Historia General de la Ciencia I

Víctor Javier Moreno García

Índice de contenidos

Última modificación: 10/05/25 00:13:27

Matemática griega

La matemática en las culturas arcaicas

En su origen, la matemática tiene que ver con una serie de operaciones que ha realizado el ser humano posiblemente desde la prehistoria, a saber: contar, medir y calcular. Éstas son necesidades básicas de cualquier civilización, y que corresponderían con la aritmética, la geometría y el álgebra. Son muy pocas las culturas humanas que carecen de conceptos con los que poder contar o responder a necesidades métricas de longitudes o pesos.

Es tal esta relación de necesidad para con las acciones matemáticas que es muy probable que el origen de la escritura se deba a la necesidad de dar cuenta de tales requerimientos, a fin de poder dejar registro de cantidades, bien para llevar control de medidas (distancias y áreas de cultivos) y pesos (producto cosechado), o registros de la contabilidad propia de cada pueblo. Esta primitiva matemática estaba muy vinculada a la burocracia, pues permitía gestionar las áreas asignadas a cada agricultor y cobrar los impuestos pertinentes.

Babilonia

Las antiguas culturas de Mesopotamia (sumerios, babilonios), Egipto, China e India desarrollaron no sólo conceptos con los que poder contar y medir, sino también técnicas para resolver problemas de cálculo. Éstas técnicas o "recetas" aplicadas a casos concretos han podido conocerse gracias a la supervivencia de papiros o tablillas cuneiformes donde se daba cuenta de tales ejemplos de resolución de problema.

Aunque carecemos de cualquier tipo de demostración que justifique dichas herramientas de cálculo, sí debían tener cierta comprensión general de los problemas, pues los agrupaban en función de su tipo, organizados según su complejidad. Por ejemplo:

- hay tablillas babilonias que muestran triadas pitagóricas, métodos para calcular $\sqrt{2}$, problemas con ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones con dos incógnitas,..
- había tablillas con problemas geométricos e incluso con funciones

Desarrollaron un sistema de numeración sexagesimal (base 60).

Egipto

Los egipcios, desarrollaron una numeración decimal, por contra de la sexagesimal babilónica.

La cultura basada en el cultivo de las tierras inundadas estacionalmente por el Nilo determinó la aparición de calendarios y la matemática necesaria para gestionarlos.

La escritura jeroglífica egipcia era larga de aprender y se llevaba a cabo en las *"Casas de la vida"*, donde solo accedían solo ciertas personas de forma que el 95% de la población era iletrada.

La mayor parte de los papiros conocidos con escritos matemáticos versan acerca de la resolución de problemas prácticos sobre *"áreas, volúmenes de áridos o materiales de construcción, sobre movimientos de tierras o raciones de cuadrillas, sobre la cantidad de grano para fabricar pan o cerveza, etc."*

El papiro contiene 87 problemas matemáticos, entre los que hay...

- Operaciones con números enteros y fraccionarios.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Problemas de "pensar un número...".
- Progresiones aritméticas y geométricas.
- Áreas, volúmenes, capacidades y poliedros.
- Regla para obtener los ⅔ de números pares.
- Proporciones.

Introducción al desarrollo de la matemática griega

Los sabios griegos no eran consejeros del rey, escribas del estado, sacerdotes sino hombres libres que llevaban a cabo sus labores en las polis.

Entre estas labores estaba la industrial y la comercial especialmente significativa con la expansión comercial hacia Asia Menor y la Magna Grecia (sur de Italia y Sicilia). Conscientes del conocimiento antiguo, viajaron a Egipto, Mesopotamia e incluso la India su busca. Este contacto cultural les hizo tomar conciencia de cierta incompatibilidad en distintos aspectos y ver los propios con escepticismo:

> *"Chatos, negros: así ven los etíopes a sus dioses. De ojos azules y rubios: así ven a sus dioses los tracios". "Pero si los bueyes y los caballos y leones tuvieran manos; manos como las personas, para dibujar, para pintar, para crear una obra de arte, entonces los caballos pintarían a los dioses semejantes a los caballos, los bueyes semejantes a bueyes, y a partir de sus figuras crearían las formas de los cuerpos divinos según su propia imagen: cada uno según la suya"* (Jenófanes DK 16, 18)

Características del "saber teórico":

Por su parte, los griegos entendieron la matemática al mismo nivel de la ciencia en general, donde ambas formarían parte de la actividad intelectual que estaba adquiriendo cuerpo bajo la denominación de *"philosophia"* (amor al saber) y *"theoria"* (contemplación),

Mientras que en civilizaciones más arcaicas la implementación de técnicas y metodologías matemáticas tenía un marcado carácter práctico, la concepción filosófica emergente en la Grecia de aquella época podría entenderse más como un *"saber por el saber"* sin que éstos tuvieran, a priori, una clara aplicación práctica. Entendieron que los distintos saberes (matemática, medicina, astronomía) tienen conexiones para las cuales encontraron ciertas relaciones, como la introducción de sus ideas físicas en la medicina. La idea de que todo tiene una causa, no necesariamente divina, era también clave en esta nueva metodología.

Un aspecto que influyó en esta apertura intelectual fue la facilidad de aprender a leer y escribir. El alfabeto griego se aprende mucho más rápidamente que el egipcio o el babilónico, por lo que la adquisición de la lecto-escritura se desvinculaba del sacerdocio. Además, la estructura política de las ciudades griegas daba más autonomía y favoreció el desarrollo cultural. Esta libertad individual permitía el debate en el ágora y en ese entorno aparecieron unos profesionales que vendían sus habilidades argumentativas para resolver conflictos entre individuos: los sofistas.

Los primeros filósofos Tales, Anaximandro y Anaxímenes, todos de Mileto (s. VI a.e.c.), hicieron los primeros intentos de explicación científica al preguntarse por el principio de todas las cosas. La idea era unificare todos los procesos naturales en un mínimo número de hipótesis naturales, el arjé, sacándola del contexto mítico-religioso homérico.

- Para **Tales** era el agua, capaz de condensarse en tierra y de evaporarse en aire y éter.
- **Anaximandro** sustituyó el agua por lo ilimitado, el *apeiron* capaz de transformarse en los demás mediante procesos de equilibrio entre contrarios (seco/húmedo, frío/caliente).
- **Heráclito** recurrió al fuego.
- **Jenófanes** a la tierra.
- **Anaxímenes** al aire.
- **Parménides** rechazó la idea de principio único.
- **Anaxágoras** defendió infinitos principios.
- **Empédocles** (siglo V a.e.c.) diferencia la materia de las fuerzas y se pregunta por las causas de las transformaciones
    - En lo material, abandona el monismo por *4 elementos: tierra, aire, agua y fuego*.
    - En lo causal, las fuerzas son dos: el *amor* y la *discordia*.
- En el siglo V a.e.c. los atomistas **Leucipo** de Mileto y **Demócrito** de Abdera pensaban que todo consiste en una infinidad de pequeños átomos moviéndose al azar en el vacío. Ninguna mente o divinidad se inmiscuye en este mundo. No hay lugar para la finalidad o la libertad, sólo gobierna la férrea necesidad

Este saber teórico, la filosofía, inventada por los griegos se caracterizaba por ser:

- Universal/Abstracto: no limitado a casos concretos.
- Intelectual: valora más la comprensión que la aplicación práctica (sin desprecio ni perjuicio para ésta).
- Demostrativo: no se halla basado sobre una mera opinión, sino que intenta justificarse como la conclusión de una argumentación racional.

Estos aspectos no son propios ni exclusivos de las matemáticas, sino de todos aquellos que ejercían este saber por el saber y, que de hecho, se denominaban entre ellos como "filósofos", alejados de la dicotomía posterior que, erróneamente, distingue entre "ciencias" y "humanidades". Las matemáticas para los griegos no sólo eran una forma de hacer filosofía, sino que eran la forma primordial y paradigmática de hacerlo, pues fue mediante ella que llegaron a la consecución de ciertos resultados tangibles que no eran posibles desde el marco meramente observacional y contemplativo que ofrecía la *"theoria"*. Tal fue la calidad de dichos resultados demostrativos que a día de hoy siguen siendo de utilidad en su aplicación en matemáticas y otras disciplinas que hacen uso de ellas, a diferencia de lo que ocurre en otros aspectos, como pudiera ser la mecánica de Aristóteles.

Obras matemáticas griegas

No se conserva ninguna obra matemática completa anterior a los *"Elementos"* de Euclides (ca. 300 a.e.C; en griego: Στοιχεῖα, *stoicheia*) y que ha sido el manual de geometría usado en occidente hasta prácticamente el siglo XIX. La excepción quizá sería *"La esfera en movimiento"* de Autólico de Pitane, de la que no se conserva el texto como tal, sino unas meras referencias a él, y que dataría unas décadas anteriores a la obra de Euclides (de finales del siglo IV a.e.C).

Los primeros *"Elementos"* los escribió Hipócrates de Quíos (mediados del siglo V a.e.C), y es muy probable que los dos primeros libros de los *"Elementos"* de Euclides estén basados en éstos.

Fue un discípulo de Aristóteles, Eudemo de Rodas, quien compilara la primera *"Historia de las matemáticas"*, que formaría parte del proyecto peripatético de dar cuenta de todos los saberes acumulados hasta su época, como hiciera el propio Aristóteles con la física, o Teofrasto con la biología.

Panorama de la matemática griega

Etapa arcaica	VI a.e.c.	• Tales de Mileto (proporcionalidad y triángulos) • Pitágoras de Samos (triángulos)
Etapa clásica	V a.e.c.	• Hipaso de Metaponto y Teodoro de Cirene (números irracionales) • Hipócrates de Quíos (*"Elementos"*, cuadratura de lúnulas, media geométrica) • Antifonte y Brison de Heraclea (estimación de π) • Hipias de Elis y Arquitas de Tarento (curvas definidas por movimiento, duplicación del cubo) • Demócrito (volumen del cono y la pirámide)
	IV a.e.c.	• Eudoxo de Cnido (método de exhaución, variables continuas) • Teeteto (irracionales, sólidos regulares) • Autólico de Pitane (esfera) • Dinóstrato (cuadratriz) • Menecmo (cónicas) • Euclides (*"Elementos"*, cónicas, trigonometría esférica, óptica –reflexión y perspectiva–)
Etapa helenística	III a.e.c.	• Conón de Samos (cónicas, espirales) • Apolonio de Pérgamo (cónicas, epiciclos, tangencias, secciones de segmentos –álgebra–) • Arquímedes de Siracusa (cónicas, espirales, estimación de π, aritmética, aplicación de la geometría a la mecánica y la hidráulica) • Eratóstenes (números primos, mediciones astronómicas)
	II a.e.c.	• Hiparco de Nicea (trigonometría, geometría esférica –paralelos, meridianos –) • Teodosio de Bitinia (esférica, eclíptica)
Etapa romana	I d.e.c.	• Herón de Alejandría (superficies y volúmenes) • Menelao de Alejandría (geometría esférica) • Nicómaco de Gerasa (aritmética, tablas de multiplicar)
	II d.e.c.	• Claudio Ptolomeo (geometría esférica, óptica)
	III d.e.c.	• Diofanto de Alejandría (aritmética, álgebra) • Pappus de Alejandría (*"Collectio"*, geometría)
Etapa bizantina	IV d.e.c.	• Hipatia de Alejandría (cónicas, aritmética)

La tradición nos dice que Tales (624-546 a.e.c.) y Pitágoras (ca. 570-496 a.e.c.) introdujeron el conocimiento matemático en Grecia, tomando el que existía en Oriente –Mesopotamia y Egipto– y añadiendo un deseo de comprensión teórica del mundo (mística en el caso de Pitágoras). No se puede saber con certeza si los teoremas que se les atribuyen eran conocidos por estos presocráticos ni si ofrecieron alguna demostración.

Tales de Mileto

"Primer" teorema de Tales

> *Si en el interior de un triángulo se traza una línea paralela a uno de sus lados, se obtiene un triángulo semejante al primero.*

Que dos triángulos sean semejantes indica que los ángulos de ambos triángulos son iguales. Además, al ser semejantes, sus lados son proporcionales. Según la tradición, Tales utilizó este teorema para medir la altura de la pirámide de Keops. Veamos esquemáticamente un ejemplo

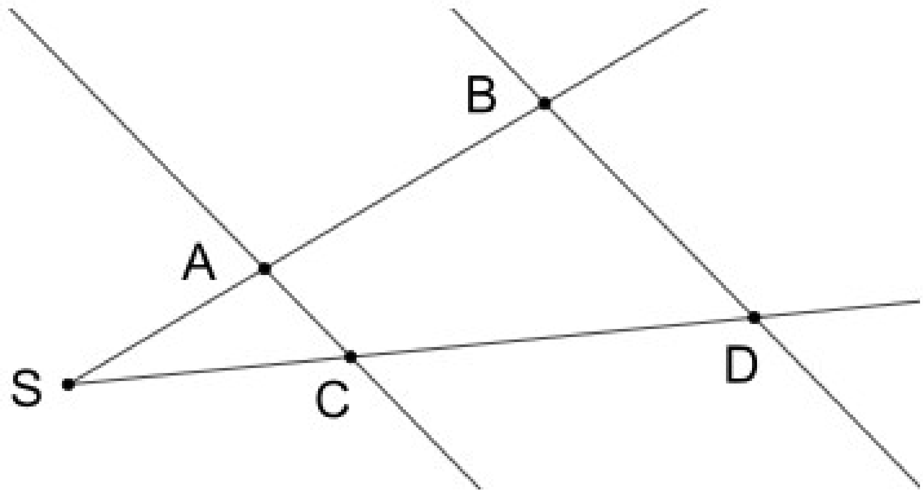


Imagen 1: Semejanza de triángulos [1]

$$\triangle SAC \sim \triangle SBD \quad \rightarrow \quad (\measuredangle SAC = \measuredangle SBD) \wedge (\measuredangle SCA = \measuredangle SDB) \quad \rightarrow \quad \frac{AC}{BD} = \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD}$$

Este resultado permitió una serie de aplicaciones prácticas, lo que ayuda a desmitificar en parte la supuesta idea de que los griegos únicamente buscaban el conocimiento teórico. La leyenda dice que Tales empleó este teorema para medir la Gran Pirámide de Giza (Egipto), donde la vertical desde el centro de la pirámide hasta su cúspide sería uno de los lados del triángulo (uno de los catetos, al ser el triángulo en cuestión rectángulo), siendo éste precisamente el lado que se quiere medir. El otro cateto sería la horizontal en el suelo sobre la que se proyecta su sombra y que es medible, colocando en el extremo de dicha sombra un bastón que proyecta sombra a su vez, y para el que es fácilmente medible dichas longitudes (de la sombra y del bastón). Atendiendo a las relaciones de proporcionalidad semejantes que se mantienen según lo visto antes, pudo establecer dicha relación para determinar cuál sería la altura de la pirámide.

1 Imagen de *Kmhkmh* (CC BY 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Intercept_theorem_a.svg

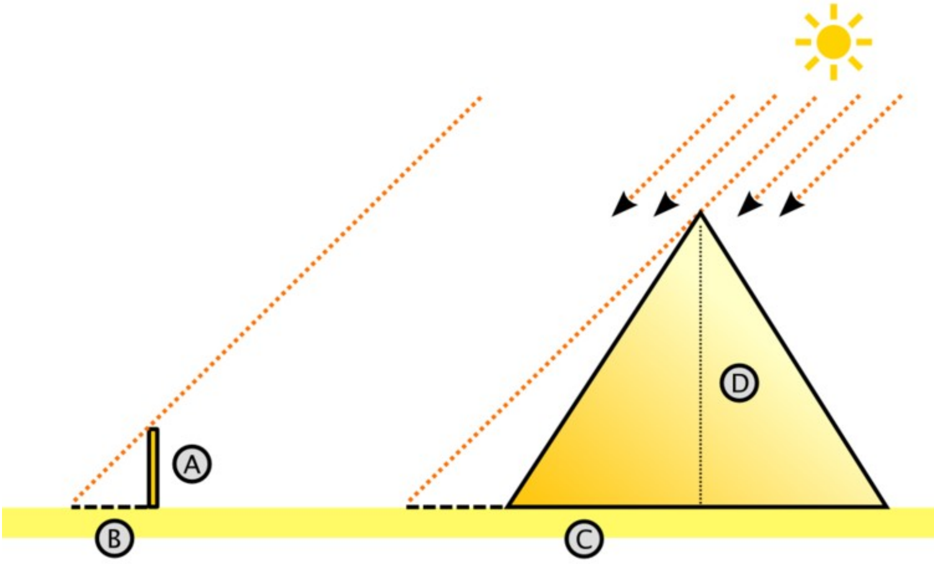


Imagen 2: Medición de la altura de la pirámide de Giza con el teorema de Tales [2]

De este modo, la relación proporcional $B/C=A/D$, siendo medibles todas las longitudes excepto D, pudiendo deducirla mediante $D=(A\cdot C)/B$

"Segundo" teorema de Tales

> *El triángulo que forman los dos extremos* (A,C) *del diámetro de una circunferencia y un punto cualquiera de dicha circunferencia* (B) *es rectángulo, con un ángulo recto en ese punto.*

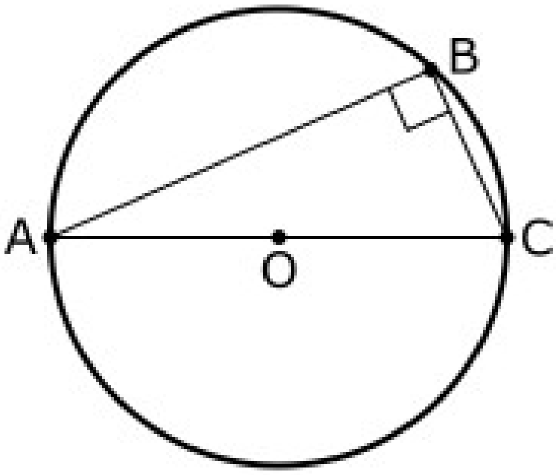


Imagen 3: Segundo Teorema de Tales [3]

Un resultado previo a este teorema, o que al menos era ampliamente conocido en relación a los ángulos de un triángulo rectángulo, es que la suma de dichos ángulos es el doble que el valor de un ángulo recto, y la mitad que una circunferencia $(180^o=2\cdot 90^o=360^o/2)$,

Al contrario que con el primer teorema, la validez de este segundo teorema no es tan inmediatamente obvia, requiriendo de alguna demostración:

2 Imagen de *Dake* (CC BY-SA 3.0) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Thales_theorem_6.png

3 Imagen de *Inductiveload* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales%27_Theorem_Simple.svg

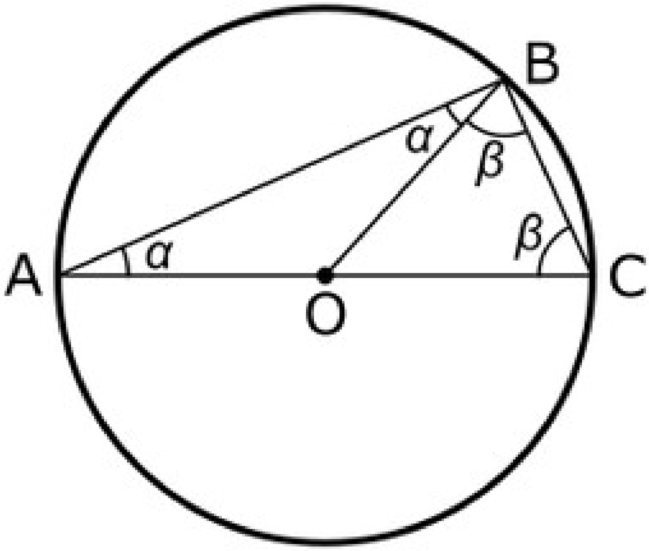


Imagen 4: Demostración del teorema de Tales [4]

Llamemos δ al ángulo AOB y γ al BOC, tendríamos entonces lo siguiente:

$2\beta+\gamma=2\alpha+\delta=180^o \rightarrow 2\beta+\gamma+2\alpha+\delta=360^o$

$\delta+\gamma=180^o$ (ambos suponen el "ángulo" plano AOC)

$2\beta+2\alpha=180^o$

Reorganizando tenemos:

$$(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=2(\alpha+\beta)=180^o$$

Es decir: $\alpha+\beta=90^o$

Mediante este ejemplo puede apreciarse algunas de las contribuciones importantes de los griegos al razonamiento matemático:

- El uso del ***diagrama con letras***, que permite ir siguiendo los pasos de la demostración.
- La necesidad de ***basarse en resultados previos*** (por ejemplo, que los ángulos de un triángulo suman 180º). Esto quiere decir que el conocimiento matemático, una vez demostrado, es acumulativo.
- La ***generalidad del resultado***, pese a que el diagrama muestre un solo ejemplo, es indiferente dónde se sitúe el punto B, pues siempre que se encuentre sobre la circunferencia su ángulo será recto.
- La frecuente necesidad de ***construir con la imaginación*** elementos añadidos a la figura original, para explorar las consecuencias que se siguen de ellos acerca de ésta.

Es de interés notar que, si bien en filosofía Tales es conocido por su *arché* que dicta que "*el agua es el principio de todas las cosas*", su verdadera contribución al conocimiento fueron sus teoremas matemáticos.

4 Imagen de *Inductiveload* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales%27_Theorem.svg

Pitágoras

Al otro extremo del mundo griego, en Crotona (Magna Grecia), se encontraba la otra gran escuela de la antigüedad, la **escuela pitagórica**. La escuela fue fundada por Pitágoras de Samos (si bien algunos discuten la identidad de Pitágoras) a mediados del siglo VI a.e.c., llegando a tener más de 300 miembros que vivían en comunidad.

La escuela unía elementos místico-religiosos y científicos, tanto en la astronomía como, sobre todo, en las matemáticas. No se conserva nada de Pitágoras, si es que escribió algo, lo que unido a la exigencia de silencio dentro de la escuela hace que la información sobre la escuela sea muy escasa. Ni siquiera está claro que el mismo Pitágoras hiciera contribuciones significativas a la matemática. En realidad, todo lo que se cuenta sobre él es bastante legendario y es muy probable que las *"matemáticas pitagóricas"* sean más bien el conjunto de teoremas demostrados por algunos de sus seguidores.

Parece que tenía una visión mística de la realidad, donde pensaban que los principios últimos (el *arché*) de la realidad eran números, estando gobernada por la oposición par-impar (el uno y el dos, la unidad y la dualidad...). Se le atribuye también la aplicación de la aritmética a la música (intervalos sonoros como proporciones).

- el 1 no era un número, sino la unidad generadora
- el 2 es lo femenino y la línea
- el 3, lo masculino y el plano
- el 4 el sólido
- el 5 el matrimonio (femenino +masculino),
- La idea de reducir la realidad a números y a relaciones matemáticas es una constante desde entonces. Clasificaban los números en triangulares, cuadrados...

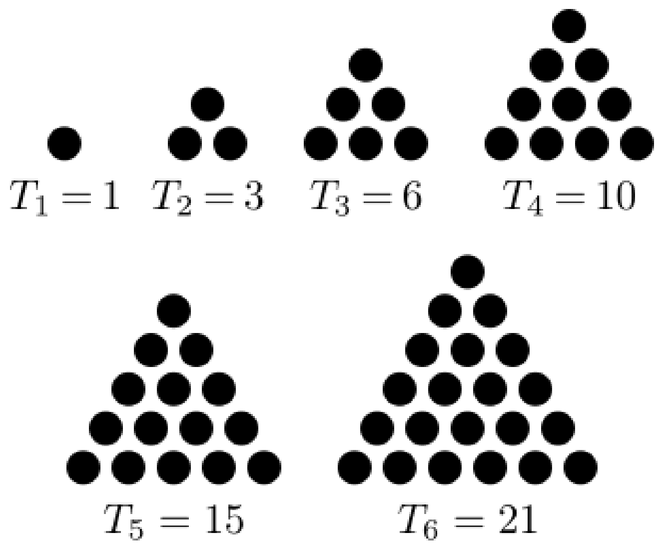


Imagen 5: Números triangulares [5]

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

5 Imagen de *"Melchoir"* en Wikimedia Commons con licencia CC BY-SA 3.0 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:First_six_triangular_numbers.svg

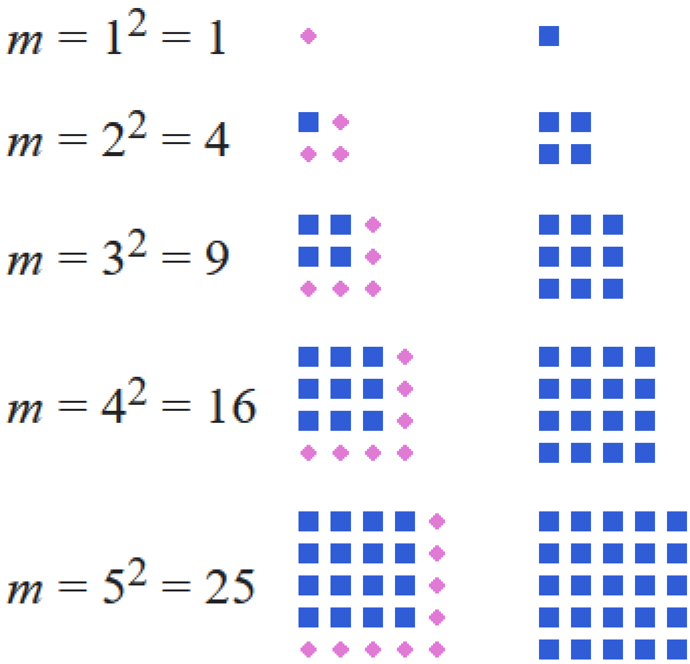


Imagen 6: Números cuadrados [6]

Teorema de Pitágoras

> *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

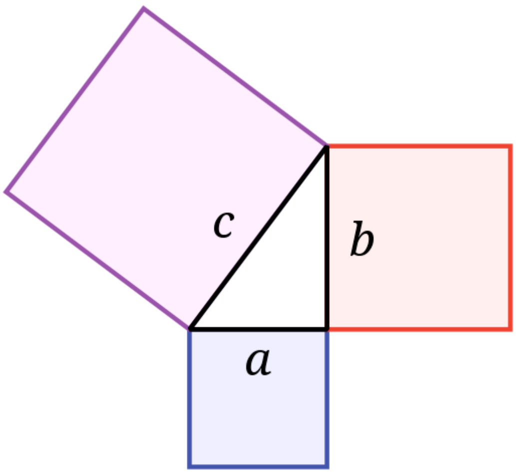


Imagen 7: Teorema de Pitágoras [7]

---

6 https://en.wikipedia.org/wiki/Square_number a partir de la serie de imágenes de *"Fredrik"* (dominio público):
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Square_number_1.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Square_number_4.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Square_number_9.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Square_number_16.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Square_number_25.png

7 Imagen de *"Wapcaplet"* (CC BY-SA 3.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pythagorean.svg

Los babilonios conocían, ya hacia el 1800 a.e.c., numerosas *"ternas pitagóricas"* (números enteros a, b, c tales que $a^2+b^2=c^2$ (por ejemplo 3, 4 y 5), y que permiten, por tanto, construir triángulos rectángulos). Pero el teorema, como *propiedad general* de las triángulos rectángulos no limitada a números enteros sólo fue formulado y demostrado en Grecia.

Ternas pitagóricas con c < 100 ($a^2+b^2=c^2$)

(3, 4, 5)	(9, 40, 41)	(16, 63, 65)	(36, 77, 85)
(5, 12, 13)	(11, 60, 61)	(20, 21, 29)	(39, 80, 89)
(7, 24, 25)	(12, 35, 37)	(28, 45, 53)	(48, 55, 73)
(8, 15, 17)	(13, 84, 85)	(33, 56, 65)	(65, 72, 97)

Un aspecto interesante del teorema es que su validez no es *intuitivamente obvia* en absoluto, al contrario que lo era el teorema de Tales. Carecemos de la demostración original que pudieran haber dado Pitágoras o sus seguidores, aunque sí que se dispone de diversas demostraciones dadas en el curso de la historia.

Es probable que la demostración pitagórica original se basara en las proporciones, y se pareciese a la que sigue (coincide con la utilizada en el libro *"Explicar el mundo"* de Steven Weinberg).

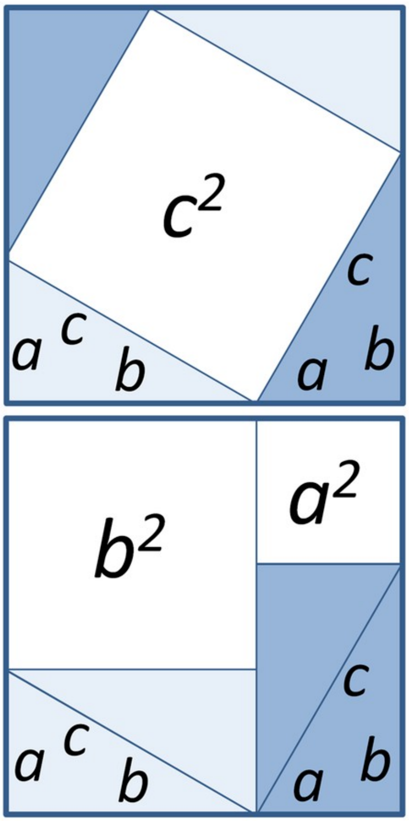


Imagen 8: Demostración del teorema de Pitágoras [8]

Partiendo de la noción de semejanza de triángulos (dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos son iguales, siendo sus lados proporcionales),

8 Imagen de "*Brews ohare*" en Wikimedia Commons con licencia CC BY-SA 3.0 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagorean_Proof_(3).PNG

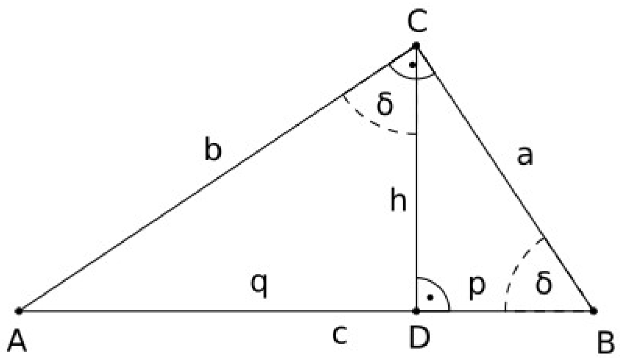


Imagen 9: Teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos [9]

Sea el triángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en el vértice C, catetos AC y CB e hipotenusa AB:

- Su altura h es la línea que corta perpendicular la base desde el vértice C en el punto D (de este modo, la hipotenusa del triángulo mayor D queda dividida en los segmentos p y q que serán a su vez catetos de los triángulos menores.
- Dicha altura divide el triángulo original en dos nuevos triángulos, $\triangle ADC$ y $\triangle BCD$, que demostraremos que son semejantes.
  - Ambos triángulos tienen un ángulo recto, $\angle ADC$ y $\angle CDB$ respectivamente
  - Ambos tienen un ángulo en común con el triángulo inicial:
    - $\angle CAD = \angle CAB$
    - $\angle DBC = \angle ABC$
  - Por tanto, para ambos triángulos, el otro ángulo será igual al del triángulo grande, y por tanto los tres triángulos tienen los tres ángulos iguales, siendo así semejantes.
- Al ser semejantes los triángulos, sus lados son proporcionales, así como los cocientes equivalentes para los distintos triángulos entre catetos y entre catetos e hipotenusa:
  - $\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{p}=\dfrac{c}{a} \rightarrow a^2=cp \\ \dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{b} \rightarrow b^2=cq \end{array}\right\} \rightarrow \quad a^2+b^2=cp+cq=c(p+q)=c^2$

Esta demostración se basa en el uso de proporciones, es decir, operaciones aritméticas realizadas con las fracciones entre los lados del triángulo (si bien los griegos no emplearían la notación algebraica que no se desarrollaría hasta los matemáticos árabes en torno a los siglos X y XI).

Sin embargo, el descubrimiento de los números irracionales pudo hacer sospechosa esta demostración, pues en caso de que alguna de dichas fracciones fuese irracional (es decir, el cociente que resulta de la fracción tuviese un número finito de decimales) implicaría entonces que una proporción entre dos lados no podría expresarse como una fracción entre dos números naturales.

Quizá sea debido a esto que no haya entre los griegos una demostración del teorema que recurra a las fracciones por los supuestos problemas de la irracionalidad de las fracciones, siendo la dada por Euclides (Libro 1 – Proposición 47 que veremos más adelante) el modelo de justificación del teorema más probable dentro del mundo griego, y que se basa en la relación geométrica de las áreas de paralelogramos definidos entre las mismas dos rectas paralelas y con bases iguales.

9 Modificación de la imagen de *"Kmhkmh"* en Wikimedia Commons con licencia CC BY 3.0 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagoras_through_similarity2.svg

Los números irracionales

La visión mística de los pitagóricos acerca de la realidad que, según ellos, estaba constituida por números y las razones de proporcionalidad entre ellos, vino al dar al traste como consecuencia del propio teorema "insignia" de la secta que acabamos de ver, ya que:

> *No hay ninguna unidad A para la que existan dos números naturales n y m tales que, si el lado de un cuadrado mide nA unidades, la diagonal mida mA unidades.*

Es decir, la diagonal no es "conmensurable" con el lado (sea A la unidad de longitud que sea). En particular, si consideramos un cuadrado cuyo lado mide 1, según este teorema no hay ninguna razón n/m entre números naturales n y m tal que la diagonal mida exactamente n/m. Es decir, dicha diagonal (según el teorema de Pitágoras mediría $\sqrt{2}$) es irracional (*"a-lógica", "in-expresable"*)

Parece ser que esto supuso un jarro de agua fría para la pretensión pitagórica de reducir toda realidad a números, si bien contribuyó considerablemente al desarrollo de la matemática. Fue Hipaso de Metaponto quien descubrió la irracionalidad de ciertos números. Sobre su muerte se cuenta que fue condenado por revelar el secreto, incluso que fue el mismo Pitágoras quien lo mató por no poder demostrar que estaba equivocado

La prueba más conocida es uno de los primeros ejemplos de demostración por reducción al absurdo (pese a que no se tiene conciencia plena de que la que sigue fuese la demostración pitagórica).

> Supongamos que $\sqrt{2}=n/m$ y que hemos eliminado todos los factores comunes que puedan tener n y m (es decir, suponemos que $\sqrt{2}$ es un número racional). Esto implica que n y m no pueden ser ambos pares, pues serían divisibles por un factor común (2)
>
> Pero si $\frac{n}{m}=\sqrt{2}\rightarrow\left(\frac{n}{m}\right)^2=2=\frac{n^2}{m^2}$
>
> Luego $n^2=2m^2$, y por tanto n es par (pues los cuadrados pares son siempre el cuadrado de un número par), habiendo así un número p tal que $n=2p$
>
> Por tanto, $(2p)^2=2m^2$, es decir, $4p^2=2m^2$
>
> De donde se sigue que $m^2=2p^2$, por lo que m sería también un número par.
>
> Llegamos así a una contradicción, por lo tanto nuestro supuesto de partida es falso.

La proporción áurea

Otra consecuencia importante del teorema de Pitágoras fue el descubrimiento de la proporción áurea (o sección de un segmento en extrema y media razón), que fue denominado de esta manera en el siglo XVI por Luca Pacioli. Esta sección da cuenta de cómo dividir un segmento en dos subsegmentos a y b tales que $a+b$ sea a a, lo que a es a b:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803398875$$

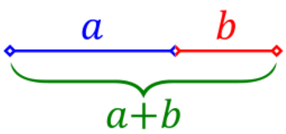


Imagen 10: Segmento subdividido según la razón áurea [10]

10 Imagen *"Stannered"* (dominio público) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Golden_ratio_line.svg

$$\Phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=1+\frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi-1=\frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi^2-\Phi=1\rightarrow\Phi^2=\Phi+1$$

$$\Phi^2-\Phi-1=0$$

Aunque en Euclides la "sección" aparece como solución de un problema (*"dividir un segmento de tal modo que..."*), es posible que fuese descubierta explorando las propiedades del triángulo rectángulo en el que un cateto mide el doble que otro, en cuyo caso la hipotenusa mide $\sqrt{5}$ veces el cateto menor)

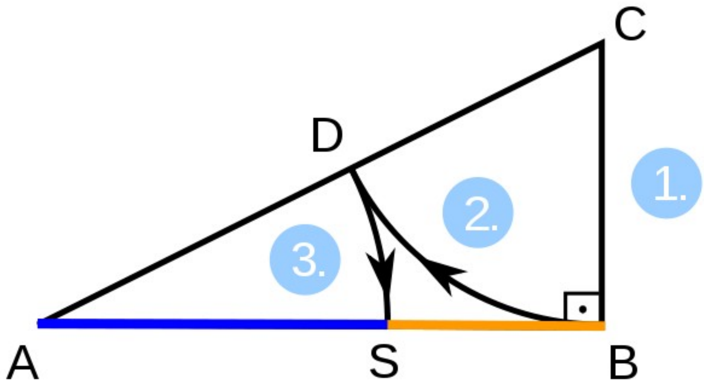


Imagen 11: Proporciones áureas de Euclides [11]

$AB=2BC$

$AC=\sqrt{(AB^2+BC^2)}=\sqrt{(4BC^2+BC^2)}=\sqrt{5}BC$

Por simplicidad supongamos que $BC=1$ (y por tanto $AB=2$) $\rightarrow AC=\sqrt{5}$

Dada la representación sobre el segmento AC del punto D, donde al estar dada por un arco de circunferencia con radio BC, tenemos que $DC=BC$ (en nuestro caso = 1)

De manera análoga tendríamos que $AD=AS=AC-DC=\sqrt{5}-1$

Y por tanto, $SB=AB-AS=AB-AD=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$

Tenemos así que AS y SB están en proporción áurea, ya que:

$$\frac{AB}{AS}=\frac{AS}{SB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Los pitagóricos comprobaron que la proporción áurea se encontraba presente en multitud de formas geométricas, entre ellas el pentágono.

Para el caso del pentágono regular, si formamos un triángulo isósceles formado por un lado del pentágono y sus diagonales hacia el vértice opuesto, se tiene la siguiente relación áurea:

11 Imagen Daniel Seibert (CC BY-SA 3.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Goldener_Schnitt_Konstr_beliebt.svg

$$\frac{AC}{DC}=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{AE}=\frac{AC}{ED}=\Phi$$

Es probable que este hallazgo llevase a los pitagóricos a establecer el pentagrama (la estrella de cinco puntas) que se inscribe en un pentágono regular como el emblema simbólico de su escuela.

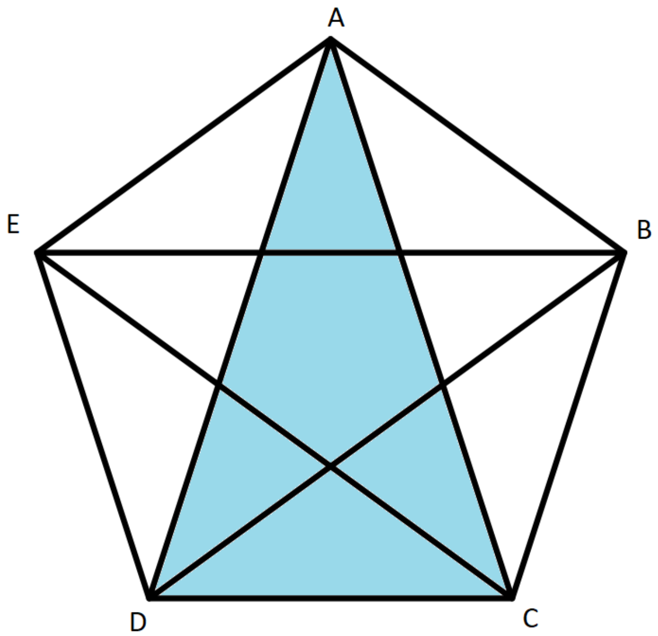


Imagen 12: Pentagrama inscrito en pentágono regular

También demostraron que la proporción áurea es irracional: el lado y la diagonal de un pentágono son, como ocurría con la relación entre hipotenusa y catetos en un triángulo rectángulo, inconmensurables entre sí.

Los tres grandes problemas

En el siglo V a.e.c. los matemáticos descubrieron tres problemas aparentemente sencillos, pero que no fueron capaces de resolver de un modo limitado a construcciones que únicamente pudieran hacerse haciendo uso de regla (de longitud infinita, sin marcas y con un borde) y compás (se cierra al levantarlo del papel que se usa sólo tomando como centro y radio dos puntos dados). Se conocen como los **tres grandes problemas** o los **problemas délicos**, pues los habitantes de Delos recurrieron al oráculo de Delfos para saber cómo contener la plaga que invadía su ciudad, a mediados del Siglo IV a.e.c. El oráculo respondió que debían duplicar el altar de Apolo, cuya forma era la de un cubo:

- La **cuadratura del círculo**: dibujar un cuadrado de área igual a un círculo dado. Este problema equivale a dibujar una recta de longitud igual a una circunferencia. Su construcción necesitaría obtener el número $1/\sqrt{\pi}$
- La **trisección del ángulo**: dividir un ángulo en tres partes iguales. Es imposible porque requiere obtener la raíz cúbica de un número complejo cualquiera, con valor absoluto 1, imposible solo con regla y compás.
- La **duplicación del cubo**: construir un cubo cuyo volumen sea el doble que un cubo dado. El problema vuelve a ser de tipo irracional, imposible para regla y compás.

En el siglo XIX (Pierre Wantzel, en 1837) se demostró que los tres problemas son irresolubles. Sin embargo, para los griegos estos problemas parecían en principio poder resolverse, pues habían resuelto problemas similares:

- Cuadratura de polígonos (triángulos, rectángulos,...) e incluso de algunas figuras circulares (como las lúnulas de Hipócrates.
- Bisección de un ángulo dado.
- Duplicación del cuadrado (a modo de curiosidad, éste es el caso que usa Platón en el *"Menón"* como argumento sobre la anámesis).

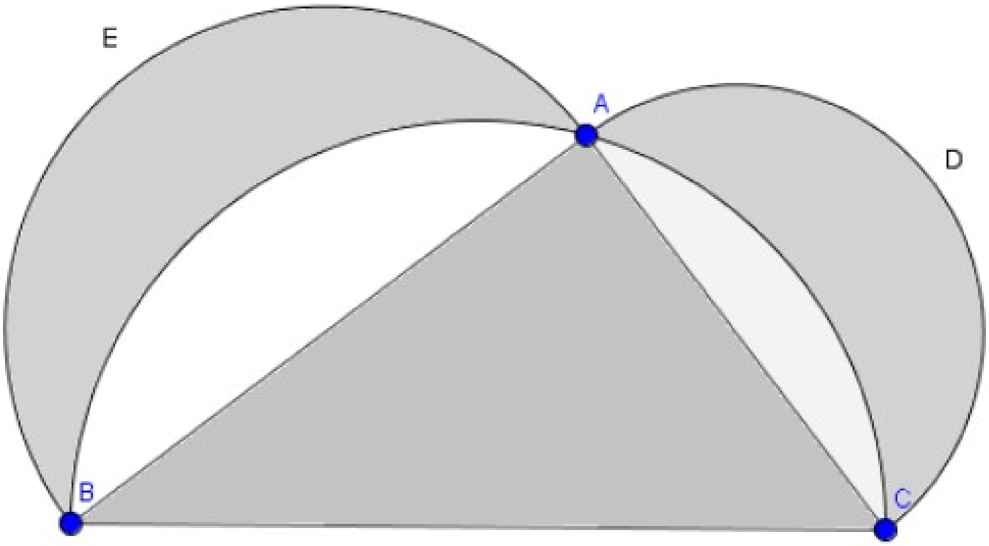


Imagen 13: Cuadratura de la lúnula 12

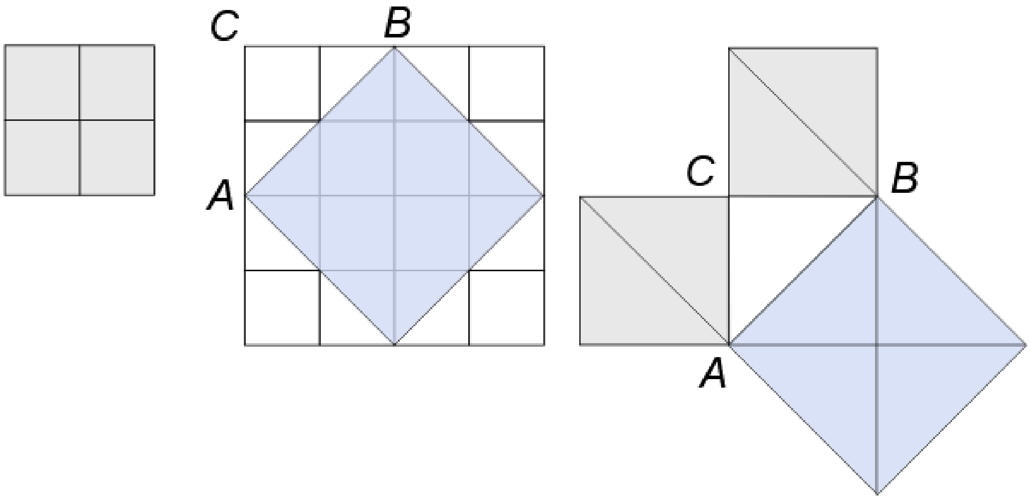


Imagen 14: Duplicación del cuadrado 13

A pesar de los problemas derivados de no poder dar solución a estos "tres problemas" si que surgieron algunas ideas importantes que fueron desarrolladas a raíz de éstos:

12 Imagen de *"Jacksonfs16"* (CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Imag_3.png

13 Imagen de *"Sigmanexus6"* (CC BY-SA 3.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PLAT%C3%93N.Duplicaci%C3%B3n_del_cuadrado_y_teorema_de_Pit%C3%A1goras.svg?uselang=es

Media proporcional (o geométrica)

X es la media proporcional entre A y B si $\frac{A}{X}=\frac{X}{B}$, es decir, $AB=X^2 \rightarrow X=\sqrt{AB}$

Hipócrates intentó demostrar que se podría duplicar el cubo encontrando medias proporcionales entre 1 y 2 (X e Y tales que $1/X=X/Y=Y/2$, pues en ese caso $(1/X)^3=(1/X)(X/Y)(Y/2)=1/2$, y por tanto $X^3=2$, es decir, $X=\sqrt[3]{2}$).

Este tipo de proporciones de la forma $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\ldots$ se conocen como progresión geométrica.

El método de exhaución (agotamiento)

Antifonte y Bryson pensaron que se podía aproximar el tamaño de una circunferencia rodeándola de polígonos cada vez con un mayor número de lados.

Demócrito demostró que el volumen de una pirámide es ⅓ del de un prisma de base igual (o el de un cono respecto a un cilindro), suponiendo que esos cuerpos se dividían en capas infinitamente delgadas.

Eudoxo, Euclides y Arquímedes Aplicaron este método a casos más complejos. Estos desarrollos constituyen un precedente del cálculo integral de Newton y Leibniz.

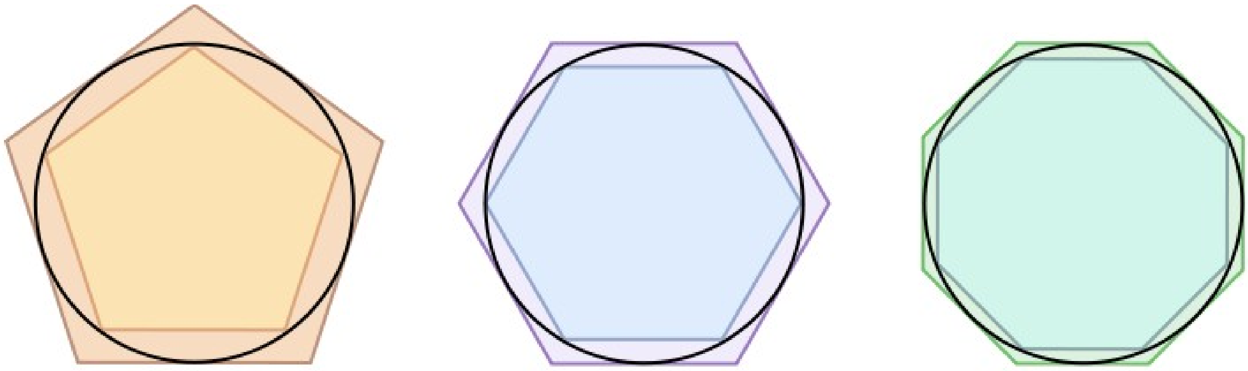


Imagen 15: Método de exhaución

Trisectriz de Hipias

La trisectriz de Hipias (también llamada **cuadratriz** de Dinóstrato) es una curva que se crea mediante un movimiento uniforme. Es uno de los ejemplos más antiguos de una curva cinemática, creada a través del movimiento. Su descubrimiento se atribuye al sofista griego Hipias de Élide, quien la usó alrededor del año 420 a.e.c. para determinar la trisección de un ángulo (de ahí el nombre de trisectriz). Posteriormente, alrededor del año 350 a.e.c., Dinóstrato la usó para cuadrar el círculo (de ahí el nombre de cuadratriz).

Consiste en ir deslizando el lápiz a velocidad constante a lo largo de un eje y de un arco de circunferencia simultáneamente. Al usar el desplazamiento recurría a lo mecánico y por lo tanto no era válido desde el punto de vista filosófico (que limitaba las demostraciones al uso de regla y compás).

14 Imagen de *"Fredrik"* (vectorización de *"Leszek Krupinski"*) (dominio público) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Archimedes_pi.svg

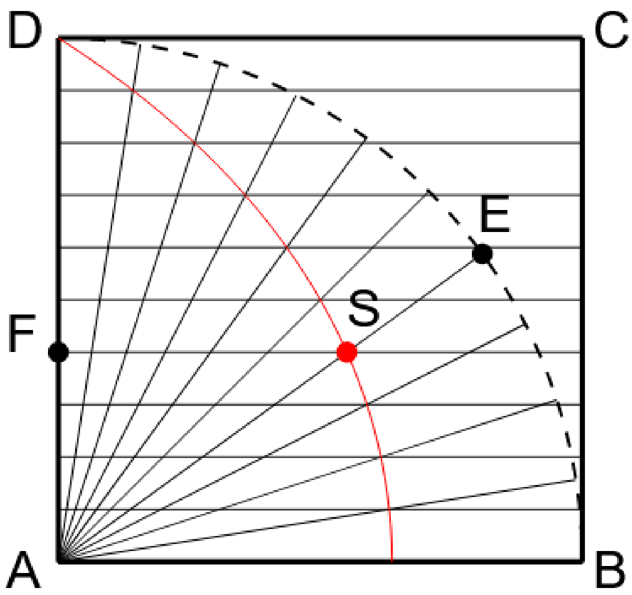


Imagen 16: Cuadratriz [15]

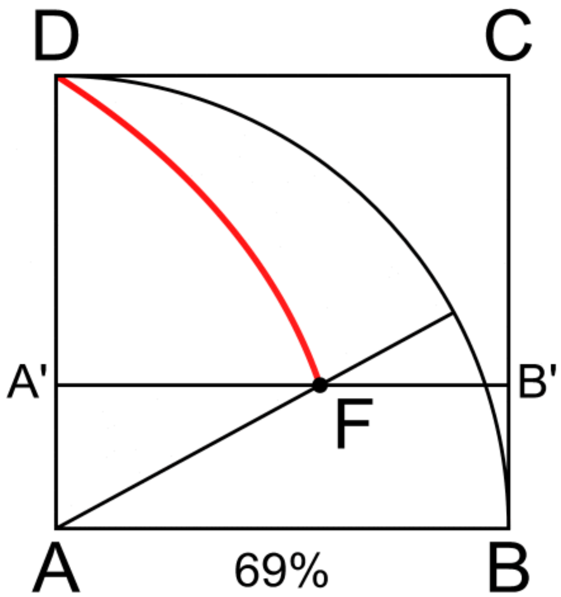


Imagen 17: Compás cuadratriz [16]

Considérese un cuadrado $ABCD$ con un cuarto de círculo inscrito centrado en A, de modo que el lado del cuadrado sea el radio del círculo. Sea E un punto que se desplaza con una velocidad constante en el cuarto de círculo de D a B, y sea F un punto que se desplaza con una velocidad constante de D a A sobre el segmento $\overline{AD}$, de tal manera que F y E comienzan el movimiento en D en el mismo momento. Además E llega a B al mismo tiempo que F llega a A. Entonces, la cuadratriz se define como el lugar geométrico de la intersección de la paralela a AB trazada por el punto F, que por tanto se va trasladando con el movimiento de F, con el segmento AE, que igualmente va girando alrededor del centro A según se traslada el punto E.

La trisección de un ángulo arbitrario usando solo regla y compás es imposible. Sin embargo, si se permite utilizar la cuadratriz como una herramienta adicional, es posible dividir un ángulo arbitrario en n segmentos iguales, y por lo tanto, es posible efectuar una trisección (para $n = 3$). En términos prácticos, la cuadratriz se puede dibujar con la ayuda de una plantilla o un compás cuadratriz.

Dado que, según la definición de la cuadratriz, el ángulo atravesado es proporcional al segmento atravesado del lado de los cuadrados asociados que divide ese segmento del lado en n partes iguales, análogamente produce una partición del ángulo asociado también. Y dividir el segmento en n partes iguales con regla y compás es posible como se comprueba el teorema de Tales.

15 Imagen de *"Daniel5Ko"* en Wikimedia Commons liberada al dominio público https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Quadratrix_no_anim.svg

16 Imagen de *"Zorgit"*en Wikimedia Commons con licencia CC BY-SA 3.0 https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Quadratrix_animation.gif

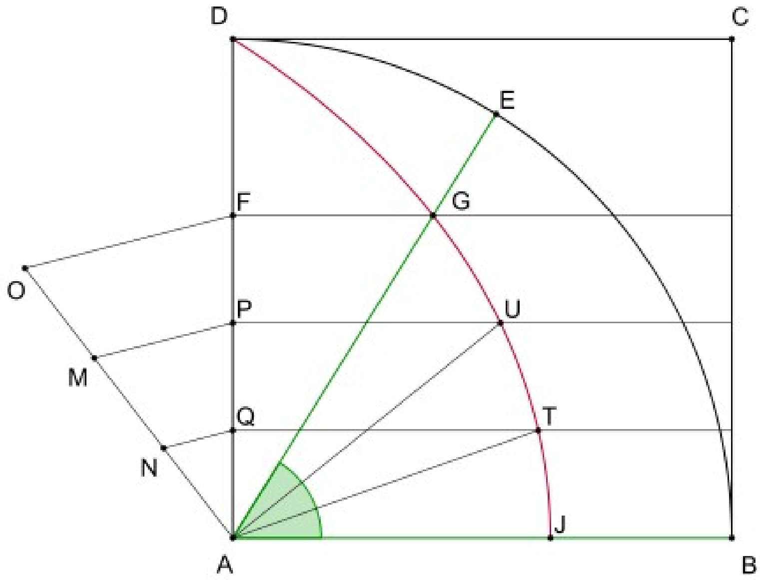


Imagen 18: Trisección del ángulo [17]

Respecto a la **cuadratura del círculo**, éste es imposible sólo con regla y compás. Sin embargo, si se permite utilizar la cuadratriz de Hipias como una herramienta de construcción adicional, la cuadratura del círculo se hace posible debido al teorema de Dinostrato, que permite convertir un cuarto de círculo en un cuadrado de la misma área. En consecuencia, un cuadrado con el doble de longitud de su lado tiene la misma área que el círculo completo.

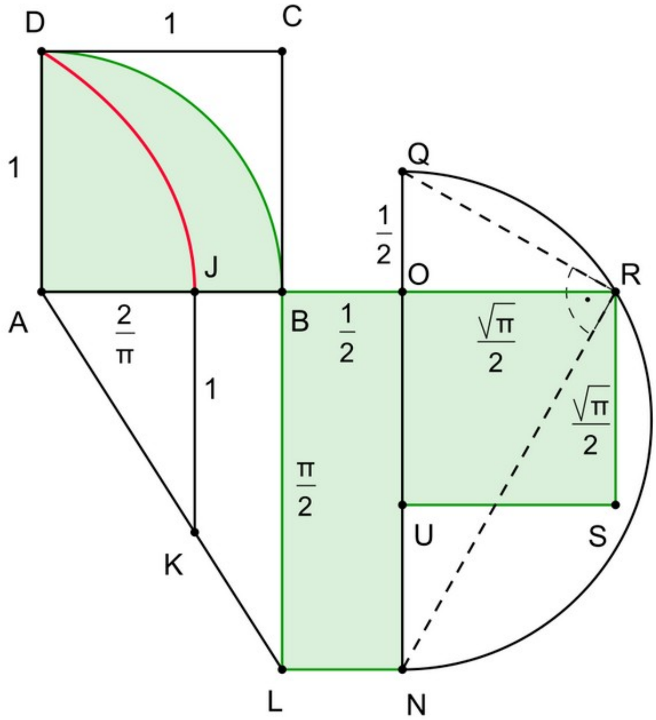


Imagen 19: Cuadratura del círculo de Dinostrato [18]

17 Imagen de *"Kmhkmh"* (CC BY 3.0)
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Angle_trisection_quadratix_hippias.svg

18 Imagen de *"Kmhkmh"* (CC BY 3.0)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_quadrature_quadratix_hippias2.svg

La curva de Arquitas

Arquitas de Tarento desarrolló un tipo de curva no circular que involucra a un cilindro, un toro y un cono de revolución, con la que intentó duplicar un cubo

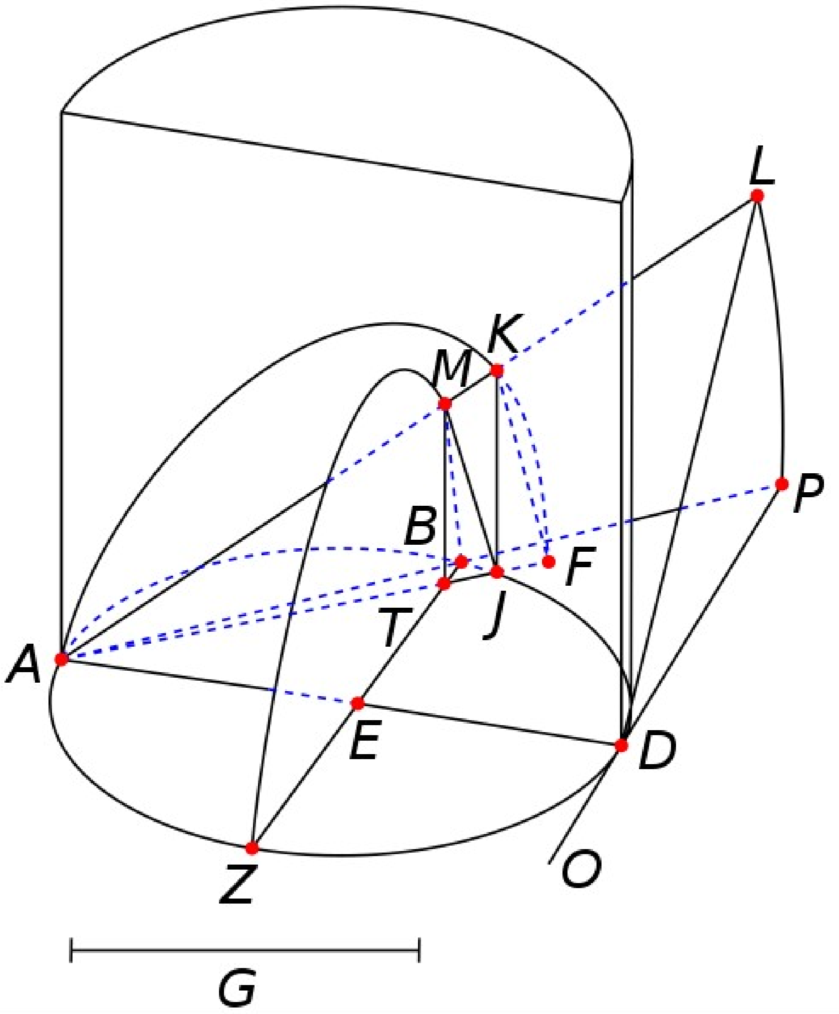


Imagen 20: Duplicación del cubo con el método de Arquitas [19]

19 Imagen de *"Д.Ильин"* (dominio público - CC0 1.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Doubling_of_a_cube_by_Archytas.svg

Platón y Aristóteles

Platón

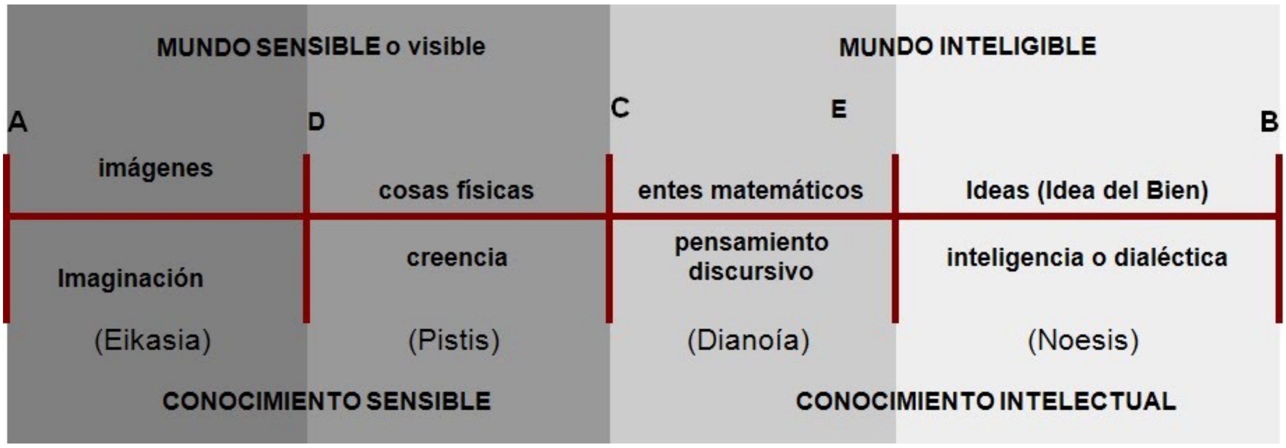
Aunque la filosofía platónica fue más que la pitagórica, Platón fue un pitagórico en aspectos epistemológicos y cosmológicos, según Aristóteles. Para Platón, el alma racional es prisionera del cuerpo material, lo que justifica el desprecio por los sentidos y el entusiasmo por el conocimiento puro, inquebrantable y necesario y las matemáticas de su tiempo, de eso, ofrecían buenos modelos. Es posible el conocimiento porque el Demiurgo ordenó el caos y se sirvió de armonías y razones matemáticas. Eso supuso la posibilidad de estudiar matemáticamente la naturaleza pues está regida por ellas. Pero los principios de las cosas están en la geometría y no ya en los números pitagóricos, dado el conocimiento de los inconmensurables.

A los 40 años Platón viajó a Italia para conocer las ideas de los pitagóricos sobre las matemáticas y la educación. Las matemáticas eran importantes para entrenar al alma en el alejarse de las apariencias de los sentidos y centrarse en las **Formas o Ideas inmutables y eternas de la razón**. Lo conseguía porque los objetos matemáticos son necesarios como las Formas pero plurales como los objetos sensibles, siendo un escalón intermedio para superar a estos y acceder a aquellas. En el 380 a.e,c. al volver de Italia, fundó la Academia que carecía del secreto y misticismo pitagóricos pero que rendía religiosamente culto a las musas, enseñaba teología y teleología cósmica, en la que las matemáticas tenían un papel fundamental, donde se dice que a cuya entrada presidía la siguiente inscripción:

"Nadie entre aquí quien no sepa geometría"

Los objetos sensibles, afectados según Heráclito por el cambio continuo, no se sujetan al concepto de objeto de conocimiento. En un mundo separado de ellos, las Formas son únicas, inmutables y eternas, pueden ser por tanto objeto de conocimiento, ya que la parte racional del alma es de su misma naturaleza. Pero las cosas reciben su realidad por participación en las Formas del mundo más allá del firmamento, patrón de lo que pueda haber de racional en nuestro mundo. Entre los objetos sensibles y los inteligibles están los matemáticos que crean un estado mental entre la opinión derivada de los sentidos y el conocimiento real de las Formas, facilitando el acceso a éste mediante la dialéctica.

La diferencia entre pitagóricos y Platón es la idea de "participación" o imitación de Formas, además dice que aparte de las cosas sensibles y de las Formas están los objetos de las matemáticas que ocupan una posición intermedia, pues difieren de las cosas sensibles en que son eternas e inmutables y de las Formas en que hay muchas semejantes, mientras que la Forma misma es en todos los casos única. Esta función de las matemáticas sancionó la separación de las matemáticas de los cálculos prácticos (la logística) y reafirmó su carácter abstracto y demostrable, pero alentó su uso para escapar de la realidad sensible y no para estudiar geométricamente lo propio de este mundo: el cambio y el movimiento. Metodológicamente el problema es que las matemáticas se basan en puntos de partida (elementos), de manera que los teoremas demuestran de modo condicional o hipotético. La dialéctica filosófica puede, al menos según Platón, llegar a la Verdad incondicionada.



Después, Platón verá en las matemáticas el criterio con que el Demiurgo crea el alma en el mundo sobre un material caótico que fluctúa en un vértigo heraclíteo entre las determinaciones posibles. La creación de la materia a partir del caos consiste en fijar en el espacio las relaciones geométricas de los sólidos regulares (todos los lados son iguales), únicas formas óptimas posibles.

