritmética y el álgebra. Es muy importante la relación de su labor teórica con la realidad práctica de su época, donde sus trabajos en geometría se ven reflejados en la teselación característica del arte islámico, que vería así influenciado por el germen geométrico de Euclides.
antes del 1000	Hroswitha, novicia del convento de Gandersheim, elabora una notable obra literaria que está plagada de conocimiento filosófico e intelectual más allá del esperado en el ámbito de la religiosidad (por ejemplo, la obra <i>Sapientia</i> , en el que la Sabiduría y el emperador Adriano entabla un diálogo sobre la teoría de números. Su obra es redescubierta a partir del 1500, siendo estudiada y valorada de modo considerable a partir de entonces hasta nuestros días
ca. 1130	Adelardo de Bath elabora la primera traducción al latín de los <i>Elementos</i> , probablemente a partir de una versión árabe (quizá la de al-Hayyay) para la que necesitaría ayuda tanto con el árabe como con la nueva terminología científica acuñada por éstos durante sus traducciones desde el griego
siglo XII	Roberto de Chester elabora otra traducción al latín que en cierto modo eclipsa la realizada por Adelardo de Bath
1150	Las artes liberales forman parte del elemento decorativo de la puerta meridional

	de la catedral de Chartres, acompañando a cada una de ellas con una personificación de alguien representativo para ellas: Pitágoras para la música; Nicómaco, Gerberto o Boecio para la aritmética; Quintiliano o Cicerón para la retórica; Arquímedes o Euclides para la geometría; Sócrates o Platón, incluso Aristóteles para la filosofía (la lógica); Ptolomeo para la astronomía; y Quilón o Donato para la gramática
1250	Campano de Novara realiza una versión en latín de los <i>Elementos</i> de mejor calidad que las existentes previamente, a la que dota nuevas versiones en algunas de las demostraciones que se incluyen en el texto
ca. 1330	La obra intelectual de Levi ben Gershon es desarrollada. Es quizá el intelectual hebreo más destacado de su tiempo, resultado de la tradición racionalista obtenida tras el estudio de textos árabes y la interpretación que éstos hicieron de Aristóteles, del que estudia su física y su lógica. Aclamado astrónomo, quizá el mejor de su era, fue el inventor de la ballestilla (instrumento de orientación basado en la altura del Sol y otros cuerpos celestes). Elabora sus propios tratados de aritmética, y comenta, analiza y critica los <i>Elementos</i> de Euclides. Elabora su propio tratado de geometría del que sólo se conserva un manuscrito de 24 proposiciones.
1482	Erhard Ratdolt realiza la primera versión impresa de los <i>Elementos</i> (en latín). Algunos de los problemas a los que hubo de enfrentarse en el proceso supusieron avances y mejoras en las técnicas y procesos de impresión (necesidad de numerosos tipos para una misma letra, técnicas para la inclusión de imágenes y diagramas, normativa para la impresión de textos científicos y matemáticos)
1533	Simon Grynäus imprime la primera versión de los <i>Elementos</i> en griego antiguo
1543	Niccoló Tartaglia realiza la primera versión impresa de los <i>Elementos</i> en lengua vernácula (en italiano)
1545	Pierre de la Ramée, fruto de su crítica a los contenidos y desarrollos del texto de Euclides (así como de la errónea atribución al griego de las muchas demostraciones incluidas en las ediciones previas) realiza una edición reducida y de claro carácter práctico (<i>manual para el geómetra autodidacta</i>) de tan sólo 45 páginas.
1570	Henry Billingsley realiza la primera traducción al inglés en una edición ricamente comentada y llena de análisis que alcanza las 1000 páginas
1574	Christopher Clavius elabora una edición de los <i>Elementos</i> que, buscando refinar la calidad de sus contenidos en un marco deductivista, trata de sintetizar lo mejor de las ediciones anteriores, añadiendo gran cantidad de postulados, axiomas y demostraciones adicionales. La gran influencia que tuvo su versión de los <i>Elementos</i> la hacen ser considerada la más importantes del texto de Euclides.
1599	A partir de esta fecha el plan de estudios jesuita reconoce la importancia de la obra de Euclides (en la edición de Clavius) y la incluye, junto a contenidos adicionales de aritmética, astronomía, trigonometría y teoría musical dentro de su currículo, del que aprenderían alumnos como Descartes, Laplace, Diderot o Voltaire.