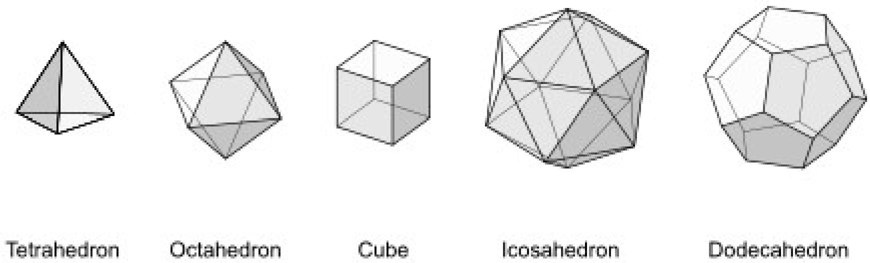


Imagen 21: Sólidos platónicos [20]

Esos cuerpos elementales se componen de triángulos subelementales, aquí parece que quiere introducir los irracionales en el mundo, creyendo que las magnitudes conmensurables e inconmensurables se podrían componer a bases de estos dos irracionales la unidad. Estos triángulos básicos explicarán las corrupciones y generaciones, alcanzando un atomismo geométrico que somete al caos al orden de las Formas. Así el Demiurgo crea la parte inmortal del alma y los dioses creados, los astros, se encargan de las partes mortales del cuerpo.

La primacía de la geometría sobre la aritmética es una característica general de las matemáticas griegas que posiblemente se deba al hecho de que los griegos carecían de una notación aritmética tan desarrollada y manejable como la que intentaron unos siglos después los hindúes a través de los árabes en la baja edad media. La aritmética griega tiene contribuciones importantes y veremos algunas en el caso de Euclides, pero no fue suficiente para crear una teoría de las ecuaciones con el álgebra (nivel de instituto) y que fue desarrollada por los matemáticos árabes en el siglo X y XI, y luego por matemáticos renacentistas.

Platón hizo de la matemática un elemento clave de su cosmovisión (teoría de las ideas, elementos como sólidos regulares, etc.). Aunque no hiciera contribuciones notables al desarrollo de las matemáticas, la influencia que tenía posterior de la Academia es de carácter notable, pues propi-

20 Imagen de *David Eric Ffell* (CC BY-SA 4.0)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platonic_Solids_Composition_51.svg

ció el avance de la matemática de la primera mitad del siglo IV a.e.c.

- Convirtió el **quadrivium pitagórico** (aritmética, geometría, astronomía y música) en elemento básico de la enseñanza en la Academia
- Ésta supuso la mejor escuela de matemáticos de la primera mitad del s IV a.e.c.:
  - **Eudoxo**: creador de la teoría de exhaución, antecedente del moderno cálculo integral.
  - **Teeteto**: contribución a la teoría de los sólidos regulares y los números irracionales
  - **Menecmo**: primero que trató las cónicas.
- Definió los criterios para la demostración matemática como el uso de regla y compás (sin medios mecánicos) o la primacía de geometría sobre aritmética. Esta primacía tenía su origen en la inadecuada notación aritmética de los griegos. La aritmética no dominaría la matemática hasta siglos después con la notación hindú y su importación a Europa por los árabes.

Aristóteles

A diferencia de Platón, Aristóteles no daba primacía ontológica a los entes matemáticos, pero sí consideró la matemática como el paradigma de conocimiento científico (***episteme***), y estableció el ideal de conocimiento demostrativo en los *"Segundos analíticos"*, donde se ocupa de las necesidades específicas de la demostración, así como de la definición y el conocimiento científico.

- Todo el conocimiento debe ser **demostrado mediante silogismos** a partir de definiciones y *"primeros principios"* (verdades evidentes por sí mismas); también admite la demostración por reducción al absurdo, pero es inferior a la demostración directa porque no muestra el *"por qué"* (la causa formal) de lo demostrado.
- El conocimiento matemático sería el más cierto (*episteme*) porque es conocimiento de "formas sin materia"; siendo así el resto de las ciencias más imprecisas.
- No está claro el uso de las figuras matemáticas como "formas" y otros usos aristotélicos de esta noción ya que los estudios sobre las formas en relación a la materia no pueden alcanzar el conocimiento perfecto. El concepto de forma sin materia, objeto de estudio de las matemáticas, no es la forma que aparece en otros de sus estudios y que no se pueden demostrar de forma cierta. Esto es debido a que Aristóteles pudo cambiar de pensamiento mientras escribía sus obras, o que posteriormente otra persona los alterase. Por ejemplo, en *"De Anima"*, el libro de Aristóteles sobre el alma, se dice que el alma es la forma del cuerpo, por lo que la psicología estudiaría una forma, pero no parece ser que esa forma se pueda estudiar de una manera tan rigurosamente demostrativa o llevando a teoremas tan ciertos como las matemáticas.

Los elementos de Euclides

Dando un salto del siglo IV al siglo III, nos encontramos con la primera obra matemática. Las conquistas de Alejandro Magno entre 334 y 323 a.C. pusieron a los griegos en contacto con las matemáticas y la astronomía de los pueblos orientales. En Alejandría, capital de Egipto de los Ptolomeos, se fundó el Museo, una institución dedicada a la investigación en distintas ciencias.

Las matemáticas comprendían no sólo los campos más abstractos de la geometría, la aritmética y el álgebra, también aquellas áreas en las que las matemáticas se aplicaban a terrenos físicos como la geografía, geodesia, mecánica, teoría de máquinas, la estática e hidrostática... que se llamaron "matemáticas mixtas" por mezclar matemática abstracta y física.

Aristóteles ya había bajado las matemáticas a las sustancias mundanas desde los cielos platónicos y los matemáticos helenísticos aumentaron las parcelas de la realidad tratada geométricamente viendo determinados sistemas físicos como modelos de teorías geométricas. Para ello abstrajeron e idealizaron los rasgos cuantitativos pertinentes de los complejos fenómenos naturales y postularon ciertas leyes básicas como proposiciones primitivas: axiomas, lemas o postulados. El núcleo de la física empieza a someterse a procedimientos de los geómetras, matematizándose la naturaleza, en un proceso que posteriormente se generalizaría en el Renacimiento europeo con la Revolución Científica. Los matemáticos helenísticos produjeron ejemplos sorprendentes de teorías axiomáticas sobre el mundo natural y artificial.

Todas las áreas presididas por la geometría eran matemáticas, dejando la física como una disciplina más filosófica, produciéndose así una división profesional entre matemáticos y físicos. Los tres grandes matemáticos helenísticos fueron **Euclides**, **Arquímedes** y **Apolonio**. Hipatia, la última de los matemáticos alejandrinos fue excepcional por unir el dominio de las matemáticas con la dirección de la Escuela Neoplatónica.

No se sabe casi nada de la vida de Euclides, salvo que viviría en Alejandría a caballo de los siglos IV y III a.e.c., y la única información fiable sobre su vida data de varios siglos después de su muerte. Enseñó matemáticas en Alejandría y se le adjudican una docena de obras, de las cuales solo dos han llegado completas hasta hoy. Los *"Elementos"* y los *"Datos"*, que pueden considerarse complementarias. Hubo al menos otras tres obras anteriores tituladas *"Elementos"* (empezando con Hipócrates de Quíos). Su significado viene a ser el de una *recopilación y ordenación de materiales básicos, necesarios para la resolución de problemas matemáticos en general*.

Tampoco se sabe con seguridad qué parte de los *"Elementos"* sería original y qué parte es recopilación de obras anteriores. En todo caso, la **ordenación sistemática y deductiva** (axiomática) del libro en su conjunto sí parece que sería obra del propio Euclides.

Los *"Elementos"* de Euclides son, quizá, la obra cumbre de la filosofía griega, pues ningún griego de la época tacharía esta obra de otra cosa que no fuese filosofía (pues ya hemos comentado el ideal y tipo de conocimiento que perseguían los griegos cuando se referían al hacer filosófico); además de lo asombroso que es en sí la recopilación de saberes disponibles en la época, y la rigurosidad y exactitud en sus contenidos (que se conserva a día de hoy). La obra es tan importante y supuso tal éxito que se puede decir, a propósito del autor que:

> *"Nada sabemos de él. A decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre"* (E. M. Foster. *"Alexandria: a history and guide"* (1922))

A modo de curiosidad, se trata del libro qué cuenta con más ediciones impresas a lo largo de la historia (después de la Biblia).

Contenidos de los Elementos

Consta de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y 465 proposiciones, todo ello distribuido en 13 libros[21].

- Libros 1 a 4: Geometría plana:
  1. Postulados. Triángulos, paralelas y paralelogramos. Teorema de Pitágoras.
  2. Rectángulos ("álgebra geométrica").
  3. Círculos.
  4. Polígonos regulares inscritos en círculos.

  Estos libros parecen formar una unidad, y quizá reproduzcan gran parte del material de los *"Elementos"* anteriores a Euclides
- Libros 5 y 6: Teoría de las proporciones (¿Eudoxo?):
  5. Teoría general de las proporciones, tanto de magnitudes conmensurables como inconmensurables.
  6. Aplicación de la teoría de las proporciones a la geometría plana.

  Hay dos tipos de relaciones de proporción, las conmensurables (que se relacionan de modo racional: fracciones) y las inconmensurables (que se relacionan de forma irracional y que ya vimos descubrieron los pitagóricos (Hipaso de Metaponto).

  Esta segunda parte, la irracional, es la atribuida a Eudoxo de Cnido.
- Libros 7 a 9: Aritmética:
  7. Proporciones y productos entre números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
  8. Números en progresión geométrica.
  9. Números primos.

  El libro VII es el primero de los tres libros sobre teoría de números. Comienza con las 22 definiciones utilizadas a lo largo de estos libros. Las definiciones importantes son las de unidad y número, parte y múltiplo, par e impar, primo y primo relativo, proporción y número perfecto.
- Libro 10: Magnitudes inconmensurables (¿Teeteto?):
  10. Magnitudes inconmensurables.

  El libro X es el más oscuro e intrincado de la obra, seguramente debido a Teeteto y traducido y ordenado por Euclides para la obra.
- Libros 11 a 13: Geometría sólida:
  11. Elementos básicos.
  12. Método de exhaución (¿Eudoxo?).
  13. Sólidos regulares (¿Teeteto?).

  El libro XIII , atribuido también a Teeteto define los 5 sólidos regulares y demuestra que no se pueden construir más que esos 5.

21 Las obras de la antigüedad estaban divididas en "libros", cada libro era un rollo de papiro, y lo que cabía en cada uno es lo que equivale a un "capítulo".

El método axiomático.

Lo más destacado de los *"Elementos"* es el desarrollo del método axiomático. Para ello, Euclides distingue:

- Definiciones : Descripciones de elementos básicos. Por ejemplo:
  - Punto: *"punto es lo que no tiene partes"*
  - Línea recta: *"una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella"*
- Nociones comunes: Enunciado tan evidente que considera que no requiere demostración.
  - *"dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí"*
  - "el todo es mayor que la parte"
- Postulados : Principios más específicos que se piden aceptar para realizar demostraciones.

Todo esto es lo que en lógica formal o matemática nosotros entenderíamos como **axiomas**. Así, para demostrar los teoremas, cada paso que se da en la obra se deduce de la combinación de alguno de estos principios, o de otras proposiciones deducidas previamente a partir de éstos.

La obra presenta **cinco postulados**, todos incluidos en el libro 1, a saber:

1. Dos puntos distintos cualquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. *Postulado de las paralelas*. Si una línea recta corta a otras dos, de modo que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.
   - Este último postulado tiene un equivalente, más usado en los libros de geometría:

     "Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela."

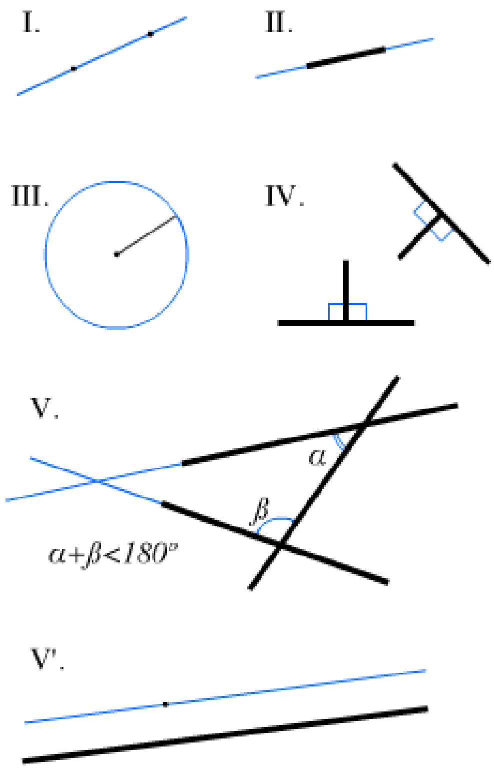


Imagen 22: Postulados de Euclides

Los tres primeros postulados dan cuenta de la limitación de Platón acerca de las demostraciones que se limitan al uso de regla y compás.

Todos los libros (salvo los 8, 9, 12 y 13) contienen definiciones, pero sólo el libro 1 contiene nociones comunes y postulados. La ausencia de las primeras parece lógica (por eso de ser comunes), pero es extraña especialmente la ausencia de postulados en los libros sobre aritmética, pues ninguna de sus proposiciones es derivada de los teoremas de libros anteriores.

22 Imagen de *"Albert1ls"* (CC BY-SA 3.0) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Euclid%27s_postulates.png

Los matemáticos de la Antigüedad ya mostraron extrañeza por la diferencia cualitativa entre el quinto postulado (el de las paralelas) y los otros cuatro, y pensaron que tenía que ser posible *deducirlo como teorema* a partir de ellos y de las otras nociones básicas. A principios del siglo XIX Gauss, Lobachevsky y János Bolyai consideraron la posibilidad de una geometría sin el quinto postulado, descubriendo la **geometría hiperbólica**, razón por la que tiene sentido incluir este quinto postulado en la geometría euclidiana para poder diferenciarla de otras geometrías no euclídeas donde no se cumple dicho postulado.

Algunos teoremas

Libro 1 – Proposición 1

Describe cómo construir un triángulo equilátero a partir de un segmento dado:

- Dibuja el círculo de centro A y radio AB
- Dibuja el círculo de centro B y radio AB
- Dibuja los segmentos BC y AC siendo C el punto donde se cortan los círculos
- $AC=AB$ y $BC=BA$ por ser radios del mismo círculo
- $AB=BA$ por tener los mismos extremos
- Como cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí
- Por tanto $AC=BC=AB$ y el triángulo es equilátero.

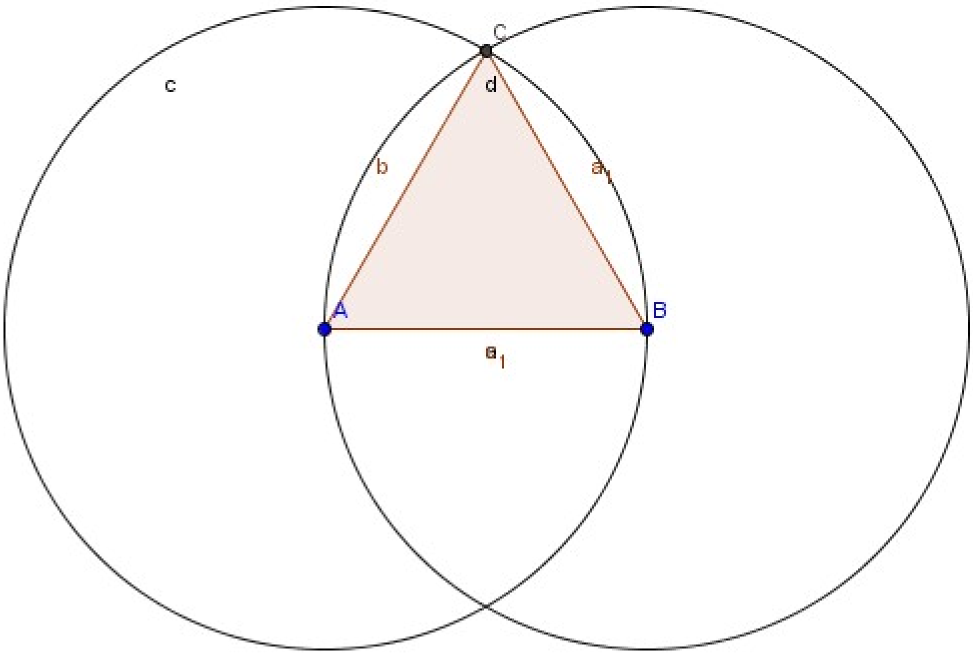


Imagen 23: Euclides - Libro 1, proposición 1[23]

23 Imagen de *"Fracqua"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid_I%C2%B0t1.png

Libro 1 - Proposición 5 (pons asinorum)

> *En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.*

Este teorema fue denominado en la Edad Media como *"Pons asinorum"* (el puente de los burros), pues se consideraba que aquellos estudiantes que llegaban a este punto y no lo entendían eran los "asnos" que no eran capaces de cruzar dicho "puente".

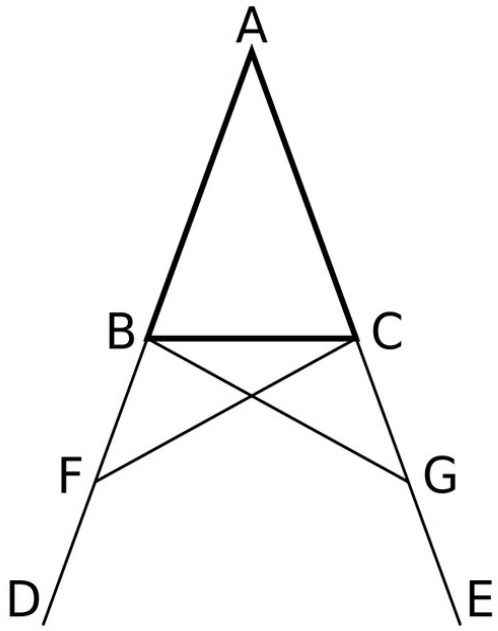


Imagen 24: Euclides - Libro 1, proposición 5 [24]

Sea ABC un triángulo isósceles con el lado AB igual al AC, y sean las líneas rectas BD y CE alargadas en línea recta con AB y AC. El ángulo ABC es igual al ángulo ACB, y el ángulo CBD es igual al ángulo BCE.

Tomar un punto F arbitrariamente sobre BD. Quitar del segmento mayor AE un segmento AG igual al menor AF, y trazar las líneas rectas FC y GB.

Dado que AF es igual a AG, y AB es igual a AC, entonces los dos lados FA y AC son iguales a los dos lados GA y AB, respectivamente, y contienen un ángulo común, el ángulo FAG.

Entonces la base FC es igual a la base GB, el triángulo AFC es igual al triángulo AGB, y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber los opuestos a los lados iguales, es decir, el ángulo ACF es igual al ángulo ABG, y el ángulo AFC es igual al ángulo AGB.

Dado que el entero AF es igual al entero AG, y en ellos AB es igual a AC, entonces el restante BF es igual al restante CG.

Pero se ha demostrado que FC es también igual a GB, entonces los dos lados BF y FC son iguales a los dos lados CG y GB respectivamente, y el ángulo BFC es igual al ángulo CGB, mientras la base BC es común a ambos. Entonces el triángulo BFC es también igual al triángulo CGB, y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes respectivamen-

24 Imagen de *"Dmcq"* (CC BY-SA 3.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid_1_5_en.svg

te, a saber, los opuestos a los lados iguales. Entonces el ángulo FBC es igual al ángulo GCB, y el ángulo BCF es igual al ángulo CBG.

Por consiguiente, dado que se ha demostrado que el ángulo entero ABG es igual al ángulo ACF, y en ellos el ángulo CBG es igual al ángulo BCF, el ángulo restante ABC es igual al ángulo restante ACB, y están en la base del triángulo ABC. Pero se ha demostrado que el ángulo FBC es igual al ángulo GCB, y están debajo la base.

Entonces en un triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales entre sí, y, si se alargan las líneas rectas iguales, entonces los ángulos debajo de la base son iguales uno al otro.

Libro 2 – Proposición 4 (cuadrado del binomio)

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

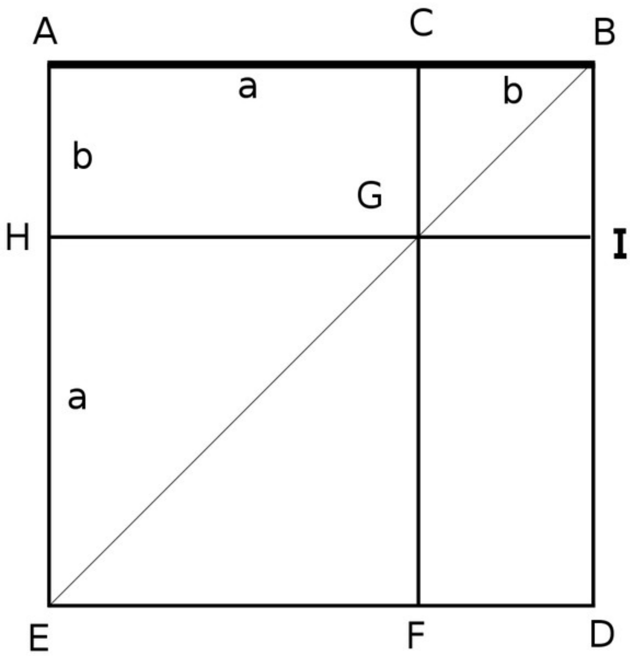


Imagen 25: Euclides - Libro 2, proposición 4 [25]

Los griegos no tenían expresiones algebraicas como las que empleamos comúnmente nosotros, sino que hacían uso de relaciones geométricas para dar cuenta de las mismas. En este caso, la proposición de Euclides se representaría con la ecuación del cuadrado del binomio (esto es un ejemplo de cuán relacionadas se encuentran el álgebra y la geometría, que en cierto sentido son maneras diferentes de expresar las mismas cosas):

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

25 Imagen de *"Pk001"* (CC0 1.0 universal : dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid-elements-II-4-ab.svg

Libro 4 – Proposición 13 (media proporcional)

Dadas dos rectas, hallar una media proporcional

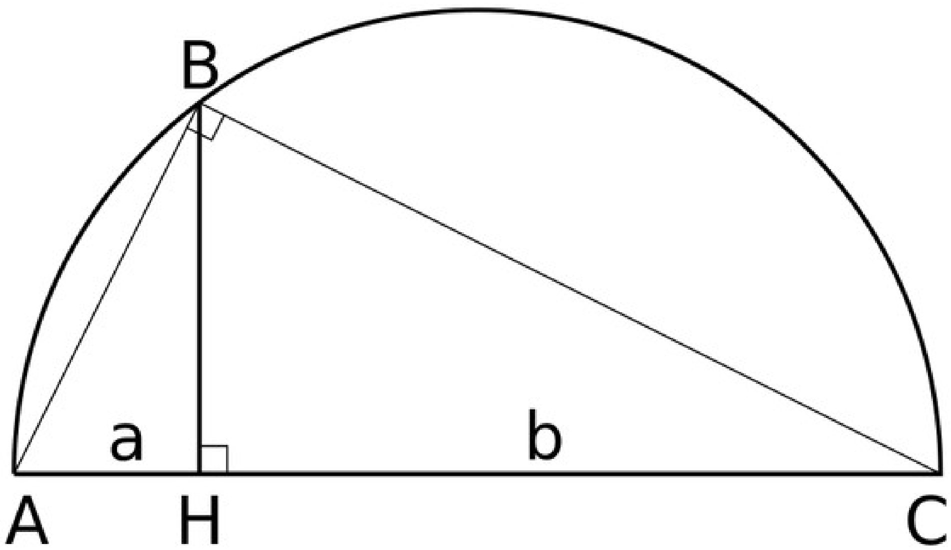


Imagen 26: Euclides - Libro 4, proposición 13 [26]

Este problema equivale a encontrar geométricamente una raíz cuadrada. BH es la media proporcional (o geométrica) entre a y b si $BH=\sqrt{ab}$, es decir:

$$\frac{a}{BH}=\frac{BH}{b}$$

Sea a la longitud de la recta AH y b la de la recta HC. La recta que combina a y b (AC) será el diámetro de un semicírculo. Sobre el punto H elevamos una recta que intersecta el semicírculo en el punto B.

La recta BH tiene una longitud c tal que $c=\sqrt{ab}$.

Dada la semejanza entre los triángulos ABH y AHC que nos aporta el segundo teorema de Tales, sabemos que serán equivalentes las proporciones $a/c=c/b$ (cateto corto entre cateto largo), de modo que operando llegamos a $c^2=ab \rightarrow c=\sqrt{ab}$

26 Imagen de *"Krishnavedala"* en Wikimedia Commons con licencia CC0 1.0 Universal (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geometric_mean.svg

Libro 1 – Proposición 47 (teorema de Pitágoras)

Puesto que en el libro 1 aún no se ha desarrollado el "álgebra" del libro 2, la demostración se basa en proposiciones demostradas ya en el propio libro 1, en particular, la de que dos triángulos o paralelogramos cuyas bases son iguales y están en las mismas paralelas tienen áreas iguales [1.36].

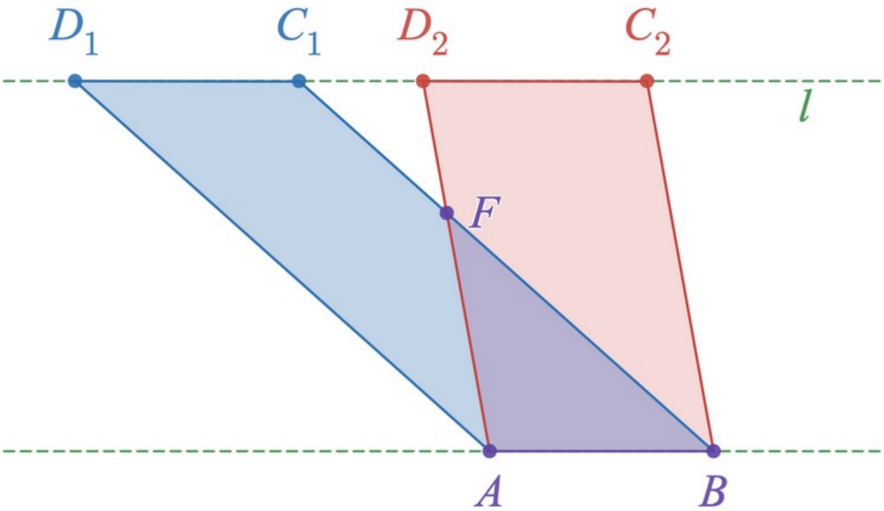


Imagen 27: Euclides - Libro 1, proposición 36 [27]

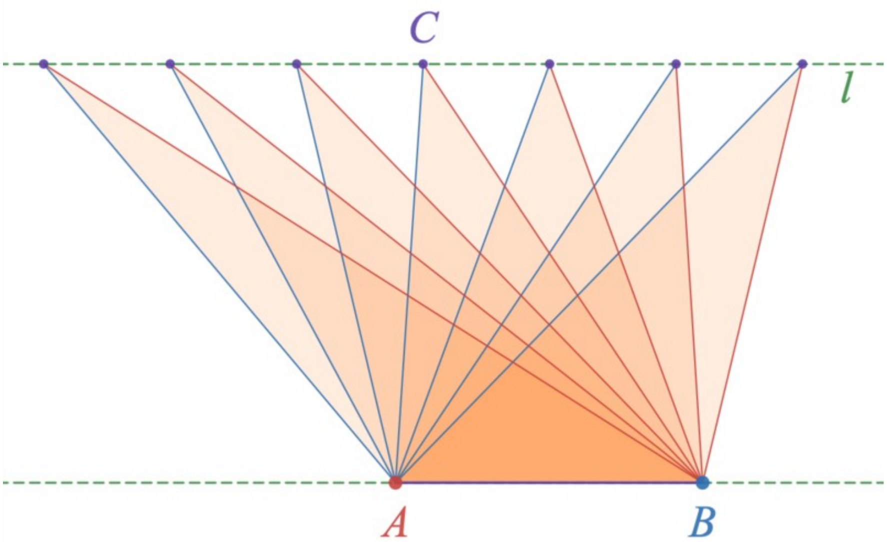


Imagen 28: Euclides - Libro 1, proposición 37 [28]

Haciendo uso de estas proposiciones (en particular la 36), demostrará que para un cuadrado dado (ver el cuadrado $BCDE$ siguiente), por semejanza de áreas demuestra el teorema de Pitágoras donde, para el triángulo ABC tendríamos que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

27 Imagen de *"Jacob Rus"* (CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid%27s_Elements_I.35.png

28 Imagen de *"Jacob Rus"* (CC BY-SA 4.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Lexell%27s_theorem_in_the_plane.png

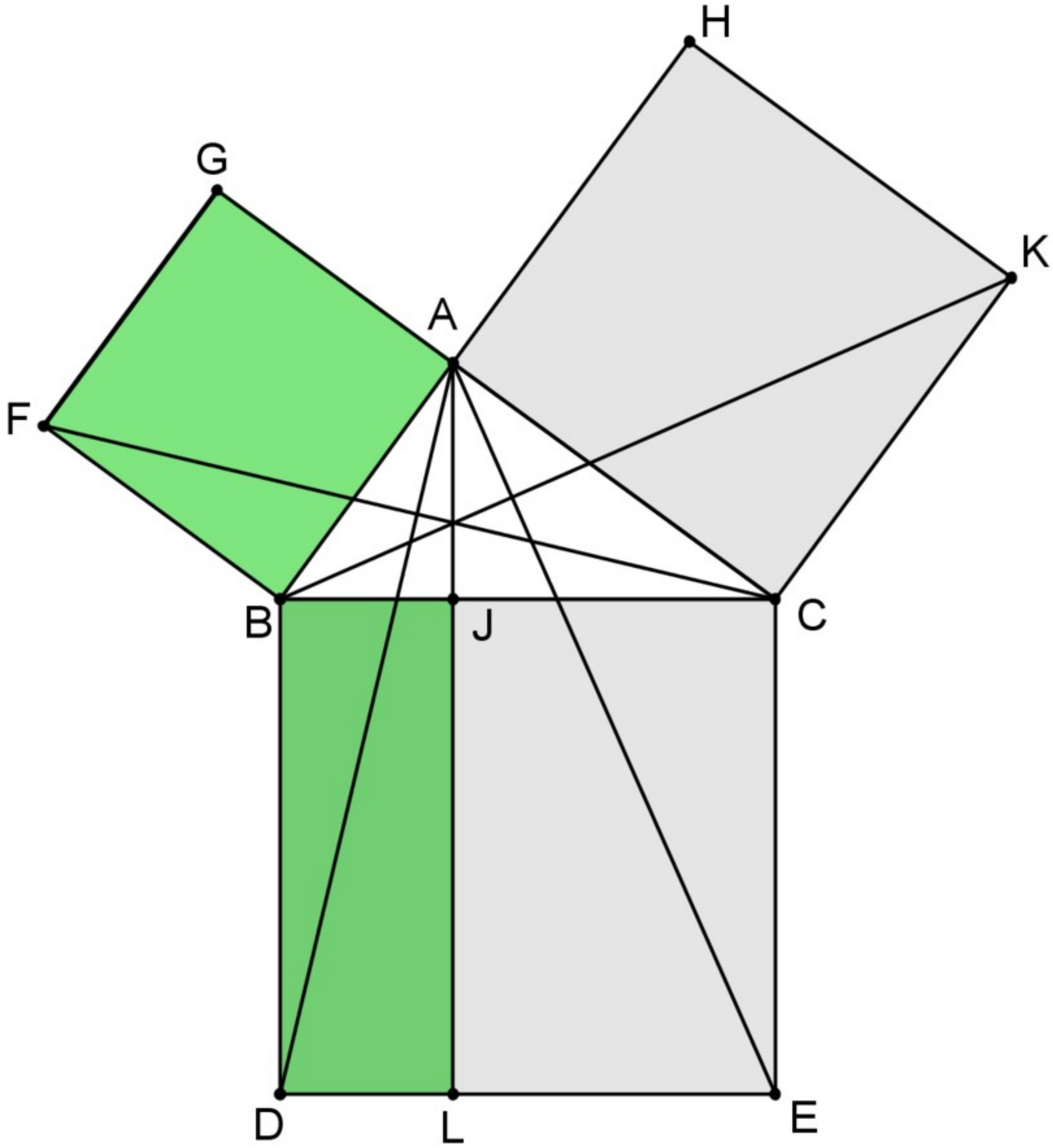


Imagen 29: Euclides - Libro 1, proposición 47 [29]

Lo que hace Euclides es demostrar (para el sombreado verde en este caso) que los triángulos ABD y FBC son iguales (pues comparten un ángulo igual y dos lados iguales). A partir de ahí, el triángulo ABC tendría el mismo área que el BDJ (A y J sobre la misma línea), y que sería la mitad del área del rectángulo verde $BDLJ$. Análogamente ocurre con el FBC y el FBA (A y C en la misma línea), cuya área sería la mitad del cuadrado $FGAB$. Dado que los triángulos tienen el mismo área, también lo tendrán los paralelepípedos cuya área son el doble que éstos (sombreado verde), y de manera análoga ocurre para los sombreados en gris.

29 Imagen de *"Gauss 2009"* (CC0 1.0 Universal : dominio público)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elementa1-47.png

Libro 9 – proposición 20 (teorema de Euclides)

Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos

Supongamos que hubiese una cantidad dada de números primos $A,B,C,\ldots$

Formemos el producto de $A\cdot B\cdot C\cdot\ldots$ y sumémosle 1, siendo D el resultado

O bien D es primo, o bien no lo es

- Si D es primo, existe un número primo mayor que $A,B,C,\ldots$ contrario a lo supuesto
- Si D no es primo, será divisible por algún número primo

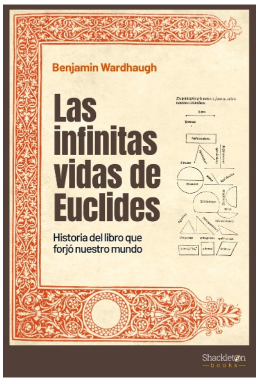
Pero D no es divisible por A, ni por B,... (al dividirlo por cualquiera de ellos da resto 1

Luego D será divisible por algún número primo que no estaba comprendido en $A,B,C,\ldots$ en contra de lo que habíamos supuesto.

Por lo tanto, $A,B,C,\ldots$ no pueden ser todos los números primos

Este teorema es quizá uno de los más interesantes desde el punto de vista histórico, pues los griegos toparon con un concepto con el que no supieron lidiar, que es el de infinito, y que no sería tratado de manera rigurosa hasta las matemáticas del siglo XVIII.

Las infinitas vidas de Euclides. La historia del libro que forjó nuestro mundo (Benjamin Wardhaugh - 2022)



- **Título**: Las infinitas vidas de Euclides. La historia del libro que forjó nuestro mundo
- **Título original**: The Book of Wonders. The Many Lives of Euclid's Elements (2020)
- **Año**: 2022
- **Autor**: Benjamin Wardhaugh
- **Páginas**: 480
- **Editorial**: Shackelton Books
- **ISBN**: 9788413611303

Cuando hablamos de los *"Elementos"* de Euclides no hablamos de un libro como los demás. Si bien no se trata de un ser vivo (atendiendo a la no poco controvertida concepción de "lo vivo" desde el punto de vista de la filosofía de la biología), sí que podemos considerarlo como una entidad compleja que ha sufrido un proceso evolutivo dinámico desde que fue escrito hace unos 2300 años, y que ha sobrevivido a todas las culturas por las que ha pasado y formado parte.

Este proceso de cambio y adaptación es de lo que nos da cuenta **Benjamin Wardhaugh** en esta maravillosa obra. Nos narra cómo se ha adaptado el libro a cada época, con las diferentes versiones que han evolucionado su contenido y alcance; pero también nos habla del impacto y consecuente adaptación de las culturas y sociedades en las que el libro ha tenido repercusión, pues ha constituido un pilar fundamental del conocimiento a lo largo de los siglos, tanto en lo geométrico como en lo metodológico a la hora de ejercitar nuestra capacidad intelectual.

Aunque a continuación sintetizaré las ideas principales de cada capítulo, las palabras que el autor emplea al final del libro a modo de epílogo hacen una exposición perfecta de su obra:

> *"La historia de los Elementos de Euclides es una historia sobre lo que pueden ser las ideas y lo que pueden hacer, y sobre cuánto puede viajar, cambiar y prosperar un libro. Es una historia sobre la matemáticas y su lugar en las vidas y las mentes de personas de muchas culturas. Es la historia de un libro de geometría nacido en el norte de África y que ha influido en el mundo durante dos mil trescientos años.*
>
> *Este libro ha tenido un periplo extraordinario. Ha encontrado lectores por todo el mundo, que han hallado y realizado cosas con él, y sobre él, que les resultaban significativas. A lo largo del tiempo, la austeridad del texto ha permitido que la gente encontrara en él todo lo que necesitaban. Para algunos, Euclides era el gran autor de un gran libro, una obra clásica de la literatura griega; para otros, era un filósofo cuya obra podía guiar a los lectores por los misterios del conocimiento y la existencia; para otros, era un héroe de la vida práctica que podía enseñarnos cómo diseñar una catedral o pintar un cuadro.*
>
> *Con las presiones del mundo de la Ilustración, Euclides, como muchos otros autores y figuras de autoridad de la Antigüedad, empezó a verse con sospecha y sus virtudes tradicionales se desmoronaron. Luego, sin embargo, recuperó parte de su estatus, pues pasó a verse como una forma cambiante capaz de amoldarse a casi cualquier cosa y su maleabilidad se convirtió en una nueva virtud. Si bien el siglo XX, y de momento también el XXI, ha presenciado un cierto eclipse de su libro (se sospecha de él, se recela de él, se deja de usar), también ha visto un nuevo interés por aceptar sus ambigüedades e incertezas: se ha jugado con él y se ha dejado que juegue con sus lectores.*
>
> *Nadie puede prever lo que sucederá con los Elementos de Euclides en el futuro, pues las culturas cambian sin cesar. Ahora bien, el libro parece adaptable como pocos, con más ideas que las que se pueden ocultar tras una máscara cualquiera, tal vez idealmente adecuado al mundo fluido y fragmentado de la era de la información. No cuesta imaginarlo saltando hacia el futuro, nunca comprendido del todo por las culturas con las que entra en contacto. Sin duda, seguirá viviendo sus incontables vidas; antiguo y nuevo, sabio y útil, complicado y juguetón y siempre ligerísimamente inasequible."*

El contenido del libro se estructura en cuatro bloques principales:

1. **EL AUTOR** – Donde se da cuenta de los orígenes del texto en la Alejandría de Ptolomeo I y de cómo éste fue propagándose por diferentes culturas y las respectivas traducciones a diferentes idiomas hasta establecerse casi como el libro de texto predilecto para los estudiantes del Renacimiento, perpetuando así a Euclides, su autor, como el maestro por excelencia de la geometría.
2. **EL SABIO** – Donde se pone de manifiesto la relevancia que, cada vez más, tenía el conocimiento matemático en general (y de los *"Elementos"* de Euclides en particular). De cómo trasciende fronteras y se consolida como pieza fundamental del saber, imbricado en los propios planes de estudio.
3. **EL HÉROE** – Donde se nos cuentan casos prácticos de uso de la geometría, que hacen de valedores para su estudio y dedicación para con la disciplina, y que acabaría ensalzando la figura de Euclides a la de "Héroe". Y donde su obra, los *"Elementos"*, pese a carecer de cualquier tipo de instrucción en cuanto a cómo usarse, ha sido revisada y aplicada de tantas maneras a lo largo de la historia que pareciera le hubieran dotado de vida propia.
4. **LA SOMBRA Y LA MÁSCARA** – Donde se nos muestra cómo los *"Elementos"* pierden su hegemonía, no tanto porque carezcan de valor (siguen siendo de relevancia en gran parte de la ciencia y conocimiento actuales), sino porque comienzan a cuestionarse las sucesivas

versiones, con los errores y añadidos que desvirtúan la calidad de la obra, así como con la concepción de la geometría hiperbólica, que a partir de Lobachevski deja claro que la de Euclides no es la única geometría, y que retomaría análogamente (y en base a ella) Einstein para desterrar la física Newtoniana en pos de la relativista.

Lo que sigue a continuación es un breve resumen de los contenidos de cada capítulo, y donde he querido dar cuenta de las ideas principales, tratando de no desmerecer mucho la gran labor que Wardhaugh ha realizado en cada uno de ellos. Al final se encuentra una tabla donde se ordenan cronológicamente los principales eventos e historias que se narran en estos cuatro bloques.

1 – El autor

1.1 – Alejandría. El geómetra y el rey

Comienza el viaje en la ciudad natal del hombre culpable de todo esto: Euclides (ca. 325 a.e.c. - ca. 265 a.e.c), geómetra griego del que apenas se dispone de datos biográficos fiables, pero del que sí sabemos que desempeñó su vida y labor intelectual en Alejandría en tiempos de Ptolomeo I Soter. Se trata de una ciudad que, si bien como tal no es griega (de hecho pasaría a convertirse en la capital egipcia), se convertirá en un punto de convergencia de todo el conocimiento griego clásico, entre cuyas razones para ello se encuentran los aportes de la matemática y geometría griegas que llegaron de la mano de Euclides.

Al respecto de la geometría griega cabe reseñar lo siguiente:

- No es sólo una herramienta para dilucidar problemas de índole geométrica, sino que el proceso demostrativo que la envuelve es en sí mismo un modo de ejercer el razonamiento.
- Todo el historial de conocimientos geométricos griegos es de tal envergadura que no es posible que una sola mente humana pudiera poseerlos en su totalidad con un nivel de competencia lo suficientemente bueno. Lo que consigue Euclides con sus *"Elementos"* es aunar en un mismo compendio todo ese saber, que en gran medida ya estaba desarrollado en los trabajos de autores previos a él:
    - Trabajos previos de Eudoxo y su estudio de las proporciones, o los de Teeteto para el estudio de sólidos regulares.
    - Se cree que podrían existir compilaciones previas ya denominadas como "Elementos".
- Euclides acomete la labor de recoger y aunar todos estos conocimientos preexistentes, amén de incluir algunos desarrollos nuevos, o de mejorar y extender los ya existentes, aunque siga sin estar del todo claros cuáles de dichos contenidos son de su autoría.

La estructura de su obra plantea y desarrolla los diferentes contenidos de manera argumentada, lo que permite poder realizar deducciones a partir de las bases que se han ido fundamentando previamente. Para ello parte de una serie de axiomas y postulados sobre los que efectúa desarrollos teóricos que darán lugar a las diferentes proposiciones de las que se compone (y se retroalimenta el libro), todo ello recogido en unas veinte mil líneas de texto en griego, que dan forma a trescientas cincuenta proposiciones geométricas recogidas en trece papiros.

No está claro si el contenido de los Elementos que nos ha llegado es la totalidad de la obra original de Euclides, además de que las sucesivas modificaciones que fueron realizándose a lo largo de los siglos llegan a diferir mucho entre sí, con copias que arrastran en ocasiones errores, y que desdibujan la que pudiera haber sido la obra original, donde además tenemos que no hay datos que permitan cerciorarnos de que no se hayan perdido fragmentos de la obra original.

1.2 – Elefantina. Cascotes de cerámica

Tras 2300 años de vida de la obra, no se conserva ningún papiro completo con la versión original completa de los *"Elementos"*, si acaso disponemos de fragmentos con anotaciones sobre contenidos que parecen resúmenes simplificados del texto original, posiblemente apuntes de estudiantes de la época. Aún así, desde que apareció fue copiado y distribuido casi sin cesar, por todos los lugares y en todos los formatos. Quizá el formato más curioso sean unos fragmentos cerámicos de una época cercana en el tiempo a su publicación, durante el mandato de Ptolomeo III. Estos fragmentos son conocidos como *óstracos*, y recogen las anotaciones bien en tinta o bien en gravados sobre su superficie.

Fue en torno a 1906-07 que el arqueólogo Otto Rubensohn descubrió en la isla de Elefantina (isla del alto Egipto) unos óstracos con textos sobre geometría. No sería hasta 1930 que se transcribieran, y cuyo análisis permitiese constatar que se estaba ante la prueba física más antigua del contenido de los Elementos.

No deja de ser curioso el hecho de que tal testimonio no sean más que unos fragmentos (en particular pertenecientes al libro XIII principalmente), pues nos muestra una analogía con la evolución que vendrían a experimentar a lo largo de los siglos posteriores: copias y versiones, que cogen este fragmento de aquí y que lo ubican allá, interpretado de esta manera; o el uso posterior que se daría al libro como manual básico en la educación, pero del que sólo se tomarían determinados fragmentos según el alcance buscado en cada caso. Esto hace de Euclides no un maestro en el sentido magistral, de pizarra, donde dicta los contenidos a estudiar y memorizar (como sí que harían algunos después con su obra), sino que más bien sienta unos preceptos, unas bases sobre las que partir y un método con el que razonar a partir de ellas para deducir y alcanzar nuevos conocimientos (como en efecto se estructura la propia obra). En palabras de Wardhaugh al final de este capítulo:

> *"Sus lectores sabían que siempre podían ir más al fondo, que podían profundizar más y crear todavía más, porque si bien los Elementos ya lo habían hecho todo, aún estaba todo por hacer."*

1.3 – Hipsicles. El decimocuarto libro

Tras la muerte de Euclides, y en parte gracias al legado que genera su obra, la tradición de geómetras que surge tras él es relevante, donde se progresa en conocimientos geométricos que poco a poco irían añadiéndose al contenido original de los *"Elementos"*. Algunos de estos primeros grandes geómetras fueron:

- Arquímedes (287 a.e.c. - 212 a.e.c.) estudia la relación entre volúmenes de esfera y cilindro de misma altura y diámetro están en relación 2:3
- Apolonio (262 a.e.c. - 190 a.e.c) que llevó a cabo una síntesis sobre el estudio de cónicas.
- Eratóstenes (276 a.e.c – 194 a.e.c) que sería director de la biblioteca de Alejandría, donde además introduciría la geometría en el museo. Fue el primero en dar una medición de la Tierra.

Ya en la segunda mitad del siglo II anterior a nuestra era, unos 150 años después de Euclides, Hipsicles reúne y coordina los distintos avances geométricos acometidos desde éste. En particular toma el libro de Apolonio que trata sobre el icosaedro y el dodecaedro y lo mejora añadiéndole un mayor número de pruebas y demostraciones, estructurando dicho libro al modo de los *"Elementos"* con 5 proposiciones, 3 resultados subsidiarios (lemas) y una demostración alternativa a las ofrecidas por Apolonio.

Una mano anónima posterior incluiría esta versión revisada del libro de Apolonio a cargo de Hipsicles como si del libro XIV de los Elementos se tratase, y vinculándolo como continuación del libro XIII mediante la añadidura de una proposición adicional.

Parece un añadido sin importancia, fruto de la propia evolución del conocimiento que se construye sobre los pilares y fundamentos previos a éste, y sin embargo pasó a considerarse parte de los *"Elementos"* durante mil quinientos años como si de una parte más del original se tratase.

1.4 – Teón de Alejandría. La edición de los "Elementos"

Ya en nuestra era, en torno al 370, Teón es un maestro de geometría que se desempeña en una Alejandría que ha visto tiempos mejores, donde su biblioteca ya no existe, y el museo acoge al último reducto de académicos que verá la ciudad (quizá Teón fue el último empleado del museo).

Entre las labores que lleva a cabo además de la enseñanza se encuentra la re-edición de textos y libros para su uso como manuales de estudio, entre los que se encuentran los *"Elementos"* (otro de los título sobre los que trabajó fue el *"Almagesto"* de Claudio Ptolomeo). Dada su meticulosidad en su espíritu revisor, el resultado de su edición de los *"Elementos"* es una obra que en cierto modo simplifica la labor al futuro lector, lo que le hizo tener una gran acogida, hasta tal punto que la mayoría de manuscritos que han sobrevivido hasta nuestros días consisten en copias de la versión de Teón; si bien es cierto que no ha quedado exento de críticas desde la historiografía actual, que lo tachan de realizar "refundiciones triviales" de los textos, y de presentar unos contenidos "matemáticamente banales".

Otro aspecto reseñable de su biografía se centra en su árbol familiar, pues se trata del padre de Hipatia (nacida en el 355), que participaría tanto de la labor docente como de edición y revisión de textos que llevaba a cabo su padre. Por desgracia, y como ocurrirá demasiadas veces a lo largo de la historia, las trifulcas político-religiosas vinieron a dar al traste con su vida, pues se vio inmiscuida en mitad de unas discusiones entre el prefecto romano (de fe cristiana) y el patriarca de Alejandría, y que para desgracia de Hipatia terminó con su asesinato.

1.5 – Esteban el escriba. Euclides en Bizancio

Estamos en torno al año 888, en una Constantinopla que representa el último reducto de la cultura griega clásica y que adolece de la caída y declive del imperio romano oriental. En esta época los académicos bizantinos habían reestructurado el saber en las conocidas como 7 artes liberales:

- Artes liberales de carácter literario: gramática, retórica y dialéctica (lógica)
- Artes liberales de carácter científico: aritmética, geometría, astronomía y música

Los *"Elementos"* son el texto fundamental en el estudio de la geometría, sin embargo, las sucesivas copias (y las interpretaciones que los escribas hacen del texto, en particular del contenido matemático que no siempre alcanzan a entender) suponen una sucesión de fallos y errores que se van acumulando en el tiempo y que desdibujan la voz original de Euclides en la obra resultante que queda atribuida en origen a él.

Casos como la añadidura del tratado de Hipsicles como el libro XIV (probablemente en los siglos V o VI) forman parte de esta desviación del texto original de Euclides, así como un posible libro XV que trataría cuestiones geométricas de sólidos y que se atribuye a tres autores, entre los que se encontraría Isidoro de Mileto. Es decir, llevamos casi 1000 años de reescrituras y añadiduras al texto original.

Una de las múltiples versiones es la que Aretas de Patras (o Aretas de Cesárea) le encarga al escriba bizantino Esteban, que la lleva a cabo en el año 888 sería una de las copias completas más antiguas que se conservan, y que consistía en:

- Unas 20000 líneas de texto
- 388 hojas escritas con unas 26 líneas por hoja
- Se basa en la edición de Teón, especificando que los libros XIV y XV se deben a Hipsicles.
- Añade anotaciones personales en su "diálogo personal" con el libro durante el proceso de edición del mismo, y que reflejan los contenidos de geómetras posteriores a Euclides que el propio Estaban habría trabajado y estudiado.

Una de estas copias sobrevivió junto a otros títulos de la biblioteca personal de Aretas de Patras (obras de Platón y Aristóteles o la única copia conservada de las *"Meditaciones"* de Marco Aurelio) y que serían adquiridas en 1748 por Jacques Philippe d'Orville, y acabarían siendo vendidos en 1804 a la biblioteca Bodleiana de Oxford, donde aún perviven.

1.6 – Al-Hayyay. Euclides en Bagdad

Desde su llegada al poder en el 750, el califato de la dinastía al-Mamún nos presenta un entorno multicultural y cosmopolita, en el que judíos, cristianos (arameos) y musulmanes se tratan entre sí ya sea en persa, árabe o griego (todavía usado en zonas de Siria, Palestina y Egipto), mediante los que realizan intercambios culturales que enriquecen a las diferentes culturas.

El avance en la adquisición de nuevos conocimientos y el intercambio cultural puede apreciarse en la gran colección de cultura griega en posesión del califato, así como de las numerosas traducciones al árabe del saber que acometieron sobre los nuevos elementos del saber adquiridos en aquellos años.

Como epítome de esta concentración cultural tenemos la ciudad de Bagdad, que sería una especie de imán para textos e ideas. En ella, al-Mamún fundaría *"La casa de la sabiduría"*, una suerte de biblioteca donde se almacenaría el conocimiento científico y filosófico que va recopilándose poco a poco desde el califato gracias a sus intercambios culturales, y que estaría cada vez más apoyado por las diferentes élites de la sociedad bagdadí.

Una de estas obras que será traducida serán los *"Elementos"*. La versión de la que parte esta traducción es un poco más corta que la que elaboraría Teón (y que fuera posteriormente usada por Esteban). De los cerca de 20 manuscritos de los Elementos que se tradujeron del griego al árabe, ninguno de ellos incluye los libros XIV ni XV, lo que nos lleva a pensar que las versiones de las que son traducción son anteriores a las que usara Teón y que incluían los añadidos de Hipsicles.

Es de notar que, dadas las diferencias lexico-semánticas entre un idioma y otro, los traductores árabes hubieron de acuñar una serie de nuevos términos científicos para las traducciones de los distintos textos sobre los que trabajaron. Una vez esta nueva terminología está desarrollada de manera solvente, al-Mamún manda elaborar una nueva versión de los elementos actualizada de modo que refleje la nueva terminología.

El encargado de llevar a cabo tal traducción es al-Hayyay, que sería el primer traductor (en el 819) de Euclides al árabe, quien además daría nombres singulares a algunas de las proposiciones (por ejemplo, el teorema de Pitágoras sería "el de los dos cuernos", otras proposiciones tendrían nombres como "pata de ganso" o "cola de pavo real") que ayudaría a una memorización más sencilla de las mismas.

Hubo otras traducciones posteriores de los *"Elementos"* al árabe, en especial una del siglo IX que se convertiría en un elemento clave del saber matemático básico árabe

1.7 – Adelardo. Euclides en latín

Más allá de la relevancia en lo religioso, que será mayor o menor según a quién preguntemos, tanto en las épocas de convivencia en las que se daba intercambio cultural entre los sabios de reinos cristianos y los sabios musulmanes de Al-Ándalus, como con la posterior reconquista de territorios de los primeros a los segundos, la consecuente traducción de textos del árabe al latín supuso un impulso considerable para el saber y el conocimiento de la época.

Fue durante el siglo XII cuando mayor cantidad de textos árabes fueron traducidos, en ciudades como Barcelona, Segovia, Tarragona, León, Tolousse, Narbona, Marsella o Toledo, donde esta última devendría en una situación de esplendor cultural en cuanto a la integración de textos en diferentes idiomas con la posterior creación de la Escuela de Traductores en dicha ciudad.

De nuevo, los *"Elementos"* tienen una incidencia particular en esta etapa, ya que fue en este siglo XII que se tradujeron por primera vez al latín de la mano de Adelardo de Bath (en torno al 1130), un inglés viajero y con afán de conocimientos que también habría trabajado otra serie de textos matemáticos y científicos, como diferentes tratados y tablas de al-Jwārizmī.

Su traducción al latín probablemente fuese realizada a partir de una versión árabe, a su vez traducida de manuscritos previos anteriores; muy probablemente la versión de al-Hayyay. Para ello hubo de necesitar ayuda para con el árabe y el nuevo lenguaje y terminología científicos que éstos habían acuñado para dotar de entidad al texto griego de Euclides y que supondrían una dificultad en el trabajo de traducción de Adelardo.

Esta traducción sería la que introdujese a los *"Elementos"* en la Europa medieval, en la que tendrá una relevancia e incidencias de gran calado, con su posterior inclusión en las universidades que fueron creándose desde la Europa mediterránea hasta Inglaterra.

Esta traducción de Adelardo no sería la única hecha en latín, y de hecho su versión quedaría eclipsada por otras realizadas posteriormente, como la de Roberto de Chester, también en el siglo XII, o la de Campano de Novara en 1250, quien además incluiría nuevas versiones en algunas de las demostraciones que se incluyen en el texto.

1.8 – Erhard Ratdolt. La impresión de los "Elementos"

En torno a 1450 Gutenberg dio un giro de 180 grados a la difusión del conocimiento gracias a la invención de la imprenta de tipos móviles. Lo que antes era una labor tediosa, cara, y en cierto modo monopolizada por aquellos a cargo de realizar las copias, se ve ahora como un proceso "trivial" en el que tiempo y costes se ven reducidos de un modo abismal.

Nos situamos en Venecia, en el 1482, donde en apenas unos meses se han realizado más copias de textos que todas las efectuadas por copistas durante los 1000 años anteriores. La impresión de los *"Elementos"* no queda fuera de esta plétora de impresiones, en un proyecto que acometería, no sin dificultades, Erhard Ratdolt, impresor alemán que desarrolló su carrera en Venecia. Algunos de los problemas a los que hubo de enfrentarse fueron:

- Los tipos móviles de la imprenta requieren de un tipo por cada letra que ha de plasmarse en cada página. Una peculiaridad en el caso de los *"Elementos"* fue la ingente cantidad de tipos para la letra "s" que se necesitaron, ya que incluye muchos enunciados en sus proposiciones de la forma "si..."
- La nomenclatura de los puntos geométricos sobre los diagramas también requería de tipos específicos, ya que estaban denominadas con las primeras letras mayúsculas del alfabeto: A, B, C,...

- La gran cantidad de diagramas que alberga los *"Elementos"* requirió de una gran minuciosidad por parte de Ratdolt.

Como consecuencia de estas complicaciones se desarrollaron nuevas técnicas y procesos de impresión, en particular en lo que a la inclusión de imágenes en el texto se refiere. También es de gran importancia la normativa que comenzó a establecerse en lo referente a la impresión de textos de carácter matemático y científico. Algunos estudiosos consideran a Ratdolt el impresor más innovador tras Gutenberg.

El asentamiento de esta nueva tecnología, así como los sucesivos desarrollos y mejoras en las técnicas de impresión, supusieron también un abaratamiento en los costes. Gracias a esto se posibilita que entre el 1500 y el 1600 viesen la luz unas 40 ediciones diferentes de los *"Elementos"*, la mayoría en latín. De las realizadas en otros idiomas cabe resaltar:

- En 1533 Simon Grynäus realiza la primera versión impresa de los *"Elementos"* en griego antiguo.
- En 1543 Niccoló Tartaglia realiza la primera versión impresa de los *"Elementos"* en lengua vernácula (italiano en este caso).
    - No sería la única, y posteriormente se crearían diferentes traducciones a los distintos idiomas europeos

1.9 – Marget Seymer de su puño y letra. La posesión de los "Elementos"

A medida que la impresión de libros va extendiendo su uso, no todas las versiones que se editan son para los mismos destinatarios, ni todos los bolsillos pueden permitirse adquirirlas por igual. En consecuencia ven la luz diferentes ediciones de los *"Elementos"*:

- Ediciones de mayor complejidad que incluyen un mayor número de comentarios y análisis de mayor profundidad que, en consecuencia, son de mayor precio. Un ejemplo de este tipo sería la que en 1570 realizaría Henry Billingsley, quien primero tradujese los *"Elementos"* al ingles y cuya versión incluyó tal número de anotaciones y apéndices que rondaba las 1000 páginas.
- Ediciones más sencillas y de más fácil acceso, tanto en lo económico como en lo intelectual a la hora de asomarse a ellas. Un ejemplo de estas versiones es la que hizo Pierre de la Ramée, primero en 1549 con reedición posterior en 1549. Ramée era un fuerte crítico con la obra de Euclides, tanto con el contenido de la misma como en relación a la noción de autoridad asociada al griego, que éste negaba fuese al autor de todas las demostraciones que se incluían en las versiones de los *"Elementos"* de las que se disponía. En consecuencia, la versión que él crea se enfoca a una visión más práctica de la geometría y en la que prescinde de la práctica totalidad de las demostraciones, quedando así una versión muy reducida de tan sólo 45 páginas y que vendrían a conocerse como el *manual para el geómetra autodidacta*.

La gran disponibilidad de las versiones del libro, así como la presencia que había venido tomando en los entornos intelectuales, ayudó a que el libro se estableciese como obligatorio en la gran mayoría de estudios superiores. Este currículo que toma como base el texto de Euclides lo hace principalmente en base a los libros I a VI, XI y XII (la geometría del plano, la teoría de proporciones y la geometría espacial), lo que da pie a numerosas versiones reducidas que reflejan dichos contenidos únicamente.

Muchas de estas versiones reducidas orientadas al estudio han sobrevivido junto a las numerosas anotaciones en los márgenes de los estudiantes que las trabajaron, como es el caso de una edición de 1543 de la edición de Johannes Vögelin (un compendio breve del siglo XVI) perteneciente a Marget Seymer.

Con esto puede verse cómo los *"Elementos"* van mutando a través de los años, a partir de una serie de manuscritos mejor o peor tratados en los procesos de traducción en las diferentes lenguas (griego, árabe y latín), a divergir de manera considerable con la explosión de ediciones impresas tras la llegada de la imprenta, en la que las múltiples versiones diferían tanto en contenidos como en la profundidad de las explicaciones y comentarios que incluían, y que en cierto modo cobraban vida propia con cada estudiante que los trabajaba a medida que iba permeando en los intelectuales de la Europa del Renacimiento.

1.10 – Edward Bernard. Minerva en Oxford

Siguiendo el impulso en la generación de nuevas ediciones, a cada cual más variada y enfocada a uso y público concretos, nos encontramos con que entre los siglos XVII y XVIII llegan a convivir hasta 300 versiones distintas. Para un estudioso de Euclides lo normal sería la posesión de una o dos de estas ediciones, aunque tenemos casos como el de Robert Hooke, quién además de ser miembro fundador de la Royal Society y profesor de geometría en el Gresham College, también era orgulloso poseedor de 31 ediciones diferentes.

Del mismo modo que ocurrió en su día con los errores e inconsistencias arrastrados por los copistas anteriores a la imprenta, la coexistencia de tantas y tantas ediciones ocasionaron la ocasional pérdida de calidad en éstas, pues las diferentes motivaciones tras el editor de cada una de ellas nos aleja de los contenidos originales del texto de Euclides. Es por esto que en Oxford, en 1619, Henry Savile reclama la necesidad de adherirse a la fidelidad y contenidos del Euclides original, pues tanta síntesis hace perder el contenido y alcance de unos *"Elementos"* que ya rondaban los 2000 años de edad. Quizá como contrapartida a esta situación, durante 1620 impartió un curso en Oxford para aproximarse a los *"Elementos"* en su esencia original, y que recogió en 1621 en su *"Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis"* (Trece lecciones introductorias para comenzar con los *"Elementos"* de Euclides).

Siguiendo la estela y puntos de vista de Savile aparece Edward Bernard, también profesor en Oxford, sólo que de astronomía y matemática antigua, y quien publicaría numerosos libros sobre temas dispares (pesos y medidas antiguos, etimologías, plegarias, catalogación de escritos en bibliotecas inglesas). Entre sus proyectos se encuentra el continuar el ambicioso plan de Savile de reeditar textos matemáticos antiguos, y al afrontar los *"Elementos"* de Euclides pretende tomar una edición limpia del mismo y lo más cercana al original, sobre el que iría añadiendo los múltiples comentarios y anotaciones aparecidos en ediciones anteriores tanto en griego, árabe como latín, con el fin de generar una versión lo más robusta posible expandiendo, en lo posible, los comentarios para cada proposición. Dado lo titánico de la empresa no consigue finalizarlo, resultando en una amalgama de hojas intercaladas en distintos idiomas, que no quedaría del todo en el olvido.

Sería David Gregory quien recogiese el testigo de tan magno fracaso para llevar a cabo una edición más terrenal de los *"Elementos"* (en griego y latín), y que recogería las proposiciones y comentarios de las ediciones de Savile y Bernard, así como algunas de las revisiones efectuadas por Bernard que no siempre quedan bien acreditadas en la versión de Gregory. Esta edición vería la luz en 1703 con el nombre de *"Euclides quae supersunt omnia"*.

2 – El sabio

2.1 – Platón. El filósofo y el esclavo

"No entre aquí quien no sepa geometría".

Eso dicen que rezaba en la entrada de la Academia (o al menos así se cree desde la primera vez que se recoge una alusión al respecto en un texto del siglo IV). Pese a lo posiblemente apócrifo del enunciado, no le resta un ápice a la intencionalidad con la que se proclama, que es la de recalcar el valor que Platón le otorgaba al conocimiento matemático. De hecho, su interés por la geometría es latente en su propia obra:

- En el *"Menón"* aparece una escena donde su Sócrates establece un interesante diálogo con un esclavo en relación a la geometría, haciendo deducir a éste, mediante su método mayéutico, una serie de razonamientos geométricos que aquel no creía poseer, pero que eran fruto del conocimiento latente en su alma inmortal, por muy esclavo que fuese. Éste es un ejemplo de cómo era la enseñanza de la geometría, donde mediante una discusión en la que se entabla un diálogo acerca de las propiedades de los cuerpos geométrico hasta alcanzar una demostración "diagrama en mano", que da cuenta del conocimiento desarrollado obtenido como consecución de dicho proceso dialógico.
- Es más que clara la importancia que tiene la geometría en su uso como ejemplos y fuentes de ideas a lo largo y ancho de su obra filosófica (sin ir más lejos, la relevancia que tienen los conocidos como sólidos platónicos y su relación para con los elementos fundamentales). Es curioso, también, que el estudio de los cinco sólidos regulares se encuentra ubicado en el libro final de los *"Elementos"*.
- Son numerosos los geómetras que aparecen representados en sus diálogos como Eudoxo de Cnido (que estudió las proporciones) o Teeteto (y su estudio de sólidos regulares), siendo los cuerpos de estudio de ambos los que supondrían una piedra fundacional para la posterior composición de los Elementos.

Como apuntaba al inicio, aunque la filia de Platón hacia la geometría ha sido, quizá, exagerada, sí que tenía una visión pragmática de la geometría en el uso que le daba en su idealismo, y no es de extrañar que las más que numerosas referencias a la geometría en su obra y su filosofía supongan una tentación a la hora de relacionarlo con Euclides. Sin ir más lejos, existe una leyenda medieval en la que se cuenta que Euclides (de Megara), ante la prohibición que caía sobre los megarienses de no poder acceder a Atenas, se hacía pasar por mujer para colarse y asistir a las clases de Sócrates, lo que le habría hecho ser contemporáneo de Platón en la asistencia a dichas sesiones. Este Euclides megariense existió y fue en efecto alumno de Sócrates, sin embargo, el Euclides alejandrino autor de los *"Elementos"* dista suficientes años en el tiempo como para poder desmentir la confusión, aunque en su día fuese un error arrastrado con demasiada frecuencia con el afán de establecer una conexión entre el idealismo platónico y la geometría de Euclides.

2.2 – Proclo Diádoco. Minerva en Atenas

En torno al 450, Proclo era el director de la Academia en Atenas, que regía mediante un comportamiento acorde a su propio modo de vida, ya sea en lo místico en cuanto a su religiosidad, como en tanto que enciclopédico en su lado intelectual. En ella enseña su filosofía de corte neoplatónica, para la cual se sustenta en la geometría de Euclides, amoldada a su visión de la realidad en la que identifica tres niveles que son, en cierto modo, una variación del idealismo platónico:

- El uno
- El nivel de los objetos matemáticos, que son perfectos e inmutables
- El mundo físico en que vagamos los humanos

Proclo entiende la matemática como algo crucial para la vida del filósofo. De hecho, basado en el modo argumentativo del razonamiento geométrico que despliegan los *"Elementos"* escribe sus obras *"Elementos de teología"* y *"Elementos de física"*. Para él los elementos geométricos pertenecen al nivel intermedio entre el mundo material y el eterno, y sirven como nexo entre ambos niveles al presentar una serie de características compartidas entre dichas realidades, como la longitud, el tamaño o la forma.

También realizó comentarios a la obra de Euclides, y si bien no son los más antiguos de los que se tiene constancia, sí son los más antiguos escritos en griego conservados en su totalidad.

El platonismo de su filosofía lo vuelca en su interpretación a Euclides (quizá de aquí el aparente interés por interpretar a Platón y Euclides en un mismo ángulo como se comentaba en el punto anterior). Su modo de entender la geometría y la filosofía se orientan hacia un enfoque práctico y crítico aplicable al razonamiento y la enseñanza. El método que desarrolla a tales efecto consta de varias fases, qué fácilmente pueden ser empleados en la geometría o en la física como método general de razonamiento.

Método de Proclo:

1. Enunciado.
2. Exposición.
3. Definición del objetivo.
4. Construcción.
5. Demostración.
6. Conclusión.

Las enseñanzas y comentarios de Proclo son adoptados por aquellos que estudian los *"Elementos"* con y a partir de él, viajando incluso sus análisis como anotaciones al margen de las copias físicas del texto. Con él se ve alterado el modo de leer la obra de Euclides, que más allá del alcance geométrico de sus proposiciones, pasa a verse como un método de razonar, con la geometría como un modo de agudizar las capacidades intelectuales de la persona, si bien es cierto que este afán por desarrollar la metafísica de Proclo va en detrimento del carácter puramente matemático de Euclides.

2.3 – Hroswitha de Gandersheim. La Sabiduría y sus hijas

Desde que Euclides recogiera su estudio sobre números en los libros VII, VIII y IX pasarían unos 400 años hasta que se disponga de otro tratado completo que trate este campo de estudio. Será Nicómaco de Gerasa quien en torno al año 100 en su *"Arithmetike eisagoge"* (Introducción a la aritmética), un texto que bien podría haber sido empleado como manual de estudio.

En el 500, Boecio retoma el trabajo de Nicómaco de Gerasa y lo extiende añadiéndole mayor número de ejemplos en su *"De institutione arithmetica"*, cuya difusión permitió afianzar el estudio de la teoría de números en la Edad Media

Por otro lado tenemos a Hroswitha, que perteneciendo al convento de Gandersheim elaboró una notable labor literaria que incluye numerosas referencias intelectuales y filosóficas dentro de ellas. Un ejemplo de éstas obras es la dedicada a la *Sabiduría* (Sapientia) en la que tiene lugar un diálogo entre la *Sabiduría* y el emperador Adriano I, donde se establece una discusión sobre números, en particular sobre

- números deficientes – aquellos cuyos divisores suman menos que el número en cuestión. e.g. $8 : 4+2+1 = 7 < 8$
- números perfectos – aquellos cuyos divisores suman exactamente igual que el número en

cuestión. e.g. 6 : 3+2+1 = 6

- números abundantes – aquellos cuyos divisores suman más que el número en cuestión. e.g. 12 : 6+4+3+2+1 = 16 > 12

Su obra es redescubierta a partir del año 1500, desatando un gran interés por dicho contenido en su obra que se aleja del tema religioso que cabría esperar en una novicia. A día de hoy sus obras siguen representándose.

2.4 – Levi ben Gershon. Euclides en hebreo

Las diferentes versiones de los *"Elementos"* que se vienen editando desde su gestación incluyen, todas, una serie postulados y definiciones comunes donde, si bien se mantienen más o menos constantes, pueden presentar variaciones entre unas versiones y otras. Lo que sí es constante es la problemática que subyace en torno al quinto postulado, el de las paralelas (que no vendría a quedar resuelto hasta los trabajos de Lobachevski varios siglos después). Uno de los intentos de análisis más interesantes a tales efectos fue realizado en Hebreo de la mano del rabino Levi ben Gershon en Orange, Francia, en el año 1336.

Hay que recalcar cómo la tradición hebrea difiere un poco del conocimiento de arraigo cristiano que dominaba la Europa continental. El saber hebreo ha bebido de los textos árabes y está ungido en la lógica aristotélica, y en vez de verse impregnado por el escolasticismo europeo, es la obra de Maimónides y su *"Guía de perplejos"* quien enfatiza la importancia de la adquisición del conocimiento como paso necesario en el camino de la perfección del alma. Sin embargo, el pueblo judío sufre una constante política de expulsión en los distintos países en los que ha radicado, llegando muchos de ellos a Francia a partir del 1140, enriqueciendo a su país de destino con todo el saber que importan estos inmigrantes. Estas personas cultas que llegan exiliados traen consigo un conocimiento férreo de la obra de Euclides, que era considerado una obra que toda persona culta había de conocer.

Uno de estos judíos de gran erudición es Levi ben Gershon, quien evolucionara el conocimiento de su comunidad a partir del trabajo y estudio de textos árabes, en particular sobre la física y la lógica de Aristóteles, que le dotan de un carácter racionalista fuertemente comprometido con la ciencia experimental. Es posiblemente el astrónomo más destacado de su generación, y entre sus logros en astronomía cabe destacar la invención de la Ballestilla, instrumento de navegación antiguo que utiliza la altura del Sol y otros astros para orientarse.

En contra del idealismo de Platón o Proclo, ben Gershon entendía los objetos matemáticos como abstracciones obtenidas a partir de datos sensoriales. La matemática no sería sino un modo de poder elaborar más y mejores ideas abstractas como ayuda en la identificación de pautas verdaderas, útiles y necesarias para la obtención de un mayor conocimiento.

Entre las obras que trabaja se encuentran los Elementos:

- Añade comentarios explicativos y aclaratorios en algunas proposiciones.
- No es partidario de alguna de las definiciones que emplea Euclides (el postulado de las paralelas).
- Consideraba que la geometría necesitaba de una nueva fundamentación con el fin de evitar las lagunas y dificultades que ya venían identificándose al analizar la obra de Euclides.

Fruto de estas discrepancias con el contenido y planteamiento en los *"Elementos"*, elabora su propio tratado de geometría, del que sólo se conserva un manuscrito con 24 proposiciones.

2.5 – Christopher Clavius. Los "Elementos" jesuíticos

En 1574, el jesuita Christopher Clavius elabora su propia versión de los *"Elementos"* a la que añade múltiples notas y demostraciones alternativas. Estas añadiduras sobrepasan con creces las de la obra original, al contener 1234 demostraciones (tres veces más), aunque quizá lo más importante sea el enfoque epistemológico con el que acomete su obra, y que supone un giro conceptual respecto a la deriva que venía tomando el saber hasta entonces. Dentro de la labor intelectual que desarrolló Clavius destacan aquellas en el ámbito matemático y astronómico:

- Estuvo involucrado en la elaboración del calendario Gregoriano (entra en vigor en 1582).
- Promovió la enseñanza de las matemáticas como parte fundamental del plan de estudios de los jesuitas.
- Era consciente la importancia que tenían las matemáticas en su vertiente "religiosa", y del carácter que la tradición intelectual había impregnado en éstas:
  - Agustín de Hipona y su influencia por el idealismo platónico de Proclo, donde se establece la relación de la geometría para con lo eterno e inmutable.
  - Boecio y Adelardo, cuyas obras están familiarizadas con las ideas platónicas.
  - Tomás de Aquino, quien alabara las matemáticas en su propia obra.
  - Alberto magno, quien escribiera comentarios matemáticos.

Clavius vive en una época en la que se da el cruce de posturas intelectuales tras el redescubrimiento de Aristóteles en el siglo XII, entre cuyas consecuencias se haya la relevancia al razonamiento silogístico propio de la lógica del estagirita. Sin embargo, Clavius es de los principales impulsores a la hora de dotar a las matemáticas de entidad propia en su modelo deductivo, con el fin de elaborar demostraciones cada vez más depuradas y alejadas de fallos. No es el único, y durante el siglo XVI las diferentes ediciones de los *"Elementos"* ofrecían versiones renovadas y cada vez más sólidas de los postulados que contenían, en la búsqueda quizá de conseguir unos *"Elementos"* intachables y que no adoleciesen de las carencias en la obra de Euclides.

En este panorama Clavius elabora su versión, buscando sintetizar lo mejor de ediciones anteriores, añadiendo numerosos corolarios, lemas y comentarios propios, así como nuevas proposiciones. Clavius añade 4 postulados, 20 axiomas y 585 demostraciones adicionales, muestra del carácter evolutivo de los *"Elementos"*, un ente en sí mismo vivo y en continuo desarrollo.

Dentro de la importancia que otorgaba a las matemáticas lo hacía tanto en su vertiente teórica como práctica. El teórico ofrecía una llave de acceso para las verdades universales, donde la relación que establece entre la matemática y el cristianismo queda reflejada en sus propias palabras: *"nadie puede acceder a la metafísica si no es a través de las matemáticas"*. Por otro lado defendía el carácter práctico de la matemática y su utilidad en las labores mundanas.

Los *"Elementos"* de Clavius son considerados la edición más importante de la obra de Euclides jamás publicada. No sólo constataron el giro intelectual que se estaba viviendo en aquella época y que devendría en la conocida como "revolución científica", sino que influyó directamente en alguno de sus principales protagonistas, como Galileo, quien defendiera la concepción de la naturaleza y nuestra interpretación de la misma a través del lenguaje matemático en que se hallaba escrita. Pero también tuvo una gran influencia indirecta, pues a él se debe la consolidación del estudio de Euclides dentro del plan de estudios de las matemáticas jesuitas (a partir de 1599), donde el contenido de los *"Elementos"*, así como un incremento en contenidos de aritmética, trigonometría, astronomía o teoría musical marcaron el aprendizaje de tantos y tantos alumnos, entre los que se encuentran, por ejemplo, Descartes, Laplace, Diderot o Voltaire.

2.6 – Xu Guangqi. Euclides en China

Xu Guangqi era un mero funcionario pequinés con una visión pragmática que no estaba del todo contento con la interpretación tradicional que el confucianismo imprimía a la educación en China, lo que le hizo estar abierto a establecer intercambios culturales y escuchar alternativas.

En 1590 conoce a Cattaneo, un viajero occidental que la hace ver que existen religiones fuera de Confucio. En 1600 conoce a Matteo Ricci, un jesuita que había estudiado con Clavius y que viajaba a China con intenciones misioneras. Ayudados por el mecenazgo imperial que les facilitaba el llevar a cabo tal intercambio cultural, consiguen despertar el interés de muchos chinos, no sólo en lo religioso, sino también en lo intelectual, pues entre las cosas que traen consigo vienen diversos artilugios, mapamundis y numerosos libros.

La misión jesuita fue bastante exitosa, obteniendo conversiones a buen ritmo (1606: ~1000, 1610: ~2500, 1615: ~5000), y entre los que se encontraba nuestro Xu Guangqi, que además de adentrarse en una nueva religión, se introdujo también en el estudio de las matemáticas de la mano de Ricci, quien le presta su versión de los *“Elementos”* de Clavius, y de la cual acometerían la labor de traducirlo al chino. Aunque no libres de problemas en la traducción (muchos de los términos que acuñaron para tales efectos siguen siendo vigentes hoy en día), una primera versión ve la luz en 1607 incluyendo los libros I-VI.

Xu tenía intereses variados, entre los que se encontraba la hidráulica que de hecho había puesto en práctica para la elaboración de varios proyectos civiles. Su entrada en los *“Elementos”* le lleva a identificar el gran interés práctico que éstos pueden ofrecer a tantas disciplinas diferentes mediante la correcta aplicación de la geometría, amén de su uso como trampolín en el estudio de la teología. Fruto de esta sed de conocimientos, y gracias a la ayuda de Ricci y los libros que trajo consigo, Xu acometió la tarea de realizar traducciones de éstos al chino, dando así lugar a un nuevo intercambio cultural en el que el conocimiento occidental expandía sus horizontes.

2.7 – No culpéis a nuestro autor. Geometría en escena

En 1635 ve la luz *“Blame not our author”,* una obra de teatro donde los entes matemáticos son sus personajes. En una historia en la que el cuadrado pretende redondearse y hacerse círculo, las diversas formas geométricas (cuadro, rectángulo, línea y círculo) se revelan contra la regla y el compás.

Algunas proposiciones de los *“Elementos”* (de la edición de Clavius) forman parte de los diálogos. Se hace uso de la geometría como forma de explorar la irracionalidad, lo que quizá reflejase la complejidad en el estudio del contenido de los *“Elementos”*, como de la matemática en general durante el siglo XVII.

> *“Squared angle was anything but right”*
>
> *(“El ángulo recto era todo menos correcto”)*

2.8 – Baruch Spinoza. El modo geométricos

En la Europa del siglo XVII era común emplear los *“Elementos”* como motor argumentativo e crítica y análisis de temas diversos, ya sean de lógica, medicina, jurisprudencia o teología; precisamente por el modelo de certeza, claridad y transparencia que ofrecen los *“Elementos”*.

Uno de tantos que empleara este modo sistemático a la hora de exponer sus razonamientos fue Baruch Spinoza. Había estudiado a Descartes, publicando en 1663 unos apuntes de los *“Principios de filosofía”* de éste redactados al estilo de Euclides (empleando axiomas, definiciones y proposiciones). Este modo de razonar geométrico le hace sospechar del carácter heurístico que identifica en el empirismo, elaborando su propio pensamiento desde un punto de vista deductivista como el que ofrece el modo de razonar geométrico, donde se tendría que el conocimiento verdadero funciona como la deducción geométrica, en una sucesión lógica de consecuencias a partir de suposiciones previas. Su filosofía queda expuesta en diversos tratados:

- En 1665 desarrolla su *"Tratado teológico-político"* donde expone su idea de Dios, si bien no lo realiza en este modo geométrico y no lo publica hasta 1670.
- En 1677 se publica tras su muerte su *"Ética demostrada según el orden geométrico"*, donde ahora sí hace uso de un estilo geométrico y austero, dando lugar a 207 proposiciones demostradas de modo deductivo. Influido por las obras de Descartes, Hobbes, Maimónides y Ben Gershon. Plantea en esta obra la búsqueda de respuesta a la pregunta de *qué existe*, para terminar concluyendo que todo lo que existe es Dios, y cualquier otra cosa es deducible de ésta:
  - Dios equivaldría a la naturaleza.
  - No hay apego para con el ser humano, a diferencia del Dios abrahámico tradicional.
  - No existe nada sagrado en él, al ser un dios impersonal, lo que da muestra del desprecio que plantea Spinoza en relación al antropomorfismo.
  - Consecuencia de esto desparecen todo atisbo de azar y libre albedrío, pues si todo es consecuencia lógica de la naturaleza/Dios, no hay lugar para la voluntad ni la contingencia.

Esta equivalencia entre Dios=Naturaleza=Realidad=Todo nos ofrece una tautología de la que se extrae que si bien hay razones para todo, no hay causas para nada. Esta obra marca la senda del racionalismo, y se encuentra sometida a debate y discusión aún a día de hoy, siendo una publicación amada y odiada por igual.

2.9 – Anne Lister. La mejora del intelecto

En el siglo XVIII, el método geométrico que emplease Spinoza (entre otros) como nexo entre las ideas y la mente humana deja de estar en boga. Sin embargo, se consideraba la matemática, y en particular la geometría, como un estudio positivo para el desarrollo intelectual y de razonamiento de las personas.

En esta época los *"Elementos"* son todo un éxito comercial, y no cesan de producirse reediciones y nuevas traducciones, así como nuevas ediciones que incorporan demostraciones realizadas de manera algebraica, más presente en los estudios matemáticos de la época y que facilitan la comprensión respecto a las demostraciones geométricas.

Desde el punto de vista institucional, los *"Elementos"* forman parte de los planes de estudio tanto en escuelas como universidades, y es empleada para la formación autodidacta de muchos intelectuales.

Entre los estudiantes de Euclides de esta época se encuentra Anne Lister, quien dejara entre sus diarios numerosas referencias a Euclides y su obra, del que decía que

> *"(...) las razones para leer a Euclides van más allá de la mera mejora intelectual, dirigiéndose hacia la filosofía natural y su campo de acción e innovación mucho más mundano"*

3 – El héroe

3.1 – Peteconsis. Impuestos y abusos

En el Egipto del siglo I antes de nuestra era, la técnica de la agrimensura para la ubicación, dimensionado y medición de superficies de los campos era una técnica de uso común, en particular para la resolución de disputas, así como para la tasación de impuestos. Esta técnica no es sino la herencia de prácticas similares empleadas 4000 años por los babilonios.

Cabe preguntarse si el contenido de los "Elementos" guarda algún tipo de relación con los problemas prácticos que tenían lugar en el Egipto que los vio nacer. El mero análisis etimológico de su campo de estudio (geometría = medición de la tierra) parece indicar que así es.

Esta no sería sino otro ejemplo más entre todos los acontecidos en la historia en los que se da una relación entre el carácter teórico y práctico de las matemáticas. Este carácter pragmático, junto a la rigurosidad que aporta ésta y su formalismo, convertirían a Euclides en una especie de héroe prometéico, que llevaría la luz de la deducción y la demostración rigurosas al mundo de las matemáticas prácticas, conectando así su estructura lógica con el mundo real.

3.2 – La división del monocordio

En la Alejandría del siglo III a.e.c nos encontramos con numerosas obras cuya autoría se vincula, quizá erróneamente, a Euclides. Entre ellas tenemos un tratado sobre óptica de 58 proposiciones que trata sobre la formación de imágenes en el ojo y cómo éstas dependen del tamaño, forma y posición relativa de los objetos. Este no sería sino otro ejemplo de como tratados de carácter geométrico encuentran aplicaciones prácticas. Otros serían los tratados de astronomía de Proclo, o los diversos tratados de música atribuidos a Euclides.

En uno de estos tratado de música se desarrolla una teoría musical más compleja, donde se estudian las vibraciones armónicas de cuerdas que se hallan en proporciones enteras entre sus longitudes (1:2, 2:3,...), y que hoy en día conocemos como los "trastes".

Otro de los temas tratados es la **división del monocordio**, donde se trata de partir una cuerda musical dividiéndola de modo geométrico a fin de que genere una escala musical. Establece una argumentación sistemática sobre distintos valores probados, empleando para ello alguno de los resultados obtenidos en los *"Elementos"*, y relacionando su estudio con la matemática de números irracionales entre los que identifica los "números sordos".

Si bien el texto no deja de ser un poco batiburrillo que discurre en un mundo idealizado, supuso ser influyente para los estudios posteriores de vibraciones y movimientos armónicos, y aunque el autor probablemente no fuese Euclides, no cabe duda de que es un texto de estilo euclidiano.

3.3 – Higinio. La agrimensura

En torno al año 100, Higinio es un topógrafo y registrador de la propiedad romano que hace uso de la **groma** entre sus labores agrimensoras para los repartos de tierras tras las conquistas romanas. En esta época de desarrollo tecnológico e ingenieril romano se generaron múltiples textos y compendios que traten estos temas, aunque pocos quedan atribuidos a un autor en concreto. En torno al siglo IV, un editor desconocido compiló el *"Corpus agrimensorum"*, entre cuyos textos se encuentran algunos atribuidos a Higinio. En esta compilación se recogen:

- Textos sobre agrimensura y medición, así como de la inclusión de métodos iterativos de ensayo y error que, en conjunción con la mejora de la instrumentación posibilita los desarrollos en conocimientos de agrimensura.

- Discusiones sobre suministros de agua, disposición de campamentos militares, cartografía, trazado de itinerarios, listado de fincas, historia de varias colonias romanas, temas agrícolas, e incluso una profecía sobre una ninfa etrusca.
- Incluye definiciones geométricas que coinciden, en parte, con las de los *"Elementos"*.
  - Medición de áreas regulares (rectángulos, trapecios, triángulos, círculos) e irregulares
- Trucos para el uso de instrumentos de agrimensura, como por ejemplo para la medición de un río que no se pude vadear.

Existen diversos *"Corpus agrimensorum"*, pero éste es el más antiguo que se conserva (ca. 500), y se encuentra ricamente ilustrado. Fue largamente copiado en monasterios en los años sucesivos. Como suele ocurrir con las obras copiadas de manera reiterada, en particular cuando incluye un lenguaje y terminología más técnicos, suelen acarrearse errores que suponen un desdibujamiento y pérdida de los conocimientos de agrimensura romana en tanto que nos adentramos en la Edad Media. Uno de estos monjes benedictinos confeccionó un *"Arte de geometría y aritmética"*, donde compiló partes de los *"Elementos"*, del *"Corpus Agrimensorum"* y de la propia obra de Boecio, y que fue empleado (entre otros) como texto de enseñanza de la geometría, pues las escuelas y monasterios medievales estaban incluyendo cada vez más la dedicación a esta disciplina, siendo sus textos principales aquellos asociados a Euclides (directa o indirectamente a través de Boecio), así como las técnicas y métodos descritos en los diferentes *"Corpus Agrimensorum"*, aunque su enseñanza no se enfocaba tanto a un uso práctico para con el campo, sino como una herramienta para el quehacer teológico *a la Platón*, mediante el que poder estudiar la naturaleza geométricamente y así poder ampliar los horizontes de la meditación espiritual. El propio *"Antiguo testamento"* habla de Dios como geómetra o agrimensor, donde la creación sería un acto geométrico. Un autor medieval anónimo recoge lo siguiente:

> "*La intención de Euclides es doble: se dirige al alumno y a la naturaleza de las cosas (..) porque es sabido que la ciencia de la naturaleza y la espléndida sabiduría de Timeo o Platón se demuestra geométricamente.*"

Todo esto da fuelle para considerar la agrimensura como una metáfora del cosmos ordenado, y la ciencia de la geometría como una imagen del acto de creación.

3.4 – Muhammad Abu al-Wafa'al-Buzjani. La división del cuadrado

Abu al-Wafa'al-Buzjani fue un matemático que vivió en la segunda mitad del siglo X en Bagdad, donde tenía un trato frecuente con los artesanos y los problemas de índole geométrico con los que estos se enfrentaban, como la división de cuadrados en 2, 3, 5,... partes iguales para la teselación decorativa que imprimían en los azulejos.

A pesar de encontrarse en la decadencia del imperio islámico, éste estaba viviendo un renacimiento particular durante el gobierno de la dinastía búyida, que emprendió grandes construcciones y proporcionaron un gran impulso a la literatura, la filosofía y las ciencias. Bagdad se erigía como el lugar de encuentro de los intelectuales del mundo musulmán, como Ibn Sina (Avicena) o el propio Al-Buzjani. Entre las hazañas de este último que cabe resaltar se encuentran:

- La construcción de un nuevo observatorio en Bagdad, desde el que realizó numerosas observaciones astronómicas que serían de relevancia para la astronomía posterior.
- Analiza y comenta obras de Euclides y al-Khwarizmi, aunque se han perdido.
- Realiza grandes avances en la trigonometría, en la que introdujo la función tangente y mejoró métodos de cálculo de tablas trigonométricas

- Realiza revisión y correcciones sobre diversos tratados de agrimensura, en particular para el cálculo de áreas de cuadriláteros.
    - Uno de estos métodos consistía en la suma de los lados opuestos, multiplicando sendas sumas y dividiendo por 4, que si bien ofrece una aproximación bastante acertada en ocasiones adolece de graves errores

En general, el trabajo de al-Wafa supone una combinación de conocimientos técnicos con el saber clásico, lo que le lleva a compilar un texto con aquellos saberes que todo artesano debía conocer en relación a las construcciones geométricas, corrigiendo algunos errores que los textos de geometría venían arrastrando con los años, y ampliando contenidos ya presentes en la obra de Euclides, Arquímedes, Herón, Teodosio o Pappus.

Se sale además de la limitación impuesta al proceder con regla y compás, y pasa a usar este último en su variante "oxidada", donde se mantiene su apertura fija para la traslación de longitudes, lo que le permite dar solución a multitud de problemas prácticos. Incluye problemas y desarrollos provenientes de la práctica (de la arquitectura, carpintería, artesanía) para su aplicación en el trazado de ángulos e inscripción de figuras geométricas.

Esto puede verse reflejado en la presencia que tiene la teselación de planos y esferas en el arte islámico, que se correspondería con las características de un cosmos armónico, unificado y relacional.

3.5 – Señora geometría. Las artes liberales

El libro nos evoca la puerta meridional de la catedral de Chartres (Francia), construida en torno al 1150 y que sobrevivió al incendio de 1194 que obligó a reconstruir el edificio. En ella, formando parte de la decoración se encuentra una representación escultural de La Geometría, como una mujer calculando sobre una tablilla, a cuyos pies se encuentra otra figura que probablemente hiciese referencia a Euclides. Junto a ella se encuentran otras tantas representaciones de los saberes que conforman las artes liberales, lo que es de reseñar, pues se trata de la primera vez que se usa la personificación de practicantes de conocimientos seculares para enmarcar una escena teológica. En ella aparecen las siguientes artes y personajes: Pitágoras para la música; Nicómaco, Gerberto o Boecio para la aritmética; Quintiliano o Cicerón para la retórica; Arquímedes o Euclides para la geometría; Sócrates o Platón, incluso Aristóteles para la filosofía (la lógica); Ptolomeo para la astronomía; y Quilón o Donato para la gramática.

En su libro *"Heptateuchon"*, Thierry de Chartres habla de las artes liberales en una época coincidente con el tallado de estas esculturas de la fachada de la catedral, lo que nos permite atender a la relevancia de éstas en aquella época. Sobre ellas hay que tener presente que eran el medio con el que prepararse para comprender las verdades morales y teológicas, y no era común su uso como elemento decorativo. Lo que sí parece cierto es que la asociación de Euclides con el arte de la geometría es una imagen que pasa a formar parte del patrimonio común como un símbolo general de conocimiento y del modo de proceder matemático.

3.6 – Piero della Francesca. Cuestión de perspectiva

La obra pictórica *"La flagelación de Cristo"* pintada por Piero della Francesca entre 1450-1460 presenta unas cualidades geométricas que la vinculan directamente a Euclides. Distintas líneas de horizonte y puntos de fuga nos dan una ilusión de posicionamiento espacial, reflejo del interés por la perspectiva que se viene trabajando desde el Renacimiento, donde esta palabra deja de equipararse a óptica para considerarse como la esencia de la pintura ilusionista (Bruneleschi, León Battista Alberti), que se cuestionan la transición entre la geometría pura y su plasmación en la pintura de la experiencia real. La obra de della Francesca da cuenta de esta transición entre estilos, arrastrando una amplia discusión histórica acerca de la composición del cuadro.

Además de pintor, della Francesca escribió tratados de matemáticas:

- *"Trattato d'Abaco":* manual de enseñanza de aritmética, álgebra y geometría, con gran cantidad de problemas prácticos, en especial geométricos. De gran interés los problemas propuestos para la geometría tridimensional.
- *"De prospectiva pigendi"* (1460): tratado de perspectiva y sus aspectos técnicos (puntos, líneas, superficies), escrito con un estilo didáctico y repleto de numerosos ejemplos. Esta obra se estructura en proposiciones, como en los *"Elementos"*, siendo algunas de las primeras tomadas directamente de la *"Óptica"*, de Euclides, considerando la visión como la proyección geométrica del objeto observada sobre la pantalla de percepción que es el ojo.
- *"Libellus de quinque corporibus regularibus"* (1480): trabajo sobre los cinco sólidos regulares en el que se analizan a fondo los libros XIII y XIV de los *"Elementos"*

Della Francesca define la pintura como una rama de la geometría y la perspectiva como la ciencia de la medición. Su obra se encuentra a medio camino entre dos tradiciones, la de los artesanos y la de los académicos. Sus obras no se publicaron durante su vida, aunque sí fueron conocidas y empleadas por autores posteriores, como el *"Divina proportione"* de Luca Pacioli, que incluye (sin acreditar) el *"Libellus"* de della Francesca. Esta obra de Pacioli estaba ilustrada por su amigo Leonardo da Vinci, lo que ayudaba a una mejor comprensión del texto, influyendo e el resurgimiento del estudio de los sólidos regulares de la mano de autores como Durero o Wenzel Jamnitzer, quien escribiera *"Perspectiva corporum regularium".*

3.7 – Euclid Speidell. Enseñar y aprender

Euclid Speidell era el ejemplo medio de "practicante de matemáticas", pues se desempeñaba en labores que daban un uso práctico a las matemáticas: desde clases particulares de aritmética a revisor fiscal, hacía de Euclides y sus *"Elementos"* un herramienta de gran utilidad (trazado de planos, calibración de horóscopos, agrimensura, fabricación de instrumentos, docencia, contabilidad y fiscalidad, perspectiva, astronomía, hidráulica, arquitectura,...).

Las matemáticas que practicaba Speidell eran un modo de dotar de orden a un mundo caótico, lo cual plasmó en la extensión del manual de enseñanza de su padre (John Speidell) *"An arithmetical extraction"*, que permitió una popularización de la obra de Euclides más allá del ámbito de los eruditos.

3.8 – Isaac Newton. Principios matemáticos

La copia de los *"Elementos"* que Newton poseía (edición impresa en Cambridge en 1655) se encontraba ampliamente anotada a los márgenes tras el estudio profundo que el británico hiciera de Euclides. Si bien es cierto que en primera instancia sólo se aproximó a ella de modo superficial, y tras haber estudiado a Descartes, retomó el estudio de la geometría ahora sobre una edición de Isaac Barrow que prácticamente reescribió con sus anotaciones y reformulaciones algebraicas.

Newton toma y traduce las proposiciones de Barrow a lenguaje algebraico, empleando números y variables simbólicas (x e y). se centra en los cuatro libros de geometría y proporciones.

Este estudio sería la simiente con la que a mediados de 1660 se adentraría en el análisis matemático, lo que desembocaría en la publicación en 1687 de sus *"Philosophiæ naturalis principia mathematica"*, el cual escribe con estilo y apariencia euclidianas, mediante una sucesión de teoremas y demostraciones, en el que hace uso de la geometría para tratar de comprender la realidad. Así, con la geometría y el álgebra se obtienen herramientas para leer el libro de la naturaleza característicos de la filosofía natural newtoniana.

Newton sería la evolución del "practicante de matemáticas" (como lo fuera Speidell), pero llevado al extremo. En sus estudios realiza un avance significativo al adentrar el estudio matemático en el mundo infinitesimal, pudiendo afirmarse que

> *"la matemática de Newton proviene de la de Euclides, pero es una matemática que Euclides no hubiera reconocido"*

4 – La sombra y la máscara

4.1 – Mary Fairfax. Euclides y la camisa de fuerza

En 1795, en Burntisland (Escocia), nos encontramos con Mary Fairfax: mujer autodidacta cuyo desempeño intelectual no es bien visto por su propia familia, que la creía enloquecer.

Se debe esto a la visión neoplatónica de Thomas Taylor en relación de las bondades de la geometría para ordenar la mente y entrar en contacto con lo divino y lo eterno. Taylor publicó la traducción de los comentarios de Proclo de los *"Elementos"*.

Mary estudia en efecto la obra de Euclides, además de leer a poetas románticos (Blake, Shelley, Wordsworth). Como el resto de estudiantes de su época encuentra tedioso, aburrido e inútil el desempeño y esfuerzo que requieren los *"Elementos"*, donde el asno no era quien no pasaba del *"pons asinorum"*, sino quien lo cruzaba, signo manifiesto de locura.

A partir de 1800 se había extendido la idea de que mucha matemática podía volver loco al estudiante, y que se hacía necesario un estudio en dosis adecuada, siguiendo el equilibrio aristotélico. Se pensaba que volvía a uno antisocial y aislado de los sentimientos humanos, que no eran susceptibles de demostración ni deducción, facilitando por tanto el desequilibrio de la mente. En estos términos, William Paley dijo que

> *"El sistema de Cambridge quiebra a dos o tres cada año, donde algunos se vuelven locos y otros quedan tan debilitados en cuerpo y alma que son incapaces de hacer nada más el resto de sus vidas"*

Se cuenta incluso con documentación de casos de crisis atribuidos al estudio de las matemáticas, como el de Francis Galton en 1840, o el de James Maurice Wilson de 1859.

Parece normal entonces la consternación de los padres de Mary Fairfax ante el interés de su hija por las matemáticas. Trataron de inculcarle los valores de la Biblia, pero Mary era curiosa y se adentró de modo autodidacta en la historia natural de la ciencia, la astronomía (de la mano del maestro del pueblo), del latín (que le enseña un tío suyo), de la costura, la danza, la aritmética o el piano. Debido a esta inquietud intelectual acaba topándose el álgebra y con Euclides, que en aquellos tiempos eran el material recomendado para el estudio de la perspectiva, la astronomía y las ciencias mecánicas. Gracias al tutor de su hermano consigue una copia de los *"Elementos"* y la *"Introducción al álgebra"* de 1782 de John Bonnycastle.

En 1804 se casa con su primo y marcha a Londres donde trata de seguir sus estudios sin el apoyo de su marido, que murió 3 años después. Queda entonces liberada, pudiendo hacer grandes progresos, tanto en conocimientos como en contactos científicos y matemáticos. Vuelve a casarse, con William Somerville, quien si le mostrara apoyo y soporte.

En los siguientes 50 años produjo publicaciones científicas y obras de divulgación de astronomía, física, meteorología y geografía; que fueron ampliamente traducidas e incluidas como material de estudio en diferentes universidades.

Muere en 1892, ante lo que el *"Morning Post"* publicó:

> *"Por muchas dificultades que podamos tener este siglo para escoger un rey de la ciencia, no tendremos ninguna duda para saber quién es la reina de la ciencia"*

4.2 – François Peyrard. El manuscrito 190

Peyrard es un erudito con especial interés en geometría y matemáticas, que publica obras de filosofía e historia, y que fue cofundador de las *Grands Écoles* parisinas. Acometió la traducción de los *"Elementos"* al francés, a la par que realiza una crítica de las versiones previas existentes.

En 1808, mientras revisa unos manuscritos antiguos de los *"Elementos"* que parecen una versión "diferente", comienza a sospechar de la versión de Oxford que usa como base de su traducción, pues difería enormemente con el contenido de estos manuscritos. Comparó los contenidos con 23 manuscritos "prestados" (obtenidos tras las incursiones napoleónicas) de bibliotecas italianas. Se encontró con que el manuscrito 190 de la Biblioteca Vaticana, que dataría del siglo IX (en torno a los años 830-850), y que incluía los libros I-XIII además de los *"Datos"* y los libros XIV y XV, ofrecía diferencias sustanciales en cuanto a contenido en relación al resto de manuscritos, lo que le lleva a considerar que se encontraba ante una versión del "texto puro" de Euclides. Como consecuencia pasó a tomarlo como texto preferente para su traducción.

En 1809 presenta el manuscrito 190 y su versión de los *"Elementos"* al comité formado por Delambre, Lagrange y Legendre, que le animan a completar su trabajo que terminaría por ver la luz en tres volúmenes editados en 1814, 1816 y 1818, aunando en total más de 1600 páginas que incluyen las versiones en griego y latín a dos columnas, con la traducción al francés a pie de página, incluyendo referencias a las distintas fuentes (ediciones previas y manuscritos consultados), así como explicaciones a las erratas que corrige.

Su trabajo pone de manifiesto el carácter dinámico y sometido a alteraciones de los *"Elementos"*, en especial con las diferentes versiones desde la de Teón. Han pasado 1200 años desde el texto original, que ha quedado envuelto en dudas con cada versión que difiere de la primigenia, y donde la ajetreada vida de los palimpsestos, copias a medias (o directamente mal hechas), traducciones de mayor o menor fidelidad, así como el sin fin de añadiduras en función de los intereses de la edición, han dado lugar a numerosas variaciones y errores que se tornan difíciles, sino imposibles, de rastrear.

4.3 – Nikolái Ivánovich Lobachevski. Paralelas

Tras más de 2000 años en que los "Elementos" han disfrutado de una incontestabilidad fuera de toda duda (aunque siempre hubo cierto recelo en algunos aspectos), ¿que pasaría si se demuestra que alguno de sus postulados no es tan firme como se da por sentado?. En la Rusia del Zar Nicolás (en torno a 1826), Lobachevski se adentra en analizar el postulado de las paralelas, que ya traía debate a sus espaldas aunque no hubiera conseguido fructificar hasta entonces.

Según él, el postulado de las paralelas contenía una "laguna crucial", siendo incompleta e imperfecta. A fin de poder dilucidar el problema de la aceptación sin más del postulado (recordemos: *"por un punto dado exterior a una recta sólo seo puede trazar una línea paralela a ésta"*), trata de construir una nueva geometría que pueda prescindir del mismo. Redefine el concepto de paralela, de modo que para un punto y línea dados, todas las líneas que pasan por dicho punto son tales que, o bien cortan a la línea dada o no lo hacen, de modo que las paralelas vendrían a a ser las líneas en la frontera de tales clases.

Teniendo esto en consideración, los primeras 28 proposiciones se mantenían invariables, ya que eran independientes de dicho postulado; pero a partir de aquí comienza a obtener resultados extraños, como que la suma de todos los ángulos pertenecientes a un triángulo no necesariamente hayan de sumar 180º.

Para tratar con esto, emplea métodos trigonométricos sobre triángulos que no pertenecen al plano, sino que se encuentran sobre superficies esféricas (trigonometría esférica), permitiendo así obtener una nueva posibilidad de consideración del espacio. Anunció sus descubrimientos en una conferencia en 1826, aunque no gozó de una gran recepción. Sin embargo, a partir de los estudios de Riemann en la década de 1860, y el uso que de esta geometría hiciera Einstein para dar cuenta de su teoría general de la relatividad, posibilitó el que se hiciera justicia con el descubrimiento de Lobachevski.

Tras Einstein, la geometría de Euclides queda relegada a un modo de entender la descripción real del espacio que no es el único, pues éste queda mucho mejor conceptualizado al hacer uso de la geometría no-euclídea desarrollada por Lobachevski.

4.4 – Maggie y Tom. La tortura de la mente

Tom y Maggie Tulliver son hermanos de grandes aptitudes matemáticas. Hijos de un molinero, éste pone a su hijo como pupilo de un graduado en Oxford que se rige por unos modelos clásicos de enseñanza que no terminan de encajar con la mentalidad de Tom, más intuitiva que deductiva, lo que le lleva a pedir "no más Euclides", pues el tutor le hacía memorizar los postulados de los *"Elementos"*. Tenemos aquí un ejemplo de modelo educativo fallido del siglo XIX, al desvincularse de la humanidad, capacidades y necesidades del estudiante. Por su parte, Maggie fue ninguneada por Sterling (el tutor), que creía a las chicas incapaces de profundizar en nada.

El padre se arruina, lo que lleva a Tom a dejar sus estudios. Maggie toma los libros de texto de su hermano y comienza a estudiarlos, en parte como desprecio hacia la discriminación recibida, amén de la curiosidad e intereses personales.

El modelo seguido por el tutor, clásico y memorístico, estaba muy alejado de la realidad práctica que sí era considerada en otros lugares como Francia o Alemania, que no bebían las aguas por el estudio de Euclides como piedra angular, donde además disponían de mejores manuales de geometría. Sin embargo, el estilo de escritura y pedagógico de Euclides había calado hondo en el resto de disciplinas británicas.

En realidad, tanto el tutor de Oxford, Tom y Maggie, no son sino personajes de *"El molino del Floss"*, de Mary Ann Evans (que publicaba con el pseudónimo masculino de George Elliot) quien era considerada la mejor novelista británica de su época, y que daba cuenta en sus obras de su interés por las matemáticas. En esta obra, Mary Ann Evans da cuenta de su propia experiencia con el modelo educativo británico y las pocas opciones que ofrecía al sexo femenino, con salvedades como el Ladies' Queen College de Londres en el que ella cursó sus estudios. En este centro, el profesor Francis Norman enseñaba la geometría actualizada, más atractiva y mejor fundamentada para el aprendizaje que el arcaico modelo centrado en la geometría griega.

En *"El molino del Floss"* se analiza cómo puede llegar a fallar el sistema educativo, tanto para los discípulos en sí como para las personas en tanto que a sus intereses, aptitudes o sexo se refiere. Muestra claramente también los problemas de ceñirse a currículo académico arcaico y oxidado.

En el último libro de Elliot (Evans), *"Daniel Deronda"*, recoge una reflexión a tales efectos:

> *"Los hombres pueden soñar con demostraciones y extraer un mundo ilusorio en forma de axiomas, definiciones y proposiciones, con una omisión de los hechos final firmada*

Q.E.D., sin embargo, ninguna fórmula del pensamiento salvará a los mortales de los errores de nuestra apreciación imperfecta de los temas sobre los que hay que reflexionar."

4.5 – Simson en urdú. El imperio euclidiano

En 1884 se publica un compendio de los *"Elementos"* de 275 proposiciones y escrito en urdú (el idioma que se hablaba en Pakistán en India).

Mientras tanto, en Gran Bretaña, cuando se habla de Euclides se hacía referencia a la edición en inglés de 1756 de Robert Simson (edición de carácter docente y enfocada a la pedagogía de la geometría). Esta versión sólo incluía 8 de los 13 libros (los seis primeros, el once y el doce: referentes a la geometría en dos y tres dimensiones y el estudio de proporciones), y sin embargo fue la versión predominante y que sirvió de base a versiones posteriores (como la de John Playfair de 1795 y la de Isaac Todhunter de 1862) que se basaban directamente en la de Simson.

Consecuencia de la ocupación británica de la India tiene lugar una mezcolanza de tradiciones científicas. Si bien los conocimientos indios de todo menos pobres, fueron tratados con condescendencia por parte de los británicos, pues no los consideraban basados en el razonamiento deductivo de Euclides, negando la validez de tales conocimientos matemáticos o astronómicos. Es más, consideran que su misión como buenos colonizadores es la de instruir a estos pobres indios a fin de sacarles de su ignorancia. Esto da lugar a la traducción de diversos textos (entre ellos la versión de Simson de los *"Elementos"*) a las diferentes lenguas de la zonas colonizadas. De esta manera, Euclides pasa a incorporarse al currículo educativo de estas zonas igual que pasara en Gran Bretaña.

El resto de las no pocas invasiones británicas pasó a proceder de manera análoga, institucionalizando el texto de Euclides allá donde toman por propia la tierra conquistada. Se podría decir que tuvo lugar una globalización de Euclides, de la que sin embargo han sobrevivido pocas copias de estas traducciones.

4.6 – Sus rivales modernos

A finales del siglo XIX no son pocos quienes dudan de la adecuación de los *"Elementos"* como texto base, al que además acusan de abuso de autoridad amparados en un Euclides cuya obra original está más que desvirtuada a lo largo de las diferentes versiones y ediciones.

Desde el punto de vista británico, además, se tenía una gran desconexión entre su matemática y la que se venía ejerciendo en el resto de Europa, lo que además requería una reforma profunda en la docencia y programas de investigación en matemáticas.

Por ejemplo, James Joseph Sylvester se autodenominaba un "odiador de la geometría" (en tanto que odiador de Euclides). Aparecen, a su vez, numerosos grupos de presión que exigen una reforma anti-Euclides.

Aún así, todavía contaba con defensores de la talla de Augustus de Morgan, Arthur Cayley o Lewis Carroll, quien escribiera *"Euclides y sus rivales modernos"* (1879), donde presenta un diálogo entre Minos (un tutor de Oxford) con el fantasma de Euclides.

Lo que se encuentra en cuestión es la propia verdad el sistema más allá de su utilidad. En palabras de William Kingdon Clifford:

"El geómetra de hoy no sabe nada sobre la naturaleza del espacio a una distancia infinita. No sabe nada sobre las propiedades de este espacio presente en una eternidad pasada o futura."

Con el cambio de siglo se intentan fundamentar las matemáticas desde la lógica, labor que se extendió también hacia los *"Elementos"*, con resultado deficiente. Esto termina por confirmar las muchas lagunas que habían ido identificándose en la obra a través de los años por los diferentes estudiosos del texto. Bertrand Russell escribió:

> *"Sus definiciones no siempre definen, sus axiomas no siempre son indemostrables, sus demostraciones exigen muchos axiomas de los que no se es consciente"*

Que Ian Mueller remataría con contundentes afirmaciones tales como:

> *"Es difícil ver que aquí haya demostración alguna (..) innecesariamente complejo (..) claramente insuficiente"*

En 1901 el reformador educativo John Perry propone un enfoque práctico (aprender haciendo) en lugar de tanto razonamiento abstracto, dando lugar a que en 1904 Euclides deje de ser obligatorio en Cambridge, reflejo de lo que iría ocurriendo poco a poco en el resto del país. Euclides perdía así su hegemonía.

4.7 – Thomas Little Heath. Con verdadero amor

Tras el descalabro en su hegemonía, un improbable héroe surgen en socorro de la causa de Euclides. Thomas Little Heath, de origen humilde, se gradúa en la universidad y entra a trabajar en el ministerio de hacienda, donde alcanza la jefatura del mismo. Vivió una época de caos en el ministerio debido a los enormes gastos derivados de la Primera Guerra Mundial, en los que estuvo a cargo de administrar y controlar los gastos, que llevó a cabo de manera metódica e inflexible.

Entre sus hobbies estaba la matemática griega antigua. Entre 1885 y 1940 publicó unas 500 páginas con versiones en inglés de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Euclides; una historia de la matemática griega en dos volúmenes y un libro sobre la matemática de Aristóteles.

Publica su propia versión de los *"Elementos"* (1908) tomando como base la de Heiberg, pues era partidario de la pulcritud y lo genuino de la versión dada por el *"manuscrito 190"*. En su versión busca presentar un Euclides que sea coherente, accesible y, en lo posible, sencillo. Para ello enriquece su versión con anotaciones, tanto históricas como aclaratorias del contenido para facilitar la tarea al lector. Su versión no ha dejado de ser reeditada y empleada como base para nuevas ediciones desde su publicación hasta el día de hoy.

Era partidario de la traslabilidad de la matemática griega al álgebra moderna, y pretendía combatir el abandono reciente a Euclides dentro del sistema educativo británico, defendiendo la robustez de los *"Elementos"* frente a la "nueva geometría" y los manuales alternativos que se consideraban mejores que la obra de Euclides, posiblemente movido por su gran amor y pasión por la matemática griega antigua.

4.8 – Max Ernst. La máscara de Euclides

Uno de los cuadros del artista alemán Max Ernst lleva por título *"Euclides"*[30] (1945), cuadro que se resiste a una interpretación sencilla, como podría equipararse a la interpretación de la obra del griego. La disposición del mismo parece darnos a ver una figura humana, una figura que no está ahí, y donde una pirámide invertida en lo que vendría a ser el rostro hace las veces de máscara ocultando el rostro del supuesto Euclides que queremos ver retratado en él. Sin embargo, una máscara no garantiza que haya un rostro tras ella, ocultándonos a su portador del mismo modo que Euclides y su obra se ocultan y mutan a través de la historia, en un relato que en ocasiones parece imposible de acometer.

30 https://www.menil.org/collection/objects/1789-euclid

4.9 – Diseños euclidianos

El gran viaje de Euclides y su obra, transformados a través de los años, con sus altos y bajos en lo que a su relevancia se refiere, no pasa desapercibido para los artistas. Muestra de ello son las numerosas referencias que a él se hacen en la producción artística reciente. Por ejemplo:

- La obra *"Euclides"* de Max Ernst vista en el punto anterior.
- El ilustrador Crocket Johnson tiene toda una colección de pinturas matemáticas[31] entre las que caben destacar:
  - *"Demostración del teorema de Pitágoras"* (1965)
  - Un total de 25 pinturas basadas en *"The world of Mathematics"*, conjunto de ensayos matemáticos escrito en 1956 por James R. Newman
  - Exposición llevada a cabo en 1967 en Nueva York con el nombre *"Abstracciones de abstracciones"*.

  Su arte le lleva a obtener nuevas aproximaciones geométricas para el valor de π, así como un nuevo modo de construir un heptágono regular, que se publica en la *"Mathematical Gazette"*
- La edición de los *"Elementos"* de Oliver Byrne, profesor irlandés de matemáticas que proyectaba una reforma en la docencia de las matemáticas en la que la geometría se enseñara mediante diagramas en color. Publica su edición en colores de los seis primeros libros en 1847 llamada *"The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners"*. Si bien su edición no tuvo mucho éxito (además de su coste), lo cual le llevó a la bancarrota, desde el punto de vista estético recibió una valoración muy positiva. Además, en tiempo reciente, Nicholas Rougeaux la publica libre de derechos en una versión interactiva disponible online, donde se extiende el proyecto inicial de Byrne (6 libros) para acometer la totalidad de volúmenes de los *"Elementos"*.
- En el mundo de la moda también se ve reflejado, en particular en la colección *"Zodiac"* de 1938/39 de Elsa Schiaparelli, que se considera que está inspirada en los *"Elementos"*.
- También en el sector modista tenemos a Madeleine Vionnet, a la que se calificó como la "Euclides de la moda" por lo geométrico en las formas de sus diseños.
- La artista de Oriente Medio, Monir Shahroudy Farmanfarmaian, realiza mosaicos con espejos de carácter geométrico, empleando técnicas artesanales que se remontan a la Edad Media, y que nos recuerda a la relación que mantenía al-Buzjani para con los artesanos.

4.10 – Lambda. Espacio curvo y energía oscura

Euclides es todo un icono cultural en el siglo XX, y su geometría, si bien no hegemónica, no había desaparecido de los libros de texto. Es más, las olimpiadas matemáticas que tienen lugar cada año incluyen, desde 1959, al menos un problema de geometría euclídea en su prueba final.

Su nombre no ha quedado tampoco relegado al olvido, y no es extraño verlo denominar calles, plazas, animales... o el telescopio espacial "Euclid", que fue definitivamente lanzado el 1 de julio de 2023 por la ESA con la finalidad de explorar el espacio lejano y así poder estudiar mejor las propiedades de la energía oscura y su ritmo de expansión.

Los resultados que se obtendrán se consideran relevantes para entender mejor el corrimiento al

31 https://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/mathematical-paintings-of-crockett-johnson

rojo que nos permita estudiar el ritmo de expansión del universo, que parece darse a ritmos más acelerados a día de hoy que lo que se estimo lo hacía en el pasado.

Las imágenes de alta resolución que recoge la sonda "Euclid" permiten determinar cómo se distorsionan las imágenes de 1000 millones de galaxias a causa de la masa de objetos cercanos, pudiendo así elaborar un mejor mapa de la distribución de masas del universos, pudiendo calcular mejores valores para el estudio de la expansión cósmica. Quizá así podamos conocer un poco mejor la energía oscura de este universo en expansión, así como su geometría a grandes escalas, sea esta euclidiana o no.

Cronología de los Elementos de Euclides

AÑO	QUÉ
ca. 325 a.e.c.	Nacimiento de Euclides
ca. 300 a.e.c.	Euclides compila su obra *"Elementos"* donde recoge compendios previos de geometría griega (Eudoxo y Teeteto entre otros) a los que añade demostraciones adicionales y nuevas proposiciones de autoría propia
ca. 265 a.e.c.	Muerte de Euclides
ca. 250 a.e.c.	Registros sobre cerámica (óstracos) del contenido de los *"Elementos"*, durante el reinado de Ptolomeo III. Serían posteriormente descubiertos en 1906-07 por Otto Rubensohn
siglo III a.e.c.	Numerosos tratados de base geométrica son atribuidos a Euclides, como las 58 proposiciones de óptica que tratan geométricamente el proceso de visión, o tratados de música que analizan las vibraciones armónicas, como el tratado sobre la división del monocordio.
ca. 150 a.e.c.	Hipsicles recoge los nuevos contenidos geométricos elaborados a partir de Euclides, en particular los de Apolonio y los compila en un tomo que una mano anónima incluiría como el libro XIV de los *"Elementos"*.
siglo I a.e.c.	La agrimensura empleada en Egipto para la medición de tierras (y su posterior tasación impositiva) es un ejemplo práctico de cómo la matemática puede tener gran valor en el "mundo real". Esto da pie a considerar a Euclides (y su obra) como "héroe prometéico" que trae la luz de la deducción y demostración rigurosas para ser empleadas de modo pragmático
siglo I	Higino, agrimensor romano, es un ejemplo de aquellos expertos en hacer uso de la geometría para la medición de tierras e ingeniería romanas, de vital importancia en su proceso expansionista. Fruto de estos conocimientos se compilan diversos *"Corpus agrimensorum"*, que serían largamente copiados a través de los años, suponiendo una piedra de toque para la incursión de la geometría en la Edad Media.
100	Nicómaco de Gerasa escribe *"Arithmetike eisagoge"* (Introducción a la aritmética), primer texto sobre teoría de números desde que Euclides trabajase lo propio en los libros VII, VIII y IX de los *"Elementos"*

370	Teón de Alejandría elabora su propia versión de los *"Elementos"*, de un carácter más sencillo y accesible y sobre la que añade anotaciones explicativas. Es la principal versión completa de que se dispone hasta que en 1808 François Peyrard descubre manuscritos más antiguos sobre los que compila una versión de los *"Elementos"* más fiel a la original de Euclides.
siglo IV en adelante	Se exageran ciertas posturas en relación a la importancia de la geometría en Platón con, quizá, una supuesta intención de vincular a Euclides hacia una filosofía idealista de corte platónico. Se arrastra y consolida una falsa leyenda acerca de cómo "Euclides" se colaba en Atenas para aprender junto a Platón de Sócrates (en realidad era Euclides de Megara), o de cómo el ateniense tenía tal filia por la geometría que la convertiría en condición indispensable para ser admitido en su Academia.
ca. 450	Proclo ensalza la geometría de Platón y su interpretación neoplatónica dentro del corpus teórico de los *"Elementos"* de Euclides, que comenta y estudia más allá del alcance geométrico de sus proposiciones para extraer de ellos un modo de razonar y desarrollar la capacidad intelectual de la persona, enfatizando la metafísica del neoplatonismo de Proclo más allá de las intenciones originales de los *"Elementos"*.
500	Boecio elabora *"De institutione arithmetica"*, una expansión de la obra de Nicómaco de Gerasa que extiende con numerosos ejemplos y que ayuda a afianzar el estudio de la teoría de números en la Edad Media
819	Al-Hayyay realiza la primera traducción de los *"Elementos"* al árabe, en una Bagdad multicultural que se enriquecería de múltiples traducciones de textos griegos y que ampliaría, en consecuencia, la riqueza gramatical de si idioma para dar cuenta de los nuevos conceptos matemáticos que incluiría a su saber.
888	En una época donde las sucesivas copias y reescrituras de los *"Elementos"* ha dejado un panorama plagado de errores e imprecisiones, Aretas de Patras encarga al escriba bizantino Esteban una versión de los *"Elementos"* de mejor calidad, donde éste añade a la versión de Teón en la que se basa comentarios a partir de escritos de geómetras posteriores a Euclides. Una copia de esta versión hallada en 1748 por Jacques Philippe d'Orville sería la versión completa más antigua de una edición de los *"Elementos"*
segunda mitad del siglo X	al-Wafa al-Buzjani lleva a cabo su labor intelectual en la que trabaja la astronomía, la geometría, la trigonometría (introduce la función tangente y elabora métodos de cálculo de tablas trigonométricas), la aritmética y el álgebra. Es muy importante la relación de su labor teórica con la realidad práctica de su época, donde sus trabajos en geometría se ven reflejados en la teselación característica del arte islámico, que vería así influenciado por el germen geométrico de Euclides.
antes del 1000	Hroswitha, novicia del convento de Gandersheim, elabora una notable obra literaria que está plagada de conocimiento filosófico e intelectual más allá del esperado en el ámbito de la religiosidad (por ejemplo, la obra Sapientia, en el que la Sabiduría y el emperador Adriano entabla un diálogo sobre la teoría de números). Su obra es redescubierta a partir del 1500, siendo estudiada y valorada de modo considerable a partir de entonces hasta nuestros días
ca. 1130	Adelardo de Bath elabora la primera traducción al latín de los *"Elementos"*, probablemente a partir de una versión árabe (quizá la de al-Hayyay) para la que necesita-

	ría ayuda tanto con el árabe como con la nueva terminología científica acuñada por éstos durante sus traducciones desde el griego
siglo XII	Roberto de Chester elabora otra traducción al latín que en cierto modo eclipsa la realizada por Adelardo de Bath
1150	Las artes liberales forman parte del elemento decorativo de la puerta meridional de la catedral de Chartres, acompañando a cada una de ellas con una personificación de alguien representativo para ellas: Pitágoras para la música; Nicómaco, Gerberto o Boecio para la aritmética; Quintiliano o Cicerón para la retórica; Arquímedes o Euclides para la geometría; Sócrates o Platón, incluso Aristóteles para la filosofía (la lógica); Ptolomeo para la astronomía; y Quilón o Donato para la gramática
1250	Campano de Novara realiza una versión en latín de los *"Elementos"* de mejor calidad que las existentes previamente, a la que dota de nuevas versiones en algunas de las demostraciones que se incluyen en el texto
ca. 1330	La obra intelectual de Levi ben Gershon es desarrollada. Es quizá el intelectual hebreo más destacado de su tiempo, resultado de la tradición racionalista obtenida tras el estudio de textos árabes y la interpretación que éstos hicieron de Aristóteles, del que estudia su física y su lógica. Aclamado astrónomo, quizá el mejor de su era, fue el inventor de la ballestilla (instrumento de orientación basado en la altura del Sol y otros cuerpos celestes). Elabora sus propios tratados de aritmética, y comenta, analiza y critica los *"Elementos"* de Euclides. Elabora su propio tratado de geometría del que sólo se conserva un manuscrito de 24 proposiciones.
1482	Erhard Ratdolt realiza la primera versión impresa de los *"Elementos"* (en latín). Algunos de los problemas a los que hubo de enfrentarse en el proceso supusieron avances y mejoras en las técnicas y procesos de impresión (necesidad de numerosos tipos para una misma letra, técnicas para la inclusión de imágenes y diagramas, normativa para la impresión de textos científicos y matemáticos)
1533	Simon Grynäus realiza la primera versión impresa de los *"Elementos"* en griego antiguo
1543	Niccoló Tartaglia realiza la primera versión impresa de los *"Elementos"* en lengua vernácula (en italiano)
1545	Pierre de la Ramée, fruto de su crítica a los contenidos y desarrollos del texto de Euclides (así como de la errónea atribución al griego de las muchas demostraciones incluidas en las ediciones previas) realiza una edición reducida y de claro carácter práctico (*"manual para el geómetra autodidacta"*) de tan sólo 45 páginas.
1570	Henry Billingsley realiza la primera traducción al inglés en una edición ricamente comentada y llena de análisis que alcanza las 1000 páginas
1574	Christopher Clavius elabora una edición de los *"Elementos"* que, tratando de refinar la calidad de sus contenidos en un marco deductivista, trata de sintetizar lo mejor de las ediciones anteriores, añadiendo además gran cantidad de postulados, axiomas y demostraciones adicionales. La gran influencia que tuvo su versión de los *"Elementos"* la hacen ser considerada la más importantes del texto de Euclides.
1599	A partir de esta fecha el plan de estudios jesuita reconoce la importancia de la obra

	de Euclides (en la edición de Clavius) y la incluye, junto a contenidos adicionales de aritmética, astronomía, trigonometría y teoría musical dentro de su currículo, del que aprenderían alumnos como Descartes, Laplace, Diderot o Voltaire.
siglo XVI	Se "estandariza" el uso de los *"Elementos"* como material de estudio en cursos superiores, que principalmente emplean los libros I-VI, XI y XII (es decir, geometría plana, teoría de proporciones y geometría espacial), lo que da lugar a numerosas ediciones orientadas al estudio y de las que se conservan copias repletas de anotaciones por parte de aquellos que las trabajaron (como por ejemplo, la copia de 1543 posesión de Marget Seymer)
ca. 1460	Piero della Francesca y su obra *"La flagelación de Cristo"* son muestra de la transición pictórica hacia la perspectiva que se viene dando desde el Renacimiento. Escribió además varios tratados matemáticos: *"Trattato d'Abaco"*, *"De prospectiva pigendi"* (1460) y *"Libellus de quinque corporibus regularibus"* (1480), este último "fusilado" por Luca Pacioli en su, que influiría en el estudio posterior sobre la perspectiva geométrica por autores como Durero o Wenzel Jamnitzer, quien escribiera *"Perspectiva corporum regularium".*
1607	Ve la luz la primera edición de los *"Elementos"* en chino, de la mano de Matteo Ricci (Li Na To), jesuita de misión en China, y Xu Guangqi, un joven funcionario con múltiples intereses y que terminaría por traducir al chino varias de las obras que los jesuitas trajeran consigo en su misión, ayudando a la expansión del saber occidental en el país chino.
siglo XVII	Dada la ingente cantidad de ediciones de los *"Elementos"* existentes, no faltan quienes coleccionen y atesoren diferentes versiones, como Robert Hooke, quien tuviera 31
1621	Fruto de su rechazo hacia la deriva que venía tomando el sinsentido de las ediciones realizadas sobre los *"Elementos"*, Henry Savile elabora un curso en Oxford (1620) de carácter introductorio al texto original de Euclides tratando de ceñirse lo más posible al alcance y contenidos iniciales. Estas lecciones quedan recogidas en una edición impresa en 1621 denominado *"Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis"* (Trece lecciones introductorias para comenzar con los *"Elementos"* de Euclides).
siglo XVII	Edward Bernard, siguiendo la estela reformista y ortodoxa en cuanto al acercamiento a la obra de Euclides, trata de elaborar la "edición definitiva" mediante una compilación que aglutinase todos los comentarios y análisis para las distintas proposiciones aparecidas en las diferentes versiones aparecidas hasta entonces de los *"Elementos"*. Esta empresa titánica nunca llegó a concluir.
1635	Se estrena la obra teatral *"Blame not our author"*, donde las formas geométricas (Cuadro, Rectángulo, Línea y Círculo) toman protagonismo en la ansiada lucha de Cuadro por redondearse (asemejando el problema clásico de cuadrar el círculo), y donde las formas geométricas se revelan contra la tiranía impuesta por la regla y el compás.
1655-1660	Isaac Barrow publica su edición de los *"Elementos"* primero en latín (1655) y después en inglés (1660). Además publica una edición de los *"Datos"* en 1657. Sus ediciones de los *"Elementos"* son las que estudiaría Isaac Newton.