siglo XVI	Se “estandariza” el uso de los <i>Elementos</i> como material de estudio en cursos superiores, que principalmente emplean los libros I-VI, XI y XII (es decir, geometría plana, teoría de proporciones y geometría espacial), lo que da lugar a numerosas ediciones orientadas al estudio y de las que se conservan copias repletas de anotaciones por parte de aquellos que las trabajaron (como por ejemplo, la copia de 1543 posesión de Marget Seymer)
ca. 1460	Piero della Francesca y su obra <i>La flagelación de Cristo</i> son muestra de la transición pictórica hacia la perspectiva que se viene dando desde el Renacimiento. Escribió además varios tratados matemáticos: <i>Trattato d’Abaco</i> , <i>De prospectiva pigendi</i> (1460) y <i>Libellus de quinque corporibus regularibus</i> (1480), este último “fusilado” por Luca Pacioli en su, que influiría en el estudio posterior sobre la perspectiva geométrica por autores como Durero o Wenzel Jamnitzer, quien escribiera <i>Perspectiva corporum regularium</i> .
1607	Ve la luz la primera edición de los <i>Elementos</i> en chino, de la mano de Matteo Ricci (Li Na To), jesuita de misión en China, y Xu Guangqi, un joven funcionario con múltiples intereses y que terminaría por traducir al chino varias de las obras que los jesuitas trajeran consigo en su misión, ayudando a la expansión del saber occidental en el país chino.
siglo XVII	Dada la ingente cantidad de ediciones de los <i>Elementos</i> existentes, hay quienes coleccionan y atesoran diferentes versiones, como Robert Hooke, quien tuviera 31
1621	Fruto de su rechazo hacia la deriva que venía tomando el sinsentido de las ediciones realizadas sobre los <i>Elementos</i> , Henry Savile elabora un curso en Oxford (1620) de carácter introductorio al texto original de Euclides tratando de ceñirse lo más posible al alcance y contenidos iniciales. Estas lecciones quedan recogidas en una edición impresa en 1621 denominado <i>Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis</i> (<i>Trece lecciones introductorias para comenzar con los Elementos de Euclides</i>).
siglo XVII	Edward Bernard, siguiendo la estela reformista y ortodoxa en cuanto al acercamiento a la obra de Euclides, trata de elaborar la “edición definitiva” mediante una compilación que aglutinase todos los comentarios y análisis para las distintas proposiciones aparecidas en las diferentes versiones aparecidas hasta entonces de los <i>Elementos</i> . Esta empresa titánica nunca llegó a concluir.
1635	Se estrena la obra teatral <i>Blame not our author</i> , donde las formas geométricas (Cuadro, Rectángulo, Línea y Círculo) son protagonistas en la lucha de Cuadro por redondearse (asemejando el problema clásico de cuadrar el círculo), donde se revelan contra la tiranía impuesta por la regla y el compás.
1655-1660	Isaac Barrow publica su edición de los <i>Elementos</i> primero en latín (1655) y después en inglés (1660). Además publica una edición de los <i>Datos</i> en 1657. Sus ediciones de los <i>Elementos</i> son las que estudiaría Isaac Newton.
1660	Newton profundiza sus conocimientos en geometría mediante la edición de Barrow, reescribiendo su copia de los <i>Elementos</i> mediante un lenguaje algebraico si-

	<p>mlar al que empleamos hoy en día</p>
1663	<p>Spinoza publica unos apuntes de los <i>Principios de filosofía</i> de Descartes redactados al estilo de Euclides (empleando axiomas, definiciones y proposiciones)</p>
1677	<p>Tras la muerte de Spinoza, se publica su <i>Ética demostrada según el orden geométrico</i>, donde ahora sí hace uso de un estilo geométrico y austero que da respuesta a la pregunta de <i>qué existe</i>, razonando deductivamente a través de 207 proposiciones que todo lo que existe es Dios, y que equivale a la naturaleza y realidad en que vivimos. De un modo similar al Uno platónico, todo lo que existe se deduciría de Dios, un Dios que se desentiende de lo humano, que carece de todo atisbo sagrado y que nos deja una realidad sin azar ni libre albedrío, en una suerte de tautología en la que no hay causas para nada.</p>
1687	<p>Newton publica los <i>Philosophiæ naturalis principia mathematica</i>, que escrito en estilo euclidiano evoluciona la obra de Euclides hacia una nueva matemática que, junto a la notación algebraica, nos dota de herramientas para tratar de comprender la realidad.</p>
1703	<p>David Gregory, inspirado también por los ideales de Savile, da continuidad a la labor de Bernard elaborando una versión más terrenal que la iniciada por su antecesor, a quien reconoce el esfuerzo realizado, aunque no sea muy explícito a la hora de atribuirle correctamente el contenido que tomara del proyecto de Bernard y que publicaría en 1703 con el título de <i>Euclides quae supersunt omnia</i></p>
1650-1700	<p>Las matemáticas se popularizan (fuera de entornos eruditos) gracias a la labor de enseñanza y divulgación de “practicantes de las matemáticas” como fuera Euclid Speidell, quien se dedica a la enseñanza de éstas para su uso práctico (trazado de planos, calibración de horóscopos, agrimensura, fabricación de instrumentos, docencia, contabilidad, fiscalidad, perspectiva, astronomía, hidráulica, arquitectura)</p>
1756	<p>Robert Simson elabora una versión en inglés de los <i>Elementos</i> que recoge los primeros seis libros, el onceavo y el doceavo (y en ediciones posteriores (1762), también de <i>Los Datos</i>). Es decir, las geometrías en dos y tres dimensiones y el estudio de proporciones. Editado con carácter docente y pedagógico de la geometría, y que serviría como versión base para numerosas ediciones posteriores.</p>
1795	<p>Pese a la negativa de sus padres acerca de sus inquietudes intelectuales, Mary Fairfax (1780-1872) se adentra en el estudio de las matemáticas (los <i>Elementos</i> y la <i>Introducción al álgebra</i> de 1782 de John Bonnycastle, amén de otras disciplinas), para acabar convirtiéndose en una erudita que dedicó 50 años de su vida a la investigación científica, además de ser una gran divulgadora del conocimiento científico, lo que llevó al “<i>Morning Post</i>” a considerarla la reina de la ciencia del siglo XIX.</p>
1800	<p>Se extiende la idea de que el estudio de las matemáticas puede alterar la integridad mental y volverle a uno loco, amén de convertirlo en antisocial y aislado de los sentimientos humanos, pues no eran susceptibles de demostración ni deducción</p>