1660	Newton profundiza sus conocimientos en geometría mediante la edición de Barrow, reescribiendo su copia de los *"Elementos"* mediante un lenguaje algebraico similar al que empleamos hoy en día
1663	Spinoza publica unos apuntes de los *"Principios de filosofía"* de Descartes redactados al estilo de Euclides (empleando axiomas, definiciones y proposiciones)
1677	Tras la muerte de Spinoza, se publica su *"Ética demostrada según el orden geométrico"*, donde ahora sí hace uso de un estilo geométrico y austero da respuesta a la pregunta de *qué existe,* razonando deductivamente a través de 207 proposiciones que todo lo que existe es Dios, y que equivale a la naturaleza y realidad en que vivimos. De un modo similar al Uno platónico, todo lo que existe se deduciría de Dios, un Dios que se desentiende de lo humano, que carece de todo atisbo sagrado y que nos deja una realidad sin azar ni libre albedrío, en una suerte de tautología en la que no hay causas para nada.
1687	Newton publica los *"Philosophiæ naturalis principia mathematica"*, que escrito en estilo euclidiano evoluciona la obra de Euclides hacia una nueva matemática que, junto a la notación algebraica, nos dota de herramientas para tratar de comprender la realidad.
1703	David Gregory, inspirado también por los ideales de Savile, da continuidad a la labor de Edward Bernard elaborando una versión más terrenal que la iniciada por su antecesor, a quien reconoce el esfuerzo realizado, aunque no sea muy explícito a la hora de atribuirle correctamente el contenido que tomara del proyecto de Bernard y que publicaría en 1703 con el título de *"Euclides quae supersunt omnia"*
1650-1700	Las matemáticas se popularizan (fuera de entornos eruditos) gracias a la labor de enseñanza y divulgación de "practicantes de las matemáticas" como fuera Euclid Speidell, quien se dedicase a la enseñanza de éstas para su uso práctico (trazado de planos, calibración de horóscopos, agrimensura, fabricación de instrumentos, docencia, contabilidad y fiscalidad, perspectiva, astronomía, hidráulica, arquitectura,...)
1756	Robert Simson elabora una versión en inglés de los *"Elementos"* que recoge los primeros seis libros, el onceavo y el doceavo (y en ediciones posteriores (1762), también de *"Los Datos"*). Es decir, las geometrías en dos y tres dimensiones y el estudio de proporciones. Editado con carácter docente y pedagógico de la geometría, y que serviría como versión base para numerosas ediciones posteriores.
1795	Pese a la negativa de sus padres acerca de sus inquietudes intelectuales, Mary Fairfax (1780-1872) se adentra en el estudio de las matemáticas (los *"Elementos"* y la *"Introducción al álgebra"* de 1782 de John Bonnycastle, amén de otras disciplinas), para acabar convirtiéndose en una erudita que dedicó 50 años de su vida a la investigación científica, además de ser una gran divulgadora del conocimiento científico, lo que llevó al *"Morning Post"* a considerarla la reina de la ciencia del siglo XIX.
1800	Se extiende la idea de que el estudio de las matemáticas puede alterar la integridad mental y volverle a uno loco, amén de convertirlo en antisocial y aislado de los sentimientos humanos, pues no eran susceptibles de demostración ni deducción
1808	François Peyrard está traduciendo los *"Elementos"* al francés, y en su cotejo con diferentes manuscritos se encuentra el *"manuscrito 190"*, de la Biblioteca Vaticana,

	que difiere sustancialmente del resto de manuscritos y versiones, incluyendo los 15 libros y, aparentemente, los *"Datos"*. Pasa a tomarlo como base de su traducción, que compendia en tres volúmenes a columna doble en griego-latín, y anotando su traducción y comentarios comparativos de las diferentes versiones en francés. Da cuenta de la ajetreada vida y evolución que los *"Elementos"* han sufrido a lo largo y ancho de tantas y tantas versiones desde su edición original.
1817	Entre los múltiples temas que trata en sus diarios, Anne Lister da cuenta de la relevancia de estudiar a Euclides, en una época en que el libro goza de un gran estatus tanto en lo intelectual (obra de referencia) como en lo institucional (pues formaba parte de planes de estudio de escuelas y universidades). Destaca además su relevancia para la mejora intelectual y el progreso e innovación en la filosofía natural.
1826	Lobachevski presenta su geometría no-euclídea, resultado de analizar el postulado de las paralelas y plantear una geometría alternativa en el que la trigonometría no descanse sobre el plano bidimensional, sino sobre una superficie esférica. Inicialmente no es bien recogido, pero tras los avances en geometría curva de Riemann, y el uso que de ella hace Einstein para su teoría de la relatividad general, permiten el reconocer a Lobachevski la grandeza de su descubrimiento para con la concepción de la descripción real del espacio.
ca. 1830	El sistema educativo británico todavía se encuentra fuertemente influenciado por el currículo victoriano clásico y el modo de enseñanza proposicional, donde los *"Elementos"* son férrea piedra angular del mismo. Sin embargo, es un sistema sexista, oxidado y alejado de la realidad práctica del mundo en que se enmarca que. Reflejo de esto son las obras de Mary Ann Evans (a.k.a. George Elliot), como *"El molino del Floss"* o *"Daniel Deronda"*, donde sus personajes se enfrentan a sistemas educativos carentes de humanidad y anclados en el pasado, muestra del carácter fallido de dichos modelos de enseñanza.
1847	Oliver Byrne publica *"The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners"*, en la que hace uso de diagramas a color en lugar de las denotaciones con letras de Euclides para facilitar la enseñanza de los contenidos geométricos.
1884	Se publica en urdú una versión traducida de los *"Elementos"* de Simson. El proceder colonizador de los británicos es la de sacar a los pobres pueblos conquistados de la ignorancia en la que se sumergen (demostrando un desprecio total hacia los conocimientos de dichos pueblos), e instaurando mediante traducciones el currículo académico vigente en Gran Bretaña, en la que los *"Elementos"* de Euclides eran pilar fundamental.
segunda mitad del siglo XIX	La imagen de la geometría Euclídea pierde fuerza en el panorama educativo, donde cada vez más voces se levantan en aras de una reforma anti-Euclides.
1879	Lewis Carroll publica *"Euclides y sus rivales modernos"*, donde un tutor de Oxford mantiene un diálogo con el fantasma de Euclides acerca de la obra de éste.
1883-1916	Johan Ludvig Heiberg publica su compendio *"Euclidis Opera omnia"*, donde 5 de sus 9 volúmenes corresponden a los *"Elementos"*
finales del XIX	La axiomatización lógica de las ciencias comienza a ganar peso, en particular con la

principios del XX	aplicación a tales efectos de Russell y Whitehead en si *"Principia Mathematica"*. Al trabajar la matemáticas, y en particular la geometría euclídea, se muestran insostenibles desde el punto de vista lógico, lo que da fuerza a aquellos que rechazan la obra de Euclides y su papel hegemónico en la educación.
1904	Cambridge "cesa" a Euclides como obligatorio en su currículo educativo. El resto de escuelas y academias británicas seguirían a los pocos años pon el mismo camino
1906-07	El arqueólogo alemán Otto Rubensohn descubre unos óstracos en la isla de Elefantina (alto Egipto) que resultan ser la prueba física más antigua de los *"Elementos"*. Posteriormente transcritos y analizados en torno a 1930
1908	Ya con Euclides derrocado el panorama educativo, Thomas Little Heath, un funcionario entusiasta de la matemática griega antigua, edita su propia versión de los *"Elementos"* a partir de la versión de Heiberg, buscando aportar sencillez y claridad al contenido del texto, buscando hacer justicia para con Euclides en contraposición a la "nueva geometría" que se enseña ahora en su lugar.
1945	Max Ernst pinta "Euclides", cuadro que nos hace ver una figura enmascarada con una pirámide invertida pero que, como el auténtico Euclides y su obra, no es una pieza de fácil interpretación, y donde probablemente la forma humana que nuestros ojos nos quieren hacer ver, no se encuentran realmente allí.
relevancia actual	El estudio de la geometría euclídea sigue presente en los planes de estudio (si bien no se lleva a cabo empleando los "Elementos" como material didáctico. Desde 1959, la olimpiada matemática incluye al menos un problema de geometría euclídea en su prueba final. Gran presencia en el panorama artístico, como en el "Euclid" de Max Ernst, o las obras de carácter matemático de Crocket Johnson. Influencia también en la moda, como las colecciones de Elsa Schiaparelli o Madeleine Vionnet. También en la escultura, como las obras geométricas con espejos de Monir Shahroudy Farmanfarmaian. Relevancia epónima en calles, plazas,...
2023	La sonda espacial "Euclid" es lanzada para el estudio de la geometría del espacio lejano a fin de tratar de comprender mejor la energía oscura, la expansión del universo y la geometría del mismo.

Después de Euclides

La época inmediatamente posterior a Euclides (siglos III-II a.e.c.) constituye la "Edad de oro" de la matemática griega, con una amplia comunidad de sabios alrededor de Alejandría y en otras ciudades helénicas, destacando las contribuciones de Arquímedes de Siracusa (siglo III a.e.c.), Apolonio de Perge (siglos III-II a.e.c.) e Hiparco de Nicea (siglo II a.e.c.)

Apolonio de Perge

De él sólo ha sobrevivido su tratado sobre *"Cónicas"*, que amplía y sistematiza los descubrimientos de Menecmo y otros.

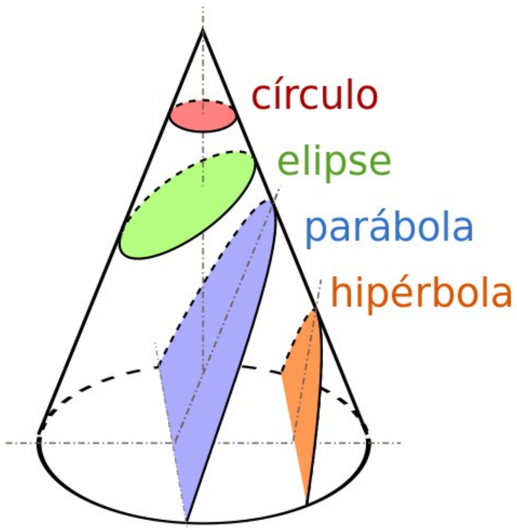


Imagen 30: Secciones cónicas [32]

- Fue él quien les dio los nombres de "elipse", "parábola" e "hipérbola".
- También se deben a él los conceptos astronómicos de *excéntrica*, *epiciclo* y *deferente*, que más tarde serán desarrollados por Hiparco y Ptolomeo.
- También resolvió el problema de encontrar una circunferencia tangente a tres elementos dados

Hiparco de Nicea

Hiparco de Nicea fue también un matemático y astrónomo del siglo II a.e.c. En matemáticas, se le considera el inventor de la trigonometría, publicando una tabla de cuerdas, equivalente a una tabla trigonométrica, con la intención de resolver triángulos.

También introdujo la división del círculo en 360º.

La mayor parte de sus trabajos fueron de naturaleza astronómica y realizó el primer catálogo de estrellas.

32 Imagen de *"Magister Mathematicae"* en Wikimedia Commons con licencia CC BY-SA 3.0
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Conic_Sections.svg

Arquímedes de Siracusa

Arquímedes de Siracusa es seguramente el científico griego cuyo pensamiento fue más influyente en el desarrollo de la ciencia, sobre todo a partir de la Edad Moderna, en particular es el que más avanza en el conocimiento de la naturaleza, es decir, de la física matemática.

Añade a las magnitudes matemáticas anteriores el concepto de *peso*. El peso podía utilizarse como una magnitud mensurable y sometidas al mismo tipo de cálculos que los conceptos de longitud y volumen. Esto le permite desarrollar la **mecánica** (equilibrios de líneas y planos) y la **hidrostática** (teoría de los cuerpos flotantes), ampliando de esta manera el dominio de la matemática euclídea que se limitaba hasta entonces a la geometría.

El trabajo de Arquímedes es sorprendente por la amplia diversidad de los problemas que aborda, por la profundidad con la que aplica los métodos anteriores (proporcionalidad, exhaución,...) y por la gran imaginación y creatividad de sus soluciones, como considerar un problema geométrico como si fuese uno mecánico para hallar y la solución que, una vez hallada, ofrece una demostración puramente geométrica.

Se conocen varios libros de Arquímedes, muchos de ellos hallados en un ***euchologion*** de piel de cabra del s XIII que estaba escrito sobre unos textos borrados de Arquímedes que databan del siglo X. Este **palimpsesto** contiene: *"Sobre el equilibrio de los planos"*, *"Sobre las espirales"*, *"Medida de un círculo"*, *"Sobre la esfera y el cilindro"*, *"Sobre los cuerpos flotantes", "El método de los teoremas mecánicos"* y el *"Stomachion".*

- En mecánica (*"Sobre el equilibrio de los planos"*), la noción fundamental es la de centro de gravedad: el punto en el que una línea o figura se mantendría en equilibrio si estuviese apoyada en él. A partir de esta idea, Arquímedes demuestra la *ley de la palanca* y determina los *centros de gravedad* de numerosas figuras y cuerpos geométricos.
- En hidrostática (*"Sobre los cuerpos flotantes"*), formuló el *principio de Arquímedes*, considerando los empujes a los que están sometidos los volúmenes de un líquido en la esfera de la tierra, y sustituyendo mentalmente esos volúmenes por otros idénticos de materiales más o menos pesados. Posteriormente, analiza las condiciones de flotación y de equilibrio de diversos sólidos (segmentos esféricos y paraboloides). Sobre este principio es famosa la historia de su descubrimiento:

  > *Hieron, el rey de Siracusa, encargó una corona de oro, pero tras su entrega sospechó que el orfebre había mezclado con otro metal quedándose con el resto del oro, a pesar de que pesaba lo que debía. Para salir de dudas, le pidió a Arquímedes si podía averiguar si la corona estaba hecha solo de oro sin destruirla.*
  >
  > *Un día Arquímedes se encontraba en el baño (algo poco usual en él) y observó que podía levantar fácilmente sus piernas cuando estaban sumergidas y que al sumergirlas el nivel del agua se elevaba, de pronto se le ocurrió una idea para resolver el problema de la corona. Fue tan grande su entusiasmo que salió desnudo del baño y corrió por las calles de Siracusa gritando su célebre exclamación: "¡Eureka!, ¡Eureka!", que significa "lo encontré".*
  >
  > *Para resolver el misterio Arquímedes sumergió en agua la corona y luego hizo lo mismo con una cantidad de oro de igual peso, al ver que los volúmenes del líquido desalojado en cada caso eran distintos, supo que no tenían la misma densidad, por lo tanto la corona no estaba hecha de oro puro.*

Respecto a sus obras estrictamente matemáticas destacan *"Sobre la esfera y el cilindro"* (fórmulas para los volúmenes de estos cuerpos), *"Sobre la medida del círculo"* (cálculo aproximado de π), *"Sobre conoides y esferoides"* (volúmenes de cuerpos en revolución), *"La cuadratura de la parábola"*, o *"El arenario"* (invención de un sistema de numeración para números muy elevados).

También destacó por la invención y diseño de numerosas máquinas, como el **tornillo de Arquímedes**, aunque es difícil saber muchos detalles sobre ellas, o en qué medida algunas son legendarias.

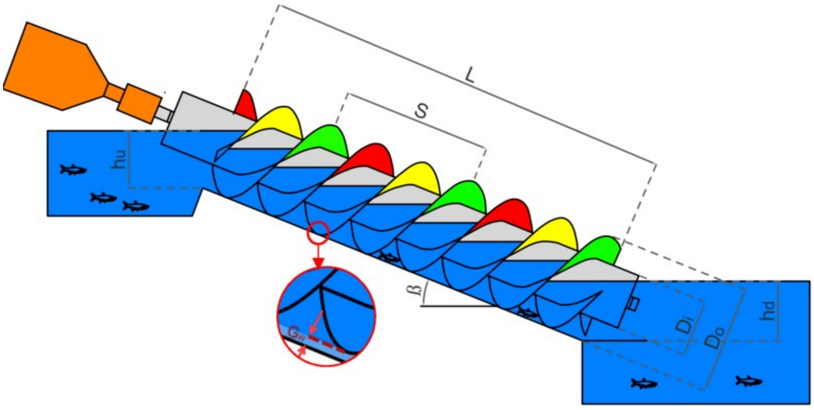


Imagen 31: Tornillo de Arquímedes [33]

Se le atribuye también la construcción de un planetario mecánico, un artilugio posiblemente a base de ruedas dentadas que permitía calcular las posiciones de los astros. Quizá el **mecanismo de Antiquitera** sea una copia de ese planetario, o de alguna máquina basada en él.

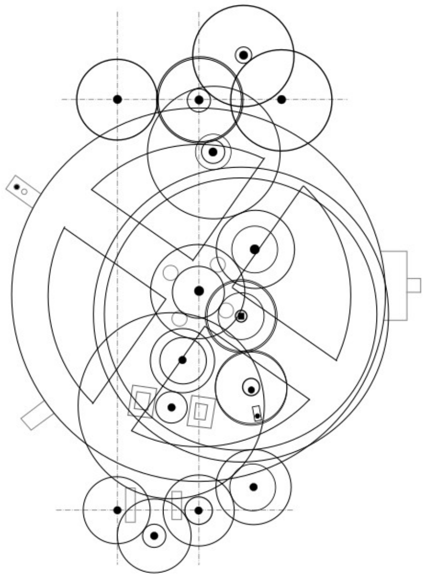


Imagen 32: Mecanismo de Antiquitera [34]

El **Stomachion** es un puzle geométrico formado por una descomposición del cuadrado en 14 polígonos, que incluyen 11 triángulos, 2 cuadriláteros y 1 pentágono. Todas las áreas son razones exactas de su lado: 1/6, 1/12, 1/24, 1/16, 1/48, 7/48, 1/48. Si el lado fuera 12 tendríamos la siguiente composición:

33 Imagen de *"Arash Yoosef Doost"* y *"William David Lubitz"* (CC BY-SA 4.0)
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Archimedes_screw_design_parameters.webp

34 Imagen de "Lead Holer" en Wikimedia Commons liberada al dominio público
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Antikythera_mechanism.svg

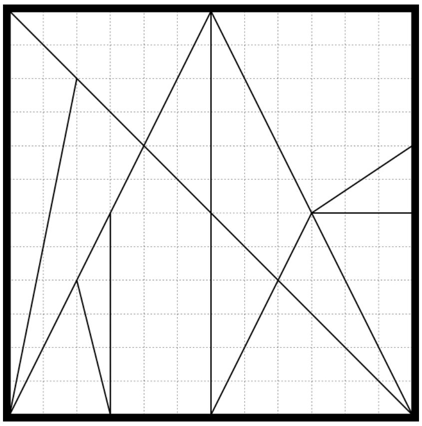


Imagen 33: Puzle Stomachion [35]

Suya es también la definición de la espiral de Arquímedes, que plantea en su búsqueda de solución de los problemas délicos (en concreto para la trisección del ángulo), para el que describe otra curva mecánica al estilo de la cuadratriz. Consiste en girar una semirrecta, manteniendo fijo su extremo, y sobre la cual se mueve un punto con velocidad proporcional a la angular de giro. El resultado es la descripción de una espiral en el plano:

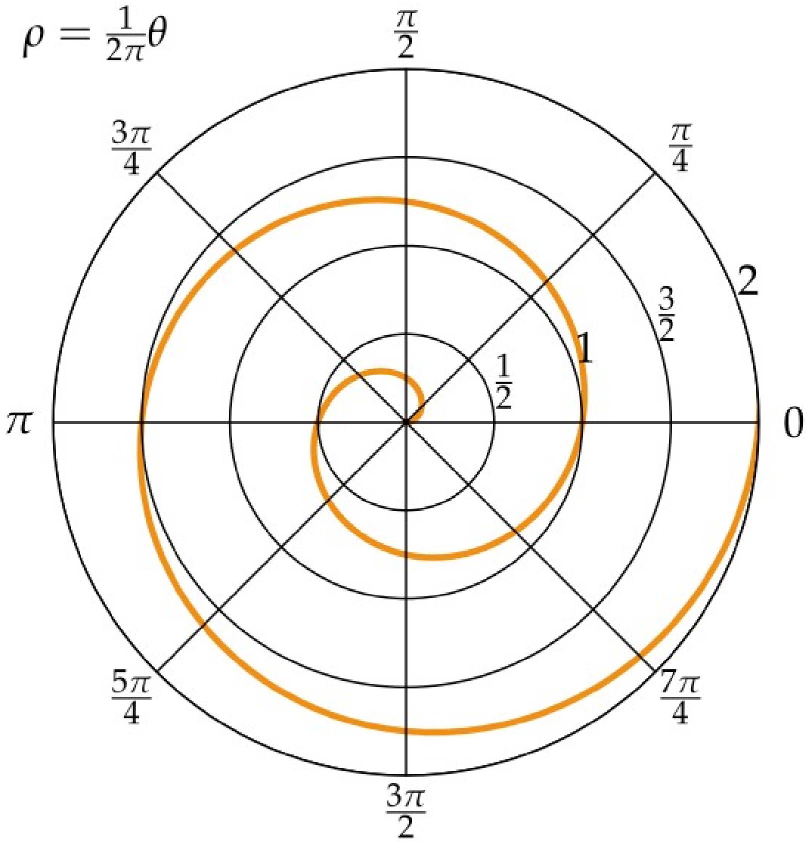


Imagen 34: Espiral de Arquímedes representada sobre un plano polar [36]

35 Imagen de *Hagen von Eitzen* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ostomachion.svg

36 Imagen de *Guillaume Jacquenot* (CC BY-SA 3.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedean_spiral_polar.svg

Astronomía griega

Introducción

Para los filósofos griegos la astronomía era una rama de las matemáticas. Las matemáticas se dividían en diversas ramas como la aritmética o la geometría, siendo otras ramas matemáticas la astronomía y la música. Es decir, consideraban matemáticas todo aquello que pudiera relacionarse con números o magnitudes susceptibles de ser medidas.

Esta clasificación no es la que seguimos en nuestros días, pues se hace una tajante distinción entre ciencias formales y ciencias empíricas.

- *Formales*: no necesitan observación, donde de hecho, no pueden ser observadas, como por ejemplo ocurre con las formas geométricas, que no existen en la realidad.
- *Empíricas*: no podemos llevar a cabo una demostración formal sobre la cual caigan todos los casos. Es necesario observar la realidad, medirla, pesarla,...

La astronomía trata sobre unos cuerpos que no encontramos por el puro pensamiento, sino que son cuerpos físicos que conocemos por la observación de los mismos. Por su parte, lo que hoy entendemos por matemáticas, así como la lógica, son autocontenidos en sí mismo dada la formalidad del lenguaje simbólico con el que dotamos de entidad los contenidos de estas disciplinas formales con las que hablamos de entes que no existen en la realidad, como los números o figuras o sólidos geométricos perfectos.

Antes de que la astronomía se considerara como una ciencia, las concepciones del universo eran **cosmologías**, es decir, visiones mitológicas. Si bien cada una se encontraba en el marco de un relato mitológico particular, en general, una descripción aproximada sería aquella donde la Tierra era una extensión plana rodeada de agua y sostenida sobre el océano, que se extendía hasta llegar a un borde. Por debajo se encuentra el tártaro. Por encima está el aire, y por encima el éter, que era la sustancia de la que estaban hechas los cielos.

Algunos de los primeros filósofos, como los milesios, tendrían una concepción similar a ésta. Si bien desde el siglo V los astrónomos griegos empiezan a preocuparse por ofrecer explicaciones racionales del funcionamiento del cosmos, apoyándose en una descripción del firmamento, o sea, una fenomenología de los cielos (lo que vemos a ojo desnudo). Si bien esto es anterior a los griegos, pues ya los babilonios registraban los movimientos de los planetas, y cuantificaron muchas observaciones como el desplazamiento del Sol, la Luna y los planetas por el Zodiaco, etc.

Si bien con nuestra mirada y conocimiento actuales ciertas cuestiones parecen excesivamente evidentes, la intuición y el sentido común no parecen conducir a lo que hoy sabemos, por ejemplo:

- Diferentes astros observados durante el día y la noche
- La esfericidad de la Tierra
- La posición de la Tierra en el Sistema Solar
- Los movimientos retrógrados de los planetas
- El movimiento del Sol en el Zodiaco

Desde las primeras observaciones hasta desentrañar la mayor parte del esquema cósmico pasaron muchos siglos, empezando con los babilonios y terminando con la gravitación de Newton.

La eclíptica

La eclíptica es la trayectoria que *aparentemente* sigue el Sol a lo largo del año en el firmamento.

- Al observar de día, únicamente vemos cómo el Sol se va moviendo de un punto a otro.
- De noche, observamos estrellas y la Luna. Hay unas "estrellas" que se comportan de manera diferente a las demás, y que serán los planetas. Si nos fijamos en el cielo nocturno, y miramos hacia el mismo lugar del cielo hacia a una misma hora de la noche, repitiendo la observación durante un periodo largo de días, apreciaremos que en diferentes épocas del año las estrellas que se ven en ese punto van cambiando su posicionamiento. Por ejemplo, si miramos hacia el oeste el 1 de julio, veremos la constelación de Géminis a una determinada altitud; mientras que, si miramos el 8 de julio, estará más cerca del horizonte.

Es decir, a lo largo del tiempo vemos que el Sol parece estar en otro lugar (día) y que las constelaciones se van moviendo (noche).

Dada la distancia a la que se encuentran, podríamos considerar a la constelaciones de estrellas como estáticas (desde el punto de vista de la Tierra), ya que lo que realmente está variando su posicionamiento día a día respecto a nosotros (por eso lo de la trayectoria *aparente*) es el Sol, que recorre un grado de manera opuesta al movimiento diario de este a oeste, de modo que "se irá colocando" delante de una constelación diferente cada mes. De ahí que la eclíptica está "encerrada" en una franja del firmamento.

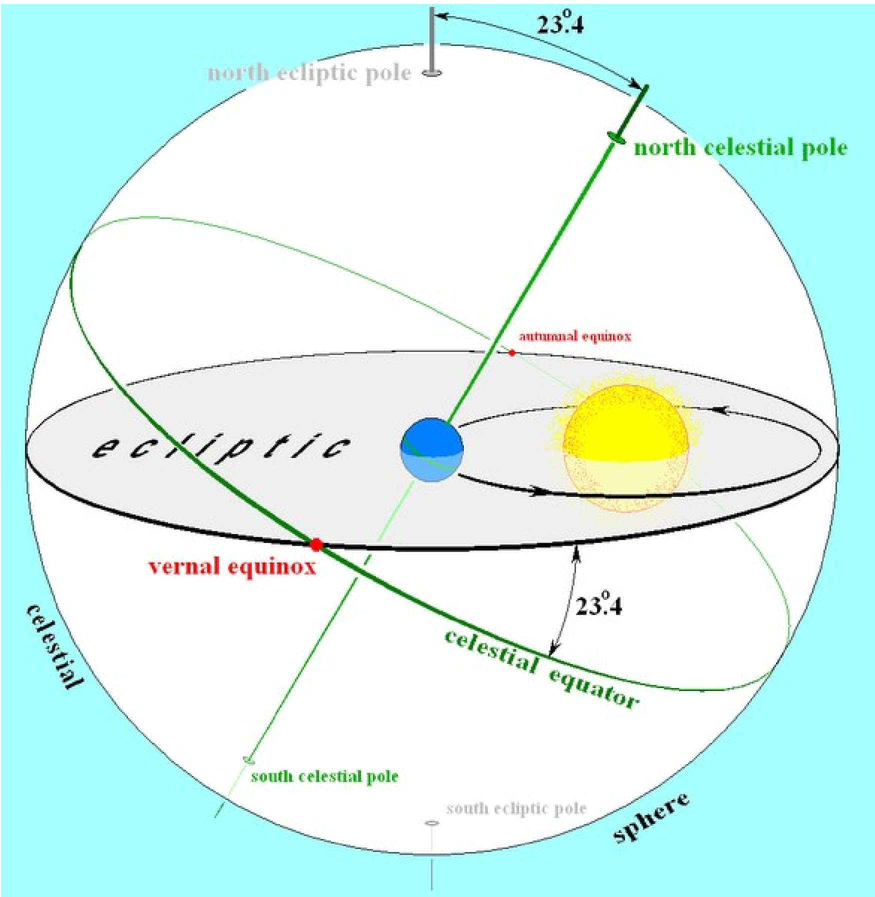


Imagen 35: Órbita eclíptica [37]

37 Imagen de *"Tfr000"* (CC BY-SA 3.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Earths_orbit_and_ecliptic.PNG

Los solsticios y equinoccios son los instantes en que la longitud aparente de la eclíptica (considerando los efectos de aberración y nutación de la misma) es de 0º, 90º, 180º y 270º. Es debido a las perturbaciones de la órbita terrestre y las anomalías del calendario, que las fechas en que esto ocurre no son fijas de un año a otro.

Constelaciones zodiacales

A la altura a la que sale el Sol, giran en torno a la Estrella Polar una serie de constelaciones denominadas Zodiaco

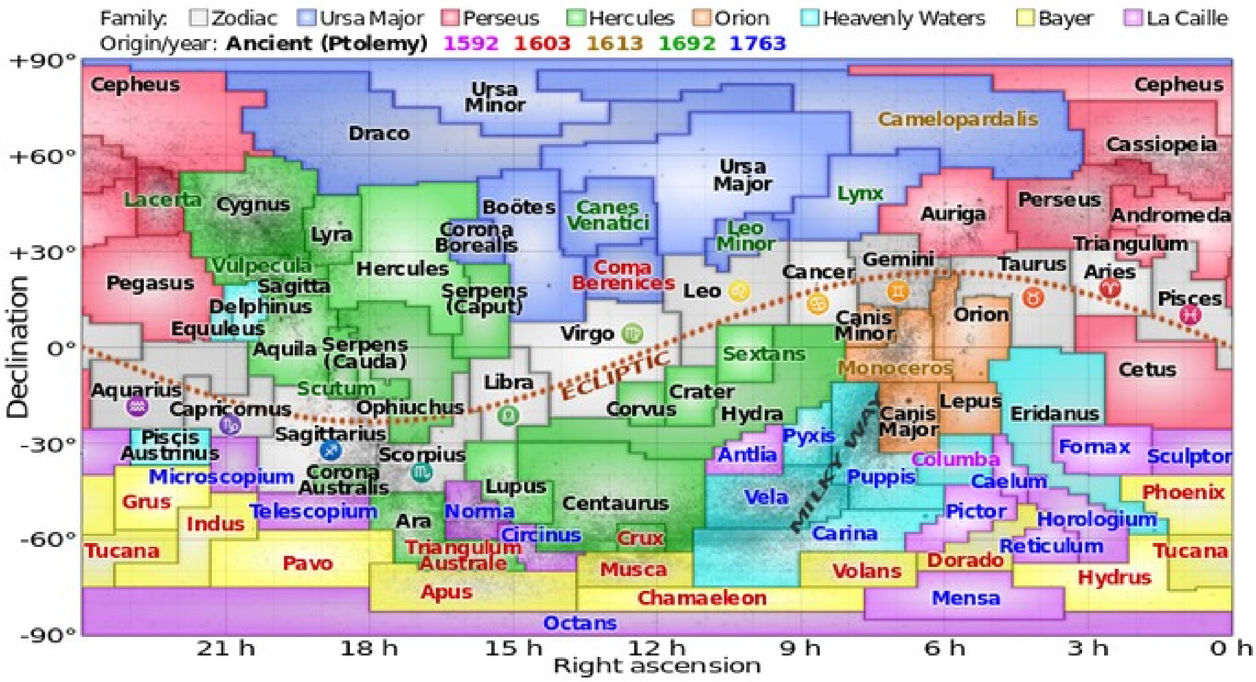


Imagen 36: La eclíptica y las constelaciones zodiacales [38]

Por convención, la eclíptica está dividida en 12 zonas, en las que están situadas las 12 constelaciones que constituyen el zodiaco, de forma que cada mes el Sol recorre una de las constelaciones que corresponden a los signos del zodiaco, precisamente aquel que no vemos durante la noche. Hay quienes sostienen que el Sol atraviesa 13 constelaciones reales, las doce zodiacales más conocidas (Piscis, Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio y Acuario) y Ofiuco que es una constelación que el Sol recorre entre el 29 de noviembre y el 17 de diciembre; por lo que debería agregarse un signo al zodiaco.

Esto confunde los principios de la astrología con la astronomía. Hay doce signos astrológicos por una necesidad de armonía matemática de dividir el espectro del cielo en doce zonas, como sucede con el espectro musical, y no por la presencia de las constelaciones.

Desde la Tierra, lo que nosotros vemos es que el Sol se va viendo en cada momento del año detrás de una constelación u otra. Lo que realmente apreciamos (y que es lo que se quiere explicar) es que los astros se mueven diariamente de este a oeste, y que a lo largo del año la posición de las estrellas y el Sol va cambiando de manera manera constante y regular de manera inversa, o sea, de oeste a este (movimiento diario de este a oeste, y movimiento anual de oeste a este), hasta que al cabo de un año vuelvan a repetir una posición determinada.

38 Imagen de *"Cmglee"* y *"Timwi"* (CC BY-SA 3.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Constellations,_equirectangular_plot,_Menzel_families.svg

Hay que tener en cuenta que esto es una fenomenología relacionada a lo que apreciamos desde la Tierra, y no una descripción de la dinámica de los objetos celestes en el firmamento.

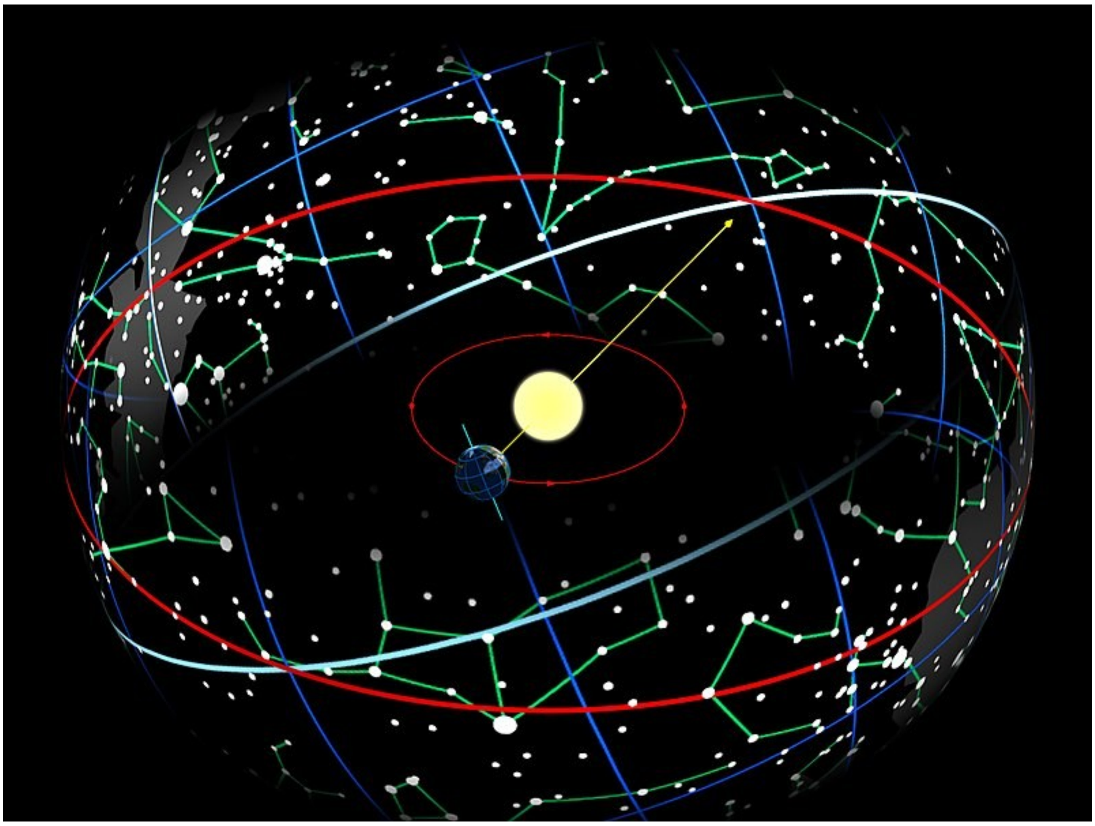


Imagen 37: La eclíptica y las constelaciones zodiacales [39]

El movimiento de los planetas y la Luna

Luego están los planetas y la Luna. Si nos fijamos en la Luna en un día determinado, veremos que está un poco más hacia el este, como el Sol, sólo que dando una vuelta completa al firmamento con mayor velocidad que lo que hace el Sol (unos 29 frente a los 365 de nuestra estrella).

Respecto a los planetas, pasa lo mismo que con la Luna y el Sol, pues si se observan un día tras otro, en observaciones de días sucesivos veremos que se encuentran cada vez un poco más hacia el este. Sin embargo, y a diferencia de la aparente constancia del movimiento de la Luna y el Sol, con los planetas tenemos diferentes velocidades de desplazamiento (algunos más rápidos y otros más lentos que las observaciones respecto nuestros satélite y estrella)

En esencia, a ojos de nuestra observación los planetas son iguales que las estrellas, visibles a simple vista y con ese aparente desplazamiento constante hacia el este. Sin embargo, mientras que las estrellas guardan una relación disposicional entre ellas, con los planetas se tiene que en ocasiones parecen adelantarse y en otras retrocederse los unos respecto a los otros. Esto es lo que se conoce como movimiento de retrogradación. Es decir, los planetas visibles a simple vista (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), sólo que en la observación se aprecia que su posición relativa al fondo de estrellas "fijas" varía un poco cada día, además que cada uno emplea una cantidad de tiempo diferente en dar una vuelta completa al firmamento.

39 Imagen de *"Tau'olunga"* (CC BY-SA 3.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ecliptic_path.jpg

Movimiento de retrogradación

Una peculiaridad del movimiento de los planetas es el **movimiento de retrogradación**, que es un aparente retroceso de su avance por el cielo nocturno, visto desde la Tierra. Este "vagabundeo" es lo que les propició el nombre de planetas, que significa "errante".

Es el movimiento que más problemas ocasionó a los astrónomos.

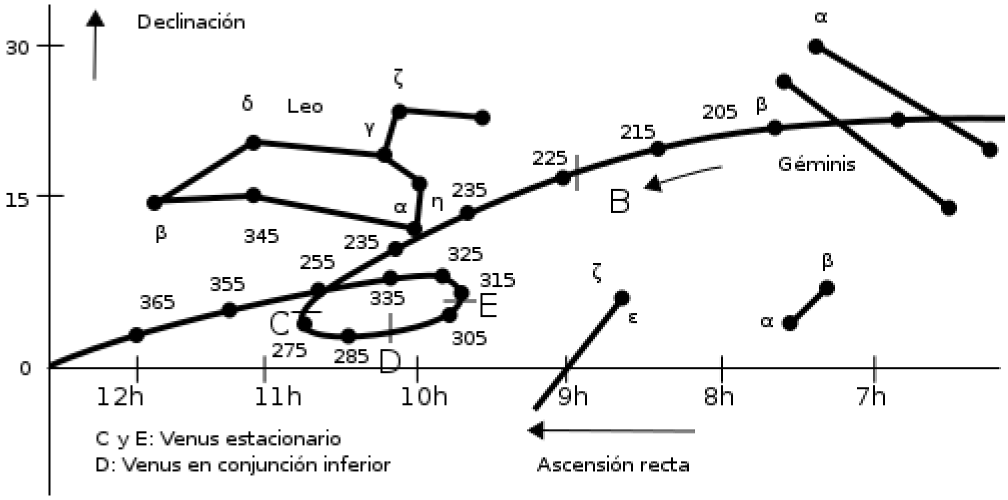


Imagen 38: Retrogradación de Venus [40]

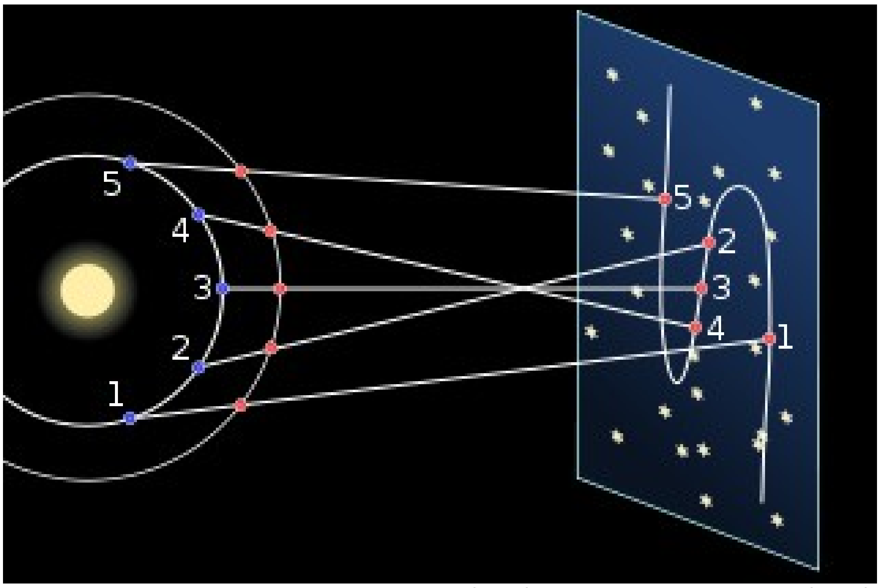


Imagen 39: Retrogradación de Marte (rojo) vista desde la Tierra (azul)[41]

Este movimiento anómalo en que los planetas aparecen descolocados respecto a las constelaciones de fondo se conoce como **movimiento de retrogradación**.

Es decir, en esencia se aprecia que la dinámica de observaciones periódicas del planeta al mirar al cielo es la de que se desplaza desde el oeste hacia el este, pero hay períodos en los que realiza un extraño giro espiral (el movimiento retrógrado) en el que durante unos días parece retroceder e invertir su dirección, para después volver a retomar el desplazamiento esperado.

40 Imagen de *"Xgarciaf"* (dominio público) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Retrogradacion.svg

41 Imagen de *"Brian Brondel"* (CC BY-SA 3.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Retrograde_Motion.bjb.svg

La retrogradación tarda unos pocos días. Si nos fijamos, también vemos que un planeta brilla más cuando está retrogradando.

El universo de Platón

Hemos visto que nuestros primeros filósofos (los milesios) tenían una visión cosmológica más asemejada a la mitológica (una Tierra plana suspendida por encima del Hades y sometida bajo el éter que cubre los cielos. Sin embargo, en tiempos de Platón los dedicados a la astronomía habían descubierto dos cosas bastante importantes:

1. Que la Tierra era esférica.
2. Que el cielo no es tampoco una superficie plana, sino que también tendría una disposición esférica y que sería el firmamento sobre el que están dispuestas las estrellas y los astros. Ésta sería la esfera de las estrellas fijas (como contraposición a "estrellas errantes", que es lo que literalmente quiere decir la palabra "planeta").

Hasta donde nos consta, Platón es el primer filósofo que intenta dar una explicación a los fenómenos astronómicos, o la estructura general del cosmos, sobre la base de la geometría. El idealismo platónico hizo que la astronomía griega trascendiera de lo práctico (como la construcción de calendarios precisos que permitían predecir las crecidas estacionales de los ríos y facilitaban las labores agrícolas y propusiera teorías acerca de su estructura. Las ideas como entes inmateriales fomentaron el uso de la matemática como nexo entre las ideas y la realidad.

En la época de Platón se conocían cinco figuras sólidas regulares (todas sus caras son el mismo polígono regular), y son las que él emplea para dar cuenta de la ordenación que hace el Demiurgo (más la Razón que un dios al uso) con el caos primitivo que rige el universo:

> *"El Demiurgo toma el caos primitivo, lleno de material informe a partir del que será construido el cosmos, e impone orden siguiendo un plan racional".*

La creación del universo no es ex-nihilo, sino una reestructuración a partir de la materia informe que condicionaba por su naturaleza la acción del Demiurgo. Dicho orden quedaría regido geométricamente de esta manera, redefiniendo el atomismo de Demócrito y la teoría de los cuatro elementos de Empédocles donde cada átomo de los principales elementos tendría la forma de cada uno de estos sólidos regulares (incluyendo así el pitagorismo):

- El fuego con el *tetraedro*
- El aire con el *octaedro*
- El agua con el *icosaedro*
- La tierra con el *cubo*
- El éter con el *dodecaedro* (es el sólido regular más próximo a la esfera es el que Platón identifica con el cosmos como un todo).
- En un lugar aparte tendríamos la esfera, que corresponde con la perfección absoluta.

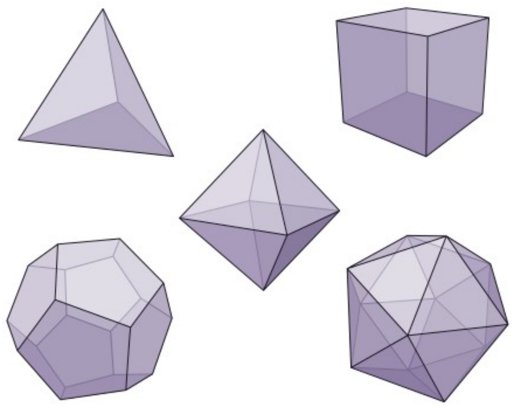


Imagen 40: Sólidos platónicos [42]

42 Imagen de *"Drummyfish"* (dominio público) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Platonic_Solids_Transparent.svg

Platón explica el cambio como lo hacía Empédocles, mediante la mezcla de los elementos en distintas proporciones (Empédocles afirmaba que existía el movimiento, en contra de Parménides, por la oposición de contrarios, como el Amor (atracción entre distintos) y la Discordia (atracción entre semejantes). También negaba la creación ex-nihilo y la desaparición de las cosas). De este modo se produce la variedad en el mundo material y permite la transmutación de un elemento en otro. Además, todos los sólidos son reducibles a triángulos, por lo que todos son triángulos.

Si bien Platón no desarrolló una teoría astronómica (como sí haría Aristóteles), sienta una serie de características definitorias basadas en su concepción geométrica del universo, donde la esfera sería el sólido más perfecto de todos, en consecuencia:

- Tanto los cuerpos celestes como la Tierra tienen forma de esfera.
- El cosmos tiene forma esférica y, por tanto, es finito.
- La esfera de la Tierra se halla en el centro de la esfera cósmica (no la concebían como un planeta, pues éstos eran aquellos astros que veían moverse de manera errante en el cielo, mientras que la Tierra era algo fijo y centro de todo).
- Entre la Tierra y la Esfera de las Estrellas están el Sol, la Luna y los 5 planetas
- Todos los movimientos celestes son circulares, y que corresponderían a los movimientos sobre las esferas internas contenidas entre la esfera del firmamento y la esfera Terrestre.
- La velocidad angular de los cuerpos celestes es invariable, girando con velocidad constante en una órbita (la eclíptica, dada por la observación del Sol elevándose sobre el horizonte en distintos grados según la época del año) que forma 24º respecto al ecuador celeste (el ángulo exacto es de 23º16'14"):
    - Las líneas se cortan en los equinoccios de primavera y otoño
    - Las lineas alcanzan máximos en los solsticios:
        - Sube 24º al norte en verano, trópico de Cáncer.
        - Baja 24º al sur en invierno, trópico de Capricornio
- El sentido de los movimientos circulares planetarios es siempre el mismo, sin inversiones:
    - El Cosmos, con las estrellas fijas, gira alrededor de la Tierra hacia el Oeste.
    - Todos los planetas se ven arrastrados por el giro de los cielos aunque tienen un movimiento propio hacia el Este.

Mientras que el firmamento presenta un único movimiento donde se aprecia un desplazamiento diario de este a oeste, en el Sol parecen darse "dos movimientos":

1. el Sol va de este a oeste cada día (esto es debido al movimiento aparente del Sol al considerar la Tierra fija, pero realmente este movimiento durante el día sería consecuencia del movimiento de rotación terrestre),
2. pero también presenta un segundo movimiento más lento hacia el oeste (que es la composición de los movimientos del Sol dentro de la Vía Láctea, y de la traslación de la Tierra alrededor del Sol). Es debido a esto que se tiene esa "ventaja" en el movimiento de las estrella del firmamento respecto al Sol, que pierde un grado cada día.

Por su parte, la Luna tiene un movimiento circular en su esfera asemejable al del Sol, pero para el que invierte una cantidad de días mucho menor que el Sol (29 días frente a 365).

De este modo, el universo de Platón estaría conformado por varias esferas encajadas:

- En el centro, inmóvil, la esfera de la Tierra, con su capa de agua y aire.
- La capa de fuego de los planetas que para Platón eran la Luna, el Sol, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno.
- La capa exterior limítrofe que contiene las estrellas.

Las dimensiones de estas esferas son de 1 para la tierra, 2 para el agua, 5 el aire y 10 el fuego. Es decir, entre la Tierra y las estrellas había 1+2+5+10 = 18 unidades de Tierra.

En realidad, Platón no habla de las distintas velocidades, ni de las estaciones, ni de las retrogradaciones,... pero con su universo insta a los demás astrónomos a buscar un explanans global que lo cuadre todo. La influencia pitagórica de Platón conlleva que la explicación deba ser matemática y de carácter universal. Una serie de invariantes que el científico debe conocer. Y esto deja abiertos una serie de problemas que surgen a raíz de esta interpretación platónica del universo.

Los problemas del modelo astronómico de Platón y la propuesta de las esferas homocéntricas de Eudoxo

La astronomía de Platón se enfrenta a dos problemas principales que resolver:

1. El movimiento diario de los cuerpos celestes en círculos perfectos de este a oeste.
2. El movimiento lento de los planetas de oeste a este sobre el fondo del zodiaco, y los casos de retrogradación que se aprecian en algunas ocasiones.

El modelo astronómico de Platón no está exento de problemas, como el que señala Simplicio de:

> *"Platón establece el principio de que el movimiento de los cuerpos celestes es circular, uniforme y constantemente regular. Por tanto plantea a los matemáticos el siguiente problema: ¿Qué movimientos circulares, uniformes y perfectamente regulares que conviene tomar como hipótesis a fin de salvar las apariencias presentadas por los planetas?"*[43]

Se distinguen dos tradiciones astronómicas en la antigua Grecia:

- Una pitagórico-platónica basada en la perfección (circularidad y uniformidad), que otorga a los astrónomos la misión de elaborar hipótesis geométricas que explicaran lo observado.
- Otra aristotélica que necesitaba complementar lo teórico con métodos empíricamente adecuadas para ciertos fenómenos.

Eudoxo de Cnido (408-355 a.e.c.), junto a su alumno Calipo de Cícico, encaja en la primera tradición y plantea una de las primeras respuestas al requerimiento de Platón, sin pretender que su modelo fuese real, sino que resultara explicativo desde un enfoque geométrico.

La idea era una serie de esferas anidadas, con la Tierra en el centro, que se movían en diferentes direcciones, sentidos y velocidades para explicar lo observado en el cielo, y que se conoce como las **esferas homocéntricas** de Eudoxo. En este modelo, cada planeta no consta de una única esfera, sino que, si bien tanto la Tierra como las estrellas tienen una única esfera, los planetas tienen asociadas varias, todas concéntricas, pero cada una con el eje orientado en una dirección diferente. Es decir, la circunferencia que sigue en cada caso la trayectoria del planeta no sería plana sobre el corte de circunferencia del resto de esferas, sino que en función de la inclinación de cada una de las esferas asociadas al planeta, nos permitiría dar cuenta de las aparentes irregularidades que el modelo de Platón no era capaz de solventar con sus movimientos circulares. Para los diversos ejes y esferas que presentaría cada problema se tendría que:

43 Simplicio (circa 530 d.C.), citado en Weinberg, p. 95

- La de diámetro mayor tendría su eje orientado de norte a sur, coincidiendo con el de la esfera de las estrellas
- Las sucesivas esferas interiores tendrían inclinaciones diferentes e intervalos de tiempo distintos, de modo que mediante el acoplamiento de giros que describen las distintas esferas asociadas a cada planeta permitirían explicar los extraños giros y espirales que describen las trayectorias planetarias observadas desde la Tierra.

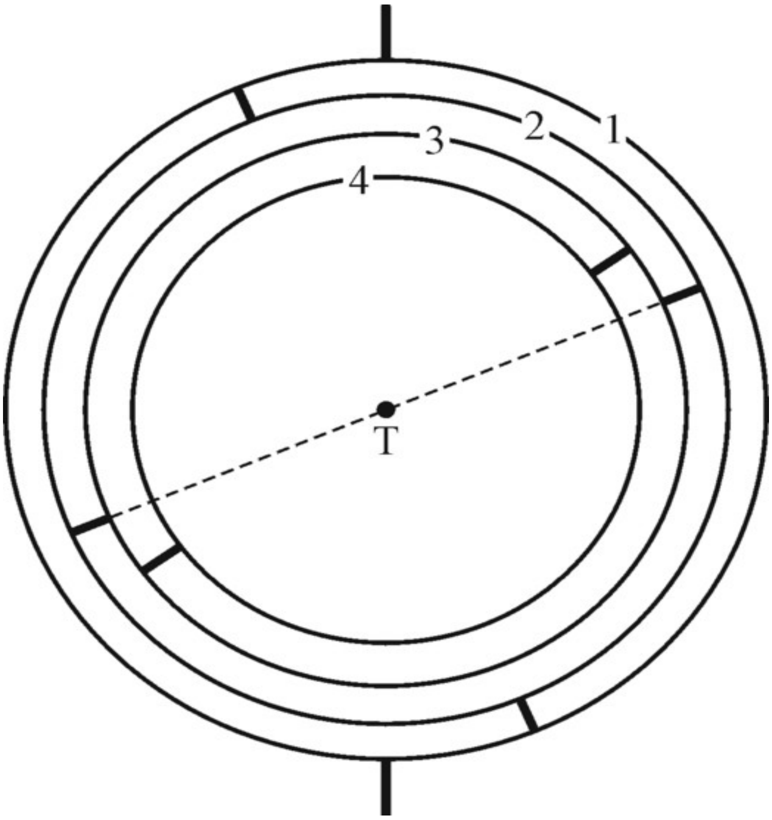


Imagen 41: Esferas homocéntricas de Eudoxo [44]

El número de esferas asciende a un total de 27:

- La esfera externa de las estrellas que gira en torno a la Estrella Polar de este a oeste en un día.
- El Sol y la Luna necesitaban 3 esferas interiores:
  - Una para el movimiento diario (E-W).
  - Otra, en sentido contrario (W-E), para el anual y mensual, respectivamente.
  - Una tercera para la desviación del Sol y la Luna con respecto a la línea de la eclíptica.
- Los planetas necesitaban 4 esferas cada uno (20 en total), para explicar los movimientos similares al Sol y la Luna más las retrogradaciones:
  - Una para el movimiento diario (E-W)
  - Otra en sentido contrario (W-E) para su año.
  - Dos esferas más girando en sentido contrario para reproducir el movimiento de retrogradación dando lugar a una curva llamada **hipopeda**

44 Imagen de *"Dmitri Klimushkin"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eudoxus_planets3.PNG

De este modo se puede explicar las complejas curvas descritas por las trayectorias planetarias (a diferencia de las circulares que se entienden que siguen el Sol y la Luna, explicando así la retrogradación.

Sin embargo, a pesar de explicar muchos movimientos, incluidas las retrogradaciones, presentaba una serie de deficiencias:

- No explica la variación del brillo de los planetas (cambio del brillo aparente durante la retrogradación) ni el cambio de tamaño de la Luna (se ve más grande en el apogeo), pues equidistan siempre.
- No era sistemático (no integraba todos los planetas en un sólo sistema, al tener la Luna y el Sol 3 esferas mientras que los demás planetas presentan 4).
    - Aristóteles logra posteriormente su integración, aunque para ello necesita 55 esferas.
- No predecía la velocidad de giro ni la posición de los planetas, al ser la hipopeda sólo aproximada.
- Deja fuera la materia y las fuerzas o causas del cambio.

El universo de Aristóteles

Aristóteles sostuvo la esfericidad de la Tierra usando pruebas lógicas y matemáticas, además de datos empíricos, como la variación de la posición de las estrellas en distintos lugares y la sombra redonda de la Tierra proyectada en los eclipses Lunares. El filósofo también sostuvo que la Tierra tenía el tamaño de unos cuarenta miríadas de estadios (entre 70.000 y 80.000 km).

En astronomía, Aristóteles propuso la existencia de un Cosmos esférico y finito, en el que las esferas planteadas por Eudoxo y Calipo (replanteadas por Aristóteles) son reales, requiriendo por ello de una explicación de la **materia y motor del cambio**, es decir, no basta explicar para salvar las apariencias, sino que había que dar cuenta de los **procesos físicos** que determinan esa posición y que sirven para justificar por qué el planeta se mueve como lo hace.

En lo material, Aristóteles diferenciaba dos tipos de sustancias según su corruptibilidad (cambio):

- El **éter**, carece de contrarios, es inmutable y solo tiene movimiento local.
- Los cuatro elementos (**agua, tierra, aire y fuego**) tienen cualidades contrarias y por eso cambian. Vemos que son distintos a los de Platón, matemáticos y sin propiedades. Para Aristóteles, los elementos tienen dos pares de cualidades:
    - seco (S) – húmedo (H)
    - frío (F) – caliente (C).

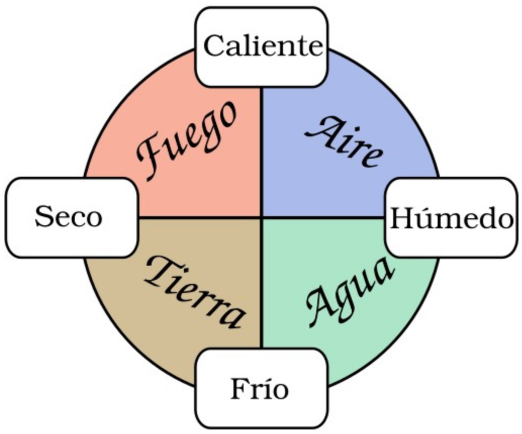


Imagen 42: Elementos aristotélicos [45]

Es al darse estos cambios en las propiedades que se producen cambios en los materiales. Así, si la Tierra (S y F) se calienta produce fuego (S y C), mientras que si se humedece forma agua (H y F) que si se calienta es aire (H y C)

Respecto al movimiento, las cosas tienen una **finalidad, una tendencia** o ***telos***:

45 Imagen de *"Bvs-aca"* (CC BY-SA 2.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cruz_elemental.svg

- La tierra tiende a bajar hacia el centro del cosmos
- El fuego a subir, hacia el cielo
- El agua es más pesado que el aire, pero menos que la tierra, y así se sitúan en el cosmos.

Otros materiales se componen en distintas proporciones de los anteriores, y así se comportan.

Como consecuencia de esto, la postura aristotélica establece que la Tierra se encontraba inmóvil en un sistema geocéntrico, mientras a su alrededor giraba el Sol con otros planetas sobre las esferas que los contenían y categoriza en dos mundos

- **sub-Lunar**, la parte central de cosmos en el cual existe la generación y la corrupción y estaría compuesta por los cuatro elementos: tierra, aire, fuego y agua;
    - La tierra y el agua, los más densos, estarían en el centro
    - El aire, más ligero, sobre éstas en su propia esfera (*atmos+sfera* = esfera del aire).
    - El fuego, más ligero aún (como cuando vemos en una hoguera que el fuego escapa hacia arriba), quedaría por encima de la esfera del aire hasta chocar con la esfera Lunar
- **supra-Lunar**, perfecto e incorruptible, compuestos por las estrellas y objetos celestes estaban incrustados en esferas celestes de éter concéntricas que giraban alrededor de la Tierra
    - Estos astros estarían inmersos en el éter, que sería mucho más ligero aún que el fuego. Para Aristóteles este éter sería un material incorruptible y que no puede mezclarse con nada. Esta característica es lo que le hace eterno, dando cuenta así de que los astros siempre se comporten de la misma manera.

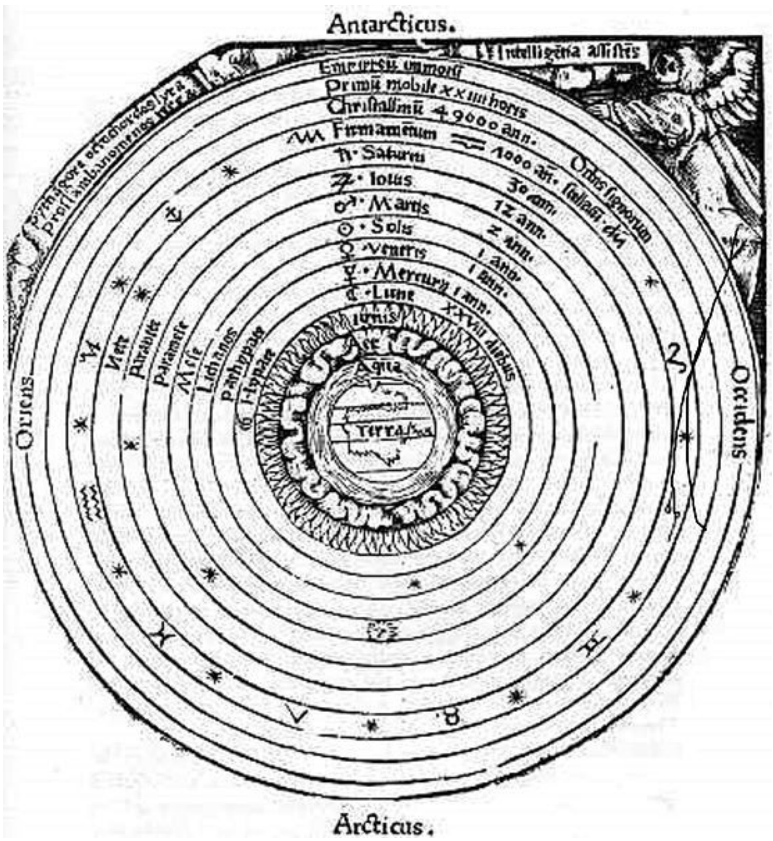


Imagen 43: Universo aristotélico [46]

46 Imagen de Sigmund Grimm y Marx Wirsung en *"De Caelo"* ("De los cielos"). 1519 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aristotelian_Universe.jpg

El comportamiento de los astros en el cosmos aristotélico

En cuanto al cosmos, la esfera del firmamento va en la misma dirección que la del Sol, pero este se mueve paulatinamente en dirección contraria, tardando un año en dar la vuelta completa: tardaría un día en dar el movimiento completo al firmamento en dirección este-oeste, pero un año en dirección concreta. La Luna es similar, pero solo tarda un mes.

De esta manera, la física aristotélica plantea un modelo geocéntrico en el que:

- Los cielos son perfectos y no cambian.
- La Tierra es inmóvil y está en el centro del universo.
- Los planetas se mueven con movimientos circulares uniformes en torno a la Tierra, insertados en esferas.

Estos movimientos astrológicos se rigen por los siguientes principios:

1. Nada se mueve a si mismo, causa efecto.
2. Es necesario el contacto entre el motor y el móvil (movimientos a distancia, como los lanzamientos, suponían un problema para Aristóteles).
    - Para evitar una regresión infinita entre motor y móvil, Aristóteles acude a los motores inmóviles, es decir, motores que no cumplen el primer principio. El motor inmóvil se mueve sin causa, y mueve como acto puro, con causa final.

Como consecuencia de todo esto, las esferas tienen un movimiento de doble causa:

- Debido a su propio motor inmóvil.
- Debido al arrastre de las esferas anteriores.

Lo que Aristóteles pretendía era una cosmología sistemática, no una astronomía necesariamente precisa. Para compensar el arrastre de las esferas anteriores, Aristóteles emplea el modelo de esferas homocéntricas de Eudoxo e introduce bajo cada cada una de ellas otras tantas de sentido contrario. De esta manera, la del siguiente nivel, parte del reposo. Su versión del modelo alcanza 55 esferas, asignándole a cada una de ellas propiedades materiales, habiendo de postular la existencia de esferas neutralizadoras o compensadoras.

El movimiento de las esferas llega hasta el mundo subLunar y es el motor de éste.

A pesar de la sistematicidad de su modelo, tampoco quedaba exento de problemas:

- Fenómenos transitorios observables (cometas, novas, estrellas variables). Fueron atribuidos a perturbaciones en la parte alta de la atmósfera.
- Cambios periódicos en el brillo de los planetas. Se atribuyeron a causas intrínsecas a los planetas.
- Los movimientos de retrogradación eran más complejos que lo que el modelo permitía y que no era capaz de predecir con exactitud.

Los modelos de Eudoxo y de Aristóteles "explicaban" matemática o "realmente" el cosmos (en una teoría realista del cosmos), pero había observaciones que no encajaban.

- Ptolemarco de Cízico señaló la distinta duración de las estaciones, algo que "arregló" Calipo añadiendo dos esferas al Sol para frenarlo.
- También señalo que Venus y Mercurio brillaban más al retrogradar, luego se acercaban a la Tierra, algo imposible de arreglar con esferas.

Replanteando la astronomía: el modelo de Apolonio y Ptolomeo

Después de Aristóteles, nos encontramos con dos posturas fundamentales

- Los cosmólogos (que se ciñen al modelo de la física aristotélica y su interpretación realista de la astronomía): intentan averiguar los procesos físicos que determinan la posición de los planetas y que sirven para explicar por qué el planeta está en ella.
  - ¿Cómo integrar todas las esferas de los planetas en un sistema físicamente viable?
  - ¿Cómo se transmiten los movimientos de una esfera a otra?

  Es decir:
  - Fenómenos transitorios observables
  - Cambios periódicos en el brillo de los planetas
  - Los movimientos de retrogradación eran más complejos de lo que el modelo permitía.
- La astronomía basada en los epiciclos (instrumentalista), que trata de explicar por qué los planetas se mueven como se mueven. Los principales representantes fueron **Apolonio** y **Ptolomeo**. El gran problema era *salvar las apariencias* con exactitud mediante movimientos circulares.

El modelo de Apolonio y Ptolomeo

Apolonio es el matemático que en el siglo III a.e.c. escribiera el tratado de las *"Cónicas"* que ha perdurado hasta nuestros días y donde detalla la elipse, la parábola y la hipérbola. Hizo contribuciones a la astronomía sobre las que se basa posteriormente Ptolomeo y que recoge en su *"Almagesto"* (nacido en el año 100), razón por la que hablamos del "modelo de Apolonio y Ptolomeo".

Principios básicos de la teoría astronómica de Apolonio y Ptolomeo

1. El universo es esférico y sus movimientos son de rotación.
2. La Tierra es una esfera.
3. La Tierra está en el centro del cosmos.
4. La Tierra no se mueve.
5. En relación con la distancia a las estrellas fijas (la esfera más alejada de todas), la Tierra no tiene un tamaño apreciable, y puede ser considerada como un punto matemático.

La justificación de esto es la consciencia de que toda observación hecha desde la superficie de la Tierra, siendo esta esférica y estando dicho punto de observación alejado de su centro, estaría limitado, pues el horizonte nos privaría de poder apreciar en su totalidad la semiesfera que veríamos si se tratase de un único punto coincidente con el centro de la Tierra. Aun así, tras las observaciones se identifica y sitúan todas las estrellas visibles en el firmamento, ante lo que los astrónomos griegos se dieron cuenta de que por la noche vemos prácticamente la mitad de éste, infiriendo así que la superficie de la esfera fuese muy pequeña comparándola en magnitud con las distancias al firmamento observado.

Epiciclos y deferentes

Si bien Platón y Aristóteles comparten con la astronomías de Eudoxo los principios básicos vistos antes, no lo hacen en cuanto a la estructura que presentan las esferas. Según Apolonio, en vez de considerar varias esferas concéntricas unas a otras (con sus diferentes ejes de rotación que planteara Eudoxo con sus esferas homocéntricas), lo que plantea es que sobre la esfera principal en la que se halla incrustado el planeta, existe otra esfera. Es decir, la esfera principal marca la directriz de traslación de la segunda esfera respecto a la Tierra, siendo en esta segunda en la que se mueve realmente el planeta.

- <u>Deferente</u>: la esfera grande, la principal sobre la que el epiciclo gira respecto a la Tierra
- <u>Epiciclo</u>: la esfera pequeña que se mueve sobre la deferente y sobre la cual rota el planeta.

Es al combinar el movimiento del planeta debido a ambas rotaciones que se tiene esa especie de movimiento circular con rizos a lo largo de su trayectoria, que se asemeja a las retrogradaciones que ya habían sido observadas e identificadas anteriormente.

Según sean los radios relativos entre epiciclo y deferente, así como las velocidades angulares de cada uno, se tienen diferente número de retrogradaciones observadas.

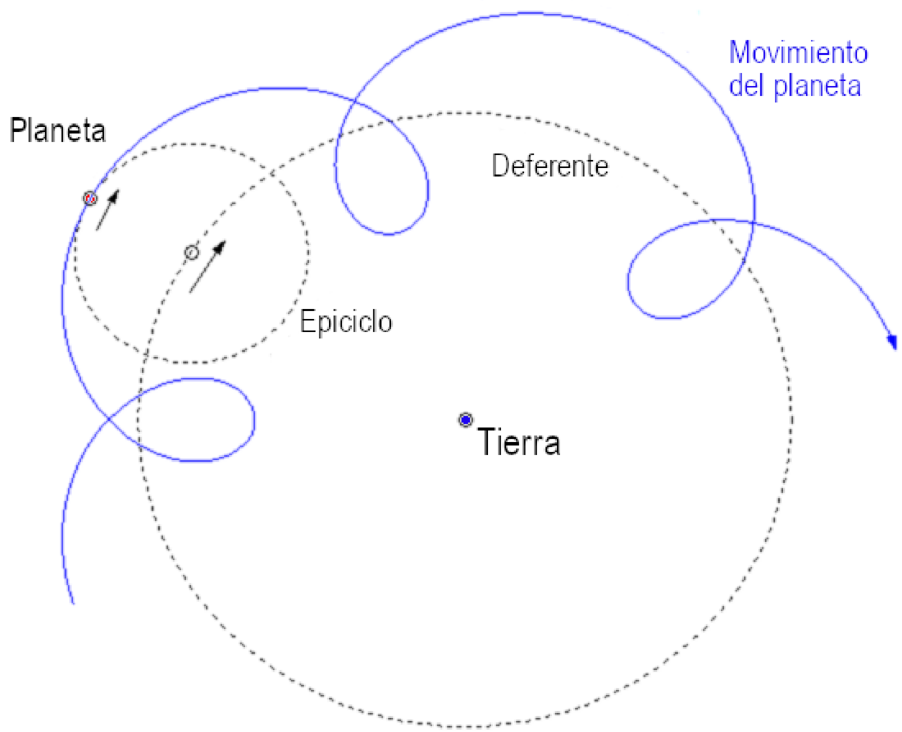


Imagen 44: Epiciclo y deferente en el movimiento del planeta [47]

Ptolomeo añadiría posteriormente un segundo epiciclo dentro del epiciclo principal (o más, según fuese el caso) a fin de dotar de precisión a los cálculos para que se ajustasen a las mediciones realizadas al observar la retrogradación de los planetas.

Por otro lado, si nos fijamos en la trayectoria espiral que explicaban los epiciclos, podemos ver que cuando el planeta se encuentra en los rizos como consecuencia del giro del epiciclo sobre la deferente, en realidad se encuentra más próximo a la Tierra que cuando se comporta de la manera que podría asemejarse al movimiento circular. Es con esto que se trata de dar justificación a la <u>mayor intensidad de brillo</u> observada cuando los planetas retrogradan.

47 Imagen de *"Alfonso Mora"* (CC BY-SA 4.0)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Epicilo_y_deferente.png

Otro elemento que puede explicarse mediante los epiciclos es el de las **órbitas excéntricas** (es decir, órbitas circulares que no comparten centro con la Tierra). Hemos visto que según los radios del epiciclo y la deferente, así como sus velocidades de rotación, podemos justificar la aparición del número y periodo de duración de las retrogradaciones planetarias. Sin embargo, si tuviésemos tal relación de radios y velocidades de modo que lo que tarda en darse una revolución sobre el epiciclo requiriese el mismo tiempo que lo que tarda éste en rotar sobre la deferente, tendríamos un movimiento circular "descentrado" respecto a la posición de la Tierra.

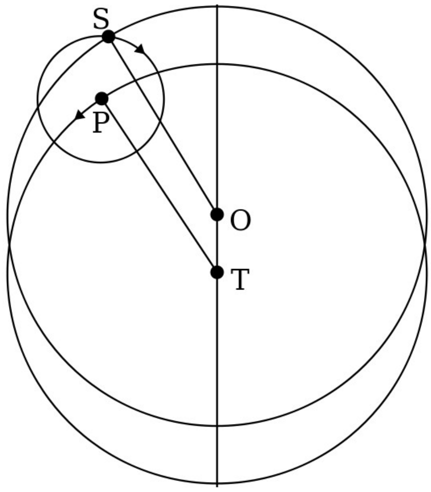


Imagen 45: Epiciclo y órbita excéntrica [48]

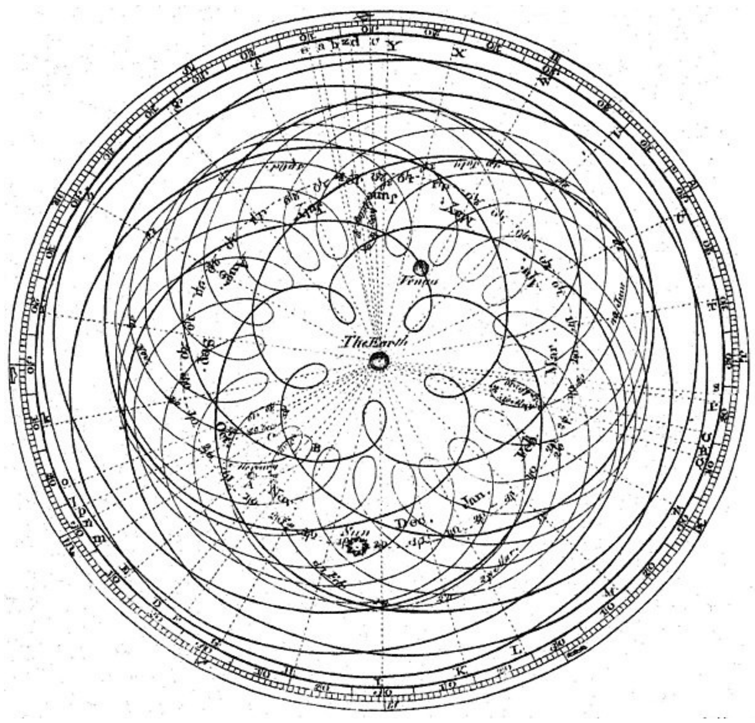


Imagen 46: Universo geocéntrico con epiciclos [49]

48 Imagen de *"Dmitri Klimushkin"* (dominio público)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hipparchus_Sun_epicycle.svg

49 Imagen de *"James Ferguson"* (1710-1776) basada en diagramas Similares de Giovanni Cassini (1625-1712) y Dr. Roger Long (1680-1770) empleados en la primera edición de la "*Encyclopaedia Britannica*" (1771)
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Cassini_apparent.jpg

La innovación de Ptolomeo: los ecuantes

Ya en el siglo II, Claudio **Ptolomeo** recopiló todo el saber astronómico anterior a él introduciendo sus propias innovaciones, recogiéndolas en la que sería su principal obra. El título era significativo de su naturaleza teórica más que física: *"Sintaxis Matemática de Astronomía"*, más conocido por su nombre en árabe *"Al Majesti"* y su castellanización, *"Almagesto"*.

Uno de los principales problemas que afronta el modelo de Apolonio se encuentra al lidiar con la retrogradación de los problemas, pues éstas no son todas iguales, ni en forma, ni en tamaño, ni en regularidad, quedando sin explicar por parte de Apolonio.

La no uniformidad aparente de estos movimientos es resuelta mediante el uso del **ecuante**, una innovación matemática introducido por Ptolomeo. Un ecuante es un punto adicional imaginario que se sitúa sobre el eje que forman la Tierra y el centro de giro de la órbita realmente observadas (que ya hemos visto en el caso de órbitas excéntricas que puede diferir de la posición terrestre), situado simétricamente a la Tierra respecto a éste.

Un modelo de un epiciclo con deferente homocéntrico (excentricidad 0) daría cuenta de los movimientos de retrogradación de amplitudes idénticas, y a intervalos de tiempo idénticos, lo que no corresponde a los movimientos de los planetas para un observador terrestre, que en ocasiones aprecia que dichos movimientos no siempre se realizan con la misma velocidad.

Ptolomeo utilizó un modelo excéntrico, modificado por la introducción del punto adicional que es el ecuante. De este modo, el epiciclo tiene ahora dos referencias:

- Una de **trayectoria del epiciclo**: su centro (Ce) gira en torno al centro del deferente (Cd), que no es la Tierra. La distancia de Ce al Cd es fija, pero no respecto a la Tierra.
- Una de **velocidad:** la velocidad angular del centro del epiciclo es constante respecto del ecuante (E), no del centro del deferente.

  La distancia al ecuante varía y la velocidad lineal también.

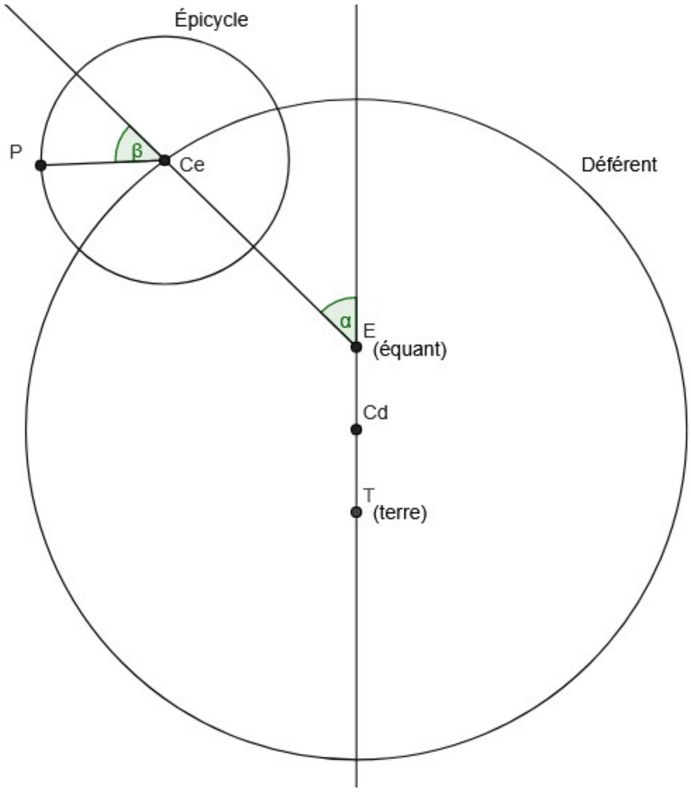


Imagen 47: Epiciclo, deferente y ecuante [50]

Así, el centro del epiciclo (Ce) que describe un círculo centrado en el centro del deferente (Cd) distinto de la Tierra, tiene una velocidad angular constante no con respecto al centro del deferente, sino con respecto al punto ecuante (E). En el caso de los planetas exteriores, el punto ecuante está situado en una línea recta a través de la Tierra y el centro del deferente, y es simétrico desde la Tierra hasta el centro del deferente. Este modelo permitió a Ptolomeo dar una explicación satisfactoria del movimiento de los planetas en longitud. El movimiento de los planetas en latitud seguía siendo la gran debilidad del sistema ptolemaico.

Al considerar la distancia entre el astro a lo largo de su movimiento y el ecuante nos dará ángulos cada vez mayores. La velocidad de traslación del astro sabemos que no era constante respecto de la Tierra como supuesto centro de rotación, sino que lo es desde el centro del ecuante, pues sería éste el que "ecualiza" (que hace igual la velocidad) al astro desde su órbita. Gracias a este aporte pudo realizar predicciones aún más precisas del movimiento de los planetas, si bien dio pie a un conflicto astronómico.

Cada astro tenía su deferente y su epiciclo, calculados para que encajaran en las observaciones.

El orden de estos era: Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno y Estrellas.

Como no podían quedar espacios vacíos, ajustó los deferentes para que con los máximos y mínimos de los epiciclos no quedaran huecos. Aún así, los había, pese a que los ajustes no fuesen sino un trucaje en las mediciones de los paralajes con los astros, tan pequeños que lo observado podía coincidir con lo deseado con facilidad.

Las causas de los movimientos las buscaba en cuestiones astrológicas y divinas, más que físicas. Esta parte del trabajo de Ptolomeo es de su obra *"Las hipótesis de los planetas"*, de la que se tienen pocas referencias y todas muy contaminadas de traducciones árabes

50 Imagen de *"HB"* (CC BY-SA 3.0) https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:EquantPtolemee.svg

Conflicto entre la astronomía aristotélica y ptolemaica

El modelo de Ptolomeo y todas las enmiendas matemáticas que la incluye resuelve las irregularidades observadas de las retrogradaciones y los cambios de brillo aparente, pero choca directamente con la propuesta aristotélica:

- El punto ecuante y la excentricidad (el mayor o menor acercamiento a la Tierra) significaba abandonar la idea de que los planetas se mueven siguiendo un movimiento natural, que en la esfera supra-Lunar es el movimiento circular uniforme en torno a la Tierra.
- El movimiento en epiciclos es incompatible con la existencia de esferas sólidas.
- En la teoría de Aristóteles todas las esferas tienen como centro común el del universo, ocupado por la Tierra. Giran en torno al cuerpo que, debido a su naturaleza pesada, le corresponde a la posición central. En la astronomía ptolemaica ningún cuerpo gira alrededor de la Tierra, sino que todos lo hacen alrededor de un punto geométrico, que carece de entidad física. No hay un criterio físico que permite comprender por qué un cuerpo celeste se mantiene equidistante de un lugar vacío.

El modelo cosmológico de Filolao

Los modelos pitagóricos (siglo V a.e.c.) basados en un fuego central no tuvieron mucho éxito.

Filolao postuló un cosmos formado por un fuego central (Hestia) y nueve cuerpos que giran a su alrededor: Antichton, la Tierra, la Luna, el Sol (esfera de cristal que refleja el fuego central), los cinco planetas observables y la esfera de las estrellas fijas.

El Sol reflejaba la luz de Hestia y la función de Antichton era evitar ver simultáneamente Hestia y el Sol.

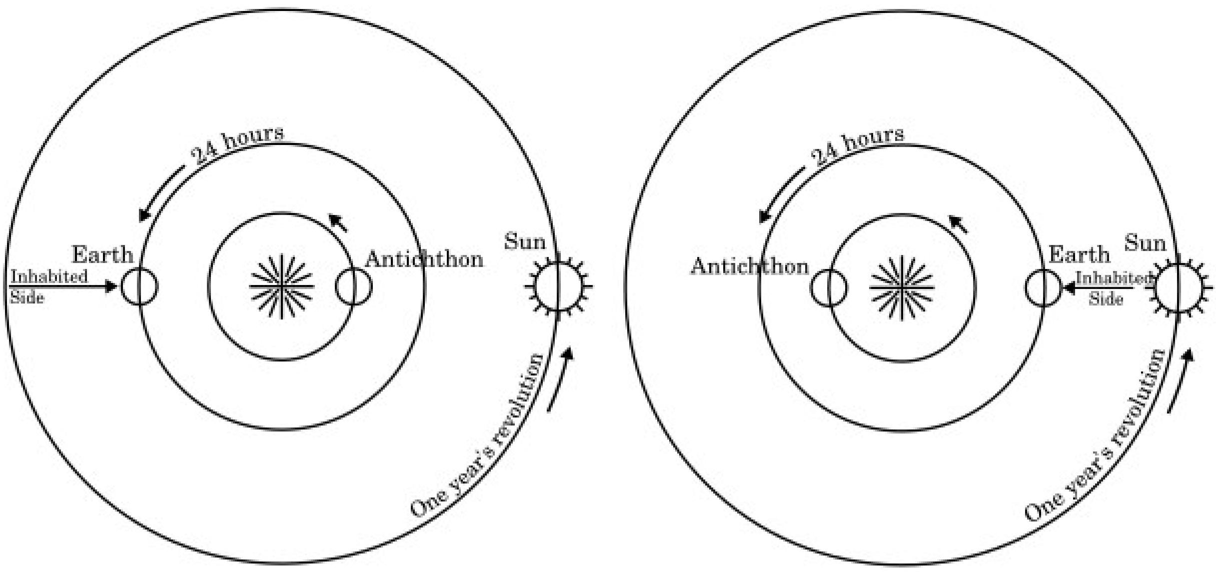


Imagen 48: El cosmos de Filolao [51]

51 Reestructuración de la imagen de *"BorgQueen"* y *"Amble"* en Wikimedia Commons, que limpian y vectorizan el original publicado en *"Dante and the Early Astronomers"* de M. A. Orr (1913). Perteneciente al dominio público https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Antichthon.svg

Aristarco de Samos y la medición del mundo

Hasta ahora nos hemos centrado en la organización cosmológica de los cielos para explicar el movimiento de los planetas. Con Aristarco (310-230 a.e.c.) nos encontramos ante una serie de planteamientos que enfocan la astronomía desde otros puntos de vista. Aristarco de Samos formuló un modelo heliocéntrico del que no existen referencias más allá de varias citas de Arquímedes y Plutarco. Postuló un Sol inmóvil, en el centro de una esfera de estrellas fijas también inmóvil y una Tierra esférica girando a su alrededor en un año y sobre si misma diariamente. Sus ideas fueron poco (o nada) aceptadas, no tanto por su herejía, como por lo poco verosímil de una Tierra que girase, pues entendían que en ese caso pájaros y nubes se desviarían hacia el oeste (Este fue el principal problema para aceptar el giro terrestre hasta Galileo).

Por otro lado, ideó un método para medir el tamaño del Sol y de la Luna, y sus distancias a la Tierra, en términos del diámetro de la Tierra (cuyo tamaño desconocía y que no sería estimado hasta Eratóstenes).

El tamaño de la Luna

El **tamaño de la Luna** lo hizo aprovechando un eclipse de Luna, en el cual midió dos cosas:

- El tiempo que tarda la Luna en ocultarse cuando entra en la sombra de un eclipse.
- Cuánto tarda en salir completamente del eclipse.

Como la velocidad de la Luna puede considerarse constante durante la duración del eclipse Lunar, y considerando que el Sol está lo suficientemente lejos de la Tierra como para considerar paralelos los límites de la sombra proyectada desde la Tierra hasta la órbita Lunar, Aristarco establece las siguientes dos relaciones:

- El diámetro Lunar (D_L) equivale al tiempo que tarda en ocultarse al penetrar en la sombra (t_L) (desde que empieza a ensombrecerse hasta que “desaparece”) → $D_L \sim t_L$
- El diámetro terrestre (D_T) equivale al tiempo empleado en atravesar la sombra (t_T) (desde que empieza a entrar en la sombra hasta que sale completamente de ésta). → $D_T \sim t_T$

De esta manera determina una relación de proporcionalidad de los tamaños (diámetros) de la Tierra y la Luna según la proporción de tiempos medidos durante el eclipse, así:

$$\frac{t_L}{t_T} = \frac{D_L}{D_T} = 0.36$$

Es decir, el diámetro Lunar es 0.36 veces el diámetro terrestre.

El resultado estimado no es correcto, teniendo en cuenta las hipótesis de partida tomadas (velocidad constante relativa a la observación desde la Tierra y proyección paralela de los rayos solares al proyectar la sombre durante el eclipse), así como los instrumentos de medida para la observación de la Luna en su penetración en la sombre y el tiempo que tarda en atravesarla. Sin embargo no deja de ser una muy buena aproximación a las proporciones reales:

$$\frac{\textit{Radio terrestre medio}}{\textit{Radio lunar}} \approx \frac{6378.1\,km}{1737.1\,km} = 3{,}671694202981981$$

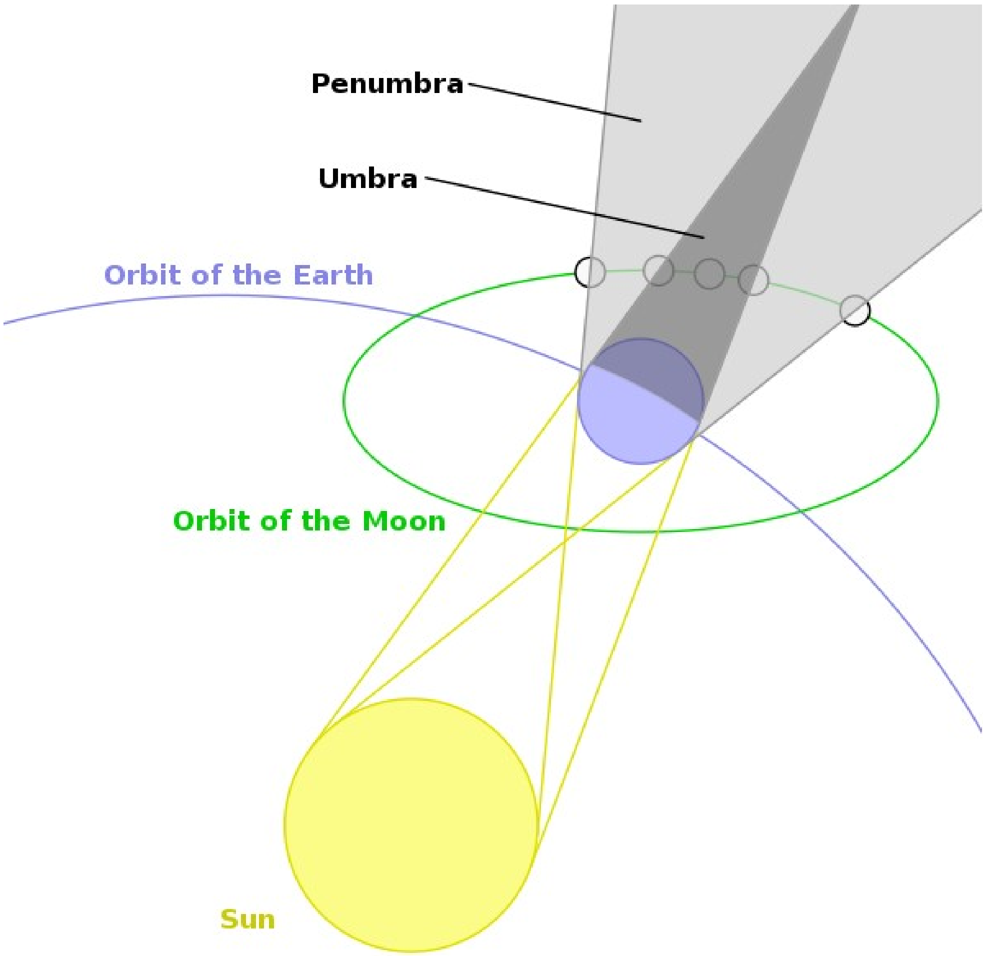


Imagen 49: Eclipse Lunar [52]

Distancia de la Tierra a la Luna

Supuso que cuando un observador veía iluminada exactamente la mitad del disco Lunar, los rayos de la luz emitidos por Sol que iluminaban la Luna formaban con la visual Tierra-Luna un ángulo de 90º. Tanto el Sol como la Luna se ven desde la Tierra bajo un cierto ángulo (llamado *diámetro angular*), que Aristarco midió para ambos astros y determinó aproximadamente iguales y equivalentes a unos 2º (en realidad el valor se aproxima más a 0.53º y que sean iguales es mera coincidencia, además de que varían del mismo modo que lo hacen las distancias a la Luna y el Sol por motivo de la oblicuidad de las órbitas elípticas).

Conocidas las relaciones proporcionales entre los diámetros Lunar y terrestre, empleó dicha relación para estimar la distancia existente entre la Tierra y la Luna. Desde la Tierra, punto desde el que Aristarco realiza la observación, se considera el arco de circunferencia que recorre la Luna en el firmamento, donde para una longitud recorrida igual al diámetro de la Luna (D_L), y siendo el radio de dicho arco la distancia a la Luna (d_L), Aristarco estimó que la apertura de tal ángulo era de 2º de circunferencia.

52 Imagen de *"Sagredo"* (dominio público)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geometry_of_a_Lunar_Eclipse.svg

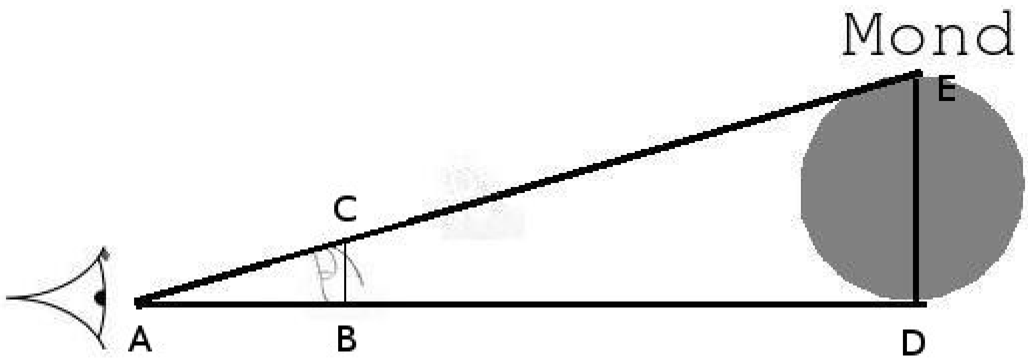


Imagen 50: Distancia de la Tierra a la Luna [53]

Si se aproxima dicho arco a un triángulo rectángulo donde sus catetos son el diámetro y longitud mencionadas, el seno de dicho equivaldría a D_L/d_L (cateto opuesto entre el cateto contiguo al ángulo), y puesto que cuanto menor sea el ángulo más aproximada es la relación $\alpha \approx \sin\alpha$, y dado que $\sin(2^o) \approx 0.035$, para las medidas dadas por Aristarco se tendría que:

$$d_L \approx \frac{D_L}{\alpha} \approx \frac{4000\,km}{0.035} \approx 115000\,km$$

En realidad, el ángulo que forma el diámetro de la Luna observado desde la tierra es de $\alpha \approx 0.5^o$, donde $\sin(\alpha) \approx 0.0087$, y la distancia real entre la Tierra y la Luna es de 385400 km, de modo que sus cálculos distaban bastante de la realidad, si bien atinó en cuanto al orden de magnitud.

A partir de estos valores pudo estimar la distancia de la Tierra a la Luna, empleando un método diferente al plantearse cuántos grados de circunferencia ocupa la Luna en el firmamento. Aristarco midió que eran dos grados de circunferencia.

Distancia de la Tierra al Sol

Teniendo en mente todo lo anterior establece la siguiente relación proporcional entre las distancias a la Tierra y los diámetros de dichos astros (donde d_{TL} y d_{TS} son las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol respectivamente, D_L el diámetro Lunar y D_S el diámetro solar):

$$\frac{d_{TL}}{d_{TS}} = \frac{D_L}{D_S}$$

Vemos que en ningún momento ofrece valores concretos de estos valores y únicamente ofrece las relaciones entre ellos. Lo que hace Aristarco es considerar la posición triangular siguiente cuando se observa la Luna iluminada en su mitad (en cuarto creciente), momento en que considera que se encuentra formando un ángulo recto con el Sol desde nuestro punto de observación terrestre.

53 Imagen de *"Yomomo"* (CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StrahlensatzMond2.jpg

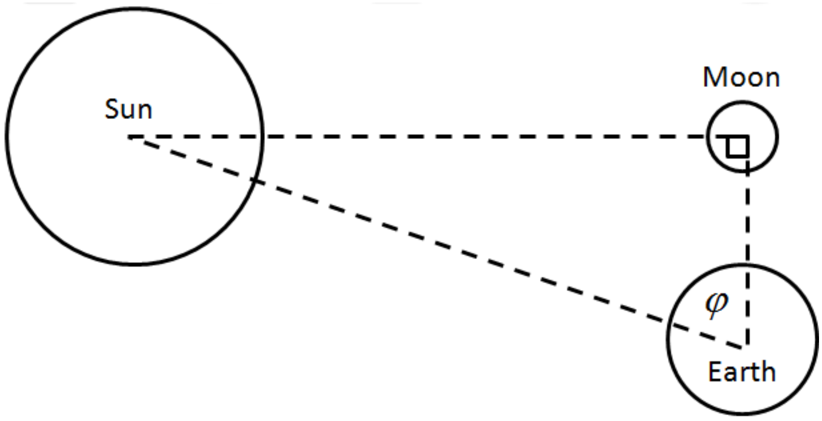


Imagen 51: Distancias a la Luna y el Sol desde la Tierra [54]

Sea el triángulo $\triangle EMS$ (E el vértice de la Tierra (Earth), M la Luna (Moon) y S el Sol (Sun)), el ángulo $\sphericalangle SME$ es recto, y el día en que se ve sólo media Luna, el ángulo $\varphi = \sphericalangle SEM$ lo midió en 87^o. El problema de sus mediciones es que φ es muy próximo al ángulo recto (en realidad vale $89{,}85^o$), y los errores en sus cálculos acarrean unas variaciones considerables.

Con los datos de que dispone (los ángulos de dicha disposición y el lado EM (Tierra-Luna) para el que disponía de la estimación vista previamente, dio una estimación de la distancia al Sol, si bien distaba enormemente de la distancia real.

En general, el planteamiento de Aristarco era bueno, pero:

- Tiene un problema de medición por la cercanía del ángulo φ a un ángulo recto
- Aristarco lo midió como 87º, pero en realidad era de 89,95º. Es mucho más fácil medir un ángulo pequeño que un ángulo de 90º con buena precisión. Esto provocó que las distancias que estimaban los griegos salieran mucho más pequeñas de lo que son en realidad.
- El método de Aristarco era geométricamente impecable pero inviable pues exige medir con precisión ángulos muy pequeño. Resulta que determinar el ángulo es imposible pues es de unos pocos minutos y un pequeño error tiene consecuencias considerables sobre las distancias. Además, era muy difícil determinar el momento exacto de la cuadratura, pues no existían teóricas del movimiento de la Luna y el Sol. La Luna se desplaza muy deprisa, por lo que los errores en la determinación del momento exacto de la cuadratura y de la posición del Sol son fatales.
- Aristarco dijo que el ángulo que forman la Luna, el Sol y la Tierra 3º (unas 18 veces mayor de lo debido) y una distancia al Sol entre 18-20 veces la Luna (en realidad es unas 400 veces mayor) Dado que los diámetros aparentes del Sol y la Luna son iguales (2º según Aristarco, en realidad, 0.5º) se sigue que los diámetros reales son como las distancias: el error de los diámetros aparentes es excesivo. Aristarco parece que pusiera más interés en el método geométrico que en la precisión de los datos.
- Aristarco dijo que la Luna está como a unas 10 veces el diámetro de la Tierra de distancia, cuando en realidad es unas 35 veces. Lo mismo ocurrió con la distancia de la Tierra al Sol, que realmente está a unos 150.000.000 km, aunque también le salió una cantidad en millones de kilómetros, por lo que acertó con una precisión asombrosa para la época, pero sin gran exactitud.

54 Imagen de *"Andonee"* (dominio público)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AristarchusHalfLitMoon.png

- Para hallar las relaciones de los diámetros del Sol y la Luna con el de la Tierra recurrió al diagrama de eclipses, determinando que el radio solar era unas 7 veces mayor que el de la Tierra y el de la tierra 3 veces mayor que el de la Luna, mientras que el Sol está 19 veces más lejos de nosotros que la Luna.

Eratóstenes

Eratóstenes (276-195 a.e.c.) fue el primero que concibió la geografía como una disciplina sistemática, empleando una terminología que todavía se usa en la actualidad

Fue bibliotecario de la Biblioteca de Alejandría donde leyó, entre otros muchos a Eudoxo, del que extraería un dato que le sirvió para sus mediciones.

Escribió una obra sistemática titulada *"Geographika"* dividida en tres volúmenes:

1. El primero pasa revista crítica a sus predecesores, exponiendo las investigaciones acerca de la forma de la Tierra (que él consideraba una esfera inmóvil).
2. El segundo contenía lo que hoy se llama geografía física, incluyendo el ensayo acerca del tamaño de la Tierra.
3. El último versa sobre geografía política, donde incluía descripciones de las comarcas conocidas tomadas de los relatos de viajeros y geógrafos precedentes.

Eratóstenes fue el primero en elaborar lo que hoy llamaríamos un Atlas, con una descripción de países y regiones, y también el modelo astronómico conocido de la época. En esa obra, sin embargo, ofreció también el cálculo del tamaño la Tierra.

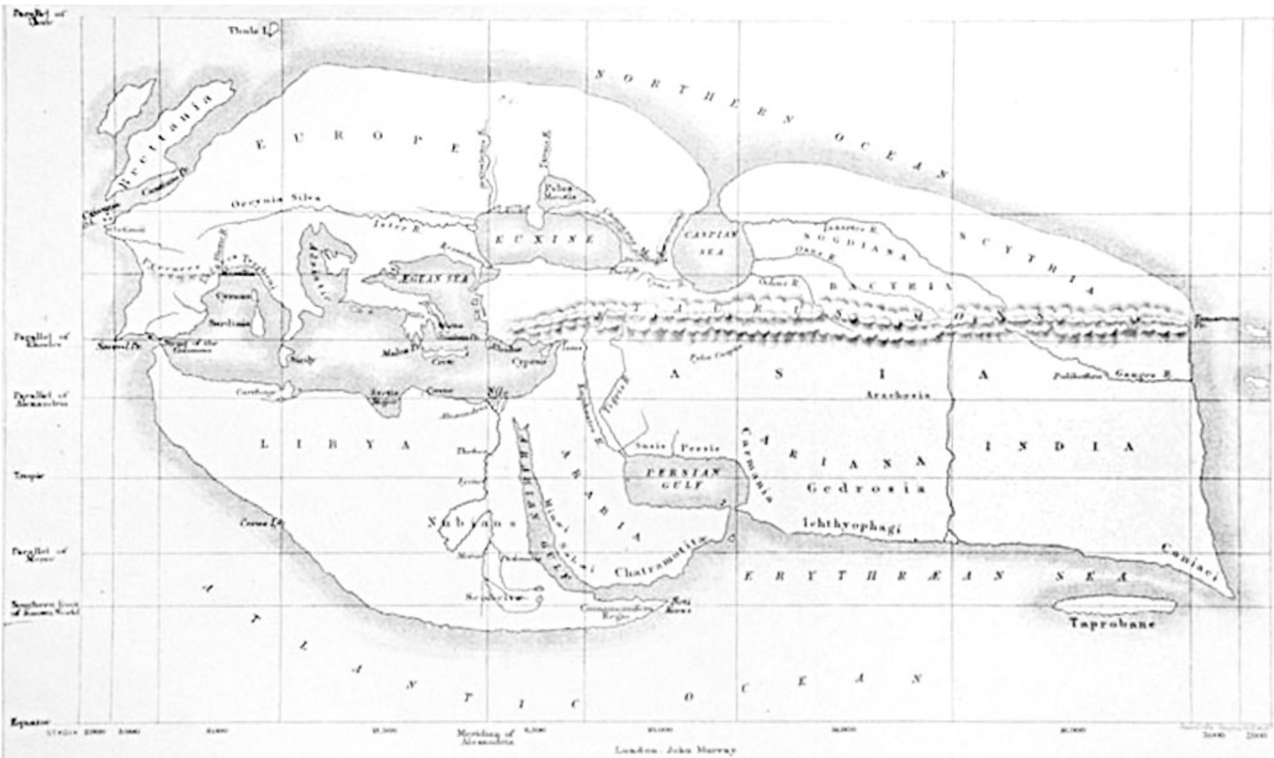


Imagen 52: Mapa de Eratóstenes

55 Versión del mapa de Eratóstenes incluida en Bunbury, E.H., *A History of Ancient Geography among the Greeks and Romans from the Earliest Ages till the Fall of the Roman Empire*. London: John Murray, 1883. Perteneciente al dominio púbico https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mappa_di_Eratostene.png

El tamaño de la Tierra

Si bien Aristarco había ofrecido una serie de relaciones proporcionales para determinar el tamaño y distancias relativas a la Tierra de la Luna y el Sol, en todo momento adolecía del patrón necesario para ofrecer un cálculo determinado, a saber, el tamaño terrestre. Fue Eratóstenes quien aporta este dato que faltaba.

Eratóstenes, que trabajaba en Alejandría, se percató de que en la ciudad de Siena (cerca de Sudán) que está sobre el trópico de Cáncer, el Sol se posiciona en el solsticio de verano en 90º en perpendicular (ya Eudoxo afirmaba que en Siena a medio de dicha fecha las columnas no proyectan sombra). Si uno se asoma a un pozo de esa ciudad podía ver el Sol reflejado en el fondo del pozo (es decir, que la proyección de sus rayos en dicho instante era perpendicular). Por su parte, en Alejandría, el Sol no caía en vertical nunca. La distancia a la latitud de Siena es de 7,2º, estimado por Eratóstenes mediante la proyección de un palo perpendicular al suelo de Alejandría y la sombra que proyectaba, ya que en ese momento ningún palo proyectaría sombra alguna de estar ubicado en Siena. Eratóstenes utilizó este hecho para medir el tamaño de la Tierra.

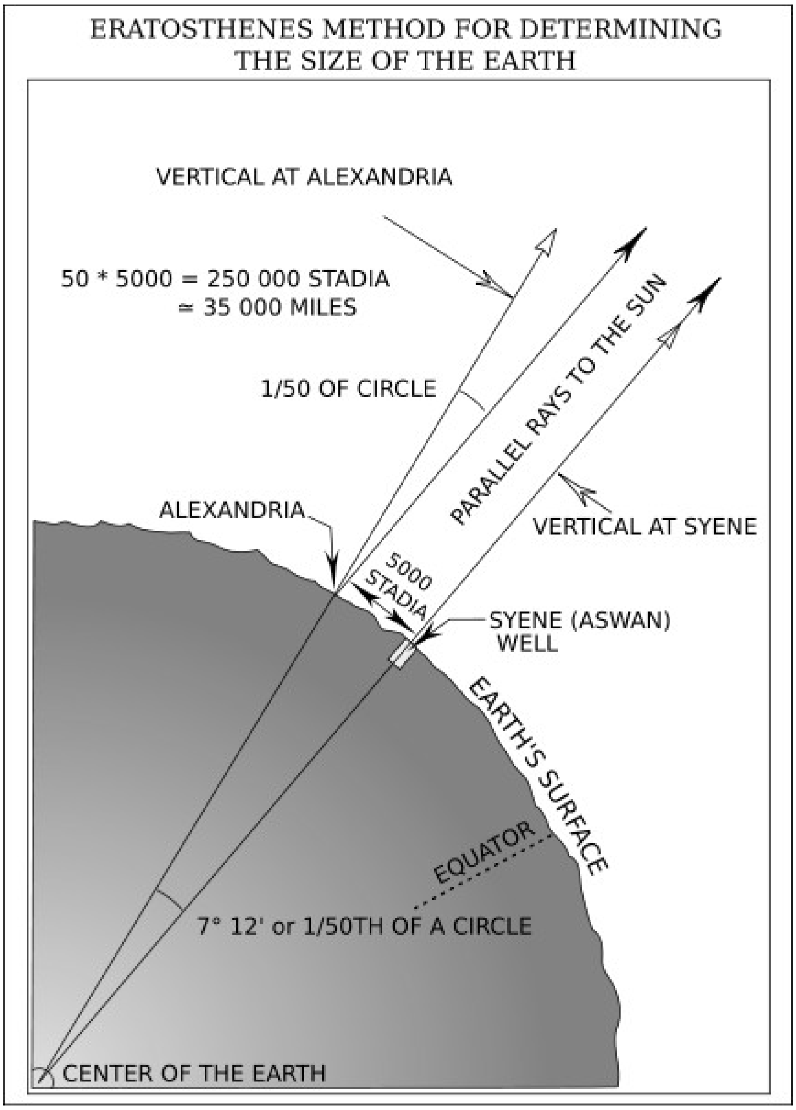


Imagen 53: Medición del tamaño de la Tierra de Eratóstenes [56]

56 Imagen de *"Gregors"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eratosthenes%27_method_for_determining_the_size_of_the_Earth.svg

Suponiendo que en Siena llegan los rayos proyectados perpendicularmente, y en Alejandría llegan más oblicuos, establece una relación proporcional entre la que existe entre el ángulo que forman las proyecciones entre los rayos en ambos puntos con la totalidad e 360º de la circunferencia terrestre, que equivaldría entre el perímetro de la Tierra ($2\pi R$) y el arco de circunferencia que puede ser medido como la distancia en línea recta entre Alejandría y Siena.

$$\begin{cases} l & \text{distancia entre Alejandría y Sienna} \approx 800\,km \\ \alpha & \text{ángulo de 7.2º que forman las proyecciones} \\ & \text{del Sol en ambos puntos} \\ R & \text{radio de la Tierra} \\ 2\pi R & \text{diámetro de la Tierra} \end{cases}$$

$$\frac{l}{\alpha}=\frac{2\pi R}{360^o}$$

$$R=\frac{360^o l}{2\pi\alpha}$$

Al preguntar a las caravanas de camellos, supo que la distancia entre ambas ciudades eran 800km, y esto le permitió saber cuál era el radio de la Tierra y, de ahí, sacar la longitud del perímetro de la Tierra.

Con este dato, y el estimado de $\alpha=7.2^o$ determinó que $R=6366\,km$, lo cual es un valor bastante próximo al real ($R=6378.1\,km$ en valor promedio)

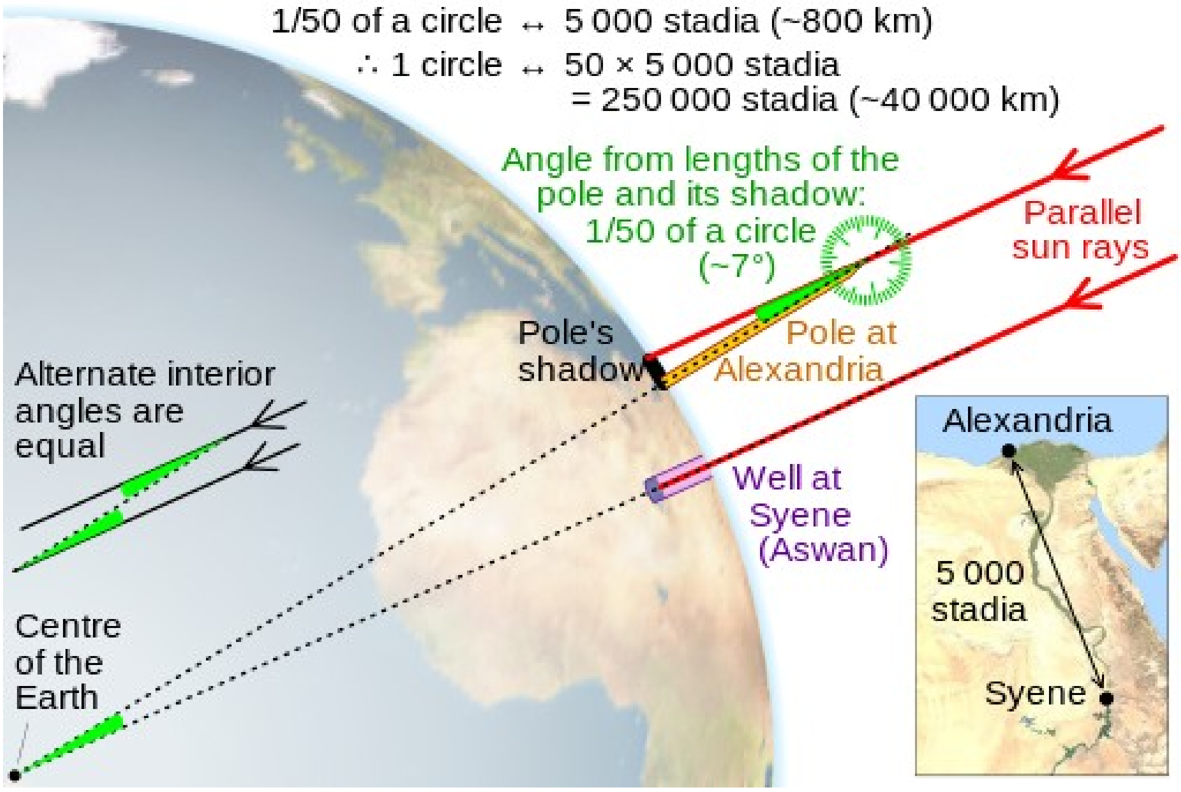


Imagen 54: Medición del tamaño de la Tierra de Eratóstenes [57]

57 Imagen de "*cmglee*", "*David Monniaux*" y "*jimht*" (CC BY-SA 4.0) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Eratosthenes_measure_of_Earth_circumference.svg

La ciencia en la Edad Media

La ciencia durante la Edad Media

La expresión Edad Media fue inventada por los humanistas del Renacimiento para referirse al milenio transcurrido desde su modelo de referencia. Los estereotipos que la presentan como una época de represión (si bien el Renacimiento también tuvo su buena dosis de represión, donde por ejemplo Giordano Bruno fue quemado en 1600 y en 1633 fue el juicio a Galileo) y coerción intelectual y moral que no aportó nada reseñable son una verdad a medias.

Se pintaba al profesor medieval como débil y servil de Aristóteles y los Padres de la Iglesia, algo que dentro de unos límites, no era cierto. Casi no había doctrina, filosófica o teológica, que no fuera sometida a la crítica y escrutinio minuciosos por los estudiosos de la universidad medieval. No obstante, no hubo ninguna gran figura como las que hubo antes y después: Arquímedes, Newton... pero se crearon centros de enseñanza e investigación autónomos e independiente de cortes y mecenas.

En las Universidades el saber racional se convirtió en un elemento imprescindible del orden social. En ellas, las disciplinas matemáticas y las físicas se unían en las ciencias medias (Aristóteles llamaba ciencias medias a aquellas que tenían más de físicas que de matemáticas, como podría ser su astronomía, aunque no la ptolemaica), aunando la perspectiva pura de la primera y práctica de la segunda, separadas desde Grecia.

Así se exigió que la astronomía obtuviese resultados precisos partiendo de supuestos reales, exigencia que está en la base de la revolución de Copérnico.

Alta edad Media

- **Boecio** (siglo VI) tradujo varios tratados de lógica (*"Categorías"* y *"De interpretatione"* de Aristóteles y el *"Isagogé"* de Porfirio) y algunos rudimentos de geometría, astronomía y música evitando que se olvidara a Euclides, Ptolomeo, etc.
- **Isidoro de Sevilla** (siglo VII) importante para la Iglesia, apenas aportó nada a la ciencia. Pensaba, por ejemplo, que la Tierra tenía forma de rueda.
- **Beda el Venerable** (siglo VIII) habló de un universo ordenado por causas y efectos identificables.
- **Alcuino de York** (siglo IX) estableció nuevos programas de estudio (de las escuelas catedralicias, precursoras de las universidades) alrededor de las Siete Artes Liberales:
    - *trivium* o enseñanza literaria, que incluía la gramática, retórica y dialéctica
    - *quadrivium* o enseñanza científica, que agrupaba la aritmética, geometría, astronomía y música.

  Pero la ruptura del Imperio Franco dio paso a una nueva oleada de invasiones que pospusieron estas novedades a los siglos XII y XIII.

Islam

El Islam fue la columna vertebral del conocimiento medieval, nexo entre la antigüedad y el renacimiento.

- Se incorpora la numeración decimal y posicional de la India y se desarrolla la aritmética
- Inventaron el álgebra, entendida como una extensión y generalización de la aritmética.
  - Al-Khwārizmī (siglo IX) fue autor de varios compendios, tanto de aritmética como de álgebra.
- En astronomía tradujeron el *"Almagesto"* de Ptolomeo, más con intención astrológica que astronómica. Hicieron observatorios, instrumentos, tablas de observaciones, etc. Tenían dos intenciones divergentes:
  - Comentar, complementar y mejorar la obra, como hizo Al-Batānī (siglo IX)
  - Subrayar las deficiencias del modelo basándose en las anomalías observadas

Lo más importante fue la tensión entre la astronomía ptolemaica y la cosmología aristotélica. Ibn al-Haythan (Alhazén) escribe en el s XI su *"Dudas sobre Ptolomeo"*, en la que destacaba la violación de la uniformidad del movimiento (el uso de los ecuantes como artificio para descentrar las órbitas). Encajó los epiciclos de Ptolomeo en las esferas de Aristóteles, dando realismo a la idea, aunque sin eliminar el instrumentalismo original. Aun así, se unificaron los dos modelos.

Algunos aristotélicos andalusíes (En el siglo XII, el zaragozano Ibn Bayya (Avempace), el cordobés Ibn Rushd (Averroes) o en el siglo XIII el sevillano al-Bitrūgī (Alpetragius)) no aceptaron esta "mezcla" y defendieron el modelo aristotélico de esferas homocéntricas, renunciando por ello a la mayor exactitud de los epiciclos ptolemaicos. A pesar de ser más "real" no podían competir en precisión y su intento no prosperó.

Con la caída de Bagdad (1258) en manos mongolas, Hūlāgū Jān, nieto de Gengis Jān, mandó construir un observatorio en Marāgha donde se desarrolló una gran actividad astronómica.

La escolástica

La estabilidad política europea (las fuertes monarquías europeas aseguraron las fronteras y apaciguaron la violencia interna) de los siglos XI y XII dio lugar a un crecimiento económico y social que se apoyó en el desarrollo tecnológico (molino de agua, arado de ruedas, arnés de caballo, roturaciones, etc). Con el desarrollo de las ciudades, la educación sale de los conventos y se desarrollan centros como los de Oxford (que no tenía catedral), París o Bolonia.

Había demanda de conocimiento, lo que hizo que se recuperara el saber antiguo. Esta recuperación se hizo en dos oleadas:

- La primera (siglos X y XI) desde los enclaves islámicos en Europa, especialmente la península Ibérica y el sur de Italia. La selección de obras fue un tanto errática y las traducciones más bien mediocres.
- La segunda (siglos XII y XIII) fue más sistemática y de mayor calidad, con España como centro importante de las fuentes árabes e Italia de las griegas.

Los estudiantes y sus maestros se organizaron al modo de los gremios en universidades para defender sus derechos y obtener protección. En Bolonia se adquirió el estatus de universidad en 1150, en París en 1200 y en Oxford en 1220. (En España los pioneros fueron los maestros de Palencia en 1208 y los de Salamanca y Valladolid, en 1230.)

El saber se concentró en estas universidades y el mayor esfuerzo se hizo por recuperar el saber antiguo, en especial a Aristóteles y adaptarlo al cristianismo. La adaptación era necesaria porque Aristóteles defendía un mundo eterno incompatible con la creación y un dios inmanente a la naturaleza, lo que entrañaba panteísmo. Además, para Aristóteles, el alma era la forma inseparable de la materia y no una entidad autónoma, separable del cuerpo material. Había mucha tela que cortar.

El corte lo hicieron los dominicos **Alberto Magno** (1206-1280) y su discípulo **Tomás de Aquino** (1225-1274), añadiendo pinceladas platónicas para separar el mundo celeste del normal.

- Alberto tradujo, comentó y corrigió a Aristóteles. Escribió de medicina, astronomía, física...
- Tomás aclaró que razón y fe no se contradicen, aunque lleguen a distintas verdades y que se puede conocer a Dios por su obra, la naturaleza, además de por la revelación.

En astronomía, el *"Almagesto"* y *"Sobre el Cielo"* fueron traducidos (siglo XII) e incorporados a la universidad (siglo XIII). Los escolásticos no tenían una verdadera perspectiva histórica (hay que tener en cuenta que la obra de Aristóteles es del 350 a.e.c., mientras que el *"Almagesto"* data del 148, es decir, se llevan casi 500 años. Si a esto le sumamos que pasaron 1100 años más hasta las universidades, la pérdida de perspectiva es comprensible) y querían reconstruir la antigüedad como una sola cosa. No distinguían lo helénico de lo helenístico y el enfoque aristotélico y el ptolemaico les parecían partes del mismo sistema, más aún cuando conocían ambas obras a través del árabe, ya muy mezcladas.

El modelo de las esferas era cualitativo y cosmológico mientras que el de los epiciclos era más cuantitativo y astronómico. Mientras Aristóteles buscaba la razón física, a Ptolomeo no le preocupaba construir un entramado mecánico para su edificio geométrico. Ninguno de sus autores se habría reconocido en la interpretación que en la Edad Media se hizo de sus ideas.

En cuanto a novedades, la *Teoría de las dos esferas* de Johannes de **Sacrobosco** (1195 – 1256) fue de lo poco reseñable que se hizo en esta época. Sacrobosco buscó una adaptación coherente al mundo sub-Lunar de Aristóteles, y planteó que las esfera de Tierra era más pequeña y estaba descentrada sobre la de agua sobresaliendo de forma que permitía la vida sobre ella. Sobre el mundo supra-Lunar no aportó nada. Vemos que mantenía la estructura aristotélica de fuego, aire, agua y tierra, pero descentrando las dos últimas para que la Tierra emergiese.

El problema del movimiento partía de la visión aristotélica y fue tratado partiendo de la vieja idea del ímpetus de Juan Filopón de Alejandría.

Nicolás de Oresme (1323-1382) criticó la argumentación de Aristóteles para defender una Tierra inmóvil, pero no para demostrar que se movía sino para poner a prueba al estagirita[58]. Habló de parada del Sol en tiempos de Josué, como de una forma de hablar, no como doctrina auténtica.

Jean Buridán (1300-1358) decía que el ímpetus es una cualidad motora ajena impresa en el móvil y que sin resistencia no se agotaría. Aplica el ímpetus a las esferas. Dios las impregnó de ímpetu y como son puras y no tienen resistencia giran eternamente desde la creación. Hace una metáfora con un reloj al que Dios da cuerda. Unifica cielos y tierra eliminando la distinción sub/supra Lunar de Aristóteles

58 Kuhn pone este ejemplo para mostrar la forma de pensar escolástica. En realidad, Nicolás de Oresme demostró que la Tierra podía girar sin que las cosas lanzadas al aire se desviaran al este por el giro terrestre, pero no lo pensó como tal, o al menos no lo plasmó. Hizo lo mismo con lo que Aristóteles deducía del movimiento de las estrellas hablando del movimiento relativo al observador

La revolución copernicana

El Renacimiento

El Renacimiento tuvo lugar durante plena transición entre la Edad Media y la Moderna:

- En lo político, las naciones-estado reemplazaban el feudalismo.
- En lo religioso, se produce la Reforma Protestante cambiando la influencia de la Iglesia Romana.
- Gutenberg desarrolla la imprenta de tipos móviles.
- Las grandes potencias como España o Portugal se embarcan en una época de descubrimientos.

En este período se da el paso de la concepción clásica geocentrista, en la que la Tierra se halla en el centro del universo, a una consideración heliocentrista, que desplaza dicho centro hacia el Sol, sobre el que orbitarían el resto de astros (Copérnico llevó este pensamiento hasta la totalidad del cosmos, pues todo el universo estaría rotando en torno al Sol).

Importancia de la noción de "descubrimiento"

El concepto de descubrimiento se torna de tal importancia en esta época, que hay que notar que en la Antigüedad ni siquiera existía una palabra que diese cuenta de tal concepto. Descubrimiento en el sentido de desvelar algo que se hallaba ahí, oculto a nuestros ojos y esperando ser revelado, como se entendió en su momento que fuera el descubrimiento de América, o los avances del conocimiento geográfico de la Tierra. Estos hallazgos hicieron patente a las personas cultas del siglo XVI que los filósofos y sabios de la Antigüedad ignoraban cosas de gran importancia (como el que pudieran existir otros continentes tales como América o África) y que los coetáneos de esta época fueron capaces de averiguar.

Como consecuencia de esto comenzó a ponerse en duda el halo de autoridad sobre el conocimiento y teorías heredadas de la antigüedad y que durante la Edad Media habían sido elevadas al culmen de sus respectivas áreas del saber; se cuestionaba su hermetismo, inalterabilidad y la aparente imposibilidad de añadidura ni modificación más allá de pequeños detalles o salvedades sin mayor importancia.

Por un lado se venía arrastrando ya un cuestionamiento de ciertas "verdades", pues la instauración de la religión hebrea y cristiana situaban a Dios como la explicación última en muchos términos que no hacía sino redefinir algunos conceptos clásicos (como el motor inmóvil aristotélico), pero que ponía de manifiesto este "desconocimiento" en el saber antiguo, en especial en sabios coetáneos y posteriores al siglo primero. Esto no tiene mayor repercusión en cuanto al conocimiento científico, pero da cuenta de una cierta discrepancia para con el saber antiguo, ni que sea desde un punto de vista teológico.

Por otro lado, se estaba entrando en un paradigma empirista que ponía de manifiesto que se podía mostrar la falsedad de algunas teorías que, pese a lo especulativo de sus argumentos, habían sido férreamente consolidadas y aceptadas desde la Antigüedad, por ejemplo:

- El descubrimiento de América demostraba la falsedad de la *“teoría de las dos esferas”* de Johannes de Sacrobsoco (S. XIII) que estudia en su *“De sphaera mundi”* (1230).
  - Esta obra recoge la cosmovisión más importante de la Edad Media, sintetizando la teoría de Ptolomeo, donde el universo estaría formado por varias esferas concéntricas, siendo la más pequeña la de la Tierra, que a su vez estaba formado por cuatro esferas que daban cuenta de los diferentes elementos (agua, tierra, fuego y aire).
  - Se consideraba que había la misma cantidad (en peso) de cada elemento, de modo que la esfera de tierra debía presentar mayor cantidad, habiendo de sobresalir respecto a la del agua, pues al tener la tierra una menor densidad necesita, para tener el mismo peso, presentar un mayor volumen.
  - Esta discrepancia entre esferas, para que hubiese correspondencia con lo que se ve en el mundo, era considerar que la esfera de agua es “excéntrica” en relación con el centro de la esfera de tierra. La idea del planeta Tierra era una esfera de tierra rodeada por una esfera de agua, pero la esfera de tierra sobresalía un poquito por encima del agua. Sacrobosco entendía así la intervención de Dios en su diseño del mundo para que los humanos tuviéramos un lugar que habitar.
  - Esta porción de tierra que sobresale del agua es lo que conocemos como el viejo mundo (Eurasia). Para los astrónomos de finales de la Edad Media no podía existir América, pues no podría haber mayor cantidad de tierra que la conocida.
- Otra idea que se aceptaba hasta la edad media era la de que en el ecuador no podía existir vida, pues la temperatura era muy alta. Si llegamos al ecuador, nos derretiríamos.
  - Se tenía la creencia de que, como a medida que se viajaba hacia el sur las temperaturas aumentaban, seguirían haciéndolo de manera progresiva hasta el ecuador, que sería inhabitable. El Sáhara era el final de la vida.
  - Los viajes de los portugueses que llegaron a la India circunvalando toda África cruzaron el ecuador sin derretirse en el intento, e incluso comprobaron la existencia de zonas habitadas en dicha latitud.
  - A pesar de estos descubrimientos geográficos, aún a mediados del siglo XVI, algunos filósofos seguían explicando las distribuciones del planeta sin tener en cuenta tales descubrimientos, amparados en la autoridad consolidada del pensamiento de Aristóteles y Ptolomeo.

El despertar intelectual llevó al descubrimiento de las fuentes originales de obras como el *“Almagesto”*. **Georg Peuerbach** (1423-1461) recompuso el *“Almagesto”* a partir de fuentes árabes y su conclusión fue que para ser coherente necesitaba las fuentes originales. Murió sin terminarlo, pero su discípulo **Johannes Müller** (1436-1476) lo hizo, poniendo de manifiesto que incluso la forma original era inadecuada.

El humanismo

El **humanismo** fue un movimiento intelectual que se gestó como respuesta a la educación universitaria basada en el aristotelismo escolástico.

Rechazaban la educación especializada de las ciencias y abogaban por un conocimiento del hombre a través de la retórica, poesía, moral, historia,... (lo que hoy conocemos por estudios de humanidades). Sus fuentes eran los clásicos literarios y tenían una clara posición anticientífica.

Petrarca (1304-1374) se burlaba de la ciencia:

> *"Aunque todas estas cosas fueran verdaderas, no contribuirían en modo alguno a una vida feliz, pues ¿en qué nos ayuda familiarizarnos con la naturaleza de los animales, pájaros, peces y reptiles si seguimos ignorándolo todo respecto a la naturaleza de la especie humana, a la cual pertenecemos, y no sabemos, o no nos preocupamos por saber, de dónde venimos y hacia dónde vamos?"*

Este anticientifismo dominante fuera de las universidades de las que eran enemigos, conllevó un desarrollo del humanismo misma dentro de éstas. Lo que a su vez facilitó la ruptura con los conceptos básicos de la ciencia aristotélica y la búsqueda de nuevas regularidades en el universo.

La nueva postura supuso el redescubrimiento de Platón, un **neoplatonismo** que influyó en la ciencia de dos formas:

- Por una parte la búsqueda de la perfección de las matemáticas, lo que facilitó el desarrollo de una física que buscaba regularidades sencillas.
- Por otra, una identificación de Dios con el Sol que permitiría un enfoque diferente a la astronomía, importante en Copérnico y muy marcado en Kepler:

  > *"volvemos al Sol que, en virtud de su dignidad y poder, es el único Ser al que parece convenir el papel de digna morada del propio Dios, por no hablar del primer motor."*[59]

El modelo heliocéntrico de Copérnico

Copérnico (1473-1543) era un sacerdote, astrónomo, abogado y matemático polaco, que empezó a pensar a principios del siglo XVI que las teorías de Aristóteles y Ptolomeo sobre el movimiento de los cielos eran fundamentalmente erróneas, y que toda la cosmología estaba equivocada.

La obra principal de Copérnico, *"De revolutionibus orbium coelestium"* (1543), fue un compendio de seis libros publicados durante el año de su muerte, aunque desarrolló su teoría varias décadas antes. La obra marca el comienzo del alejamiento de la idea de un universo geocéntrico (y antropocéntrico) con la Tierra en su centro. Copérnico sostenía que la Tierra es un planeta más, que gira alrededor del Sol fijo una vez al año y gira sobre su eje una vez al día. Si bien Copérnico puso el Sol en el centro de las esferas celestes, no lo puso en el centro exacto del universo, sino cerca de él. El sistema de Copérnico utilizaba únicamente movimientos circulares uniformes, corrigiendo lo que muchos consideraban la principal falta de elegancia del sistema de Ptolomeo.

El modelo copernicano reemplazó los círculos ecuantes de Ptolomeo por más epiciclos. 1500 años del modelo de Ptolomeo ayudan a crear una estimación más precisa de los movimientos de los planetas para Copérnico. Ésta es la razón principal por la que el sistema de Copérnico tenía incluso más epiciclos que el de Ptolomeo. Cuantos más epiciclos demostraron tener mediciones más precisas de cómo estaban realmente posicionados los planetas, El sistema copernicano se resume en varias proposiciones, como hizo el propio Copérnico en su *"Commentariolus"*, que entregó sólo a sus amigos en la década de 1510, aunque nunca se imprimió. Su existencia sólo se conoció indirectamente hasta que se descubrió una copia en Estocolmo hacia 1880 y otra en Viena unos años más tarde.

59 Cita de Kepler extraída de la *"Revolución Copernicana"* de Kuhn.

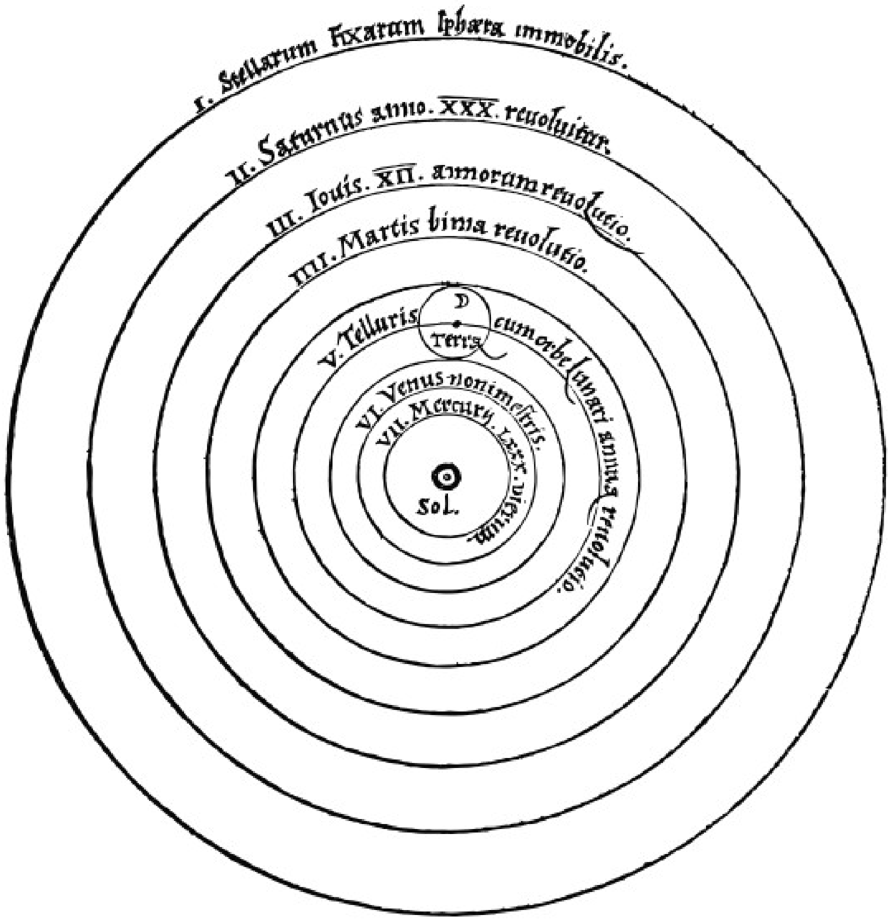


Imagen 55: Modelo heliocéntrico de Copérnico [60]

El modelo de Copérnico consta de ocho esferas (que no está claro si las consideraba como algo material o como mera representación de trayectorias). Las principales características de la teoría copernicana son:

- Los movimientos celestes son uniformes, eternos y circulares o compuestos de varios círculos (epiciclos).
- El centro del universo (centro de giro de las órbitas de los planetas) está cerca del Sol. A pesar de la perfección buscada, tenía que desplazar el Sol ligeramente del centro para que las medidas coincidieran con los cálculos.
- Alrededor del Sol, en orden, están Mercurio, Venus, la Tierra y la Luna, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas fijas, que se hallan exteriores a las demás esferas.
- Tres movimientos terrestres: rotación diaria, revolución anual e inclinación anual de su eje.