1808	François Peyrard está traduciendo los <i>Elementos</i> al francés, y en su cotejo con diferentes manuscritos se encuentra el <i>manuscrito 190</i> , de la Biblioteca Vaticana, que difiere sustancialmente del resto de manuscritos y versiones, incluyendo los 15 libros y, aparentemente, <i>los Datos</i> . Pasa a tomarlo como base de su traducción, que compendia en tres volúmenes a columna doble en griego-latín, y anotando su traducción y comentarios comparativos de las diferentes versiones en francés. Da cuenta de la ajetreada vida y evolución que los <i>Elementos</i> han sufrido a lo largo y ancho de tantas y tantas versiones desde su edición original.
1817	Entre los múltiples temas que trata en sus diarios, Anne Lister da cuenta de la relevancia de estudiar a Euclides, en una época en que el libro goza de un gran estatus tanto en lo intelectual (obra de referencia) como en lo institucional (pues formaba parte de planes de estudio de escuelas y universidades). Destaca además su relevancia para la mejora intelectual y el progreso e innovación en la filosofía natural.
1826	Lobachevski presenta su geometría no-euclídea, resultado de analizar el postulado de las paralelas y plantear una geometría alternativa en el que la trigonometría no descansa sobre el plano bidimensional, sino sobre una superficie esférica. Inicialmente no es bien recogido, pero tras los avances en geometría curva de Riemann, y el uso que de ella hace Einstein para su teoría de la relatividad general, permiten el reconocer a Lobachevski la grandeza de su descubrimiento para con la concepción de la descripción real del espacio.
ca. 1830	El sistema educativo británico todavía se encuentra fuertemente influenciado por el currículo victoriano clásico y el modo de enseñanza proposicional, donde los <i>Elementos</i> son férrea piedra angular del mismo. Sin embargo, es un sistema sexista, oxidado y alejado de la realidad práctica del mundo en que se enmarca que. Reflejo de esto son las obras de Mary Ann Evans (a.k.a. George Elliot), como <i>El molino del Floss</i> o <i>Daniel Deronda</i> , donde sus personajes se enfrentan a sistemas educativos carentes de humanidad y anclados en el pasado, muestra del carácter fallido de dichos modelos de enseñanza.
1847	Oliver Byrne publica <i>The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners</i> , en la que hace uso de diagramas a color en lugar de las denotaciones con letras de Euclides para facilitar la enseñanza de los contenidos geométricos.
1884	Se publica en urdú una versión traducida de los <i>Elementos</i> de Simson. El proceder colonizador de los británicos es la de sacar a los pobres pueblos conquistados de la ignorancia en la que se sumergen (demostrando un desprecio total hacia los conocimientos de dichos pueblos), e instaurando mediante traducciones el currículo académico vigente en Gran Bretaña, en la que los <i>Elementos</i> de Euclides eran pilar fundamental.
segunda mitad del siglo XIX	La imagen de la geometría Euclídea pierde fuerza en el panorama educativo, donde cada vez más voces se levantan en aras de una reforma anti-Euclides.
1879	Lewis Carroll publica <i>Euclides y sus rivales modernos</i> , donde un tutor de Oxford

	mantiene un diálogo con el fantasma de Euclides acerca de la obra de éste.
1883-1916	Johan Ludvig Heiberg publica su compendio <i>Euclidis Opera omnia</i> , donde 5 de sus 9 volúmenes corresponden a los <i>Elementos</i>
finales del XIX principios del XX	La axiomatización lógica de las ciencias comienza a ganar peso, en particular con la aplicación a tales efectos de Russell y Whitehead en su <i>Principia Mathematica</i> . Al trabajar la matemáticas, y en particular la geometría euclídea, se muestran insostenibles desde el punto de vista lógico, lo que da fuerza a aquellos que rechazan la obra de Euclides y su papel hegemónico en la educación.
1904	Cambridge “cesa” a Euclides como obligatorio en su currículo educativo. El resto de escuelas y academias británicas seguirían a los pocos años por el mismo camino
1906-07	El arqueólogo alemán Otto Rubensohn descubre unos óstracos en la isla de Elefantina (alto Egipto) que resultan ser la prueba física más antigua de los <i>Elementos</i> . Posteriormente transcritos y analizados en torno a 1930
1908	Ya con Euclides derrocado el panorama educativo, Thomas Little Heath, un funcionario entusiasta de la matemática griega antigua, edita su propia versión de los <i>Elementos</i> a partir de la versión de Heiberg, buscando aportar sencillez y claridad al contenido del texto, buscando hacer justicia para con Euclides en contraposición a la “nueva geometría” que se enseña ahora en su lugar.
1945	Max Ernst pinta “Euclides”, cuadro que nos hace ver una figura enmascarada con una pirámide invertida pero que, como el auténtico Euclides y su obra, no es una pieza de fácil interpretación, y donde probablemente la forma humana que nuestros ojos nos quieren hacer ver, no se encuentran realmente allí.
relevancia actual	El estudio de la geometría euclídea sigue presente en los planes de estudio (si bien no se lleva a cabo empleando los <i>Elementos</i> como material didáctico). Desde 1959, la olimpiada matemática incluye al menos un problema de geometría euclídea en su prueba final. Gran presencia en el panorama artístico, como en el “Euclid” de Max Ernst, o las obras de carácter matemático de Crockett Johnson. Influencia también en la moda, como las colecciones de Elsa Schiaparelli o Madeleine Vionnet. También en la escultura, como las obras geométricas con espejos de Monir Shahroudy Farmanfarmaian. Relevancia epónima en calles, plazas,...
2023	La sonda espacial “Euclid” es lanzada para el estudio de la geometría del espacio lejano a fin de tratar de comprender mejor la energía oscura, la expansión del universo y la geometría del mismo.