  "Copérnico creía en los mecanismos tradicionales de las esferas [...] La creencia de *Copérnico en las esferas está atestiguada por su atribución de un tercer movimiento a la Tierra además del diario y el anual. En efecto, si la Tierra se ve arrastrada en su movimiento anual por hallarse fijada a una capa esférica, su eje debería apuntar a una zona distinta del cielo a lo largo del año. Para mantener el paralelismo de todas las posiciones del eje, hay que darle a este un movimiento de precesión anual en sentido contrario al de la tierra para contrarrestarlo." (Solís y Sellés, p. 363).*

60 Vectorización de *"Scewing"* del original de Copérnico en *"De revolutionibus orbium coelestium"* (domino público). https://en.wikipedia.org/wiki/File:Copernican_heliocentrism_theory_diagram.svg

- El movimiento retrógrado de los planetas se explica por el movimiento de la Tierra, también se ve influido por los planetas y otros cuerpos celestes que giran en torno a ella.
- La distancia de la Tierra al Sol es pequeña en comparación con la distancia a las estrellas.

La inspiración llegó a Copérnico no a partir de la observación de los planetas, sino de la lectura de dos autores, Cicerón y Plutarco. En los escritos de Cicerón, Copérnico encontró un relato de la teoría de Hicetas. Plutarco proporcionó un relato de los pitagóricos Heraclides Ponticus, Philolaus y Ecphantes. Estos autores habían propuesto una Tierra en movimiento, que no giraba alrededor de un Sol central. Copérnico citó a Aristarco y Filolao en uno de los primeros manuscritos de su libro que se conserva, afirmando:

> *"Filolao creía en la movilidad de la Tierra, y algunos incluso dicen que Aristarco de Samos era de esa opinión"*

Motivaciones de Copérnico

Posiblemente sus principales razones no fueran empíricas, sino de tipo estético y basadas en una filosofía neoplatónica. En especial la necesidad de mantener el movimiento circular uniforme incumplido por los ecuantes, donde la idea de que el universo debe tener algún tipo de orden geométrico o matemático no estaba presente en la teoría de Ptolomeo.

Parece ser que no conocía la teoría de Aristarco (más parecida a la que luego él propuso), pero sí la de un pitagórico matemático, Filolao (siglo V a.e.c.), que no se limitaba a una mera teoría heliocéntrica, sino que para él tanto el Sol como la Tierra darían vueltas alrededor del universo, en cuyo centro habría un gran fuego que no alcanzamos a ver.

Su investigación también presentaba motivaciones prácticas, pues el calendario juliano adolecía de una serie de errores ya advertidos por diversos sabios y astrónomos de la época). Hasta ahora se venía realizando una corrección que añadía 1 día cada 4 años, sin embargo, esa estimación de la duración del año de 365.25 días tampoco es exacta, y desde que se estableciera el calendario en tiempos de Julio César en el año 46 a.e.c. (de ahí lo de calendario juliano), se estimaba un retraso acumulado de unos 10 días. Se percataron de que esta añadidura de un día adicional cada cuatro años acarreaba un retraso considerable, pues en el solsticio de invierno (momento a partir del cual los días comienza a ser cada vez más largos) se iba retrasando, y ya no coincidía con la que habría de ser su fecha de ocurrencia, el 21 de diciembre, teniéndose que en torno al año 1500 el solsticio de invierno se estaba presentando en torno al 3 de enero.

Esto dio a pie a que durante el siglo XVI se financiase por parte de la Iglesia diversas investigaciones para la medición precisa de la duración del año:

- Por una parte, porque era la institución que marcaba la fecha. La Iglesia tenía interés en la corrección de los calendarios, en primer lugar porque se erigía como la institución más importante para estipular las fechas (y con ello dictar el día a día de sus feligreses), así como la definición del santoral que caracterizaba dicho día.
- Por otra, para determinar con exactitud la Pascua de Resurrección. Al no tener el año un número redondo de semanas, han de definirse los días clave como el viernes santo (que conmemora la muerte de Jesús), o el domingo de resurrección, de un modo determinado; que se hace considerando el primer día (viernes o domingo) a partir de la primera Luna llena después del equinoccio de primavera, para lo cual resulta fundamental la correcta ubicación en el calendario de dicho equinoccio. Además, se daba la situación de que los judíos se burlaban de que la Iglesia no sabía calcular la fecha de su día más importante.

Como consecuencia, en 1582 un nuevo calendario entró en vigor mediante la bula Inter Gravissimas de Gregorio XII, **el calendario Gregoriano,** donde el año consta de 365.2425 días, retrasándose igualmente que el juliano, pero suponiendo un retraso de un día por cada 3324 años, mientras que el juliano lo retrasa uno por cada 128. Para solventar esto, el calendario Gregoriano cuenta con una serie de herramientas de ajuste:

- Se mantienen años de 365 días con un bisiesto.
- No serían bisiestos los años seculares, es decir, aquellos que sean múltiplos de 100.
- Sí lo serían aquellos que fuesen múltiplos de 400.

El calendario gregoriano sustituyó al juliano (46 a.e.c.) progresivamente en el mundo. Grecia fue el último en adaptarlo, donde el jueves 1 de marzo de 1923 vino después del 15 de febrero

Ventajas de la teoría heliocéntrica sobre la geocéntrica

Las observaciones de este modelo coincidían con los datos con igual precisión que con el de Ptolomeo. Las medidas que utilizaban era las de las viejas tablas alfonsíes (1252), en muchos casos erróneas. Se calcularon con el modelo de Copérnico las **tablas pruténicas** (1551) de Reinhold, que eran más aproximadas a lo observado. Antes de las medidas más precisas de Tycho Brahe (1546-1601) ambos modelos (el de Copérnico yo el de Ptolomeo) eran igual de buenos, después, igual de malos. Sin embargo, la teoría de Copérnico presentaba una serie de ventajas respecto a la ptolemaica y su visión geocéntrica:

Explica la retrogradación de los planetas

La retrogradación de los planetas (el que se vayan desplazando de este a oeste un poco cada día, para de repente hacer un retroceso temporal en sentido contrario) se explica de modo inmediato sin necesidad de considerar hipótesis ad-hoc, como el introducir epiciclos.

Además, da cuenta de por qué la retrogradación de Marte es mayor que la de Júpiter, y esta mayor que la de Saturno. El giro de los planetas en torno al Sol comparte el mismo sentido, pero no la misma velocidad angular, y por tanto recorrerán sus respectivas órbitas en intervalos de tiempo diferentes, teniendo así momentos en que la Tierra "adelanta" al planeta en cuestión.

Mercurio: 172.404 km/h	Júpiter: 47.016 km/h
Venus: 126.108 km/h	Saturno: 34.705 km/h
Tierra: 107.244 km/h	Urano: 24.516 km/h
Marte: 86.868 km/h	Neptuno: 19.548 km/h

Como consecuencia, en función de la posición relativa de cada astro respecto al Sol, al realizar las observaciones desde la superficie terrestre hacia, digamos, Marte, habrá ocasiones en el sentido de movimiento aparente de Marte respecto al de la Tierra sean contrarios, dándonos esa sensación observada de que el planeta retrocede en su movimiento habitual. Es decir, el considerar que la Tierra es un planeta más con su propio movimiento de rotación en torno al Sol simplifica y permite dar cuenta de un modo más simple de las retrogradaciones observadas.

Por otro lado, las diferentes retrogradaciones observadas para los distintos planetas se entienden al atender que al encontrarse en órbitas mucho más distantes al eje de giro (el Sol) la perspectiva que nos ofrece la observación es menor, dándonos esa sensación de que parece estrecharse, haciendo que las retrogradaciones sean menores. Es decir, que la retrogradación de Marte fuera mayor que la de Júpiter y ésta que la de Saturno, era consecuencia de las diferentes distancias de cada planeta con respecto a la Tierra.

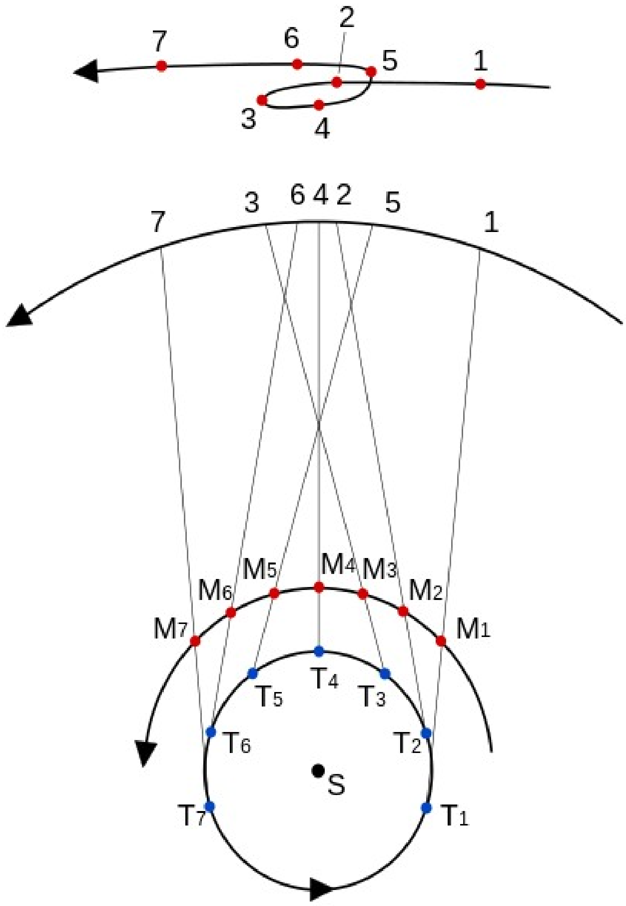


Imagen 56: Retrogradación marciana bajo el sistema heliocéntrico [61]

Explica la diferencia de brillo de los planetas

Explica por qué los planetas superiores brillan más cuando están opuestos al Sol y menos cuando están más próximos a él, Según la posición relativa de la Tierra para con el planeta y el Sol, nos encontramos con situaciones en que el planeta superior (Marte, Júpiter o Saturno) se encuentre en conjunción (cuando el Sol se encuentra entre la Tierra y el planeta) o en oposición (cuando la Tierra se encuentra entre el Sol y el planeta).

- Planeta en **conjunción** (Tierra-Sol-Planeta), es cuando apreciamos un menor brillo al observarlo. En primer lugar, según cómo de alineado se encuentre sólo lo podremos ver en las horas últimas o primeras del día, pero en segundo lugar, al ser la distancia que separa la Tierra del planeta mucho mayor, tanto menor será la intensidad del brillo apreciado
- Planeta en **oposición** (Sol-Tierra-Planeta), vemos al planeta de noche, pues en la cara que apunta hacia el Sol es de día y la observación hecha durante el día nunca enfocará al planeta desde la superficie terrestre. Cuando lo observamos por la noche, lo vemos brillar con mayor intensidad, pues la distancia entre el planeta y la Tierra es mucho menor.

Es decir, la intensidad apreciada en el brillo del planeta superior es tanto mayor cuando menor sea la distancia que le separa en ese instante de la Tierra

61 Imagen de *"MLWatts"* (dominio público)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Qualitative_apparent_retrograd_motion_of_Mars_top-down.svg

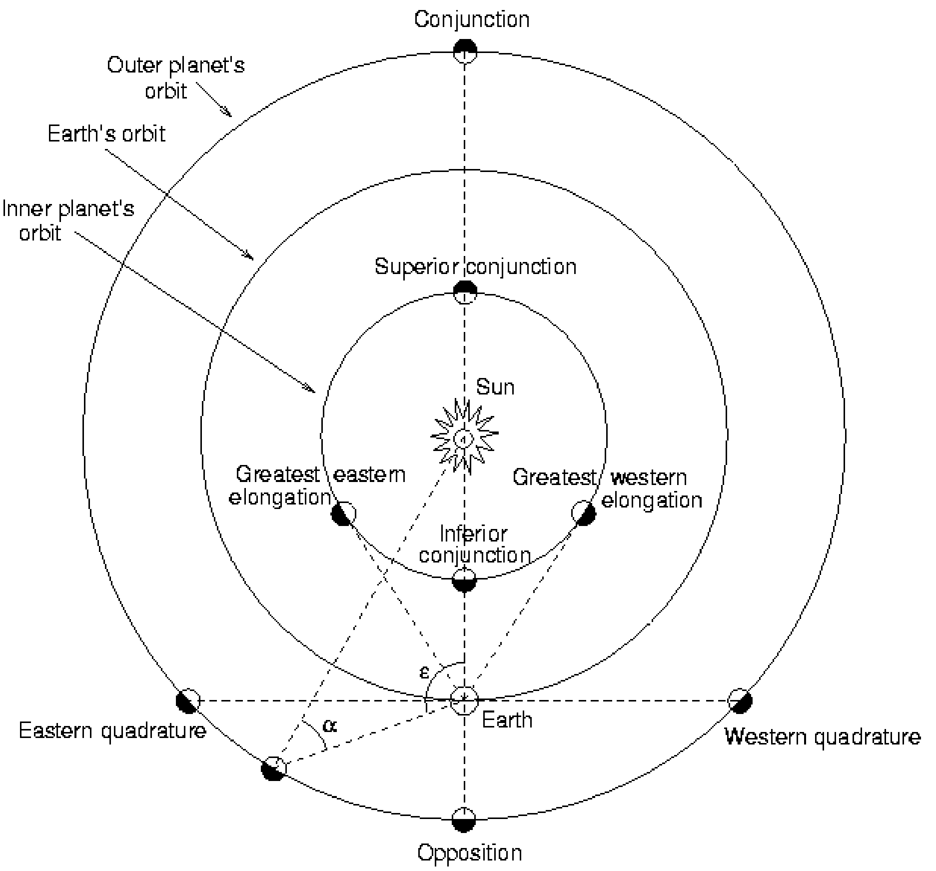


Imagen 57: Relación planetaria posicional [62]

Explica por qué los planetas interiores nunca se alejan mucho del Sol

Atendiendo a la ilustración anterior, se ve que los planetas superiores pueden apreciarse con mayor o menor proximidad al Sol según la **posición relativa de la Tierra respecto al Sol y dichos planetas**. Sin embargo, para planetas interiores (Mercurio y Venus) esto no es así, pues al estar la órbita terrestre siempre más alejada que la de dichos planetas, siempre estarán en una conjunción (mayor o menor, pero conjunción) y siempre los apreciaremos como cercanos al Sol. Es por esto mismo también que tanto Venus (el lucero del alba) como Mercurio sólo se aprecian justo antes del amanecer o del anochecer. El sistema de Ptolomeo no tenía capacidad para dar explicación a este fenómeno, y recurría una artimaña que supuestamente relacionaba las órbitas de Venus y la solar, a fin de "explicar" dicho fenómeno.

Explica la retrogradación de planeta exteriores en oposición e interiores en conjunción

Teniendo en mente lo visto hasta ahora, vemos que es sólo para los casos en oposición al Sol cuando la observación aparente desde la Tierra hace que se sobrepasen en sus órbitas, pues es en dichas observaciones a media noche terrestre cuando vemos que el sentido de desplazamiento del planeta parece retroceder.

- Los superiores siempre retrogradan en oposición
- Los inferiores en conjunción

La razón es que es cuando están más cerca de la Tierra y es cuando se sobrepasan.

62 Imagen de *"Looxix"* (CC BY-SA 3.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Positional_astronomy.png

Determina sin ambigüedad el orden y tamaños relativos de las órbitas de los planetas.

El planteamiento heliocentrista de Copérnico no da pie a ninguna imprecisión o ambigüedad al analizar las órbitas de los planetas en su giro en torno al Sol, mientras que en Ptolomeo ambas cosas eran arbitrarias.

A este respecto, el modelo ptolemaico era arbitrario, pues eligiendo los tamaños de los deferentes y los de los epiciclos se podían modificar a capricho, pudiendo así cuadrarlo con las observaciones. Ptolomeo los ordenó por la duración de sus años. Copérnico no calculó el radio de las órbitas, pero apuntó que podía hacerse, cosa que después haría Kepler

Regularidad a velocidades no constantes y movimiento uniforme

Los ecuantes eran el artilugio geométrico de Ptolomeo para explicar la velocidad de traslación de los planetas, mientras que el modelo copernicano daba explicación a esto con una sencillez tal en comparación al ptolemaico que le otorgaba muchos puntos a favor a la hora de decantarse por él.

Además, esto le permitía mantener el enfoque del movimiento circular uniforme como su perfección neoplatónica le indicaba.

En resumen, Copérnico presenta un modelo mucho más estético y simple que el modelo de Ptolomeo, que sólo daba cuenta de todos estos hechos mediante complicadas relaciones y artilugios de cálculo *ad hoc* entre los deferentes de los planetas y el del Sol, y modificando arbitrariamente los tamaños de los epiciclos.

Existe una anécdota relacionada al respecto del rey castellano Alfonso X "El Sabio" (siglo XIII), en la que una vez le fue explicado el modelo astronómico de Ptolomeo dijo algo como:

> *"Si Dios me hubiese preguntado antes de crear el universo, le habría aconsejado no hacerlo tan complicado"*

Problemas de la teoría de Copérnico

A pesar de las bondades que acabamos de ver, el modelo heliocéntrico de Copérnico no fue aceptado de modo general durante casi 100 años, pues presentaba una serie de problemas:

Los movimientos de la Tierra no se perciben en modo alguno

Copérnico defiende el movimiento de la Tierra como un planeta más, donde además ésta lo estaría haciendo a una velocidad enorme (traslación de 107244 km/h, rotación de 1674 km/h), pero:

- Es contrario a la (aparente) evidencia empírica, pues dicho movimiento no es apreciable. Desde la superficie, observando al cielo, vemos moverse al resto de elementos de los cielos, pero la Tierra parece permanecer estática.
- Era **incompatible** con la física aceptada: los **movimientos naturales de Aristóteles** afirmaban que lo más pesado debe ir hacia el centro del universo.
- Entra en conflicto con algunos pasajes de la Biblia y con la cosmovisión vigente.

  > *"Sale el Sol, y se pone el Sol, y se apresura a volver al* lugar de donde se levanta"
  > Eclesiastés 1:5

El problema del paralaje

El movimiento de traslación debería producir un paralaje en las estrellas. El paralaje consiste en que un cuerpo observado desde dos posiciones distintas se ve desde dos ángulos diferentes (el paralaje es el semiángulo de inclinación entre dos líneas de visión de la estrella, como se observa cuando la Tierra está en lados opuestos del Sol en su órbita).

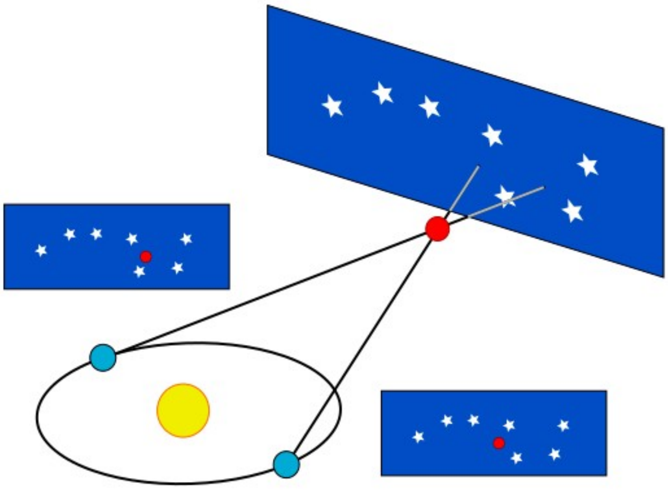


Imagen 58: Paralaje estelar [63]

Esto no se observa, pues vemos a las estrellas siempre en la misma posición. Copérnico lo explicaba asumiendo que las estrellas fijas se encontraban muchísimo más lejos de lo que requería el sistema geocéntrico. Ya Ptolomeo consideraba el tamaño de la Tierra como un punto comparado al del firmamento, y Copérnico extiende esta comparación también al tamaño de la órbita de la Tierra. Aun así, no podía entenderse que estuvieran tan lejos, ¿por qué iba Dios a hacer un universo tan grande para una Tierra tan pequeña?

Complejidad en el empleo de epiciclos menores y excéntricas

El hecho de que su modelo considere órbitas circulares (cuando sabemos, y ya veremos después, que se trata en realidad de órbitas aproximadamente elípticas) obligaba a Copérnico a mantener el uso de epiciclos menores y excéntricas, de modo que el centro de giro de los planetas no fuese exactamente la posición del Sol.

Además, pese a la sencillez del modelo, no es que ayudase a realizar predicciones especialmente mejores, por lo que **desde el punto de vista instrumental no suponía una mejora tan sustancial** (más allá de la sencillez del modelo comparada con el geocéntrico). Estas predicciones en cuanto a las posiciones eran de especial importancia para el establecimiento de los calendarios, así como para aspectos de menor calado científico, como pudiera ser la astrología (que defiende que la posición de los astros supone una incidencia causal sobre la vida de los humanos, razón por la que la gran mayoría de astrónomos de la época también se dedicaban a la astrología y la elaboración de cartas astrales).

En época de Alfonso X "El Sabio", haciendo uso del modelo de Ptolomeo, se elaboraron unas tablas de predicciones (conocidas como ***Tablas alfonsíes***), que sin embargo presentaban una serie de inexactitudes cuanto más se alejaba la predicción del momento en que se efectuaban los cálculos. Copérnico colaborará en la creación de unas nuevas tablas, las ***Tablas Pruténicas***, que se cal-

63 Imagen de *"KES47"* (CC BY 3.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ParallaxV2.svg

cularon utilizando su modelo heliocéntrico, pero no eran mucho mejores que las tablas Alfonsinas, Muchos astrónomos entendieron que éste era el problema más grave de la teoría de Copérnico.

Movimientos ad hoc

Copérnico añade un tercer movimiento ad hoc en la Tierra para dar cuenta de la inclinación de la misma en su incrustación en la esfera sólida que define su órbita (los otros dos son la rotación y la traslación), para justificar así el que se mantenga constante la dirección de su eje de rotación.

De no existir este movimiento ad hoc, al encontrarse fija a la esfera sólida entonces la inclinación de la Tierra cambiaría de tal modo que no se daría lugar a los cambios estacionales.

Consecuencias y repercusión de la teoría copernicana

El realismo del modelo copernicano

Durante parte del siglo XVI se entendió el modelo de Copérnico como una herramienta matemática para hacer cálculos astronómicos de manera más sencilla. De hecho, dada la controversia que podría suponer para con el dogma de la Iglesia, hizo que Copérnico postergara la publicación de su obra *"De revolutionibus"*, en la que recoge la exposición de su modelo, casi hasta el momento de su muerte. Si bien es cierto que ya había plasmado las principales ideas de su modelo en el *"Commentariolus"* de 1514, un bosquejo de unas 40 páginas que circuló entre los astrónomos de la época. Igualmente, la Iglesia no opuso al principio objeciones a su enseñanza, aunque sí en algunas zonas luteranas fue prohibida, pues la Biblia era leída de manera más literal.

En 1540 un alumno de Copérnico, **Georg Joachim Rheticus** publicó anónimamente la *"Narratio Prima"*, en la que exponía las ideas heliocéntricas.

En 1541, **Aquiles Pirmin Gasser** (mentor de Rheticus) reimprimía la obra en Basilea citando al autor y haciendo referencia a Copérnico e incluyendo un prólogo en el que preveía el debate del realismo.

Las dudas (y la presión) de Copérnico por la publicación se resolvieron en una serie de cartas con **Andreas Osiander**, teólogo luterano y colaborador en la imprenta de **Johannes Petreius** en Nuremberg. En torno a 1540-1541, en conversaciones entre Copérnico y Osiander, éste le dijo que podía suavizar la recepción si decía que los principios de que se sirve la ciencia son:

> *"hipótesis [...], fundamentos del cálculo, de suerte que, aunque sean falsos, no importa con tal de que salven exactamente los fenómenos de los movimientos [celestes]"*

Es decir, Osiander era partidario de manifestar el carácter meramente instrumentalista del modelo, alejado de cualquier posible realismo que pudiera poner en entredicho la doctrina defendida por la Iglesia, que defendía el lugar central de la Tierra (y del hombre) que postulaba el modelo ptolemaico, más acorde al dogma religioso vigente. Sin embargo, Copérnico no hizo caso y preparó un prefacio en forma de carta al papa Pablo III en el que mantenía el realismo de su modelo.

Ante esta acción, Osiander agregó una declaración anónima dedicada "al lector" en la que advertía de la naturaleza hipotética de la obra. Si bien el encargado de la publicación fue Rheticus, éste tuvo que marcharse a Leipzig a hacerse cargo de su plaza en la Universidad. El relevo en la edición lo tomó Osiander. La obra se publicaba en 1543 con una doble lectura:

- el realismo de Copérnico.
- el instrumentalismo de Osiander.

El hecho de que Osiander no firmase su observación hizo que el enfoque instrumentalista proviniese también del propio Copérnico, de forma que quedaba a la interpretación del lector. Esta maniobra de Osiander no fue aceptada por Rheticus y Giese (amigo de Copérnico) y protestaron antes las autoridades, sin mucho éxito. Sin embargo, no hay que pensar en una mala intención de Osiander dada su trayectoria como reformista y anti-papista.

No fue hasta 1609 que Kepler aclarase la autoría del prefacio, quedando clara la postura realista de Copérnico. Aún así, el jesuita **Roberto Bellarmino** siguió atribuyendo a Copérnico la visión instrumentalista, y en una carta en 1615, dejó clara la herejía de la visión realista.

También afirmó que de hallarse pruebas, habría que reinterpretar las escrituras. Galileo aceptó el reto y acabó condenado.

En 1616 se prohibió formalmente el heliocentrismo por herético.

Después de Copérnico

La idea de que el sistema de Copérnico pudiera ser verdadero comienza a ganar popularidad a finales del siglo XVI, con Thomas Digges y Giordano Bruno,

En 1576 **Thomas Digges** (1546-1595) introduce la idea de espacio infinito interpretando la inmovilidad de las estrellas de Copérnico. Digges esparce las estrellas más allá de una última esfera sin que exista ninguna necesidad de que estén más o menos agrupadas

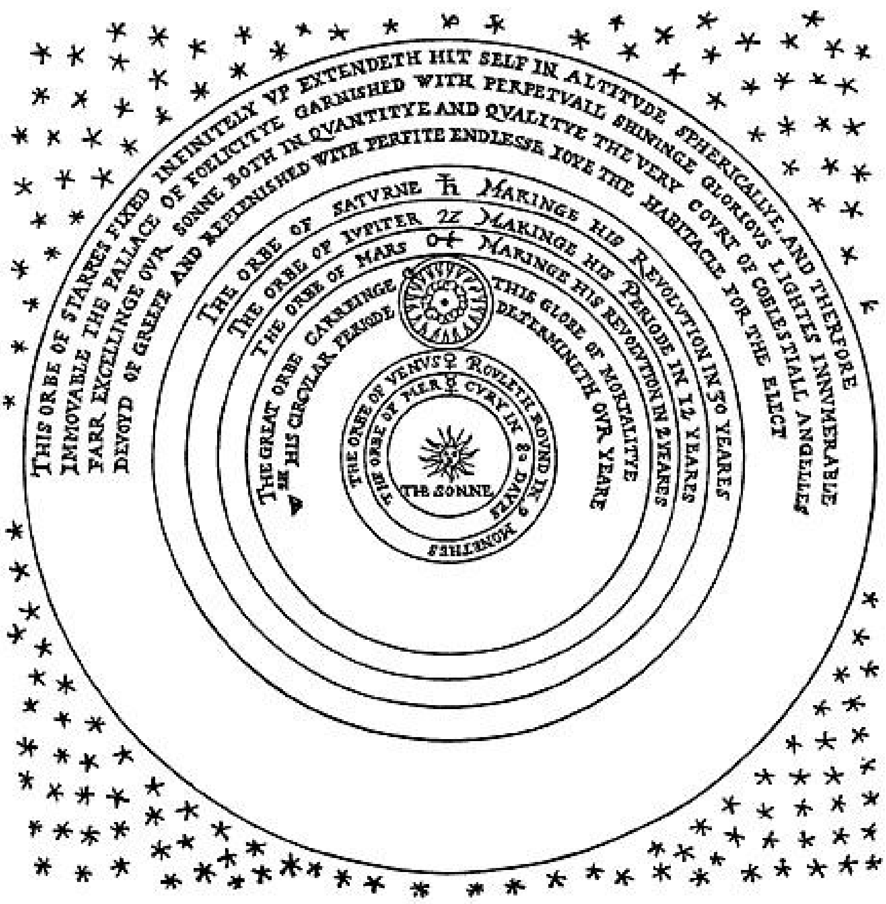


Imagen 59: Esferas de Digges con las estrellas alejadas de los orbes planetarios [64]

64 Imagen de *"Jeangagnon"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diggesmap.JPG

Esta idea de infinitud incluye un nuevo problema: ¿Cómo va a estar el Sol en el centro de un universo infinito si en el infinito no hay centro?

Giordano Bruno (1548-1600), más cosmólogo que astrónomo, conocedor de la obra de **Nicolás de Cusa** (que entendía un universo infinito coincidente con Dios infinito) propuso que el Sol era una más de las infinitas estrellas y la Tierra un planeta más como los que orbitaban alrededor de sus soles.

Este panteísmo y otras ideas heréticas le llevaron a la hoguera en 1600 (negaba la transustanciación del alma, la virginidad de María... El inquisidor que llevó a cabo el juicio fue Roberto Bellarmino, quien luego juzgará a Galileo).

Lo que terminará de desmotar el sistema de Ptolomeo no fue tanto el modelo heliocéntrico, sino las observaciones de **Tycho Brahe** (1546-1601), con las que detectó errores en las tablas alfonsíes y en las pruténicas.

- Construyó un gran observatorio donde midió el paralaje con precisión de 10'' de grado.
- Demostró que los cometas estaban más allá de la Luna, luego sus trayectorias atravesaban la órbita de varios planetas, lo que eliminaba la idea de esferas sólidas, mostrando así la mutabilidad e insolidez de dichas esferas. Esto quiere decir que los planetas ya no estaban incrustados en ninguna esfera, sino que su movimiento por el firmamento lo hacían flotando en el espacio. Esto supone un problema físico importante, pues si los planetas no están siendo movidos por una esfera, sino que van flotando por el cielo, cabe preguntarse cuál es esa fuerza que les hace moverse, problema que no sería resuelto hasta Newton.

Brahe también observó una **estrella "nova"** (que no era fija, sino que apareció de repente en el cielo) mediante la técnica del paralaje. Esto entraba en conflicto con la teoría aristotélica, que haría que los cielos no fuesen perfectos, pues se cuestionaba así la inmutabilidad de las estrellas del firmamento, que ya no serían eternas, existiendo pues corrupción en el "primer motor".

Sin embargo, era profundamente piadoso e interpretó las novas como señales divinas y el movimiento de los planetas en "los cielos líquidos" los fundamentó en la acción divina. Brahe tampoco aceptó el modelo de Copérnico, inventando un nuevo modelo.

- Acepta el heliocentrismo,
- pero el Sol se mueve alrededor de la Tierra,
- y el resto de planetas alrededor del Sol.

Hace así una especie de síntesis tomando lo mejor del modelo copernicano, pero salvando muchos de sus problemas. Desde el punto de vista "observacional" son casi indistinguibles (salvo por el paralaje estelar). Este modelo fue muy popular pues no exigía asumir que la Tierra se movía.

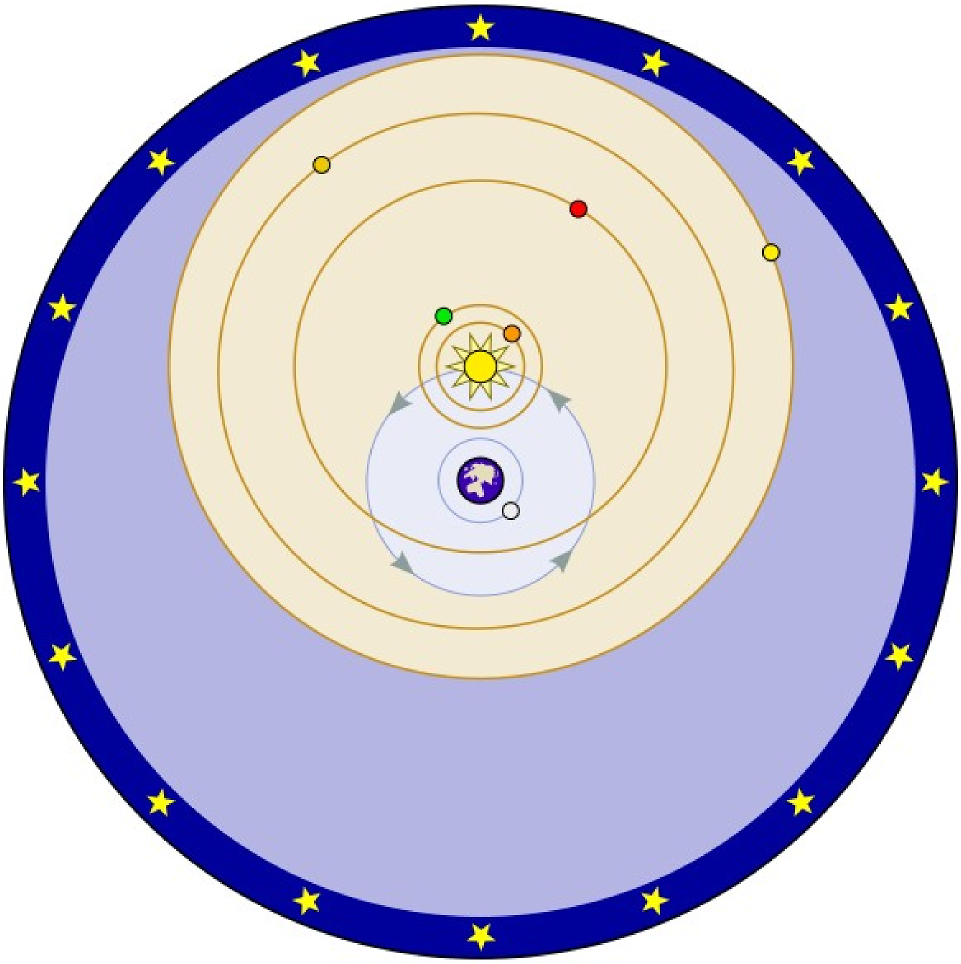


Imagen 60: Modelo astronómico de Tycho Brahe [65]

Las leyes orbitales de Johannes Kepler

Kepler (1571-1630) fue un ayudante de Tycho Brahe y se basó en las medidas precisas de éste, junto con el planteamiento del modelo heliocéntrico de Copérnico, para llevar a cabo el estudio de los movimientos orbitales de los astros. Con esto, resolvería un problema que no había conseguido resolverse: medir la órbita de los planetas.

Kepler fue de los primeros astrónomos en estudiar a Copérnico en la universidad y fue quien dio al sistema la forma en la que se popularizó. Consideraba a Dios como al demiurgo platónico, un dios matemático que diseñó el universo en función de armonías y regularidades geométricas. Consciente de la equivalencia formal entre los sistemas de Ptolomeo, Copérnico y Brahe, trató de demostrar que el heliocéntrico era el real, lo que dependía del examen de las causas físicas. Kepler señaló que Copérnico se limitó a hacer una descripción de cómo es de hecho el mundo, mientras que él se ocupa de por qué es así.

Buscó en el magnetismo una causa del movimiento, inspirado por la obra de William Gilbert de *"De Magnete"* de 1600, que estudiaba los imanes y en particular la Tierra como un enorme imán.

También buscó en la armonía de las relaciones de los sólidos de Teeteto, las distancias entre los planetas.

65 Imagen de "*Fastfission*" (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tychonian_system.svg

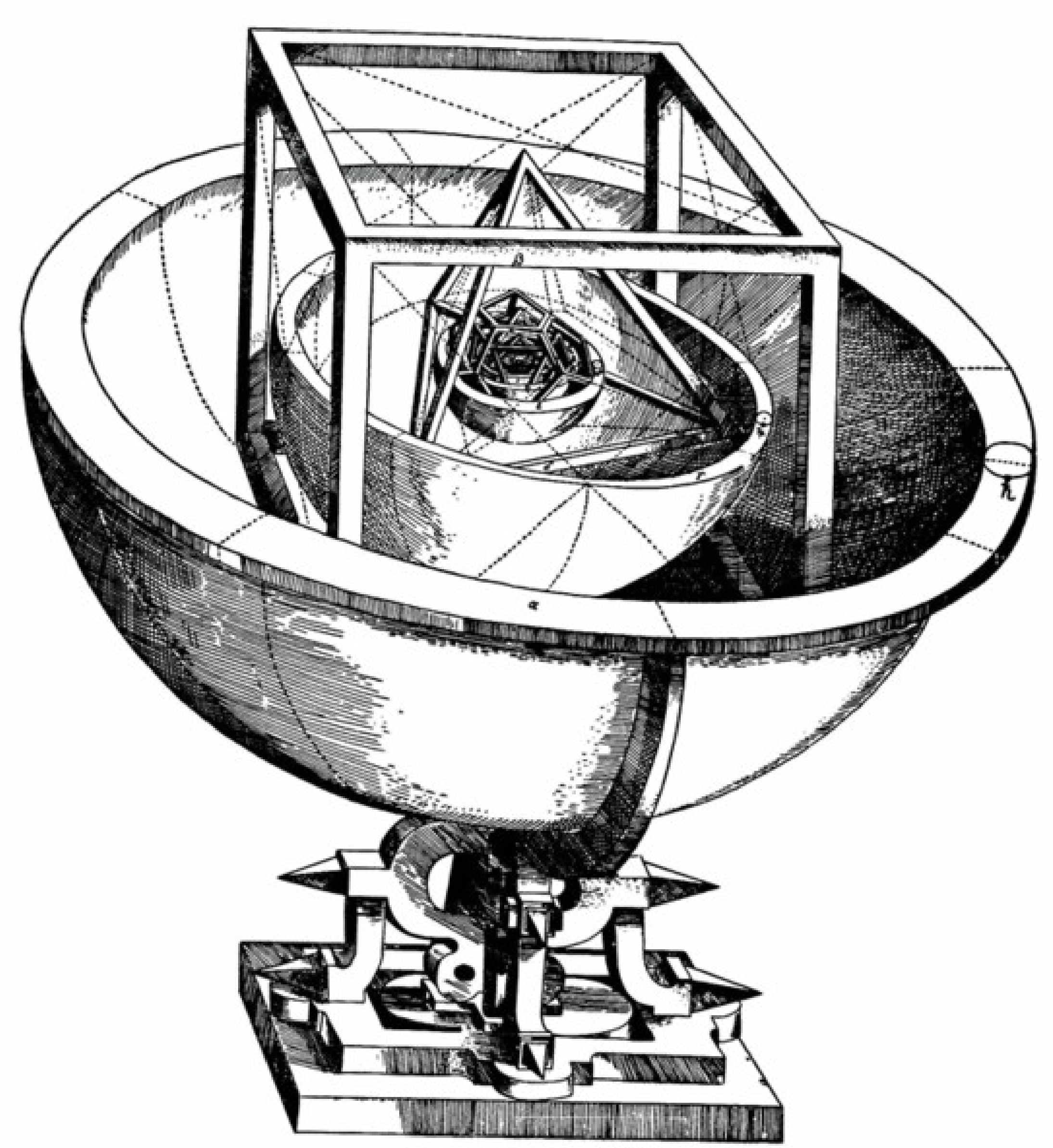


Imagen 61: Modelo de Kepler del Sistema Solar como una armonía de sólidos platónicos [66]

A partir de Kepler, se utilizará el término órbita en el sentido habitual, es decir, como los recorridos de los astros sin "esfera", es decir, se elimina la concepción de esferas y se sustituye por la de trayectorias.

Medición de las órbitas de la Tierra y Marte

Trabajando de ayudante de Brahe intentó ajustar las observaciones de éste al modelo de Copérnico. Primero estudió la órbita terrestre, que es el observatorio móvil desde el que se referencian todas las demás observaciones. Por triangulación, obtuvo las distancias al Sol de la Tierra en distintas posiciones de su órbita.

Si dejamos moverse a la Tierra y Marte alrededor del Sol durante mucho tiempo y registramos

66 Imagen de *Johannes Kepler* del *"Mysterium Cosmographicum"* de 1596 (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler-solar-system-1.png

esas posiciones al día durante varios años (cosa que hizo Brahe minuciosamente bien), puede estudiarse que existe un día en que se encuentran alineados con el Sol, estando Marte en oposición al Sol con respecto a la Tierra (forman 180º). El tiempo que tarda Marte en volver a ser observado exactamente en la misma posición es de 687 días (2 años terrestres menos 43 días), por lo que en dicho instante no están alineados como en la posición de partida.

Sin embargo, esta situación nos ha permitido determinar dos puntos de la órbita terrestre a raíz de la constancia en nuestro patrón de observación al ceñirnos a la traslación marciana de año en año (marciano). Así, casi cada 2 años terrestres podríamos identificar un nuevo punto, por lo que gracias a las múltiples y precisas observaciones de Brahe, Kepler pudo determinar que la órbita, si bien parecía circular no lo era del todo; pero lo que era evidente es que para ese supuesto círculo, su centro de giro de seguro no era el Sol, razón por la cual Ptolomeo se veía forzado a introducir las excéntricas en su modelo.

Procediendo de manera análoga procedió al estudio de la órbita de Marte, donde ahora en lo que se fija es en la constelación de fondo que tenemos al observar el planeta rojo con cada compleción del año marciano. De esta manera, pueden ubicarse los puntos de la trayectoria que sigue el planeta al recorrer su órbita. Una vez disponía de varios puntos se percató de que no podía encajarlos en una circunferencia como sí parecía ser posible con la Tierra, sino que la órbita descrita se asemejaba más a la forma de una elipse. Esta figura geométrica queda definida por dos puntos del espacio, que son tales que la distancia agregada del punto de la elipse a cada uno de dichos focos se mantiene constante, y donde parecía tenerse que el Sol ocupaba uno de dichos focos. De esta manera dio lugar a la que se conoce como la **primera ley de Kepler**.

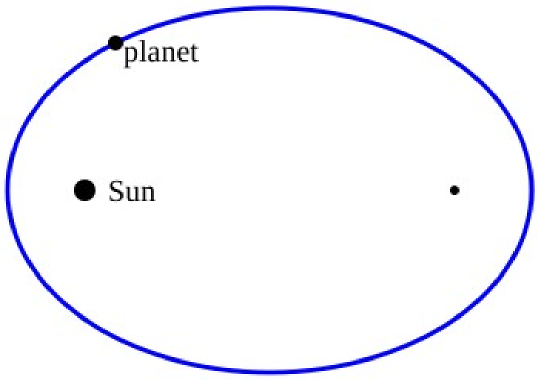


Imagen 62: Primera ley de Kepler [67]

Considerando esto, y volviendo a las observaciones realizadas para las posiciones de la Tierra, los datos que parecían encajar en una circunferencia quedaban igualmente mejor definidos si se encuadraban en una elipse para la que uno de sus focos corresponde con el Sol.

Por otro lado, el Sol también estaba en uno de los focos de la órbita de la Tierra.

Además, al considerar la velocidad a la que se mueve Marte en su órbita, éste lo hace más rápido cuando está más cerca del Sol que cuando está más lejos. Esto le permitió enunciar su **segunda ley** que determina que el movimiento del planeta con respecto al Sol (el foco) barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales:

67 Imagen de *"Arpad Horvath"* (original) y *"Rubber Duck"* (CC BY-SA 3.0)https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler-first-law.svg

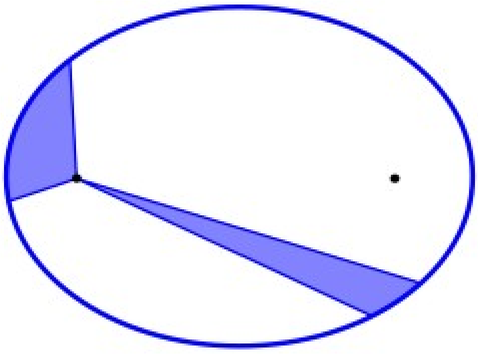


Imagen 63: Segunda ley de Kepler [68]

Merece resaltar que hasta Kepler, el concepto de órbita que se empleaba hacía referencia directa al orbe, esférico y etéreo, sobre el que se sostenía el planeta y que daba cuenta de su movimiento. A partir de Kepler cuando comienza a emplearse el concepto de órbita en término similar al que utilizamos hoy en día para dar cuenta de la trayectoria seguida en su movimiento.

El descubrimiento de la tercera ley

Los inicios del siglo XVI comenzaban a presentar una serie de avances relevantes para lo que sería el desarrollo posterior de la ciencia. Por ejemplo, el escocés John Napier publica su obra sobre los logaritmos *"Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio"* en 1614, en la cual recogía diversas tablas de logaritmos. Un logaritmo es la función inversa de la exponencial. Por ejemplo:

$$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10}(1000) = 3$$

Usados en grandes números tienen la utilidad de reducirlos y hacerlos más manejables, y además:

- Simplifican la multiplicación a la suma, la división a la resta y la potencia al producto
- Transforman progresiones geométricas, difíciles de representar y visualizar, a aritméticas, mucho más sencillas de manejar.

Kepler no es ajeno a estos avances, y hace uso de la obra de Napier para aplicarla a sus estudios sobre el movimiento astronómico de los planetas, pues las propiedades que presenta el operar con logaritmos son de extrema utilidad, pues permiten hacer multiplicaciones como si fueran sumas, divisiones como restas y potencias como multiplicaciones.

Sabiendo esto, Kepler expresa las mediciones que había hecho de las trayectorias en función de tiempos (el período orbital) y distancia (el radio-vector que describe la posición orbital a lo largo de la trayectorias), pero convirtiéndolas a logaritmos. Este análisis lo recoge y publica en 1619 en *"Harmonices Mundi"*, donde una representación de los mismos actualizada podría ser la reflejada en la gráfica siguiente, donde el período orbital (el tiempo) se refleja en el eje vertical, y la distancia que representa el semieje mayor de la elipse (la distancia) en el eje horizontal:

68 Imagen de *"Stw"* (original) y *"Arpad Horvath"* (CC BY-SA 3.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler-second-law.svg

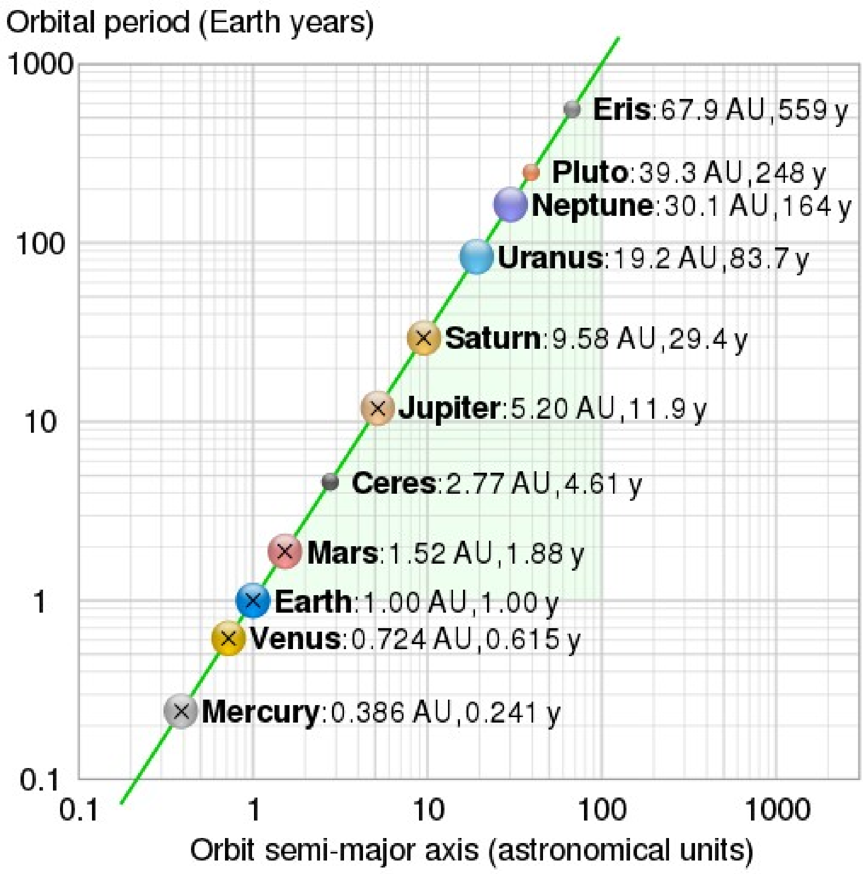


Imagen 64: Representación logarítmica de parámetros orbitales [69]

Kepler no tenía una idea clara de lo que obtendría con estos datos, pero pudo apreciar que guardan entre sí una cierta relación que se mantiene entre los distintos planetas y que relaciona los valores del periodo orbital y aquel que da cuenta del radio-vector de su trayectoria. Los datos que empleó Kepler fueron los siguientes:

Datos empleados por Kepler en 1618[70]			
Planeta	Distancia media al Sol en unidades astronómicas	Período (días)	$\frac{R^3}{T^2}\left(\frac{10^{-6}\,AU^3}{días^2}\right)$
Mercurio	0.389	87.77	7.64
Venus	0.724	224.70	7.52
Tierra	1	365.25	7.50
Marte	1.524	686.95	7.50
Júpiter	5.2	4332.62	7.49
Saturno	9.510	10759.2	7.43

69 Imagen de *"Cmglee"* (CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solar_system_orbital_period_vs_semimajor_axis.svg

70 Datos obtenidos de https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's_laws_of_planetary_motion

Mientras que una versión con estimaciones actuales vendría dada por:

Datos actuales[71]			
Planeta	Semieje mayor de la órbita (AU)	Período (días)	$\frac{R^3}{T^2}\left(\frac{10^{-6}\,AU^3}{días^2}\right)$
Mercurio	0.38710	87.9693	7.496
Venus	0.72333	224.7008	7.496
Tierra	1	365.2564	7.496
Marte	1.52366	686.9796	7.495
Júpiter	5.20336	4332.8201	7.504
Saturno	9.53707	10775.599	7.498
Urano	19.1913	30687.153	7.506
Neptuno	30.0690	60190.03	7.504

Cuando Kepler plantea esta relación al trabajar con los logaritmos obtiene que:

$$\log_{10}(R)=\frac{2}{3}\log_{10}(T)+C$$

$$3\log_{10}(R)=2\log_{10}(T)+3C$$

$$\frac{T^2}{R^3}\equiv cte$$

Esta relación permite enunciar la **tercera ley de Kepler** y que se enuncia como:

> *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.*

Esta es una fórmula universal. Además de sugerir que en la estructura del sistema solar todos los planetas tienen algo en común: el tamaño de cada órbita y el tiempo que tardan en recorrerla guardan una relación de proporcionalidad según lo visto en la expresión anterior.

Posteriormente, cuando se descubrieron los satélites de Júpiter, Kepler comprueba que éstos también obedecían la tercera ley, pero la constante que resultaba era diferente, lo que parecía dar a entender que guardaba algún tipo de relación con la fuerza que ejerce el elemento sobre el que se gira respecto a los astros que lo orbitan.

En esa misma época William Gilbert publica sus estudios sobre el magnetismo en *"De magnete"* en el 1600, donde plantea la posibilidad de que el Sol podría ser el causante del movimiento de los planetas mediante fuerza magnética. Esta teoría lleva a Kepler apuntalar una causación fundamental por parte del Sol para con el movimiento de los planetas, reforzada por la relación dada por la tercera ley, Unas décadas después Descartes propuso, por analogía con la dinámica de fluidos, la existencia de fuerzas mecánicas provocadas por el fluido que giraba alrededor del Sol formando "vórtices" o remolinos que arrastraban a los planetas y satélites.

Todo esto no serían sino meras especulaciones hasta que los trabajos de Huygens, Hooke y Newton pusieran a la gravedad en el centro de atención.

71 Datos obtenidos de https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's_laws_of_planetary_motion

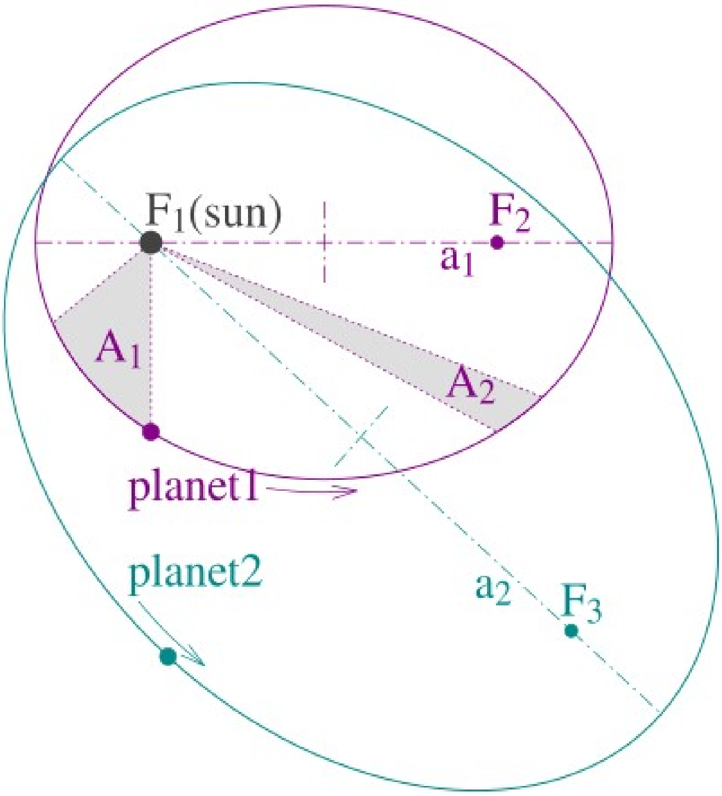


Imagen 65: Las leyes de Kepler para dos órbitas elípticas [72]

Algunas consecuencias filosóficas de las leyes de Kepler

Posiciones teóricas (reales) frente a posiciones observadas

Antes de las leyes de Kepler, las posiciones reales de los astros eran desconocidas ya que lo que vemos son sus posiciones aparentes sobre el zodiaco.

Al hablar de Kepler hemos dicho que consiguió medir las órbitas de los planetas, sin embargo, esta medición no es una mera "observación". El hecho de que Marte obedezca las leyes descritas por Kepler, es algo que deduce a partir de dos cosas:

1. Las posiciones "aparentes" de los planetas, es decir, en qué punto aparecen y son observados en el cielo.
2. La hipótesis que emplea para poder establecer dichas órbitas es la teoría heliocéntrica, es decir, la conjetura de que no estamos en el centro del universo, sino que estamos viendo a Marte suponiendo que la Tierra se mueve.

La teoría heliocéntrica permite a Kepler utilizar estos datos observacionales para inferir a partir de ellos las posiciones reales es decir, teóricas. Se abandona la concepción geométrica del universo para ser calculada en términos matemáticos, uniendo las observaciones con una hipótesis pueden deducirse los valores que determinan las órbitas de los planetas. Esto es lo que en filosofía de la ciencia se conoce como una entidad teórica, es decir, la existencia de una teoría es la que permite determinar las posiciones reales. Por tanto, las posiciones reales son teóricas en el sentido de que no proceden de la observación sino de la existencia de una teoría previa.

72 Imagen de *"Hankwang"* en Wikimedia Commons con licencia CC BY-SA 3.0
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_laws_diagram.svg

Con ayuda de estas tres leyes, Kepler dedicó el resto de su vida a la medición y cálculo de las trayectorias planetarias y que publicó en las *"Tablas rudolfinas"* (1627), consiguiendo un grado de precisión en las predicciones astronómicas muy superior al de las tablas anteriores (por ejemplo, consiguió predecir con exactitud los tránsitos de Mercurio en 1631, o de Venus en 1639). Estas predicciones eran mucho más exactas en muchos órdenes de magnitud, y esto fue lo que a lo largo del siglo XVII hizo que todos los astrónomos quedaran convencidos de la corrección del modelo heliocéntrico.

Cuestionando el sistema solar

Los hallazgos de Kepler apuntaban a que el Sol tenía un papel causal fundamental en los movimientos de los planetas.

- Los planetas giran en una elipse alrededor del Sol
- El Sol está en un foco de esa elipse
- Las velocidades de los planetas dependen de la distancia al Sol

Pero sus intentos de encontrar la razón física mediante el magnetismo no tuvieron éxito.

René Descartes (1556-1650) propuso (en *"Principia Philosophiae"* de 1644) un modelo mecanicista, análogo al movimiento de los fluidos, donde todos los planetas están inmersos en un material que llenaba el espacio y producía **vórtices** que eran los que arrastraban a los planetas y satélites.

Pero todo fueron especulaciones, y no sería hasta Huygens y Newton, unas décadas después, cuando se resolvió el problema causal.

Las observaciones astronómicas de Galileo Galilei

Galileo (1564-1642) fue contemporáneo de Kepler y estuvieron permanente en contacto a primeros del XVII, siendo ambos los principales defensores del sistema copernicano, si bien Galileo nunca llega totalmente a aceptar la teoría de las órbitas elípticas, porque eran incompatibles con la teoría física que el intentaba defender.

Mientras que el sistema kepleriano constaba de observaciones hechas "a ojo desnudo", donde Tycho Brahe midió la posición aparente de cada planeta en cada momento del día y del año, Galileo toma un enfoque revolucionario desde el punto de vista tecnológico, al aplicar el uso del **telescopio** a la observación del cielo.

El telescopio era de reciente invención, habiéndose empleado para otros usos (principalmente militares, y que le serviría para hacer fortuna con los telescopios, ganando así libertad económica para una vida dedicada a la ciencia), sin embargo, en otoño de 1609 y tras haber construido y mejorado varios telescopios, Galileo empieza a usarlo para observar la Luna, recogiendo sus observaciones en *"Sidereus Nuncius"* (Mensajero sideral) de 1610.

Irregularidades en la superficie Lunar – la corrupción Lunar

Las observaciones de la **Luna** hechas por Galileo daban cuenta la existencia de algo tan trivial como montañas y valles, pues se veían sombras en la superficie, en concreto en la delimitación irregular apreciable entre los lados iluminados y oculto, donde había hendiduras debidas a la elevación irregular de la superficie. El que la Luna tenga montañas implica que no es una esfera cristalina perfecta, y su superficie, por tanto, no es regular. Esto da carpetazo a la tesis aristotélica de que los cuerpos son esferas perfectas. Es relevante para esta observación y las conclusiones que saca el hecho de la formación de Galileo en pintura y geometría de la perspectiva.

Imagen 66: Fases de la Luna ilustradas por Galileo en "Sidereus nuncius" [73]

Gracias a sus observaciones a través del telescopio se dio un cambio completo sobre la idea que se tenía de los cuerpos celestes en toda la tradición astronómica desde Aristóteles.

Observaciones de las estrellas

Al observar **las estrellas** comprobó que:

- Había muchas estrellas "invisibles" (a simple vista), que eran apreciadas mediante el uso del telescopio. Esto quiere decir que hay estrellas que están tan lejos que no pueden verse mediante la observación directa, por lo que el universo podría ser mucho más grande que lo que defendía la cosmología actual heredera de la de Aristóteles. Esto da pie a dudas:
  - *Astronómicas*: si se ven sólo al aumentarlas podría ser porque están más lejos.
  - *Religiosas*: ¿por qué las ha creado Dios si sólo son visibles a través del telescopio?
- La Vía Láctea no es un fluido continuo, sino un conjunto de estrellas.

  "Con el telescopio, el número de estrellas visibles se duplicaba con creces. La luz lechosa de la Galaxia (la Vía Láctea), así como las nebulosas, se resolvía en innumerables estrellas demasiado lejanas para ser contempladas a simple vista. Además, las estrellas visibles no aumentaban de tamaño al ser observadas al telescopio, como ocurre con los planetas que se ven como pequeños círculos, sino que aparecían como puntos de luz por la eliminación del centelleo (un efecto de las turbulencias de la atmósfera). La ineficacia del telescopio para aumentar el diámetro estelar

73 Imagen de *"Galileo Galilei"* del *"Sidereus Nuncius"* (1610) (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galileo%27s_sketches_of_the_moon.png

apoyaba la suposición de Copérnico de la existencia de un enorme hueco entre Saturno y las fijas a fin de justificar la ausencia de paralaje anual" (Solís y Sellés, p 382).

- El tamaño aparente de las estrella no cambia al observarse mediante el telescopio (siguen viéndose como puntos en el cielo), como sí ocurría con los planetas que se apreciaban con mayor tamaño. Esto demuestra que la distancia a la que se encuentran las estrellas en relación a los planetas es enormemente mayor de lo que se pensaba.

Los satélites de Júpiter

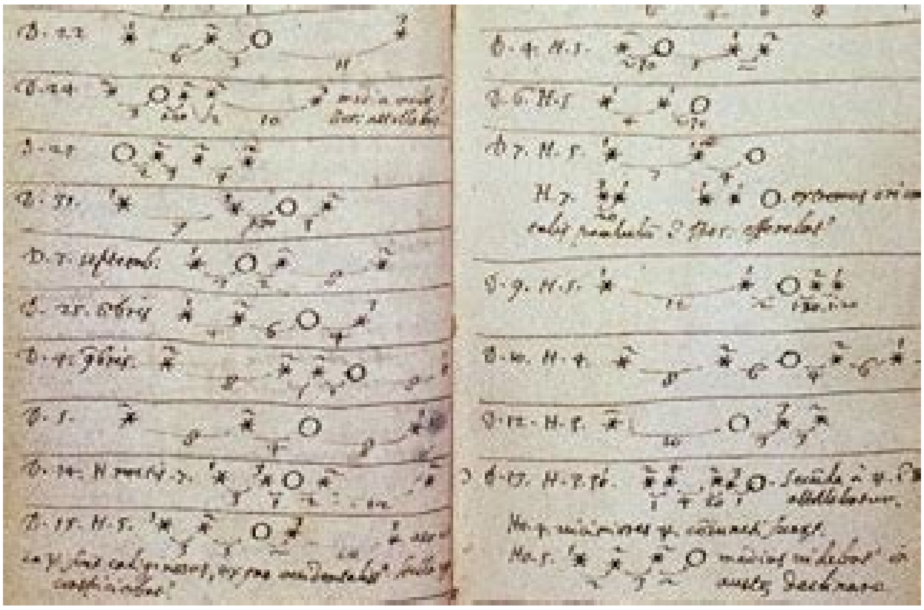


Imagen 67: Anotaciones de Galileo sobre las posiciones de los satélites de Júpiter [74]

A principios de 1610, Galileo observa **Júpiter y descubre sus cuatro satélites mayores**, cuyo desplazamiento mide con ayuda de una rejilla que había adaptado a la mira del telescopio. Al observar que las "estrellitas" junto a Júpiter iban cambiando de posición. Con la adaptación que hizo al telescopio pudo medir la posición de dichos entes hasta concluir que no se trataban estrellas, sino cuerpos que orbitaban en torno a Júpiter, llegando a calcular la velocidad con que se movían.

La conclusión a la que llegó es que eran astros que orbitaban alrededor de Júpiter a los que llamó **planetas medíceos** en honor a Cosme II de Médicis. Los denominó Ío, Europa, Calixto y Ganímedes, nombres sugeridos por Kepler cuando se reunieron en la Feria de Ratisbona en octubre de 1613.

"Júpiter es culpado por los poetas debido a sus irregulares amores. Tres doncellas son mencionadas especialmente por haber sido cortejadas clandestinamente por Júpiter con éxito. Ío, hija del río Inachus, Calixto de Lycaon, Europa de Agenor. Luego fue Ganímedes, el hermoso hijo del rey Tros, a quien Júpiter, habiendo tomado la forma de un águila, transportó en su lomo hasta los cielos, tal como los poetas narran de una forma fabulosa"

Simon Marius, *"Mundus Jovialis"* (Nuremberg, 1614)

74 Imagen de *"Galileo Galilei"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galileo_Galilei_(1564_-_1642)_-_Manuscipt_observations_of_Jupiter,_its_four_moons_and_stars.jpg

Estos satélites eran la prueba de que existen astros que no giran alrededor de la Tierra, lo que corroboraba el sistema heliocéntrico, y daba un nuevo mazazo a la cosmología aristotélica, pues descubre que existen cuatro cuerpos que no no giran alrededor de la Tierra, ni si quiera en torno al Sol, sino que lo hacen en torno a otro astro.

Las fases de Venus

Quizá el descubrimiento más fundamental ese mismo año de 1610, pero posterior a la publicación del *"Sidereus Nuncius"* fue el de las **fases de Venus**. De haber sido real el modelo astronómico de Ptolomeo, tendríamos que tanto el Sol como Venus girarían en torno a la Tierra, y este último además en un epiciclo sobre su órbita, por lo que las fases observadas no habrían de ser más que unas lúnulas delgadas a modo de "cuartos crecientes" parcialmente iluminados (como se aleja mucho del Sol, Ptolomeo ubicó el epiciclo sobre la línea que une al Sol y a la Tierra, de modo que la porción iluminada del planeta es apenas visible desde la observación en la superficie terrestre en los primeros y últimos momentos del día).

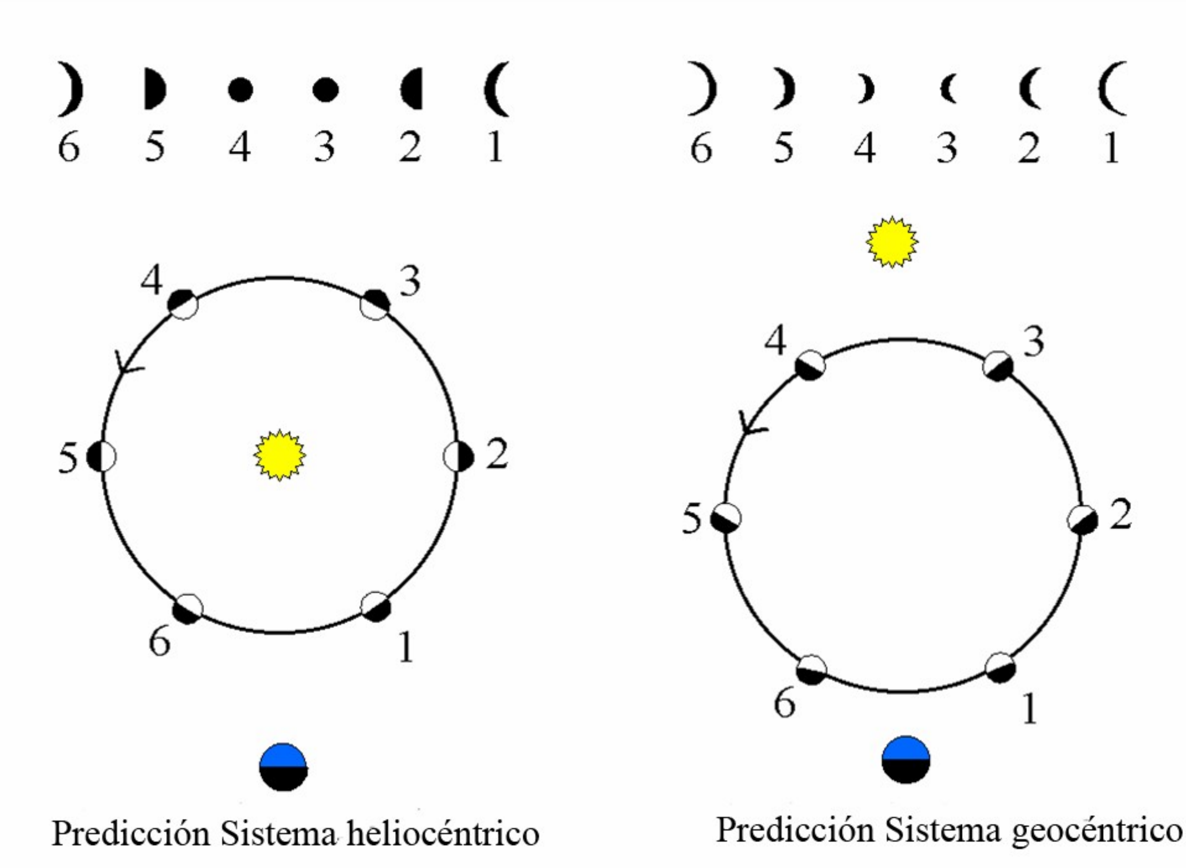


Imagen 68: Las fases de Venus según los sistemas heliocéntrico y geocéntrico [75]

Sin embargo, al estar siempre cerca del Sol, ofrece una cara iluminada visible desde la Tierra en función de las posiciones relativas de los tres astros, por lo que vemos una serie de fases análogas a las observadas en la Luna, lo cual es explicado al considerar el sistema heliocéntrico.

Es decir, descubrió un patrón de fases incompatible con el modelo ptolemaico, lo que supuso una prueba que **falsaba una teoría**.

75 Imagen de *"Fer31416"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Predicciones-geo-helio.png?uselang=es

Los planetas Mayores no tienen “fases” porque vistos desde la Tierra siempre dan hacia fuera del sistema solar. Si el sistema heliocéntrico es correcto, este debe mostrarnos siempre una fase de “Luna llena”, como en efecto sucede.

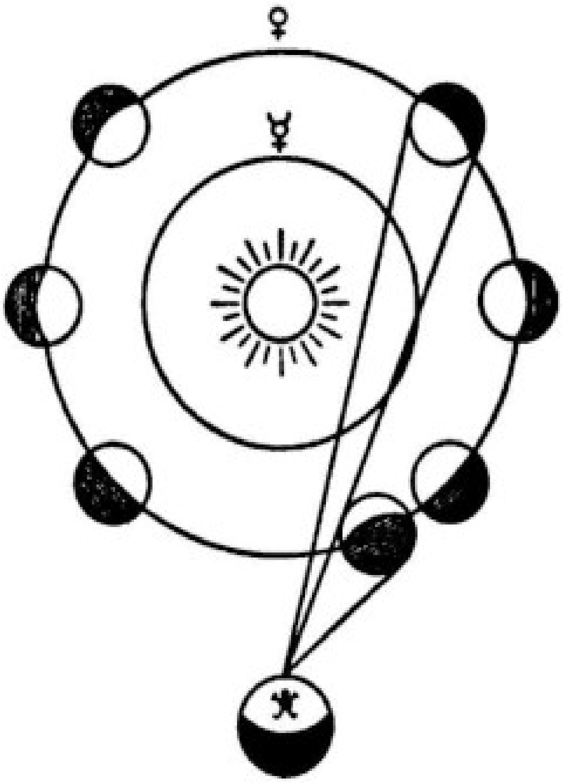


Imagen 69: Fases de Venus en el comentario de Kepler a Galileo [76]

El descubrimiento de las fases de Venus fue admitido por los astrónomos de la época como una prueba definitiva de que los dos únicos sistemas admisibles eran el heliocéntrico y el de Tycho Brahe, si bien el éxito predictivo de las *Tablas Rudolfinas* desequilibró finalmente la balanza a favor del sistema heliocéntrico.

Publicaciones sobre los sistemas

Respecto a la publicación de libros que sostienen el sistema Ptolemaico, presentaron un volumen considerable entre 1470 y 1610, momento en que prácticamente cesa su publicación, coincidiendo con las publicaciones de Galileo y Kepler

76 Imagen de *“Johannes Kepler”* en su *“Epitome Astronomiae Copernicanae”* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Phases_of_Venus_from_Epitome_of_Copernican_Astronomy,_Kepler_1620.png

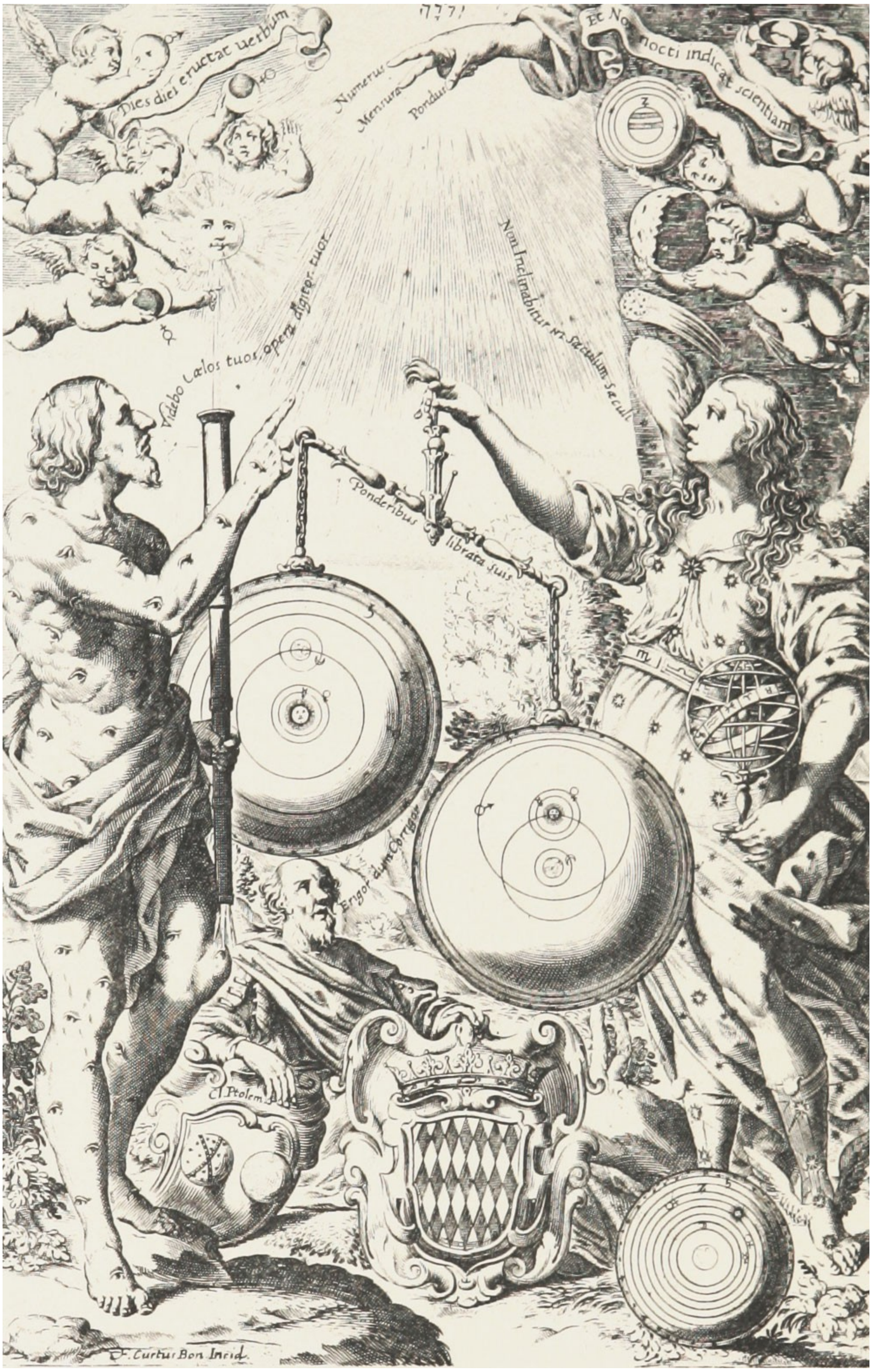


Imagen 70: Almagestum Novum [77]

77 Ilustración de *Giovanni Battista Riccioli* en el *"Almagestum Novum"* (1651), mostrando a Urania, la musa de la astronomía sopesando los sistemas heliocéntrico de Copérnico y la alternativa de Tycho Brahe, habiendo quedado ya el geocéntrico de Ptolomeo descartado en el suelo (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AlmagestumNovumFrontispiece.jpg

Las manchas solares

El último gran descubrimiento astronómico fueron las **manchas solares**. No fue el primero en observarlas, pero sí en darles una interpretación correcta. Al no poder realizar una observación directa del Sol con el telescopio, lo utilizó para proyectar sobre una pantalla o pared la imagen del Sol, que mostraba unas manchas por delante de él. Galileo interpreta que estas manchas estarían en la misma superficie del Sol, no siendo cuerpos que orbiten por delante de él, pues tras realizar varias observaciones a lo largo de una serie de días observa que las manchas presentan una disposición fija, si bien se van desplazando a través de la superficie solar. Esto último se debería a que el Sol tendría su propio eje inclinado de rotación, que haría desplazarse estas manchas a medida que va girando. Es decir, el Sol no sólo presenta una superficie imperfecta (nuevo mazado para la concepción aristotélica), sino que además gira sobre sí mismo.

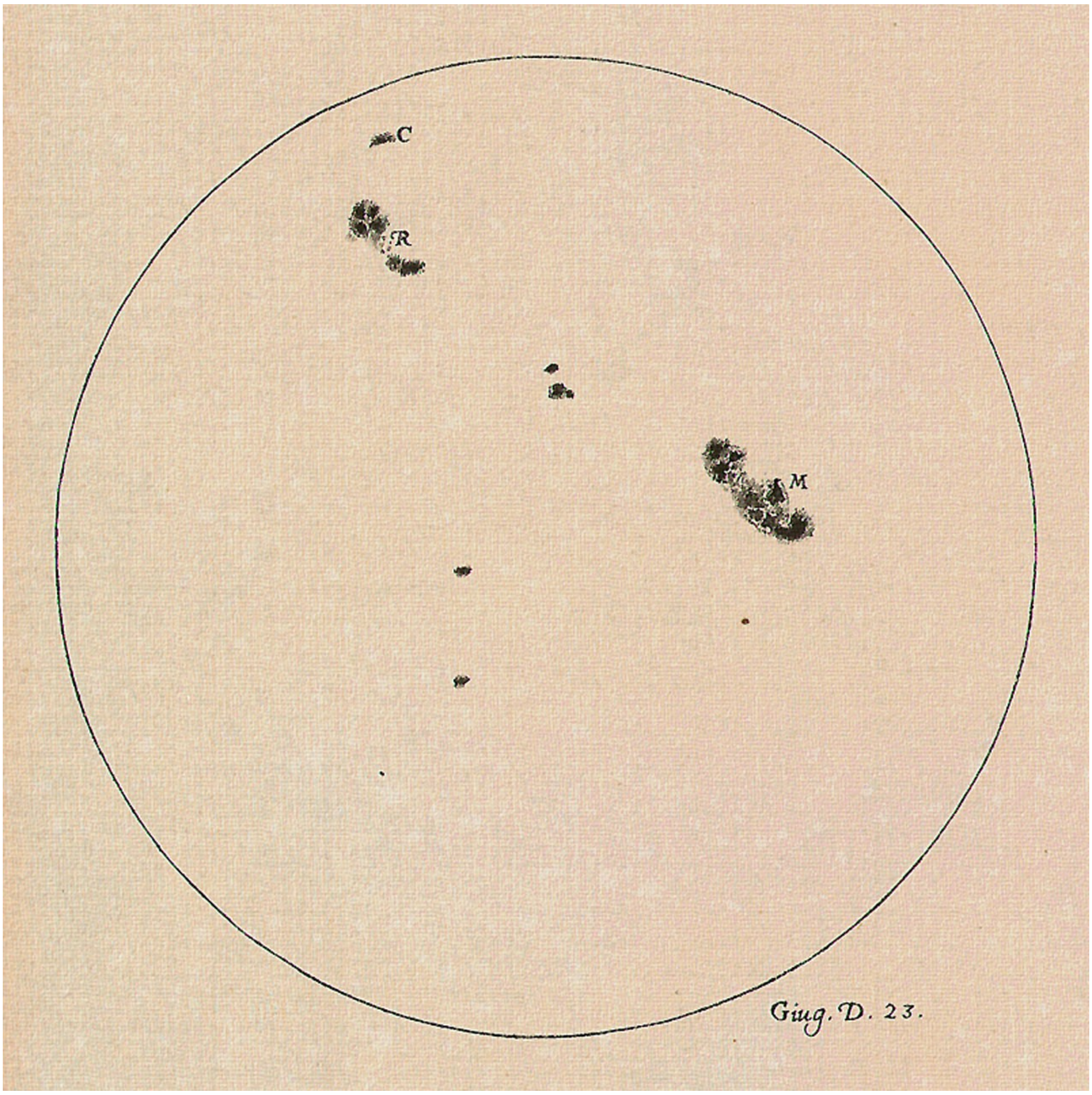


Imagen 71: Boceto de manchas solares de Galileo [78]

78 Imagen de *Galileo Galilei* en IAU (CC BY 4.0) https://www.iau.org/public/images/detail/iau1508a/

El origen de la física moderna

La "revolución" científica

En época de Galileo y Newton el modelo copernicano del movimiento de los astros gozaba de una credibilidad considerable, además de una serie de observaciones empíricas que lo fundamentaban, si bien aún adolecía de una justificación física que explicara por qué los movimientos observados se comportaban de esta manera.

Desde el punto de vista de la física aristotélica, el modelo heliocéntrico no era del todo creíble, pues el movimiento de la Tierra no se aprecia en absoluto. Si la Tierra se moviera a la velocidad implicada por el modelo copernicano se entiende que se debería notar de algún modo.

El principal desarrollo llevado a cabo por Galileo en este sentido es la demostración de que no hay necesidad de aceptar la física aristotélica, pudiendo defenderse una teoría alternativa más pragmática y que en efecto dota de una mejor explicación de los fenómenos observados.

Características de la ciencia moderna

A partir de 1600, se establece una diferencia entre la actual ciencia (nombre decimonónico que postulará William Whewell) y la filosofía natural previa. Realmente en aquella época se consideraba la ciencia aún como filosofía natural, y el propio Newton defendería su concepción como filósofo de la naturaleza, sin embargo se emplea esta terminología al considerar que es a partir de esta época donde el cuerpo del proceder en ciencia comienza a estructurarse de la manera sistematizada que la ha llevado a evolucionar hasta lo que entendemos por ciencia hoy día:

Nuevas nociones de la ciencia moderna

Se introducen una nueva serie de términos para la conceptualización del conocimiento científico:

- Hecho – hasta el siglo XVI la ciencia se refería a los fenómenos observables, perceptibles por cualquier observador. Sin embargo en esta época se empieza a usar la idea de hecho para referirse a una realidad intersubjetivamente verificable, menos sujeta a elaboraciones retóricas que la idea de "fenómeno" en la filosofía anterior. La idea de fenómeno tiene una relación directa con la percepción, mientras que un hecho no tiene por qué ser perceptible por los sentidos directamente, sino verificable de manera indirecta.

  Por ejemplo, en las posiciones teóricas de los planetas en los modelos de Kepler que siguen una órbita elíptica, dicha órbita no se observa (ni directa ni indirectamente), pero puede ser calculada. Por el contrario tenemos los epiciclos de Ptolomeo, que eran considerados un mero modelo teórico para "salvar los fenómenos". Sin embargo, las órbitas elípticas se aceptan como "hechos", como algo real. Ahora bien, ¿cómo se adapta un hecho a la verificación?
- Descubrimiento – En la antigüedad se suponía que el conocimiento se basaba en la observación de los fenómenos, de forma, que al margen de cosas sin importancia, se conocía todo. Pero la idea de hecho y su relación con los sentidos abren la puerta a la posibilidad de descubrirlos.

Al no ser perceptibles en principio, los hechos estaban esperando ocultos a los descubridores. El descubrimiento de América es un ejemplo de realidad esperando a ser descubierta.

Además, estos descubrimientos son muchas veces buscados, lo que da pie a saber quien los descubre y relacionar el nuevo hecho con su descubridor. La idea de que existe un "descubridor" mediante el que se da nombre al descubrimiento (eponimia), es un hecho característico de la revolución científica. América, las leyes de Kepler, el aparato de Golgi, la gravedad de Newton,... son algunos ejemplos.

- Ley – Entendida como la formulación matemáticamente precisa y universalmente válida de un "hecho".
  - La **precisión**: no sólo por su naturaleza matemática en si, sino por sus consecuencias en las mediciones y en las predicciones.
  - La **universalidad**: es válida en todo momento y lugar, la investigue quien la investigue. La relación encontrada por Kepler entre los periodos orbitales y las distancias de los planetas al Sol ($R^3 = T^2 \cdot K$), es un ejemplo paradigmático de ley pues es:
    - matemáticamente precisa, tanto en su formulación como en su descubrimiento.
    - válida para los planetas y los satélites de Júpiter
    - relativa a las órbitas planetarias elípticas como hechos, no fenómenos observables
    - conocida por su descubridor
- Teoría – La idea de teoría existía en la antigüedad, con un significado relacionado con la contemplación y la especulación acerca de sus causas últimas. Al buscar una explicación última de los fenómenos proponían una teoría (teorizaban), una especulación. En esta especulación, la razón pura era clave. Los sólidos regulares, los cinco elementos, las esferas,... son ejemplos de esta época. Este término tenía más la idea de ser de un verbo (en cuanto al hecho de "teorizar" en tanto que especular una idea de "imagen del mundo" que se construye con nuestra razón) que de sustantivo (donde se considerará como un sistema conceptual que permite relacionar numerosos hechos y predecirlos, de un modo más complejo y riguroso).

  Ahora aparece como un sistema conceptual que permite relacionar numerosos hechos y predecirlos, consistente en un conjunto de leyes o principios que permiten deducir (matemáticamente, aunque no siempre) los hechos. Normalmente, no son leyes que se preocupan por las "causas últimas", sino que se eliminan la teleología, centrándose fundamentalmente en la descripción (y posibilidad de predicción) de los hechos.
  - Las causas últimas son, al menos en principio, menos importantes.
  - Una teoría describe los hechos como las leyes, pero de forma más general, y a partir de conceptos más amplios.
  - Un caso paradigmático de teoría son las leyes del movimiento de Newton y su teoría fundamental de la gravedad, que da cuenta y explica el comportamiento de los entes, pero sin dar una justificación causal subyacente a los mismos ("*hypotheses non fingo*"):
    - Observamos que un cuerpo cae al suelo, lo que es un fenómeno.
    - Pero el **hecho** es que la Tierra y el cuerpo se atraen mutuamente, aproximándose en consecuencia.
    - Esto no es inmediatamente obvio, sino que será **descubierto** por Newton.

Desarrollo del método experimental

No es que los antiguos no hubiesen llevado a cabo experimentos, como por ejemplo hiciera Aristóteles en la observación de huevos de gallina fecundados y observados en diferentes momentos del desarrollo embrionario, pero el tipo de experimentación que se realizará a partir de ahora presenta una serie de características en su proceder que los diferencian de manera notable de éstos.

A partir de ahora, se entiende por **experimento** la construcción detallada y reproducible de un sistema artificial (y manipulable) con el que observar las consecuencias de determinadas circunstancias, mecanismos o hipótesis de manera controlada, pudiendo forzar situaciones excepcionales para recabar datos y para comprobar predicciones.

La **experimentación** como actividad no surge hasta 1600, pues anteriormente no existían ni un *marco teórico* ni un *sistema de comunicación efectivo* para hacer que los experimentos fuesen lo suficientemente relevantes para la producción del conocimiento.

Por ejemplo, William **Gilbert**, en sus experimentos sobre magnetismo (en *"De magnete"*), donde colocó dos barras paralelas de hierro sobre el polo de una pequeña esfera que simulaba la Tierra, demostrando que ellas repelían, convirtiéndose cada en un imán temporario con la misma polaridad, y los polos temporarios de cada barra se repelían entre sí.

Otros experimentos de la época, fueron:

- Los de Evangelista **Torricelli** acerca de la presión atmosférica, de los que deriva el barómetro.
- Los de Otto **von Guericke** y sus hemisferios de Magdeburgo, con los que mostró la enorme fuerza de la presión atmosférica.

Conocimiento científico y tecnología: la conexión con lo práctico

A partir del Renacimiento empieza a disolverse la barrera social entre "sabios" y "artesanos". Los nuevos descubrimientos se persiguen en gran medida por su relevancia práctica, como la importancia de la tecnología en el siglo XVI y XVII en medicina, navegación, cartografía, ingeniería,...

La concepción de todas estas teorías científicas que describen el funcionamiento interno de los fenómenos es lo que da pie al **paradigma mecanicista** del siglo XVII, que concibe los sistemas naturales como si de una máquina se tratase, frente al "organicismo" antiguo. Esta visión organicista consideraba el mundo, sobre todo lo vivo, como algo más que sus elementos componentes. Pese a que hay visiones que tienden a lo mágico como el holismo, el organicismo moderno se basa más en las relaciones entre las partes que en las partes en si mismas admitiendo la existencia de las propiedades emergentes.

A pesar de esto, la capacidad de la ciencia para dar lugar al desarrollo de aplicaciones tecnológicas no explotará hasta el siglo XIX, momento en que de verdad tiene lugar esta eclosión.

El reloj será un símbolo desde el siglo XVI, tanto como paradigma de mecanicismo como de la vinculación entre ciencia y tecnología.

En el s XIX se convertirá en el metáfora del diseño divino para luchar contra las tesis evolucionistas de la segunda revolución científica, la darwinista.

La imprenta y el desarrollo de instituciones "científicas"

La imprenta: primer elemento decisivo en la creación de la *"comunidad científica"* (fiabilidad en la expansión y rapidez de la comunicación de ideas y resultados, facilitando así la institucionalización de la ciencia, pues ahora los libros impresos son todos iguales. A diferencia de lo que ocurría con la copia de manuscritos (la práctica previa al desarrollo de la imprenta), lo que se consigue a partir de ahora, y en especial para el caso de la ciencia, es el conseguir la homogeneidad en los resultados publicados. Tanto textos como diagramas o dibujos son todos iguales, lo que permite la difusión de una obra de manera estable en cuanto a cantidad y calidad de los ejemplares, lo que facilita la expansión y rapidez en la comunicación de las ideas y resultados.

El desarrollo de la imprenta tuvo una serie de consecuencias de relevancia

- Fidelidad de la copia – Todos los libros impresos son iguales, mientras que los copiados a mano podían llevar errores, interpretaciones, licencias artísticas,... algo especialmente palpable en los gráficos y diagramas. La rama de la filología llamada crítica textual analiza estas variaciones. La *stemmatología* realiza un cladograma que vinculan las diferentes versiones en busca del "original". En realidad también hay errores en las copias impresas, aunque muchos menos y que remite a errores tipográficos en las imprentas.
- Aumento de la distribución – El tiempo para realizar las copias se redujo tanto que el número de ejemplares aumentó radicalmente. Esto facilitaba la distribución de los ejemplares y por lo tanto de la expansión y del intercambio de ideas. Como consecuencia aparece la *carrera por la prioridad*, para así ser reconocido como tal (eponimia), algo que preocupó mucho a Galileo y a Kepler, que se termina relacionando con el patrocinio como fuente económica y de prestigio. Galileo consiguió que le triplicaran el sueldo por regalar un telescopio de su propia manufactura. Después logró vivir en el palacio de los Médici y ser nombrado filósofo de la corte (más prestigioso que profesor) por denominar estrellas medíceas a los satélites de Júpiter.
- Creación de instituciones de investigación – La ciencia se separa de las universidades a la que consideraban antiguos centros vinculados con el aristotelismo, la escolástica y la teología. Destacan instituciones como la *Accademia dei lincei* (1603), o la *Royal Society* (1660).
- Publicaciones científicas – Son estas instituciones las que comienzan a publicar con cierta periodicidad lo que hoy se denominan revistas científicas o *journals*. Se caracterizan por:
    - regularidad de las publicaciones: semestral, trimestral, anual …
    - revisión por pares: lo que implica que la decisión de publicar un texto depende del análisis realizado por iguales, es decir, otros científicos

  Algunas publicaciones fueron las *"Philosphical Transactions"* (03/1665), o el *"Journal des Savants"* (01/1665).

Bacon y el inductivismo

Francis Bacon (1561-1626) fue un filósofo inglés que reformuló el método aristotélico en su obra *"Novum organum"* de 1620. Bacon desarrolló un método científico inductivo–experimental similar al antiguo pero añadía a la recopilación de datos positivos la importancia de los datos negativos, esto es, la falsación.

> *"la instancia negativa es más poderosa a la hora de establecer un axioma verdadero".*

Pero Bacon era contrario a dos elementos cruciales en el método de Galileo:

- Negaba la importancia de las matemáticas
- Era contrario al diseño experimental

Sin embargo, aunque la física se desarrolló en torno al método de Galileo y Descartes, el modelo baconiano triunfaría en el s. XIX en las nuevas ciencias de la geología y la biología evolutiva.

El **método baconiano** consistía en:

1. Observar
2. Hacer inducción
3. Formular hipótesis
4. Comprobar por experimentación
5. Demostrar o refutar
6. Concluir teoría científica

El método de Galileo

El método matemático-deductivo elaborado por Descartes fue desarrollado por Galileo, e incluía justo lo que negaba Bacon:

- Aislar los fenómenos de su contexto natural, estudiando tan sólo los aspectos de dichos fenómenos que resultaban medibles
- Erigir luego un vasto cuerpo de teoría matemática sobre los resultados.

Aún así, cuando Galileo realizaba un experimento, era generalmente para ilustrar una conclusión ya alcanzada por un razonamiento matemático. Es decir, su enfoque no era tanto su actitud hacia la experimentación como en su confianza acerca de la relevancia de las matemáticas.

Por tanto, la revolución galileana se puede reducir al descubrimiento del lenguaje de la naturaleza y que las matemáticas son la gramática de la ciencia.

El estudio del movimiento de Galileo

Durante el Renacimiento el movimiento dejó de verse como un proceso ontológico orientado a comprender la naturaleza de los seres y hacia dónde les hace tender ésta (por ejemplo, los cuerpos pesados como la tierra tienden a caer, y los ligeros como el aire tienden a ascender), para entenderse como un mero desplazamiento local que puede ser analizado.

Ya escolásticos tardíos (Buridán y Oresme) analizaron por separado los efectos (cinemática) de las causas (dinámica) y junto a los estudios de Arquímedes de la estática y la hidrostática la nueva física se centró en el análisis computable del movimiento sin atender a cuestiones metafísicas.

- El <u>movimiento uniforme</u> pasó a verse como el estado neutral de cuerpos no sometidos a una perturbación, al igual que el reposo.
- La <u>aceleración</u> dejó de verse como un apetito de los cuerpos por ir a su sitio natural como un efecto de una causa violenta para convertirse en el rasgo central de los cuerpos que caen.
- El <u>movimiento circular uniforme</u> pasó a verse también como el resultado de una fuerza central.

Si bien la física no se ocupa exclusivamente del estudio del movimiento, Galileo es considerado el padre (o uno de los padres) de esta transformación en el estudio de la física, en particular a partir de sus estudios de la caída de los graves y de la trayectoria de proyectiles.

El estudio del movimiento era un problema crucial para el **avance tecnológico**. Las investigaciones mecánicas se basaban hasta entonces sobre todo en la estática, el estudio de los cuerpos en equilibrio, en gran medida debido a los aportes de Arquímedes. Gracias a los estudios de Galileo se dieron avances cruciales en la tecnología militar, como en los usos de artillería

También era un tema central para resolver los temas de la **nueva astronomía heliocéntrica**, en particular para poder explicar por qué no podía observarse dicho movimiento (el de la Tierra) desde la propia superficie terrestre (y que no sería explicado como tal sin la necesidad de efectuar observaciones astronómicas hasta se llevó a cabo el experimento del *péndulo de Foucault*), así como tratar de entender qué era aquello que daba impulso a los planetas a lo largo de sus órbitas. Sobre este tema, Kepler, inspirado por los experimentos de Gilbert, llegó a plantear una posible influencia magnética desde el Sol para con los planetas, y para el que no se tendría una primera explicación contundente hasta las formulaciones gravitatorias de Newton.

Además, la física aristotélica era manifiestamente inexacta al plantear el problema del movimiento local, como en el estudio del movimiento de proyectiles, lo cual era de especial interés tanto en el punto de vista teórico como práctico, para su aplicación en el aspecto defensivo y militar. Según Aristóteles, el movimiento de caída era uniforme, y suponía que los cuerpos menos densos caen más despacio que los más densos. Por el contrario, otros como Filopón sostenían la no constancia de dicho movimiento, si bien la influencia aristotélica ayudó a preservar esta concepción de movimiento sin aceleración.

Los primeros estudios de Galileo acerca del movimiento seguían a Arquímedes al considerarlo como un problema de hidrostática, entendiendo la caída de los cuerpos en el aire como cuando se sumergen en el agua u otros fluidos, para el que asumía una definición incorrecta de movimiento acelerado, pues lo concebía como dependiente de la distancia recorrida, mientras que la noción "correcta" de dicho movimiento acelerado estudia el incremento de velocidad proporcional al tiempo transcurrido. Esta noción correcta ya había sido aportada por varios sabios vinculados a la Universidad de Merton en el siglo XIV: Buridán, Oresme o Domingo de Soto, si bien no habían realizado ningún tipo de desarrollo experimental al respecto de tal concepción de movimiento, ni lo habían puesto en relación con otras teorías que pudieran estar relacionadas.

Una vez subsana el error en sus planteamientos, logra comprobar experimentalmente que, en efecto, la velocidad de la caída de un cuerpo aumenta proporcionalmente no con la distancia recorrida, sino con el tiempo que lleva cayendo. Gracias a sus experimentos, en particular a aquellos realizados haciendo uso de planos inclinados, le permitió ofrecer las siguientes contribuciones al corpus de conocimiento que desde entonces solemos entender como ciencia:

- **Desarrollo matemático mucho más detallado** (ley de los cuadrados, idea de velocidad instantánea, descomposición de los componentes del movimiento, etc..)
- **Contrastación experimenta**l (planos inclinados, péndulos, etc...) a fin de verificar si lo que plantea la teoría explica y corresponde con lo que ocurre en la realidad.
- **Desarrollo de la noción de relatividad del movimiento** (con antecedentes en Oresme o Buridán de la escuela de Merton) **y de inercia**, que serán la clave para dilucidar el problema de la astronomía copernicana respecto a la cuestión del movimiento de la Tierra.
- Encuadrar el análisis del movimiento en el marco de una **cosmovisión mecanicista** y de una **física y epistemología profundamente antiaristotélicas**.

Desarrollos matemáticos y la ley de caída de los graves

Galileo planteó la "ley de los cuadrados", deducida a partir del *teorema de las velocidades medias* (también conocido como "**regla de Merton**"), según el cual,

> *"La distancia recorrida en un tiempo determinado por un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado y que empieza a moverse desde el reposo es igual a la distancia recorrida en ese mismo tiempo por un cuerpo que se mueve a una velocidad constante igual a la mitad de la velocidad final del primero."*

Esta regla fue planteada en el siglo XIV por los calculadores del Merton College, siendo probada geométricamente por Nicolás Oresme:

$$x=\frac{1}{2}(v_0+v_f)t$$

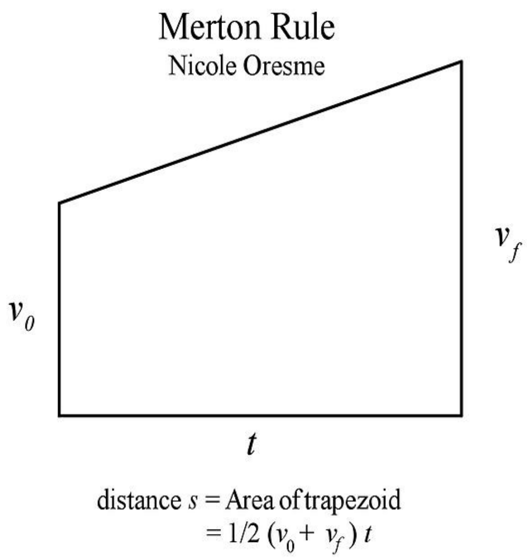


Imagen 72: Regla de Merton demostrada por Oresme [79]

Es decir, la distancia recorrida (x) corresponde a la semisuma de las velocidades inicial y final multiplicada por el tiempo invertido en recorrer tal distancia, lo que corresponde con el área de un trapezoide como el de la figura anterior.

Esto lo plantean los escolásticos de Merton como un simple teorema matemático. Es decir, dada esa definición de movimiento uniformemente acelerado en función de la distancia recorrida se sigue dicho teorema, únicamente planteado y sin aplicarse a nada, por lo que no fue sometido a prueba ni a ningún tipo de contrastación experimental.

Es Galileo quien somete a prueba lo planteado por dicho teorema. Para ello plantea un esquema similar al de Oresme, donde la escala vertical vendría a representar el tiempo, y la velocidad de caída sería el eje horizontal, de modo que el área encerrada por el gráfico geométrico correspondería con la distancia recorrida según la relación velocidad-tiempo ($v=x/t$, $x=v\cdot t$), de modo que los intervalos que denota cada segmento trapezoidal corresponde con un segundo de caída libre de un cuerpo soltado en el punto A, y la velocidad que presenta el cuerpo en dicho instante sería la perpendicular que corta desde dicho instante sobre el segmento diagonal AP.

79 Imagen de *"ELApro"* CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MertonRuleOresme.jpg

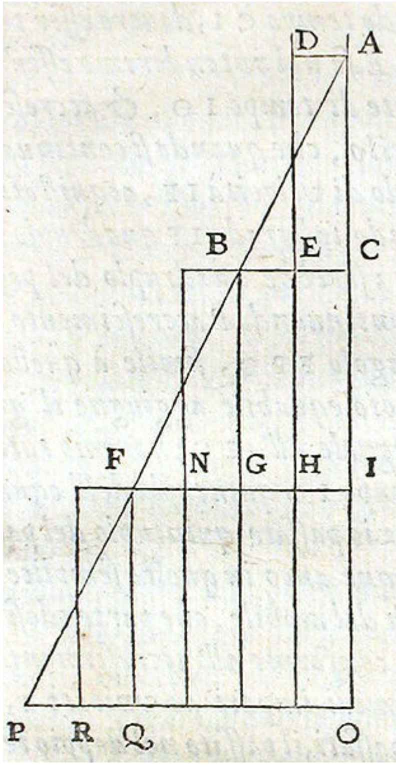


Imagen 73: Demostración de Galileo análoga a la de Oresme [80]

En el intervalo de tiempo primero (AC) que corresponde al primer segundo, la caída comienza desde el reposo en A hasta una velocidad correspondiente al valor horizontal en B, de modo que la distancia recorrida en la caída, siguiendo la relación de Merton, es equivalente al área del del triángulo ABC (que es igual a la del rectángulo $DACE$).

Procediendo de manera análoga, en el segundo lapso de tiempo (CI) habrá recorrido la distancia equivalente al área de los tres rectángulos comprendidos en dicha sección, de modo que para el total de tiempo invertido ($2T \equiv AI$) realmente habría recorrido 4 unidades de distancia (4 áreas rectangulares).

Atendiendo a la gráfica, vemos como para cada unidad de tiempo de caída, la distancia que recorre en dicho intervalos sería el siguiente número impar al valor del intervalo temporal: $T_1 \rightarrow 1$, $T_2 \rightarrow 3$, $T_3 \rightarrow 5$,... $T_n \rightarrow$ *siguiente impar a n* . De este modo, para los diferentes intervalos temporales se tendría que: $1T \rightarrow 1$, $2T \rightarrow 4$, $3T \rightarrow 9$,... $nT \rightarrow n^2$. Es decir, la distancia recorrida por un cuerpo que cae es proporcional al cuadrado del tiempo que invierte en la caída, y que conocemos como <u>**ley de caída de los graves**</u> de Galileo. De aquí saldrán dos conclusiones importantes:

- La distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo que tarda en caer.
- La velocidad final de un cuerpo que cae por un plano inclinado es igual a la de un cuerpo que cae libremente a la misma altura. De hecho, dada la complejidad a la hora de medir tiempos y velocidades en un cuerpo que cae libremente desde cierta altura, lo que hace es trasladar este experimento a la caída por rodadura de un cuerpo sobre un plano inclinado bien pulimentado (para limitar el rozamiento), y donde la aceleración del mismo dependerá de la inclinación del plano..

80 Imagen de *Galileo Galileo* de sus *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (1638)* (domino público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galileo-1638-173.jpg

Contrastaciones experimentales: péndulos y planos inclinados

Para justificar la relación existente entre la caída libre y la rodadura en un plano inclinado, Galileo establece una comparativa experimental entre el movimiento pendular y el de caída por un plano

En la oscilación de un péndulo, éste está sometido únicamente a la acción de la gravedad, limitada por el arco de la cuerda del que cuelga, donde la fricción con el aire le frena en su movimiento horizontal, moviéndose en sentido contrario una vez alcanza el reposo en la oscilación anterior.

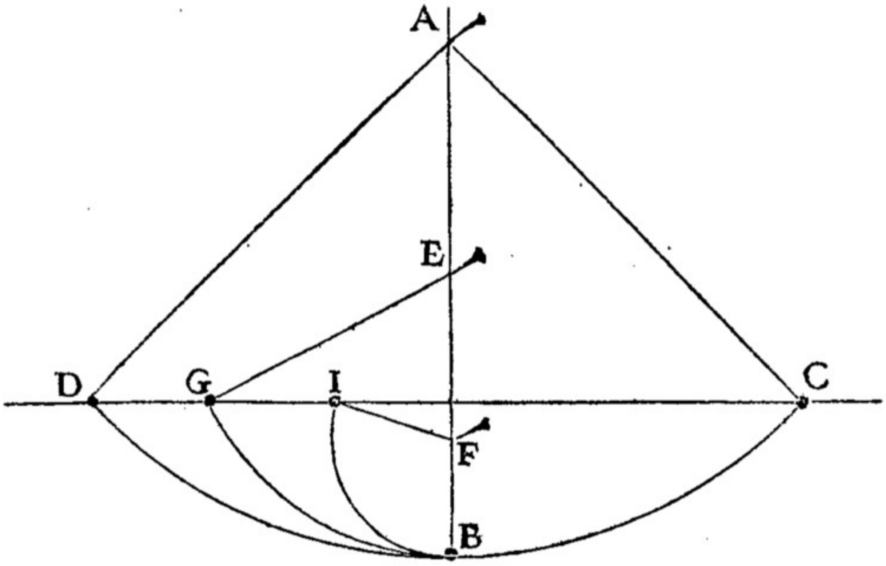


Imagen 74: Estudio pendular de Galileo [81]

La acción del aire en contraposición a la de la gravedad (y la tensión normal sobre el hilo) daría al movimiento cierta constancia en la velocidad como defendiera Aristóteles. Lo que se observa es que la altura que alcanza (D) es siempre la misma que la altura de la que parte (C). Si se acorta la longitud del cable, así como la posición del punto fijo del mismo (puntos E y F) (soltando el cuerpo desde la misma altura en los sucesivos casos), se observa que adquiere siempre la misma altura (puntos G e I), Es decir, con independencia de donde coloquemos el obstáculo que hace frenarse a la cuerda, el peso del péndulo tiende a recuperar la misma altura desde la que salió.

De este modo, se concluye que el momento (la fuerza o energía que lleva el cuerpo en movimiento) en el punto B que ha adquirido por el cuerpo sólo depende de la altura desde la que cae, no de la trayectoria.

81 Imagen de *Galileo Galilei* en su *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"* y disponible en Wikimedia Commons, perteneciendo al dominio público.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pendolointerrotto.png

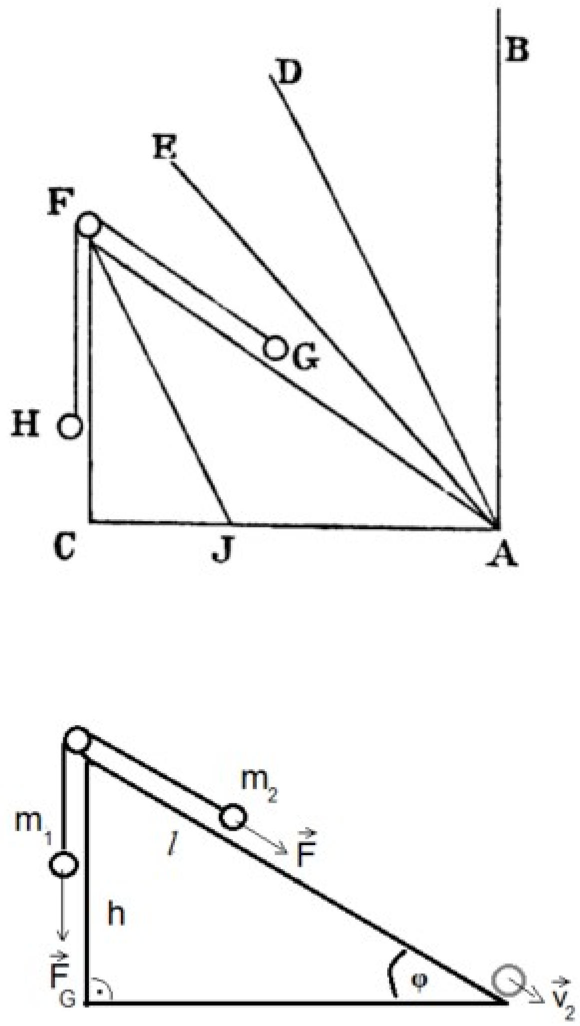


Imagen 75: Planos inclinados de Galileo [82]

Galileo afirma que la caída por un plano inclinado puede considerarse análoga a la caída de un péndulo a través de un arco (como el visto para CB). En su experimento sobre planos inclinados comprobará que, análogo al resultado equivalente en el péndulo cuando se sitúa el punto fijo de la cuerda a diferentes alturas, si tenemos diferentes planos inclinados con diferentes inclinaciones obtendremos siempre iguales resultados de velocidad cuando se suelta a los objetos a la misma altura en los diferentes planos. Esto lo pudo comprobar situando sendos planos sobre una mesa, de modo que el objeto que cae por el plano es proyectado desde el borde de la mesa hacia el suelo, alcanzando la misma posición sobre el suelo independientemente del plano por el que haya venido rodando (siempre que la posición de partida original se encuentre a la misma altura). Dado que la caída libre desde la mesa hacia el suelo es la misma, se deduce que la velocidad al llegar al final de cada plano inclinado es la misma independientemente del grado de inclinación, y sólo depende de la altura.

De modo análogo, si se emplean planos con la misma inclinación, pero soltando la bola desde diferentes altura, la distancia que alcanza será mayor en aquel cuya altura inicial fuese más alta.

82 Imagen de *Galileo Galilei* en su *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"* (dominio público). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galilei_Discorsi_inclined_plane.png

Imagen 76: Plano inclinado en el Museo Galileo [83]

Para poder proceder con el estudio de tiempos y velocidades construye un dispositivo experimental como el de la imagen de arriba. Evidentemente, en tiempos de Galileo no existía ningún tipo de aparato que ofreciese una medición de la velocidad en un momento determinado. Lo que nos plantea no es medir la velocidad instantánea como tal, sino aplicar la relación entre los intervalos de tiempo de caída y las distancias que relaciona la gráfica de su ley de caída de los graves. Para ello, en el plano inclinado experimental sitúa una serie de puentes con campanas que serán sonadas al paso de la bola que se deja caer por el plano, situándolas a distancias tales que el tiempo invertido entre una y otra sea el mismo, de manera constante (primero trata de sincronizarlas con su propio pulso y su capacidad para seguir el ritmo, que era bueno dadas sus buenas aptitudes musicales). Una vez realiza la experimentación y comprueba las medidas a las que se ubican tales campanas que nos marcan los intervalos de tiempo iguales, comprueba que éstas se separan las distancias que ya estipulaba su ley de caída, ubicándose a distancias de 1, 3, 5, 7... de modo que las distancias agregadas son las de 1, 4, 9, 16, 25... preservando la relación entre la aceleración del cuerpo y los cuadrados de los tiempos empleados.

83 Imagen del *Museo Galileo* (CC BY-SA)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piano_inclinato_inv_1041_IF_21341.jpg

Gracias a los resultados que obtiene (eliminando en la medida de lo posible el rozamiento entre la bola y la superficie de deslizamiento del plano), estipula que la caída de los graves representa un movimiento uniformemente acelerado, para lo que se tiene que:

- Si bien sus observaciones no llegan a demostrar que todos los cuerpos caen con la misma aceleración, pues aprecia ciertas diferencias en cuerpos de diferente volumen y materiales, propone experimentos (físicos o mentales) que apuntan a ello, alegando que toda diferencia en los resultados es debida al medio (fricción del aire y rozamiento a nivel superficial).
- Sugiere que esto podría demostrarse experimentalmente observando caer en el vacío cuerpos de densidad y forma distintas.
  - Esto fue experimentado por Robert Boyle en 1660, usando la bomba de vacío que había sido inventada por Otto von Guericke en 1654 (unió dos semiesferas a las que extrajo el aire, y las sometió a tracción en sentidos contrarios por parte de dos grupos de caballos que por mucho que tiraban no eran capaces de separarlas).
  - En 1971, durante la misión espacial Apollo 15 en la Luna, el astronautas David Scott puso a prueba la ley de caída de los graves aprovechando la situación de vacío al no existir atmósfera en la Luna, dejando caer de manera simultánea desde su cintura una pluma y un martillo y que, como predijo Galileo, llegaron al suelo a la vez.

Movimiento inercial

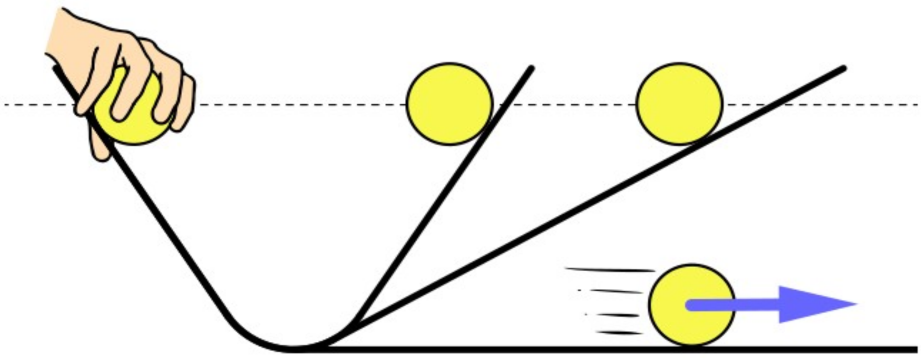


Imagen 77: Experimento mental de Galileo para el estudio de la inercia de los cuerpos [84]

Desde el punto de vista teórico es más importante la idea del movimiento inercial. A partir de sus experimentos en caída de cuerpos, alega que de no ser por el rozamiento, la bola seguiría cayendo o desplazándose eternamente. Igual que con el péndulo, que el peso recorría un arco tal que alcanzaba la misma altura desde la que había sido soltado,

Galileo plantea algo análogo para planos inclinados. Si se situasen planos inclinados, aún de diferente inclinación, justo a continuación del punto bajo del plano inclinado por el que cae la bola, en caso de no existir tales rozamientos ni fuerzas de fricción, la bola habría de ascender hasta la misma altura desde la que fue soltada.

84 Imagen de *"MikeRun"* (CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thought-experiment-on-inertia.svg

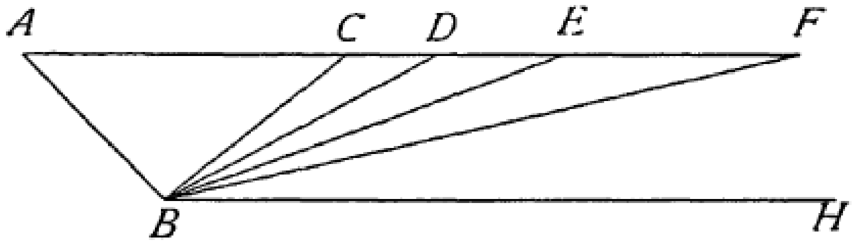


Imagen 78: Inercia y planos inclinados [85]

El momento alcanzado en B por una bola que cae desde A es suficiente para hacerla subir por otro plano inclinado hasta la misma altura, ya sea en las opciones $C, D, E, F, \ldots$. Si el plano que sigue fuese totalmente horizontal (caso H) la bola seguiría rodando constantemente (salvo por la acción del rozamiento que la terminaría frenando).

Galileo considera que el movimiento inercial es circular (hoy sabemos que es lineal, pues para que sea circular debe someterse a alguna fuerza), pues en realidad sería un movimiento sobre la superficie de la tierra. Esto implicaría que no sería necesaria ninguna causa para explicar el movimiento de los planetas en torno al Sol, ni de los satélites en torno a los planetas. Bastaría con una velocidad inicial y una ausencia de otras fuerzas para que los planetas se mantuvieran girando indefinidamente

Cosmovisión mecanicista

A raíz de sus experimentos, tanto los realmente llevados a cabo como con los mentales, Galileo concluye que:

- El movimiento inercial es aquel que presenta un cuerpo que se mueve a velocidad constante y sobre el que no se ejerce ninguna fuerza.
- Este movimiento inercial es por naturaleza circular, pues en realidad el movimiento "rectilíneo" del caso de inclinación plana (caso H) sería un movimiento sobre la superficie de la Tierra, que en línea recta describiría un círculo.
- Se trata de un replanteamiento de la idea aristotélica de *"movimiento natural"* (caída hacia abajo en cuerpos pesados, o ascenso hacia arriba en los ligeros, y movimiento circular de éter, estrellas y astros). No sería, por tanto, necesaria ninguna causa para explicar el movimiento de los planetas en torno al Sol, ni el de los satélites en torno a los planetas.
- Así puede explicar por qué no observamos el movimiento de la Tierra (**principio de relatividad**). Para ello plantea un experimento donde, si fuésemos navegando en alta mar en un barco que se mueve a velocidad constante, con la misma velocidad que el viento no notaríamos (a falta de ninguna referencia externa) que el barco está en efecto desplazándose. Incluso, en tales condiciones, si se arrojase un cuerpo pesado desde lo alto del mástil, aunque el barco se esté movimiento, como la piedra tiene la misma velocidad que el barco, caería al pie del mástil.

En base a estos puntos, trató de explicar las mareas como causadas por la combinación de los movimientos de rotación y traslación de la Tierra, pero sólo conseguía explicar una pleamar diaria, no dos.

85 Imagen de *Ernst Mach* en *"The Science of Mechanics" (1883)*. (domino público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galileo%27s_inclined_plane_experiment.png

«Si la Tierra estuviera inmóvil, el flujo y reflujo de los océanos no podría ocurrir naturalmente, si atribuimos al globo terrestre los movimientos que se le acaban de asignar los mares deben estar necesariamente sometidos a un flujo y reflujo que en todo concuerda con lo que en ellos se observa».

El movimiento de los proyectiles

Galileo se desempeñó también en el estudio de proyectiles y de cómo éste puede descomponerse a su vez en dos **movimientos compuestos**:

- El de caída libre: que hace moverse al cuerpo en línea recta y hacia abajo con movimiento uniformemente acelerado.
- El inercial: que mantiene el movimiento horizontal del cuerpo con velocidad constante (en tanto que no haya acción de la fricción por el aire).

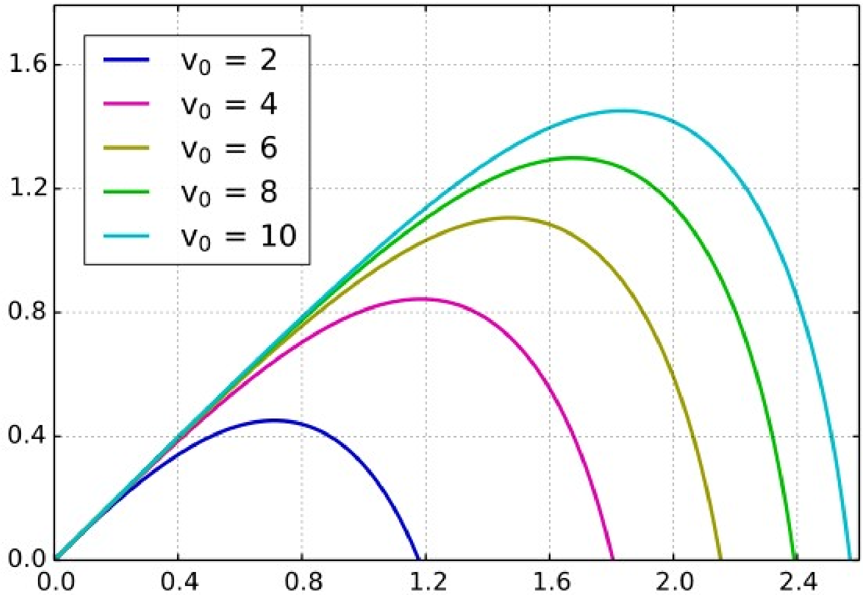


Imagen 79: Movimiento parabólico de proyectiles. 45º y distintas velocidades iniciales [86]

Aristóteles ya había tratado de dar cuenta de este movimiento, pero el hecho de que asumiera que una vez el cuerpo abandonaba la mano, su naturaleza pesada era la única acción implicada en el descenso que se observaba no permitía entender correctamente la trayectoria que realmente describía el objeto en su recorrido. Es, en efecto, el movimiento inercial en sentido horizontal que plantea Galileo el que permite entender esta composición de movimientos que da lugar a la trayectoria parabólica.

Galileo comprueba que, para unidades de tiempo constantes el desplazamiento horizontal es igualmente constante (por la inercia de dicho movimiento horizontal), pero verticalmente, debido a la acción aceleradora de la gravedad, la distancia que recorre en los sucesivos intervalos mantiene la proporción 1, 3, 5,... que ya había comprobado en el estudio de la caída de los graves.

Mostrará que el movimiento resultante es una parábola, pues el movimiento que observa sigue la relación geométrica ya descrita por Apolonio, y que la distancia máxima se alcanza lanzando el proyectil con inclinación de 45º.

86 Imagen de *"Geek3"* (CC BY 3.0)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp_ballistic_trajectories_velocities.svg

El principio de relatividad de Galileo

En sus *"Diálogos sobre los dos sistemas del mundo"* (1632), Galileo escribe:

> *«Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores... colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma... haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro.... Las gotas caerán en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire... las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si cansaran de seguir el curso del barco...».*

Con estas palabras Galileo explicaba su principio de relatividad, que luego desarrollaría Newton como los sistemas de referencia inercial.

La idea señala la imposibilidad de distinguir entre sistemas en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme, lo que explica la no percepción de los movimientos terrestres. Al estar todos sometidos al mismo movimiento inercial de la Tierra, que no percibimos al carecer de referencia externa.

La mecánica cartesiana (René Descartes)

René Descartes (1596 – 1650) intenta desarrollar una cosmovisión coherente con los nuevos descubrimientos físicos y astronómicos y con su epistemología racionalista. Pero este enfoque alejado de la experimentación junto con su confianza en las matemáticas, haría que la mayor parte de sus aportaciones a la mecánica fueran fallidas.

Su máxima, *"pienso luego existo"* era la base de la potencia deductiva de la mente.

Su física se basaba en un visión mecanicista del mundo según la cual todo era causado mediante interacciones directas. Pero suponía un dualismo materia–alma:

- La **res extensa** era la materia identificada con el espacio que ocupaba.
- La **res cogitans** era el alma (Dios)

El mundo era una gran maquinaria de materia perfectamente engranada animada por Dios.

La conexión entre el cuerpo y el alma, es decir, la intervención divina en el mecanicismo material, se realizaba a través de la glándula pineal (la glándula pineal o epífisis cerebral es una glándula endocrina que segrega la hormona melatonina que regula los ritmos circadianos y otras funciones relacionadas con la reproducción).

Esta premisa condicionaba todo el comportamiento de la materia y se basaba en sus **tres leyes de intercambio de los movimientos** de causas segundas a la causa última divina. Todo el espacio debía estar ocupado, por lo que en su propuesta el vacío resultaba imposible.

1. **1º ley o ley de la pasividad**: Los cuerpos se mantienen como estaban: tanto su forma, como su reposo o movimiento.
2. **2º ley o ley de la inercia**: Los cuerpos en movimiento lo mantienen de forma rectilínea uniforme
3. **3º ley o ley de los choques**: Cuando los cuerpos chocan conservan la cantidad de movimiento (ley de conservación del momento). En base a esto elaboró una **teoría de choques** infame, no tanto porque no fuera acertada sino porque era contraria a la más simple observación.

Respecto a la mecánica celeste, e inspirado por el comportamiento de sólidos inmersos en fluidos y los remolinos que se forman en éste, planteó una **teoría de los vórtices** para explicar el movimiento de los planetas en la que el espacio estaba lleno de éter que creaba remolinos que desplaza los planetas. Pero era poco más que una especulación porque no permitía deducir ninguna ley.

Los planteamientos de Descartes presentan una serie de problemas:

- No permitían explicar porqué el movimiento de caída era uniformemente acelerado.
- Tampoco permitía derivar la teoría del movimiento de los planetas de Kepler, apelando la teoría de los vórtices, que era un movimiento de fluidos, para explicar el movimiento de los planetas, pues Descartes sólo emplea movimientos inerciales y choques.
  - Su explicación mediante los vórtices como “remolinos de éter” que se asemejan a los remolinos de un fluido en movimiento se tornan insuficientes a tal respecto.
- Tiene dificultades para explicar los experimentos sobre el vacío.
- Al identificar materia y extensión no es capaz de explicar porqué unos cuerpos pesan más que otros aún teniendo el mismo volumen (presentan diferente densidad).
- Al intentar dar una demostración puramente geométrica de las leyes de colisión, encuentra leyes experimentalmente erróneas. Las correctas fueron formuladas por Huygens con el *principio de conservación de la energía cinética*.

No obstante, Descartes hizo contribuciones a la física dignas de mención, sobre todo en sus estudios sobre **óptica** acerca de la difracción de la luz y su aplicación al arco iris.

En definitiva, sus leyes de óptica, sus dos primeros principios del movimiento y, sobre todo, la creación del eje de coordenadas y la geometría analítica fueron aportaciones importantes para la ciencia, al margen de otras consideraciones erróneas.

Christiaan Huygens

Christiaan Huygens (1629 – 1695) fue uno de los máximos exponentes del modelo deductivo-experimental, junto a Boyle, Hooke y, por supuesto, Newton. Desarrolló el camino abierto por Galileo de forma que la ciencia dejó de verse como conocimiento demostrado para entenderse como conocimiento empíricamente corroborado (aunque ahora se comprende, a lo sumo, como una verdad contingente y revisable).

Huygens señaló que Bacon no había apreciado la función de las matemáticas, mientras que Descartes había desestimado la función de la experimentación. Entre sus hallazgos, destacan:

- El descubrimiento de los anillos de Saturno, su satélite mayor (Titan) y sus fases
- El desarrollo de telescopios capaces de distinguir la sombra del anillo sobre el planeta
- El invento de un reloj de péndulo muy preciso con el que calculó la aceleración de la gravedad
- Las leyes de conservación de las fuerzas vivas (energía cinética antes y después de un choque) y de las colisiones, tan erradas en Descartes. Mediante esto se explica que la energía que tienen los cuerpos antes y después del choque se conserva en el sistema que forman.
- La propuesta de la naturaleza ondulatoria de la luz
- La ley de la fuerza centrífuga de un movimiento circular, es decir, la aceleración asociada el movimiento de una trayectoria curva.

Esto último sería clave en la obra de Newton.

descubrirá una serie de leyes nuevas que si respondían a estos problemas, como el principio de conservación de la energía cinética, y que da cuenta de que la energía que tienen los cuerpos antes y después del choque se conserva en el sistema que forman.

La ley del inverso del cuadrado

Huygens servirá de enlace entre Kepler, Galileo y Newton, siendo una de sus principales propuestas la **ley del inverso del cuadrado**, donde establece que los cuerpos se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Un móvil girando en torno a un centro, cambia su velocidad porque cambia de dirección, no su módulo. Por tanto, estará sometido a una aceleración que lo dirige hacia el centro: la aceleración centrípeta, y esta aceleración ha de deberse a la acción de una fuerza que cause el desvío de su trayectoria rectilínea natural, tiene que haber una fuerza que cambie su dirección. Es como cuando giramos una honda en círculos, al soltar la honda la piedra sale en dirección tangencial al círculo que estamos describiendo antes.

Esto lo identifica como la *fuerza centrífuga,* que es la fuerza ficticia (la que nos parece que hay) que tiende a separar un cuerpo del centro. En realidad, debemos hablar de la *fuerza centrípeta*, que no es sino la fuerza que actúa sobre el cuerpo en dirección hacia el centro de giro del movimiento circular.

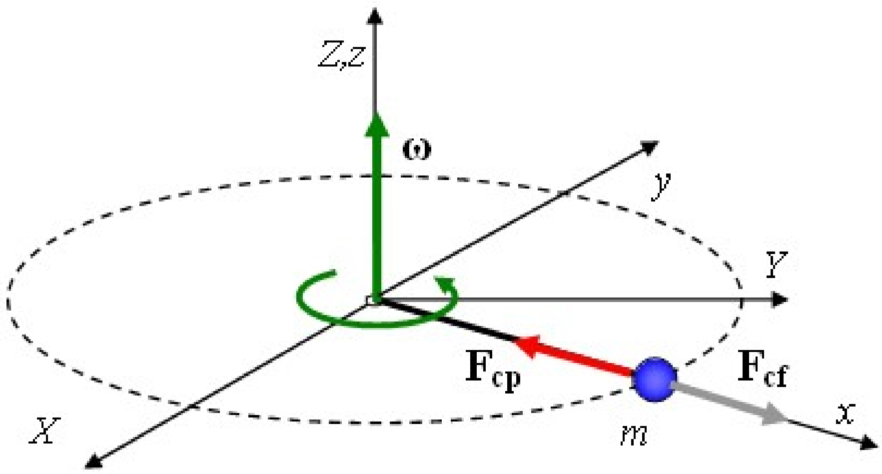


Imagen 80: Fuerzas centrífuga (ficticia) y centrípeta (real) [87]

Dado que, en el movimiento circular, el objeto se encuentra siempre a la misma distancia del centro, ambas fuerzas tienen que ser iguales, ya que la fuerza que atrae el cuerpo hacia el centro se compensa con la fuerza que dicho cuerpo ejerce sobre la circunferencia. Huygens estudió este movimiento en distintos círculos, y en particular para el movimiento de los planetas alrededor del Sol, para lo que concluyó que la fuerza centrífuga de un cuerpo en movimiento circular seguía la siguiente expresión:

87 Imagen de *"Algarabia"* (dominio público) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moglf0905_Fuerza_centr%C3%ADfuga.jpg?uselang=es

$$F=\frac{v^2}{r}$$

Puesto que la velocidad lineal sobre la circunferencia es $v=\frac{2\pi r}{t}$

$$v^2=\frac{(2\pi r)^2}{t^2}$$

Y por lo tanto, $F=\frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r}$

Según la 3ª ley de Kepler para el movimiento de los planetas (pese a tratarse de órbitas elípticas tienen poca excentricidad, asemejándose a circunferencias):

$t^2=k r^3$ (donde $k\equiv cte$)

De modo que se tiene que:

$$F=\frac{4\pi^2 r^2}{(k r^3) r}$$

Despejando términos en la ecuación nos queda:

$$F=\frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{G}{r^2}$$

Es decir, la aceleración hacia el centro de un cuerpo que gira es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, donde la fuerza causante de tal aceleración, la centrífuga, presenta un valor proporcional (G) al inverso del cuadrado de la distancia entre el objeto y su centro de giro, dejando entrever lo que terminaría obteniendo Newton en relación a la gravedad entre dos cuerpos que se atraen.