Ediciones de los Elementos disponibles online

- (ca. 830-850) – *Manuscrito 190*, perteneciente a la Biblioteca Vaticana. Empleado por Peyrard como base de su edición de los “Elementos” en tres volúmenes.
 - https://digi.vatlib.it/view/MSS_Vat.gr.190.pt.1
- (888) – *Elementa I-XV*. Edición de **Teón de Alejandría** que estaba en posesión de Jacques Philippe d’Orville. Se trata del manuscrito completo más antiguo del que se tiene copia física.
 - <https://digital.bodleian.ox.ac.uk/objects/d4a23501-0b98-4aff-acd6-fe06fe9b62e3/>
- (1482) – *Opus elementare euclidis*. Edición de **Erhard Ratdolt** (primera edición impresa)
 - https://www.loc.gov/resource/gdcwdl.wdl_18198/?st=gallery
- (1570) – *The Elements of geometrie of the most auncient Philosopher Euclide of Megara*. Primera edición inglesa, por **Henry Billingsley**. Nótese la confusión con el Euclides Megarense.
 - <https://archive.org/details/elementsgeometr00eucl/mode/2up>
- (1576) – *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Versión en español de **Rodrigo Zamorano**.
 - https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8e/Los_seis_libros_primeros_de_la_geometria_de_Euclides_%28IA_ARes21304%29.pdf
- (1762) – *The Elements of Euclid. The first six books, together with the eleventh and twelfth*. Versión de **Robert Simson**
 - <https://archive.org/details/elementseuclid00simsgoog>
- (1774) – *Los seis primeros libros, y el undécimo, y duodécimo de los Elementos de Euclides*. Traducción al español de la edición de **Simson**.
 - https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los_seis_primeros_libros_y_el_undecimo_%2C_y_duodecimo_de_los_elementos_de_Euclides.pdf
- (1814-16-18) – *Les oeuvres d’Euclide, traduites en latin et en français*. Edición de **François Peyrard** basada en el “Manuscrito 190” que muestra a columna doble en griego y latín, con anotaciones y traducción en francés al pie de página
 - Tomo 1: <https://archive.org/details/lesuvresdeuclide01eucl/page/n7/mode/2up>
 - Tomo 2: <https://archive.org/details/lesuvresdeuclide02eucl/page/n7/mode/2up>
 - Tomo 3: <https://archive.org/details/lesuvresdeuclide03eucl/page/n7/mode/2up>
- (1860) – *Elements of geometry. Containing the first six books of Euclid with a supplement on the quadrature of the circle and the geometry of solids*. Edición de **John Playfair**
 - https://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid_for_the_Use_of_Schools_and_Colleges
- (1862) – *The Elements of Euclid for the use of schools and colleges; comprising the first six books and portions of the eleventh and twelfth books; With notes, an appendix, and exerci-*

ses, por **Isaac Todhunter**

- https://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid_for_the_Use_of_Schools_and_Colleges
- (1908) – *The thirteen books of Euclid's Elements* edición de **Thomas Heath**
 - Volumen 1: https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/1_euclid_heath_2nd_ed.pdf
 - Volumen 2: https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/2_euclid_heath_2nd_ed.pdf
 - Volumen 3: https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/3_euclid_heath_2nd_ed.pdf
- (1996) – *Euclid's Elements*. Versión web desarrollada por David E. Joyce basada en los textos de Heath, Heiberg, Peyrard y Todhunter.
 - <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/aboutText.html>
- (1847/2018) – *Byrne's Euclid*. Versión digitalizada de la edición de **Oliver Byrne** “*The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*”, elaborada por **Nicholas Rougeaux**.
 - <https://www.c82.net/euclid/>
- (2020) – *Euclid's Elements redux*. Versión actualizada a un lenguaje algebraico más inteligible, basada en las ediciones de John Casey y la de Thomas Heath. Elaborada por **Daniel Callahan**.