Extrapolando, la fuerza de atracción entre el Sol y los planetas sigue la misma relación de $1/r^2$. Esta relación será clave en el desarrollo de la teoría de la gravedad de Newton quien llegó a las mismas conclusiones que Huygens, probablemente sin conocer el trabajo de éste.

Isaac Newton

Isaac Newton (1643 – 1727) fue en filósofo natural que dio paso a la física moderna (se podría decir que fue el último filósofo natural y el primer científico) al representar en forma de ecuaciones las regularidades físicas (si bien Galileo introduce las matemáticas, y Kepler ya usa ecuaciones, lo mismo que Huygens, la generalización del lenguaje matemático es obra de Newton en los *Principia*).

Newton escribió tres tratados imprescindibles para el futuro de la física y de la ciencia en general:

- En *"Opticks"*, hace una análisis de las propiedades de la luz, a la que da un carácter de partícula
- En el "*Método de las fluxiones y series infinitas*" sienta las bases del cálculo, inventando la derivada y la integral
- En los *"Principia Mathematica"* expone su tratado de mecánica que se desarrolla en oposición a las ideas de Descartes. La naturaleza, según Galileo, estaba escrita en lenguaje matemático, si bien éste se había limitado a dar una interpretación geométrica de la misma. Fue realmente Newton quien expuso el modo de escudriñarla para dar lugar a las fórmulas que describen la naturaleza.

La mecánica newtoniana

Las principales innovaciones teóricas de Newton en su estudio de la mecánica están recogida en sus *"Principia Mathematica"*:

Organización de los "Principia Mathematica"

La obra comienza con cuatro definiciones al estilo de los Elementos de Euclides:

Definición I - La **cantidad de materia** (**masa**) es una medida de la misma que resulta de su densidad y volumen. Luego la masa es una propiedad intrínseca de la materia diferente de la extensión cartesiana. Esto permite explicar por qué hay cuerpos más pesados que otros, ya que la materia posee varias propiedades, no solo la extensión.
Definición II - La **cantidad de movimiento** (**momento**) es una medida de éste que resulta de su velocidad y su masa.
Definición III - La **fuerza inherente** de la materia es la propia de cada cuerpo que lo mantiene en su estado.
Definición IV - La **fuerza impresa** es la acción ejercida sobre un cuerpo para sacarlo de su estado. Esto da cuenta de la noción de **fuerza como principio causal del movimiento, inmaterial** (como si fuese una entidad espiritual), diferente al momento (o "impulso"). La idea de fuerza es distinta a la idea del "choque" de Descartes. Puede haber otras entidades, las fuerzas, que sabemos que provocan el cambio de movimiento de los cuerpos. Por eso, la teoría de Newton no es mecanicista, pues el movimiento no se causa sólo por choques, sino también por fuerzas.

Similar a los principios del movimiento de Descartes, Newton describe sus **leyes del movimiento**:

Primera ley o ley de la inercia: Todo cuerpo permanecerá en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado por fuerzas externas a cambiar su estado.

Esta primera ley fue formulada casi de forma idéntica por Descartes y asumida por Galileo aunque entendida como movimiento circular uniforme. De nuevo se pone de manifiesto la negación del estado natural de reposo aristotélico.

Segunda ley o ley de la interacción y la fuerza: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz externa, y según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

- La fuerza de un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración que dicha fuerza imprime al cuerpo: $F = m \cdot a$
- De modo más ilustrativo, la aceleración que experimenta un cuerpo es la proporción entre la fuerza ejercida sobre un cuerpo y la masa de éste. $a = f/m$.

Tercera ley o ley de acción-reacción: Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria; las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentidos opuestos.

- $\vec{F}_{ac} = \vec{F}_{reac}$

Tras las definiciones y las leyes, Newton extrae una serie de 6 corolarios:

Corolarios I y II: Sobre la naturaleza vectorial de las fuerzas y como se pueden sumar mediante la **"regla del paralelogramo"**
Corolario III: demuestra la **ley de la conservación del movimiento**.
Corolario IV: trata sobre el **centro de gravedad de un sistema de masas**
Corolarios V y VI: tratan de los **sistema de referencia inerciales**, similares al principio de relatividad galileano

La estructura del libro se reparte del siguiente modo

Libro I: estudio del movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas y sin resistencia del medio

Se centra en el estudio de cuerpos con un movimiento ideal situado en el vacío, sin estar sometido a fuerzas ni resistencia del medio. Newton aplicará su teoría de las fuerzas para resolver los siguientes dos problemas

- Dada una fuerza, calcular qué movimientos produce.
- Dado un movimiento, calcular qué fuerza lo produce (qué forma matemática tiene la fuerza que lo produce).

En este libro deduce que las fuerzas centrales son proporcionales al $1/r^2$ y que provocan movimientos que siguen secciones cónicas (es decir, deduce las leyes de Kepler)

Libro II: estudio del movimiento de un cuerpo en un medio que ofrece resistencia

Afronta los mismos problemas que en el libro 1 pero incluyendo un medio y la posible resistencia que experimenta el cuerpo debida a éste.

Con estos estudios presenta un refutación de la teoría de vórtices cartesiana. Imaginará distintos tipos de fuerza de resistencia: una que dependa de la velocidad (a más velocidad, mayor resistencia); otra que sea el cuadrado de la velocidad; etc... A partir de ahí, irá trazando experimentos para ver cual de ellos puede ofrecer resistencia. Así, Newton tratará de refutar a Descartes mostrando que no hay ningún medio o fuerza de resistencia del medio que dé como resultado unos vórtices lo suficientemente parecidos al movimiento planetario.

Libro III ("El sistema del mundo"): Aplicación a la astronomía

- Generalización de la ley del inverso del cuadrado (de Huygens), lo que da lugar a la **ley de la gravitación universal**.

  $$\vec{F}_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{\vec{r}^2}$$

  Newton no lo expresó así en los *Principia*, ni pudo calcular el valor de G porque no conocía las masas del Sol o de la Tierra. Pero es la forma en la que se recoge tradicionalmente la idea de la gravitación universal
- Da explicación de por qué las leyes de Kepler no son totalmente exactas, mediante la consideración de las irregularidades de las órbitas.

Deducción de la segunda ley de Kepler

La segunda ley de Kepler nos decía que en el movimiento de un planeta que orbita alrededor del Sol, el radio-vector que describe su movimiento orbital, barre áreas iguales en tiempos iguales.

El problema con la expresión de Kepler es que únicamente se centra en el estudio cinemático del movimiento, es decir, en la descripción de éste sin atender a las causas que los producen. Newton sí que da cuenta de este carácter dinámico el introducir la fuerza de atracción gravitatoria que se da entre el Sol y el planeta orbitante.

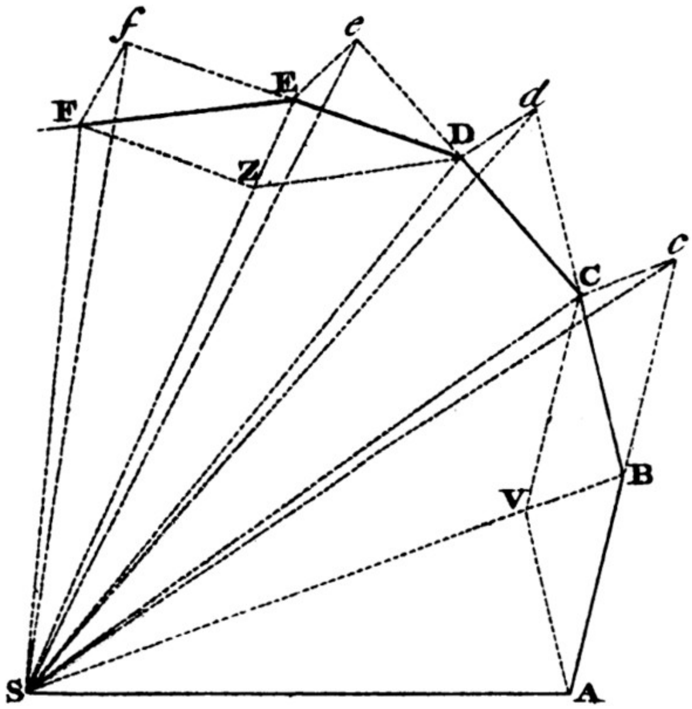


Imagen 81: Análisis de radio-vectores en órbita elíptica [88]

Sea un cuerpo orbitando en torno a S, con una fuerza que lo atrae hacia dicho centro de giro. En el punto A el cuerpo se mueve en la dirección $\overline{AB}$ con velocidad lineal constante, consecuencia de la inercia que presenta su movimiento (primera ley de Newton) hasta que, por acción de la fuerza centrípeta de atracción que tira de él hacia el Sol, cambia la dirección de su movimiento en B a la dirección $\overline{BC}$, comportándose de modo análogo para los momento representados por $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$,...

En los puntos en que modifica su dirección, el cuerpo tendrá una composición de movimientos: el inercial con el que ha llegado a dicho punto y el de atracción hacia S. Tales fuerzas se componen mediante la ley del paralelogramo, de modo que tendremos una fuerza resultante en una dirección que no corresponde (pongamos por ejemplo en el punto B) ni con la dirección $\overline{AB}$ de la fuerza inercial, ni con la dirección $\overline{BS}$ de la fuerza de atracción, sino que tendrá ahora una dirección $\overline{BC}$ sobre en la que dicha fuerza devendrá en una aceleración (segunda ley de Newton $F=m\cdot a$).

Estos intervalos que considera Newton no serían sino los fragmentos infinitesimales del mismo, donde estos "triángulos" que representan cada instante parcial del movimiento serían los infinitos instantes que, una vez sumados (integrados) representaría la trayectoria del cuerpo. Es decir, está haciendo uso de los conceptos geométricos del cálculo infinitesimal que ya había desarrollado

88 Imagen de *Isaac Newton* de sus *"Principia Mathematica"* (libro 1) (dominio público). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Principia_-_1729_-_Book_1,_Plate_2,_Figure_5.png

(que no publicado) en su teoría de las fluxiones. Dada su personalidad, el utilizar el engorroso modelo geométrico (en comparación con la sencillez del cálculo diferencial) podría deberse a su cerrazón a la hora de publicar sus avances, o bien como filtro para los lectores, donde *á la* Academia de Platón, nadie que no sepa geometría sería bienvenido a disfrutar y entender su obra.

Para dar cuenta de la segunda ley de Kepler, lo que hará Newton es demostrar que el área de triángulos sucesivos (donde cada nuevo punto en el que la fuerza le imprime una aceleración que le hace virar el rumbo) tienen todos el mismo área. Para ello hemos de fijarnos en dos triángulos sucesivos cualesquiera, y el punto al que habría llegado en caso de no darse este cambio de dirección por la fuerza de atracción hacia S. Sean por tanto los triángulos $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ y $\triangle SBc$:

- Dos triángulos que tienen la misma base y la misma altura, tienen el mismo área:
  - $\overline{AB} = \overline{Bc}$, por tanto, como $h_{\triangle SAB} = h_{\triangle SBc} \ \rightarrow \ A_{\triangle SAB} = A_{\triangle SBc}$
- Por su parte, el triángulo de la posición en caso de no haber atracción ($\triangle SBc$) y el que tenemos como consecuencia de la superposición de fuerzas ($\triangle SBC$) son también iguales, pues la composición de fuerzas siguiendo la ley del paralelogramo nos permite comprobar que las direcciones $\overline{SB}$ y $\overline{Cc}$ son paralelas:
  - Ambos triángulos comparten la base $\overline{SB}$
  - Al estar C y c sobre la misma paralela respecto a $\overline{SB}$, tienen la misma altura.
  - Por tanto: $A_{\triangle SBC} = A_{\triangle SBc}$
- Es decir: $A_{\triangle SAB} = A_{\triangle SBc} \ y \ A_{\triangle SBC} = A_{\triangle SBc}$
  - Por tanto, y como plantea la ley de Kepler: $A_{\triangle SAB} = A_{\triangle SBC}$

De este modo tenemos que todos los triángulos de la imagen tienen él mismo área, siempre que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- Que la fuerza siempre sea igual y en la misma dirección
- Que el tiempo que tarde el cuerpo en moverse de un punto a otro sea siempre el mismo.

Aunque únicamente haya identificado la fuerza de atracción, sin hablar en ningún momento de la gravedad ni de dar cuenta de su valor, lo que consigue Newton es integrar la ley de Kepler dentro de su modelo dinámico del movimiento, por lo que esta ley sería deducible a partir de las leyes de su sistema. Si en vez de considerar tiempos discretos, se piensa en tiempos infinitesimales, la trayectoria es una curva pero la **ley de la conservación de la velocidad areolar** sigue siendo válida.

Demostración de la caída de los graves de Galileo

Newton también demostrará la ley de caída de los graves de Galileo, según el tipo de problema planteado en los Principia de que *"dado un movimiento, calcular qué tipo de fuerza lo genera"*.

La ley de caída de los graves estudiada por Galileo planteaba que:

- Todos los cuerpos caen con movimiento uniformemente acelerado.
- La velocidad de caída aumenta proporcionalmente al tiempo transcurrido.
- Todos caen con la misma aceleración independientemente de la masa.

De la ley de la gravedad se siguen ambas cosas, pues nos dice que la Tierra atrae a un cuerpo x que esté cerca de la superficie terrestre con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que les separa

$$F_{tx}=G\frac{m_t m_x}{d^2}$$

Análogamente, otro cuerpo y se verá atraído por una fuerza

$$F_{ty}=G\frac{m_t m_y}{d^2}$$

Si se encuentran a la misma altura sobre la tierra, las distancias en ambas expresiones serían iguales, de modo que

$$\frac{F_{tx}}{F_{ty}}=\frac{m_x}{m_y} \rightarrow \frac{F_{tx}}{m_x}=\frac{F_{ty}}{m_y}$$

Dado que según la segunda ley de Newton, $F/m=a \rightarrow a_x=a_y$, la aceleración que imprime la Tierra sobre ambos cuerpos es la misma, independientemente de la masa que tenga cada uno

De este modo, la mecánica newtoniana de cuenta igualmente de la ley de caída de los graves que planteó Galileo.

Unificación de la física celeste y terrestre

Newton prueba que una fuerza atractiva entre cuerpos que dependa del cuadrado de su distancia y del producto de sus masas explica tanto las leyes de Kepler como las leyes de caída de los graves de Galileo (movimiento acelerado y parabólico). Si esa fuerza de la que hablamos no sólo tiene la dirección hacia el segundo cuerpo, sino que sigue la ley del inverso del cuadrado, entonces el movimiento que hará el segundo cuerpo alrededor del primero se comporta siguiendo la primera ley de Kepler, es decir, que los movimientos seguirán trayectorias elípticas.

Parte de la grandeza de la teoría newtoniana es la unificación de los dos fenómenos que habían sido estudiados de manera diferenciada (movimiento de astros y de graves), que no son sino dos casos que cumplen la ley de la gravedad. Por tanto, sólo es necesaria una física que explique el movimiento de los objetos, ya sean los astros o los objetos sobre la Tierra. Esta relación para con los fenómenos terrestres no la había considerado hasta que:

> *"comparé la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra y descubrí que se correspondían de manera bastante aproximada"*

Calculó la aceleración centrípeta de la Luna y comprobó que se correspondía con la esperada en la superficie considerando el cuadrado de la distancia.

Es decir, Kepler y Galileo habían sentado las bases del estudio cinemático del movimiento, al dar cuenta de la descripción de las trayectorias que sigue al relacionar la geometría de las mismas con las posiciones y velocidades de los cuerpos. Lo que hace Newton es introducir el estudio dinámico de tales movimientos, donde son las fuerzas las causantes de los cambios en las velocidades que afectan fundamentalmente a las trayectorias seguidas por los cuerpos.

Concluye así, tras muchas observaciones y mediciones, que había una fuerza central tanto en los planetas, los satélites y los objetos cotidianos que se atraía en función inversa del cuadrado de la distancia. Todos los cuerpos la generaban, al margen de su naturaleza, **solo dependía de la masa**.

Si bien Newton relaciona los movimientos con las fuerzas que intervienen, para el caso de la fuerza debida a la acción de la gravedad únicamente se limita a describir el modelo matemático que parece seguir dicha fuerza, pero en ningún momento da explicación alguna sobre la naturaleza de dicha fuerza. Esto le causó numerosas críticas, en particular por parte de los partidarios de la mecánica cartesiana, ante lo que Newton respondía con su conocida frase de *“hypotheses non fingo”* (no invento hipótesis).

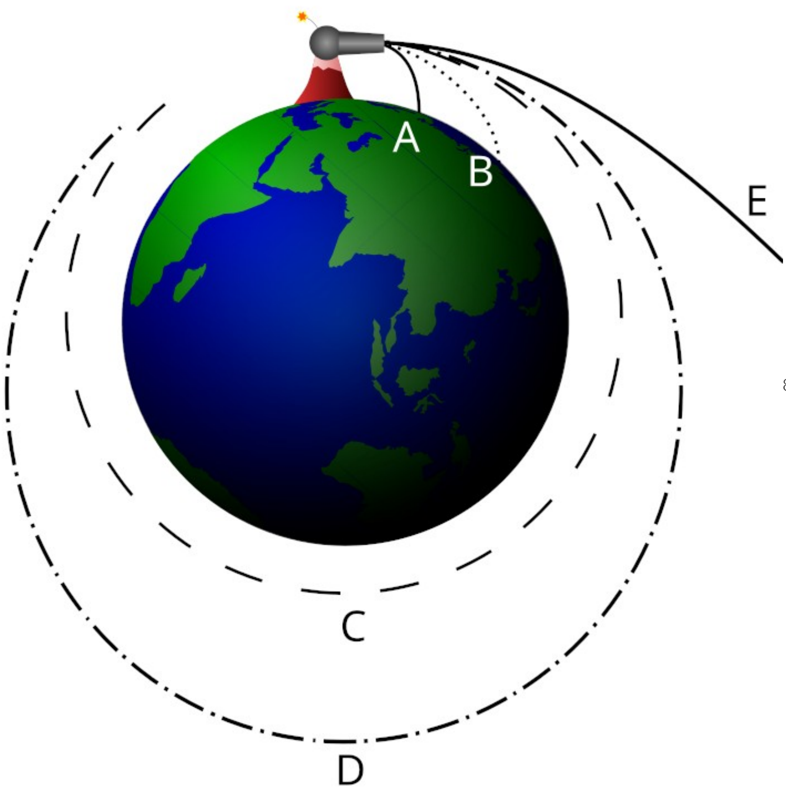
No se trata sólo de que Newton deduzca las leyes de Kepler y Galileo a partir de la ley de la gravedad, sino que también deduce la ley de la gravedad a partir de aquellas leyes (como plantea en el Libro 1 de los *Principia*, está el problema de calcular los movimientos producidos por unas fuerzas dadas, como también el problema de identificar la fuerza causante de un movimiento dado). Aunque no exactamente, podemos decir que, si se cumple la ley de Kepler, se tiene que cumplir la ley de la gravedad, y se cumple la ley de la gravedad, se tienen que cumplir las leyes de Kepler.

Para poder afirmar esto necesita introducir dos hipótesis que no se siguen de las leyes de Kepler:

- La segunda ley de Newton, que da cuenta del movimiento de los cuerpos que obedecen la relación de $F = m \cdot a$
- Los cuerpos se mueven siguiendo las leyes de Kepler.

Las manzanas que caen

Cualquier cuerpo que cae será atraído con la misma aceleración y por tanto el cambio de velocidad solo dependerá de la velocidad inicial y del tiempo. Además, el espacio aumenta al cuadrado. Entonces, ¿por qué una manzana cae del árbol al suelo y la Luna orbita sin caer? Esto era un problema sin solución, y que una vez que Newton se la plantea a la luz de su teoría concluye que la Luna está cayendo continuamente hacia la Tierra, sin embargo, dada la composición de velocidades entre la inercia que lleva la Luna y la atracción ejercida por la Tierra, esta es tal que permite a la Luna mantenerse en su órbita terrestre, describiendo una elipse poco excéntrica.



[89]

Imagen 82: Diferentes trayectorias según velocidad inicial

89 Imagen de *Brian Brondel* (CC BY-SA 4.0) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_Cannon.svg

Newton emplea un hipotético cañón situado sobre una montaña para dar cuenta de este fenómeno. Si desde lo alto de una montaña lo disparamos en dirección horizontal, según la velocidad inicial de propulsión de la bala, ésta trazará una trayectoria cónica diferente:

- A baja velocidad el cuerpo describirá una trayectoria parabólica hasta caer en la superficie. Cuanto mayor sea esa velocidad inicial, más distante será el punto de caída. Casos A y B.
- Para mayores velocidades, podemos tener el caso de que la velocidad sea tal que el cuerpo alcance el punto de partida. En función de la altura de lanzamiento y la inclinación del mismo, se conseguiría poner el cuerpo en órbita, es decir, una trayectoria elíptica o circular cerradas donde la relación entre la inercia del cuerpo y la atracción que ejerce la Tierra sobre él se mantengan de tal forma que el cuerpo esté cayendo de manera continua (pero sin llegar a caer). Casos C y D.
- Para velocidades aún mayores, se consigue enviar el cuerpo fuera de la órbita terrestre y, por tanto, alejarlos de su acción gravitatoria, con lo que el cuerpo pasaría a viajar por el espacio sometido a la acción gravitatoria del resto de astros, en particular el Sol, y según se acerque a ellos, los respectivos planetas. Caso E. La velocidad mínima necesaria para conseguir tal resultado se conoce como **velocidad de escape**. (para el caso de la Tierra se tiene que $v_{esc}=11.2\,km/s=40320\,km/h$)

Lo que ocurre con la Luna correspondería con un caso análogo al C o D, donde ésta cae con tal aceleración y velocidad hacia la Tierra que le hace dar una vuelta y acabar con el mismo sitio. Si algo parase a la Luna, entonces caería sólo hacia abajo. De ahí que su movimiento sea una continua parábola hasta constituir una elipse. La Luna, por tanto, es un móvil en caída libre. Conocida esa fuerza, podremos calcular a qué velocidad cae la Luna. Lo que hace Newton es descomponer, como hiciera Galileo, la componente inercial y la componente vertical de caída libre, siendo la composición de ambos la que describe la trayectoria elíptica (como veíamos en el ejemplo de la segunda ley de Kepler).

Algunas consecuencias del modelo de Newton

Newton considera demostrada la existencia de la fuerza de gravedad y sus propiedades, pero no tiene ninguna explicación demostrable sobre por qué existe dicha fuerza y por qué es como es. Es decir, puede "traducir" matemáticamente estas fuerzas, pero no ir a por las causas últimas: *"hypotheses non fingo"* ("no me invento hipótesis"). Con el modelo de Newton no podremos obtener el motivo por el cual unos cuerpos se atraen con otros, sino sólo describirlos. Desde Newton, la ciencia se ha preocupado más por describir que por dar explicaciones últimas:

- El conocimiento científico se limita a lo que podemos demostrar empíricamente y deducir matemáticamente a partir de ahí.
- La ciencia sólo puede hacer "hipótesis" en el sentido de generalizaciones (Ley de Gravedad universal) o conjeturas contrastables.
- Los experimentos y observaciones tienen la última palabra.

Si bien, estos puntos sólo son netamente ciertos para las ciencias duras como la física, casi cierto para la química, pero no es válido para otras ciencias como las biológicas, geológicas o sociales. En esas ciencias, aunque hay generalizaciones de tipo ley, por lo general se dan las explicaciones sistémicas o funcionales, pero eso es otra historia. Y aún así, sabemos que las leyes de Newton no son del todo válidas, habiendo quedado reducidas a un caso límite de la teoría de la relatividad general de Einstein. La ciencia evoluciona a lo largo de su historia.

Preguntas examen

MATEMÁTICA GRIEGA

Sobre el modelo de conocimiento matemático en la Grecia Clásica

¿Cuál fue la época de mayor producción de resultados matemáticos en la Antigua Grecia?

- Siglo I-II dC
- Siglo III-IV dC
- Siglos VI-V aC
- **Siglos IV-III a.C.**

¿Cuál de estos pensadores griegos NO es conocido por sus trabajos sobre matemáticas?

- Tales de Mileto.
- Hipatia de Alejandría.
- Arquímedes de Siracusa.
- **Heráclito de Éfeso**

¿Cuál de estos elementos del saber matemático diferencia la matemática griega de la de civilizaciones anteriores?

- **La idea de demostración con validez universal.**
- El tratamiento de problemas aritméticos.
- El uso de figuras.
- La aplicabilidad a los problemas prácticos.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **La matemática fue una invención genuinamente griega; antes de la civilización griega no existía nada parecido a la matemática.**
- La matemática, en su origen, consistió principalmente en el estudio de las operaciones de contar, medir y calcular.
- Los griegos desarrollaron la noción de demostración matemática de validez universal.
- El primer matemático griego conocido fue Tales de Mileto.

¿Cuál de las siguientes NO ES una de las principales diferencias entre la matemática griega y la de las culturas anteriores (Mesopotamia, Egipto, China...)?

- **La matemática griega era puramente teórica, no buscaban en absoluto la aplicación práctica.**
- La matemática griega introduce la noción de demostración.
- En las matemáticas anteriores se ofrecen resultados concretos, pero no universales.
- La matemática griega utiliza símbolos para indicar cantidades abstractas.

¿En qué sentido la matemática constituye un paradigma del tipo de conocimiento que los griegos buscaban mediante la filosofía?

- Porque no podía recibir una interpretación religiosa o mística.
- **Porque era un conocimiento susceptible de ser demostrado mediante argumentos racionales.**
- Porque podía recibir una interpretación religiosa o mística.
- Porque no tenía aplicación práctica.

¿Por qué es importante la imaginación en las demostraciones matemáticas?

- Porque las demostraciones matemáticas requieren el uso de diagramas.
- Porque las verdades matemáticas las aplicamos a objetos sensibles.
- **Porque a menudo esas demostraciones requieren añadir a las figuras elementos que no están en ellas originalmente.**
- Porque las verdades matemáticas las captamos con la razón, no con los sentidos.

En una demostración por reducción al absurdo.

- no se utilizan los axiomas, sino que se parte de una suposición
- comenzamos suponiendo que se da una contradicción
- se demuestra que la tesis que queremos probar conduce a una contradicción
- **todas las otras respuestas son falsas**

En una demostración por reducción al absurdo...

- **se demuestra que la negación de la tesis que queremos probar conduce a una contradicción.**
- no se utilizan los axiomas, sino que se parte de una suposición.
- comenzamos suponiendo que se da una contradicción.
- todas las otras respuestas son falsas.

En una demostración por reducción al absurdo.

- Se parte de una suposición que pensamos que será verdadera
- **Se parte de una suposición que pensamos que será falsa**
- Se parte de la hipótesis de que se da una contradicción
- Todas las otras respuestas son falsas

En una demostración por reducción al absurdo...

- No se utilizan hipótesis.
- **Se parte de la suposición contraria a la que se va a demostrar.**
- Se parte de la hipótesis de que se da una contradicción
- Se parte de la proposición que queremos demostrar

¿Cuál de estos teoremas fue demostrado por reducción al absurdo?

- Que la cantidad de números primos es finita.
- **Ninguno de los otros tres**
- La sección áurea
- El teorema de Pitágoras

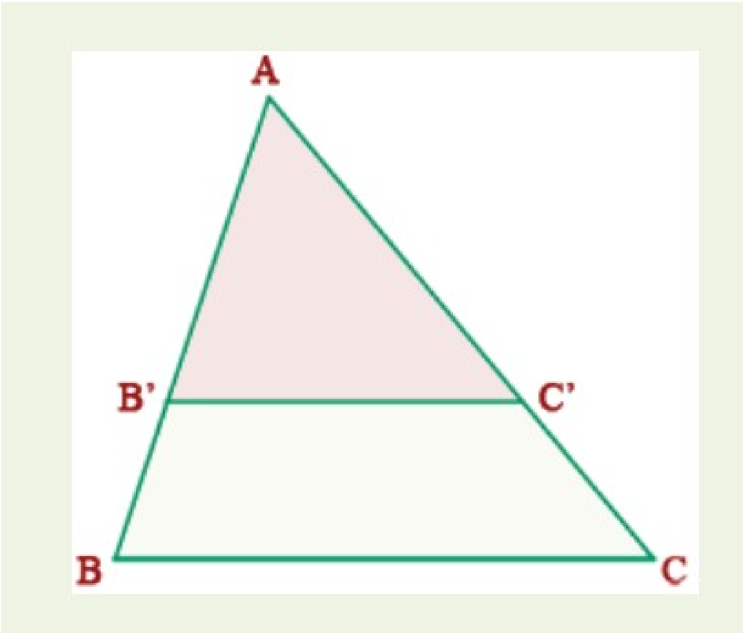
Tales

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- **El primer teorema de Tales se aplica a cualquier tipo de triángulos.**
- El primer teorema de Tales solo se aplica a triángulos equiláteros.
- El primer teorema de Tales solo se aplica a triángulos isósceles.
- El primer teorema de Tales solo se aplica a triángulos rectángulos.

El primer teorema de Tales...

- afirma que los ángulos de un triángulo siempre suman 180°.
- **trata sobre la semejanza de los triángulos.**
- afirma que un triángulo contenido en una circunferencia siempre es rectángulo.
- afirma que en todo triángulo la altura es proporcional a la base.



¿Cuál de los siguientes enunciados NO es una consecuencia del primer teorema de Tales, que indica que los triángulos ABC y AB'C' son semejantes?

- **El ángulo ABC es igual al ángulo ACB.**
- El ángulo ABC es igual al ángulo AB'C'
- El ángulo ACB es igual al ángulo AC'B'
- AB'/B'B = AC'/C'C

¿Cuál de los siguientes enunciados es una consecuencia del primer teorema de Tales, que indica que los triángulos ABC y AB'C' son semejantes? (ver imagen pregunta anterior)

- El ángulo ABC es igual al ángulo ACB.
- C/B = C'/B'
- **El ángulo ABC es igual al ángulo AB'C'**
- El ángulo ACB es igual al ángulo AC'B

Según el primer teorema de Tales...

- todo triángulo inscrito en un círculo, y uno de cuyos lados es igual a un diámetro del círculo, es rectángulo.
- se puede medir la altura de una pirámide, suponiendo que esa altura es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
- **se puede saber si dos triángulos son semejantes entre sí, sabiendo que comparten un ángulo, y que las bases opuestas a dicho ángulo son paralelas.**
- en todos los triángulos rectángulos en los que un cateto es la base, y el otro es la altura, la proporción entre los dos catetos es igual.

Señale la respuesta CORRECTA. Según el primer teorema de Tales, cuando un triángulo es cortado por una línea paralela a una de sus bases, el triángulo que se forma en el interior cumple la propiedad siguiente...

- la superficie del nuevo triángulo es menor a la del triángulo original.
- las proporciones entre sus lados son iguales a las proporciones entre los lados correspondientes del triángulo original.
- sus ángulos son iguales a los del triángulo original.
- **Marque esta respuesta si cree que todas las anteriores son correctas.**

Señale la respuesta INCORRECTA. Según el primer teorema de Tales, cuando un triángulo es cortado por una línea paralela a una de sus bases, el triángulo que se forma en el interior cumple la propiedad siguiente:

- Las proporciones entre sus lados son iguales a las proporciones entre los lados correspondientes del triángulo original
- Sus ángulos son iguales a los del triángulo original
- **La superficie del nuevo triángulo es igual a la del triángulo original**
- Las proporciones entre sus ángulos son iguales a las proporciones entre los lados correspondientes del triángulo original

Para medir la altura de la Gran Pirámide, utilizando su "Primer Teorema", Tales tuvo que medir y comparar, en sendos triángulos definidos por la sombra de la pirámide y la de un poste a la misma hora...

- **algunos lados de ambos triángulos.**
- algunos ángulos de ambos triángulos.
- tanto los lados como los ángulos de ambos triángulos.
- ninguna de las anteriores.

El segundo teorema de Tales...

- afirma que el triángulo formado por el diámetro de un círculo y las dos rectas que unen sus extremos con cualquier otro punto de la circunferencia es un triángulo equilátero.
- no es en realidad un teorema, sino un axioma.
- afirma que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo, elevados al cuadrado, es igual al cuadrado de la hipotenusa.
- **afirma que el triángulo formado por el diámetro de un círculo y las dos rectas que unen sus extremos con cualquier otro punto de la circunferencia es un triángulo rectángulo.**

El segundo teorema de Tales...

- **Permite construir con regla y compás un ángulo recto**
- Lo empleó Tales para medir la altura de la pirámide de Keops
- Afirma que cualquier triángulo inscrito en un círculo tiene necesariamente un ángulo recto.
- Es uno de los axiomas de los "Elementos" de Euclides

El segundo teorema de Tales...

- Lo empleó Tales para medir la altura de la pirámide de Keops
- **Se demuestra utilizando las propiedades de los triángulos semejantes.**
- Implica que si la base de un rectángulo inscrito en un círculo es igual al diámetro de dicho círculo, la altura de ese triángulo es necesariamente igual al radio del círculo
- Es uno de los axiomas de los "Elementos" de Euclides

¿Cuál de estas propiedades NO ES una de las características de las demostraciones matemáticas que pueden reconocerse en la prueba del segundo teorema de Tales?

- Su demostración se basa en resultados obtenidos previamente.
- Es un resultado general, válido sin excepción para todas las circunferencias y para todos los triángulos construidos según indica el enunciado del teorema.
- **Es una demostración por reducción al absurdo.**
- Exige añadir elementos imaginarios al diagrama.

Pitagóricos y el teorema

Los babilonios ya sabían que había algunos triángulos rectángulos en los que el cuadrado de la hipotenusa era igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Entonces, ¿cuál de las tres siguientes frases NO indica una aportación de los matemáticos griegos en relación al Teorema de Pitágoras?

- Afirmar que la igualdad era válida para cualquier triángulo rectángulo.
- **Afirmar que la igualdad era válida universalmente para cualquier triángulo, ya fuese rectángulo o no.**
- Ofrecer una demostración abstracta, no limitada a figuras concretas.
- Todas las anteriores son contribuciones de los matemáticos griegos.

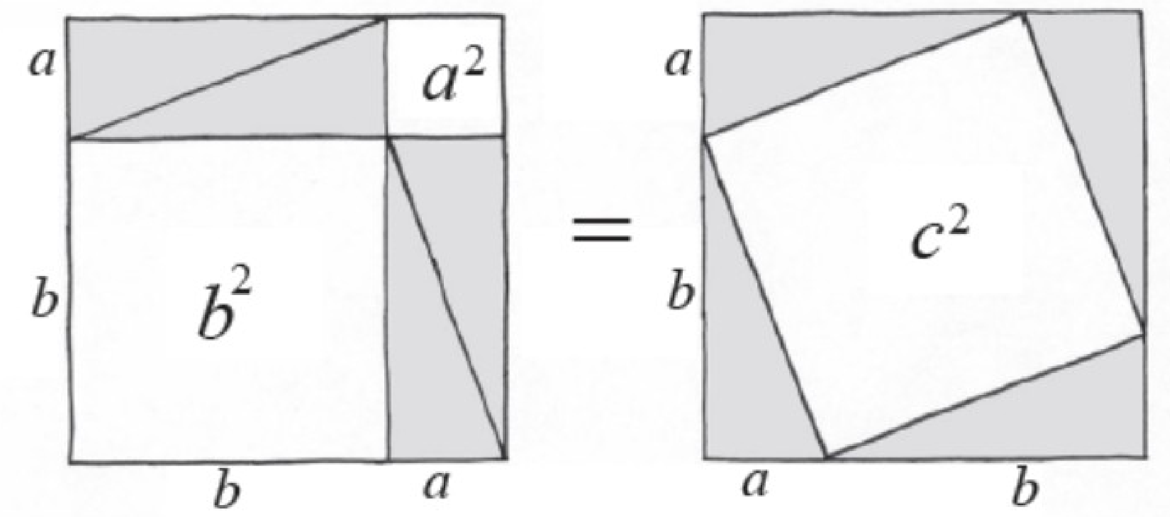
¿Cuál de estas afirmaciones es falsa?

- Los egipcios y babilonios conocían varias ternas de números que satisfacían el teorema de Pitágoras, y que, por lo tanto, permitían construir triángulos rectángulos
- **El teorema de Pitágoras se recoge en los Elementos de Euclides como uno de los cinco axiomas del Libro Primero.**
- Es probable que Pitágoras no fuese quien demostró el teorema que lleva su nombre, sino alguno de sus seguidores.
- El teorema de Pitágoras puede ser demostrado de múltiples maneras.

¿Cuál de estas afirmaciones es falsa?

- Los egipcios y babilonios conocían varias ternas de números que satisfacían el teorema de Pitágoras, y que, por lo tanto, permitían construir triángulos rectángulos
- El primer teorema de Tales es uno de los cinco postulados de los Elementos de Euclides
- Es probable que Pitágoras no fuese quien demostró el teorema que lleva su nombre, sino alguno de sus seguidores.
- El teorema de Pitágoras puede ser demostrado de múltiples maneras.

¿Cuál de los siguientes enunciados sobre la prueba del teorema de Pitágoras basada en este diagrama es verdadero?



- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- **Las áreas sombreadas tienen la misma superficie en ambos cuadrados,**
- $(a+b)^2 = c^2$
- Esta prueba aparece en los Elementos de Euclides.

¿Cuál de los siguientes enunciados sobre la prueba del teorema de Pitágoras basada en este diagrama (imagen de pregunta anterior) es verdadero?

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- **En cada uno de los dos cuadrados grandes, el área sombreada de gris tiene una superficie igual a la del otro cuadrado.**
- El área gris de cada cuadrado es igual a $a^2 + b^2$
- El área gris de cada cuadrado es igual a c^2

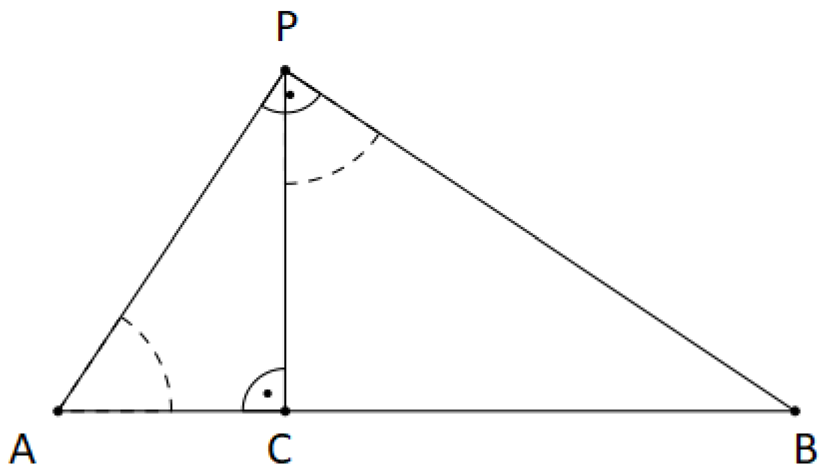
¿Cuál de estos enunciados es verdadero?

- Para todo triángulo de lados a, b y c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$
- En un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa, comparada con la de cualquiera de los catetos, es siempre un número irracional
- **Para todo triángulo rectángulo la hipotenusa es siempre mayor que cualquiera de los catetos.**
- Un triángulo isósceles no puede ser rectángulo

Según el teorema de Pitágoras...

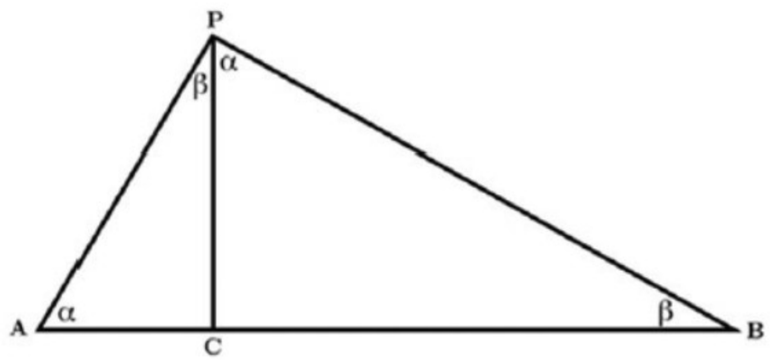
- la longitud de la hipotenusa, comparada con la de cualquiera de los catetos, es siempre un número irracional
- para todo a, b y c, $a^2 + b^2 = c^2$, siempre que a, b y c sean los lados de un triángulo
- **Todas las otras respuestas son falsas**
- la hipotenusa es siempre más larga que cada uno de los catetos.

¿Cuál de estos hechos NO se utiliza en la demostración del teorema de Pitágoras basada en la semejanza de triángulos?



- Que AC es a AP como BP es a AB
- Que el triángulo ABP es semejante al triángulo CPB
- Que AP es a AC como AB es a AP
- Que BP^2 es igual a AB por CB.

En el triángulo representado en la imagen, y que se utiliza para demostrar el teorema de Pitágoras, ¿por qué son iguales los dos ángulos llamados alfa?



- No tienen por qué ser iguales.
- Porque los dos ángulos pertenecen al mismo triángulo.
- Porque ambos ángulos son rectos.
- **Porque el triángulo APC es semejante al triángulo PBC.**

Números irracionales

La demostración pitagórica de que la raíz cuadrada de dos es irracional…

- es una demostración geométrica
- ya era conocida por los egipcios
- **es una demostración por reducción al absurdo**
- todas las anteriores son correctas

En la demostración de que raíz cuadrada de 2 es irracional, empezamos suponiendo que raíz cuadrada de 2 = n/m para dos números n y m que no tienen ningún factor común entre ellos. ¿Qué quiere decir esto último?

- **Que n y m no tienen ningún divisor en común (p.ej., no puede ocurrir que n=3p y m=4p, siendo p un número natural).**
- Que n y m no pueden ser pares los dos.
- Que n y m no son múltiplos el uno del otro (p.ej., no puede ocurrir que n = pm, siendo p un número natural).
- Que n y m no pueden ser uno de ellos el cuadrado del otro.

¿Cuál de estos enunciados NO ES un paso de la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional?

- Si $n^2 = 2m^2$, por lo tanto, n es par.
- Si n es par, habrá un número natural, p, tal que n = 2p.
- Suponemos que existen dos números naturales n y m, tales que $\sqrt{2} = n/m$.
- **Si de n y m se eliminan los factores comunes, entonces n es un número irracional.**
  - Un número es IRRACIONAL, precisamente porque no puede expresarse como la razón entre dos números n y m
  - En otro examen aparece como posible opción de respuesta: **Señale esta respuesta si cree que todos los enunciados anteriores forman parte de la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional.**

¿Cuál de estas afirmaciones es INCORRECTA?

- Hubo obras sobre geometría llamadas “Elementos” antes de Euclides.
- En el siglo IV a. C ya se compuso una “Historia de las matemáticas”.
- Apolonio es conocido sobre todo por el estudio sobre las cónicas.
- **Los pitagóricos demostraron que no pueden existir números irracionales.**

Inconmensurabilidad

Que un número sea irracional es equivalente a que…

- la solución de su fracción es un número negativo
- **no puede ser expresado mediante una fracción entre números naturales.**
- su descubridor será condenado a muerte.
- puede ser expresado mediante más de una fracción entre números naturales.
- sólo puede ser expresado mediante una determinada fracción de números naturales.

Que dos magnitudes A y B sean incomensurables entre sí quiere decir que...

- que una de ellas es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y la otra el cateto.
- **que no existen dos números naturales N y M tales que la proporción entre A y B sea igual a la proporción entre N y M.**
- todas las anteriores son equivalentes.
- que, si existen dos números naturales N y M tales que la proporción entre A y B es igual a la proporción entre N y M, entonces N y M no pueden ser pares los dos.

¿Cuál de estas afirmaciones es FALSA?

- Los términos "elipse", "parábola" e "hipérbola" se deben a Apolonio.
- Arquímedes es conocido tanto por sus trabajos en matemática pura, como en mecánica.
- La primera "Historia de las matemáticas" cuya existencia nos consta fue escrita en el siglo IV a.e.c.
- **Los pitagóricos demostraron, mediante reducción al absurdo, que no pueden existir magnitudes mutuamente inconmensurables.**

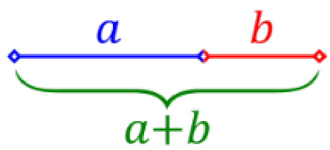
¿Cuál de estas afirmaciones es FALSA?

- La primera "Historia de las matemáticas" cuya existencia nos consta fue escrita en el siglo IV aC
- Los pitagóricos demostraron, mediante reducción al absurdo, que pueden existir magnitudes mutuamente inconmensurables.
- **Arquímedes midió la distancia de la tierra a la luna mediante los eclipses.**
- Los términos "elipse", "parábola" e "hipérbola" se deben a Apolonio.

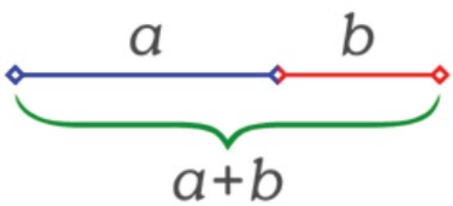
Sección áurea

Sobre la sección áurea →

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803398875$$



¿Cuál de estas condiciones tiene que darse para que el segmento AB esté dividido "en extrema y media razón"? Responda que "los otros tres enunciados son equivalentes" si piensa que lo son.



- Que A sea a B como A es a A+B
- Los otros tres enunciados son equivalentes.
- **Que B sea a A como A es a A+B**
- Que B sea a A+B como A+B es a A

¿Cuál de estos enunciados corresponde a la definición de la "sección áurea"?

- Dividir un segmento AC en dos subsegmentos, AB y BC, de tal forma que BC/AB = AB/BC
- **Dividir un segmento en dos subsegmentos, de tal forma que la proporción entre el subsegmento mayor y el menor sea igual a la proporción entre el segmento original y el subsegmento mayor**
- Dividir un segmento en dos subsegmentos, de tal forma que la proporción entre el segmento original y cada uno de los dos subsegmentos sea igual a la proporción entre ambos subsegmentos
- Todas los otros enunciados son equivalentes entre sí

¿Cuál de estas definiciones de la sección áurea es correcta?

- **Un segmento AB está dividido según la sección áurea por el punto C, si AC/AB es igual a CB/AC**
- Un segmento AB está dividido según la sección áurea por el punto C, si AC=CB
- Un segmento AB está dividido según la sección áurea por el punto C, si AC/AB es igual a CA/BA.
- Marque esta respuesta si cree que las tres respuestas anteriores son correctas.

Sea un segmento rectilíneo AB (o sea, cuyos extremos son los puntos A y B) dividido por un punto C, tal que el segmento AC es mayor que el segmento BC. ¿Cuál de estas definiciones de la sección áurea es correcta?

- C divide al segmento AB según la sección áurea, si CB/AB = AB/AC
- C divide al segmento AB según la sección áurea, si AC=CB
- **C divide al segmento AB según la sección áurea, si AC/CB = AB/AC**
- Marque esta respuesta si cree que las tres respuestas anteriores son correctas.

Los tres grandes problemas

¿Cuál de estos NO forma parte de los llamados "tres grandes problemas" de la matemática griega?

- Construir un cubo cuyo volumen sea el doble que el de un cubo dado.
- **La demostración geométrica del teorema de Pitágoras.**
- Construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado.
- Dividir un ángulo dado en tres ángulos iguales.

¿Qué quiere decir la expresión "cuadratura del círculo"?

- Construir con regla y compás un círculo cuya superficie sea el cuadrado de la de un círculo dado.
- Construir con regla y compás un cuadrado cuyo lado mida igual que el diámetro de un círculo dado.
- Construir con regla y compás un círculo cuya circunferencia sea igual a la superficie de un cuadrado dado.
- **Construir con regla y compás un cuadrado de la misma superficie que un círculo dado.**

El problema conocido como "cuadratura del círculo"...

- es uno de los principios en los que se basa la cosmología geométrica de Platón.
- **exigía que su demostración utilizara únicamente regla y compás.**
- los pitagóricos demostraron que no tenía solución, pero condenaron a muerte a quien lo hiciera público.
- no fue resuelto hasta que Euclides demostró cómo utilizar proporciones entre números irracionales

¿Qué quiere decir la expresión "trisección del ángulo"?

- Dividir con regla y compás en tres partes iguales un triángulo dado.
- **Dividir con regla y compás en tres partes iguales un ángulo dado.**
- Construir con regla y compás un ángulo que sea el triple de un ángulo dado.
- Construir con regla y compás un triángulo cuya superficie sea el triple que la de un triángulo dado.

Otros desarrollos matemáticos

¿Cuál de estos métodos de la matemática griega es un precedente del cálculo infinitesimal e integral de Newton y Leibniz?

- **El método de exhaución de Eudoxo.**
- El estudio de las cónicas (parábola, hipérbola, etc.) por parte de Apolonio.
- El estudio por parte de Arquímedes sobre los centros de gravedad.
- La demostración euclidiana de que existen infinitos números primos.

¿En qué consiste el "método de exhaución"?

- **En aproximar una figura curva mediante polígonos o con un número cada vez mayor de lados.**
- En desarrollar la cuadratura del círculo.
- En calcular el volumen de una figura, y no solo su superficie.
- En usar el método de reducción al absurdo un número infinito de veces.

Las matemáticas de Platón y Aristóteles

¿Cuál de estos enunciados sobre Platón es FALSO?

- La importancia que dio a la matemática en su filosofía ayudó a formar en torno a la Academia la principal escuela de investigación matemática de su tiempo.
- **Estableció en sus obras el esquema de conocimiento demostrativo conocido como "método axiomático", que posteriormente se ejemplificó en los Elementos de Euclides.**
- Las propiedades de las "Ideas" en su metafísica (universalidad, atemporalidad, objetividad...) están inspiradas por las propiedades de las entidades matemáticas (figuras geométricas, números...).
- Todas las anteriores son verdaderas.

Euclides, los Elementos, y sus infinitas vidas

¿Cuál de estas cuatro respuestas contiene únicamente los nombres de matemáticos cuyos trabajos puede que estén recogidos en los "Elementos" de Euclides?

- Euclides, Menecmo y Eratóstenes.
- Apolonio, Hipócrates de Quíos y Diofanto de Alejandría.
- **Teeteto, Eudoxo e Hipócrates de Quíos.**
- Pitágoras, Tales de Mileto y Arquímedes.

¿Cuál de estas cuatro respuestas contiene únicamente los nombres de matemáticos cuyos trabajos puede que estén recogidos en los "Elementos" de Euclides?

- Euclides, Menecmo y Eratóstenes.
- Apolonio, Hipócrates de Quíos e Hipatia de Alejandría.
- **Hípaso de Metaponto, Eudoxo e Hipócrates de Quíos**
- Pitágoras, Tales de Mileto y Arquímedes.

¿Cuál de estos temas no se incluye en los Elementos de Euclides?

- Aritmética.
- **Cónicas.**
- Proporciones.
- Figuras sólidas.

¿Cuál de estos temas NO se incluye en los Elementos de Euclides?

- Aritmética.
- Álgebra geométrica.
- Proporciones.
- Todas las respuestas anteriores son falsas (es decir, es falso que no se incluyan)

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- Euclides divide en "definiciones", "nociones comunes" y "teoremas" los principios a partir de los cuales elabora sus demostraciones.
- **Euclides divide en "definiciones", "nociones comunes" y "postulados" (o sea, "axiomas") los principios a partir de los cuales elabora sus demostraciones.**
- Euclides divide en "postulados", "nociones comunes" y "axiomas" los principios a partir de los cuales elabora sus demostraciones.
- Euclides divide en "figuras", "líneas" y "puntos" los principios a partir de los cuales elabora sus demostraciones.

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- Los Elementos de Euclides contienen el primer estudio de las cónicas.
- **Solo el libro I de los Elementos de Euclides contiene axiomas.**
- El método axiomático introducido por Euclides en los Elementos sirvió de inspiración al modelo de demostración científica de Aristóteles.
- En los Elementos de Euclides, todas las pruebas deben hacerse con regla y compás, y por tanto no contiene demostraciones por reducción al absurdo.

¿Cuál de las siguientes es una característica esencial del método axiomático de Euclides?

- Los axiomas deben inferirse de las definiciones y de las nociones comunes.
- Los axiomas o postulados son autoevidentes, mientras que los teoremas no deben serlo.
- **Cada paso de una demostración debe indicar qué resultado previo se está aplicando.**
- En la demostración de un teorema no pueden usarse otros teoremas, sólo los axiomas, definiciones y nociones comunes.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

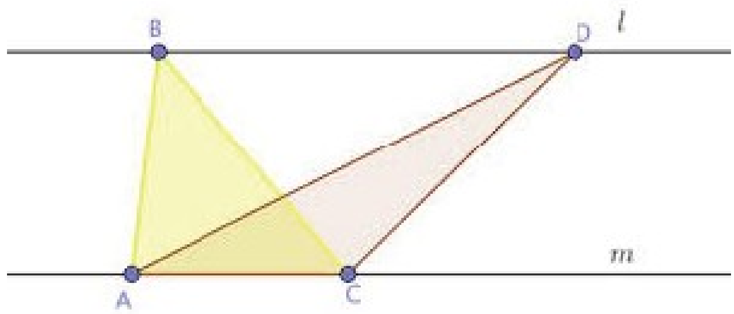
- El método axiomático de los Elementos de Euclides se inspira en el modelo de demostración científica de Aristóteles.
- Las entidades matemáticas eran muy importantes en la cosmología de Platón
- En la Academia de Platón trabajaron varios matemáticos
- **La física y la cosmología de Aristóteles se basaban en demostraciones matemáticas.**

¿Cuál de las siguientes proposiciones NO es uno de los axiomas o postulados de los Elementos de Euclides?

- **Tres puntos dados definen un triángulo.**
- Si una recta corta a otras dos, y estas forman ángulos en un lado de la primera menores que dos ángulos rectos, las dos rectas se cortarán si se prolongan por ese lado ("axioma de las paralelas").
- Tomando un punto como centro, se puede trazar un círculo que pase por otro punto.
- Un segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente

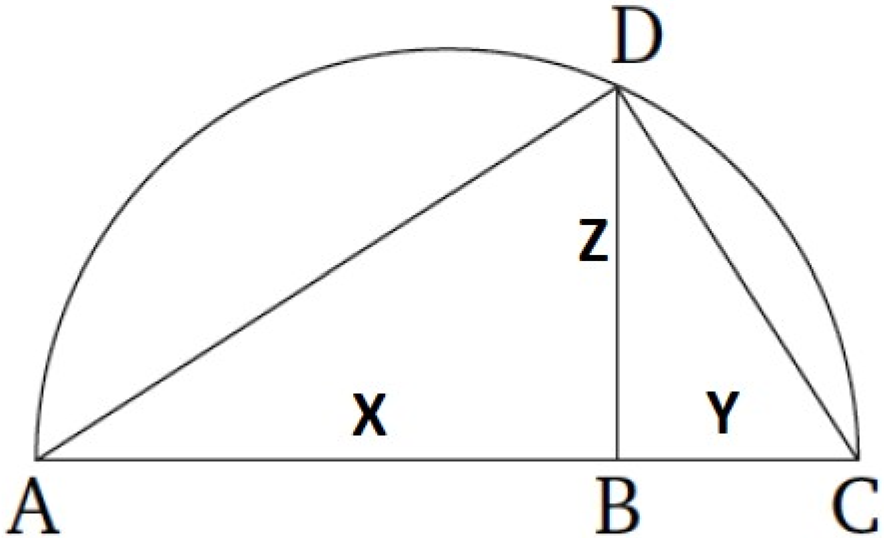
El principio geométrico representado en la imagen es utilizado en la demostración que ofrece Euclides del Teorema de Pitágoras. ¿Qué afirma dicho principio?

Si cree que las tres primeras respuestas son equivalentes, responda la nº 4.



- **Que si dos triángulos comparten una base, y su tercer vértice está sobre una misma recta paralela a esa base, entonces los dos tienen la misma área.**
- Que si AB es a BC como AD es a DC, entonces las rectas L y M son necesariamente paralelas
- Que AB es a BC como AD es a DC, y por tanto el ángulo ABC es igual al ángulo ACD.
- Los otros tres enunciados son equivalentes.

En la proposición VI.13 de los Elementos, Euclides utiliza la noción de "media proporcional" para proporcionar un método geométrico de cálculo de una raíz cuadrada, según la imagen adjunta. ¿De que ´número es la raíz cuadrada que se puede calcular con este método?



- AC (= AB + BC)
- AD por CD
- BD
- AB por BC

¿Qué afirma la proposición IX.20 de los Elementos?

- Que por dos puntos siempre pasa una recta.
- Que todo triángulo equilátero posee al menos un ángulo recto.
- Que no puede haber una cantidad limitada de números primos.
- Que en cualquier triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados es igual al cuadrado del tercer lado.

¿Cuál de estos teoremas fue demostrado por reducción al absurdo?

- El teorema de Pitágoras.
- La sección áurea.
- La duplicación del cubo.
- La existencia de infinitos números primos.

Según el teorema de Euclides sobre cuántos números primos existen...

- Todas las otras respuestas son falsas.
- Si suponemos que N es el número primo más alto de todos, entonces podemos llegar a la conclusión de que hay algún número primo menor que N, lo que conduce a una contradicción.
- Si suponemos que hay una cantidad ilimitada de números primos, llegamos a una contradicción.
- Si suponemos que hay una cantidad limitada de números primos, y que N es el número primo más grande de todos, llegaremos a la conclusión de que hay algún número primo mayor que N

El "teorema de Euclides" (que afirma que existen infinitos números primos) se demuestra en los Elementos por "reducción al absurdo". ¿Cuál es la contradicción a la que llega Euclides a partir de la hipótesis de que existiera solo una cantidad finita de números primos?

- El mayor número primo (C) tendría que ser a la vez divisible entre 2 y no divisible entre 2.
- **Si solo hay una cantidad finita de números primos, el resultado de sumar 1 al producto de todos ellos, o bien es primo (por tanto, hay un número primo mayor que C), o bien no lo es (pero entonces debe ser divisible por un número primo mayor que C, pues si se divide por C o por algún número primo menor que C, queda como resto 1). En cualquiera de los dos casos, habría un número primo mayor que C, al contrario de lo que hemos supuesto.**
- Si existiera una cantidad infinita de números primos, el mayor de todos ellos sería un número infinito; pero cualquier número natural es finito, y por lo tanto, como no puede haber un numero a la vez finito e infinito, no puede haber una cantidad infinita de números primos.
- Si existiera una cantidad finita de números primos, el producto de todos ellos sería necesariamente un número primo (pues si los multiplicamos todos entre sí, y sumamos al resultado una unidad, el resultado no puede ser dividido por ninguno de los números primos originales), y por lo tanto, habría un número primo mayor que el mayor de los que hemos supuesto (C).

¿Dónde y cuándo es lo más probable que fueran publicados los Elementos de Euclides?

- Alejandría, hacia el 300 después de Cristo.
- Atenas, siglo II después de Cristo.
- Siracusa, siglo I antes de Cristo.
- **Alejandría, hacia el 300 antes de cristo.**

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- **Algunos de los fragmentos más antiguos que se conservan de los Elementos de Euclides están escritos sobre trozos de cerámica**
- No se conserva ningún papiro de la Antigüedad que contenga algún fragmento de los Elementos de Euclides
- Los fragmentos más antiguos conservados de los Elementos de Euclides están en latín, pues proceden de Italia (Pompeya)
- Los otros tres enunciados son falsos

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- Los fragmentos más antiguos conservados de los Elementos de Euclides están en latín, pues proceden de Italia (Pompeya y Herculano)
- Los fragmentos más antiguos que se conservan de los Elementos proceden ya de la Edad Media.
- Los Elementos de Euclides no fueron traducidos nunca al árabe, pero sí al siríaco.
- **Los otros tres enunciados son falsos**

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- La más antigua traducción completa al latín de los Elementos que se conserva es la de Boecio (siglo VI)
- **La primera traducción al latín de los Elementos que se conserva fue traducida a partir de la versión árabe, no de la versión griega.**
- Los Elementos de Euclides se escribieron originalmente en latín clásico
- Los otros tres enunciados son falsos.

¿Qué filósofo neoplatónico del siglo V dC es el autor de los primeros "Comentarios" a los Elementos que nos han llegado?

- San Agustín.
- Santo Tomás de Aquino.
- Hipatia.
- **Proclo.**

¿De qué admiradora de Euclides se dijo que fue "la primera lesbiana moderna"?

- Hroswitha de Gandersheim
- Marget Seymer
- **Anne Lister**
- Simone de Beauvoir.

¿Quién realizó la primera edición impresa de los Elementos de Euclides?

- Johannes Gutenberg, en Maguncia
- Aldo Minucio, en Venecia
- Erasmo de Rotterdam, en Rotterdam
- **Erhard Ratdolt, en Venecia**

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- La más antigua traducción completa al latín de los Elementos que se conserva es la de Boecio (siglo VI)
- **La primera traducción al latín de los Elementos que se conserva fue traducida a partir de la versión árabe, no de la versión griega**
- Los Elementos de Euclides se escribieron originalmente en latín clásico
- Los otros tres enunciados son falsos

¿Qué religiosa medieval mencionó en sus obras algunas cuestiones aritméticas contenidas en los Elementos de Euclides?

- Hipatia de Alejandría
- Hildegarda de Bingen
- Anne Lister
- **Ninguna de las anteriores**

¿Qué religiosa medieval mencionó en sus obras algunas cuestiones aritméticas contenidas en los Elementos de Euclides?

- Santa Catalina de Alejandría
- **Hroswitha de Gandersheim**
- Anne Lister
- Santa Teresa de Jesús

¿Qué filósofo de la Edad Moderna escribió su obra principal siguiendo el método axiomático de los Elementos de Euclides?

- Maquiavelo.
- Leibniz
- Descartes.
- **Ninguno de los anteriores.**

¿Qué famosa obra de la historia de la filosofía está escrita imitando el modo geométrico de los Elementos?

- La Crítica de la Razón Pura de Kant
- El Discurso del Método de Descartes
- **La Ética de Spinoza**
- El Tractatus de Wittgenstein

¿Cuál de los siguientes enunciados es FALSO? Elija la respuesta d) si cree que las otras tres son verdaderas.

- Los Principia Mathematica de Newton utilizan el mismo formato axiomas-teorema-demostración que los Elementos de Euclides.
- **La innovación principal de Newton respecto al método axiomático de Euclides fue la introducción del análisis infinitesimal.**
- En una biblioteca de Oxford (la universidad en la que siempre trabajó Isaac Newton) se conserva el ejemplar de los Elementos que estudió y anotó de su propia mano.
- Todas las anteriores respuestas son falsos.

¿Qué pintor renacentista aplicó la óptica de Euclides en un libro sobre perspectiva?

- Giotto
- Leonardo da Vinci
- Luca Pacioli
- **Piero della Francesca**

¿En qué época empezaron a difundirse los Elementos en China?

- En la época del Imperio Romano.
- En la época del Imperio Bizantino.
- En la época del Imperio Abbasí, a través de la Ruta de la Seda.
- **Con las misiones de los jesuitas a partir en los siglos XVI-XVII.**

¿En qué época vivió la científica escocesa Mary Fairfax?

- Siglo XVI
- **Siglo XIX**
- Siglo XII
- Siglo XX

Muere en 1892, ante lo que el *"Morning Post"* publicó:

> *"Por muchas dificultades que podamos tener este siglo para escoger un rey de la ciencia, no tendremos ninguna duda para saber quién es la reina de la ciencia"*

¿Quién fue uno de los primeros en desarrollar una geometría no euclídea?

- **Lobachevski**
- Piero della Francesca
- Descartes
- Einstein.

Después de Euclides

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- Arquímedes aplicó el método geométrico para el estudio de problemas físicos.
- Arquímedes hizo un cálculo muy exacto del valor de π.
- **Arquímedes resolvió el problema de la duplicación del cubo mediante el cálculo infinitesimal.**
- Arquímedes demostró la ley de la palanca, a partir del concepto de “centro de gravedad”.

ASTRONOMÍA GRIEGA

Conceptos generales sobre la apreciación de los cielos y el movimiento de los astros

¿Cuál de estos enunciados es FALSO? La eclíptica...

- Es la franja del firmamento donde suceden los eclipses, tanto de sol como de luna.
- **Todas las otras respuestas son correctas.**
- Atraviesa las doce constelaciones del zodiaco.
- Es la franja del firmamento que va recorriendo el sol a lo largo del año.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO? La eclíptica...

- Es una línea imaginaria del firmamento
- Es la franja del firmamento donde suceden los eclipses de Sol
- Es la franja del firmamento donde suceden los eclipses de Luna.
- **Todas las otras respuestas son correctas.**

¿Cuál de estos enunciados es FALSO? La eclíptica...

- es la línea en el firmamento que marca la trayectoria anual aparente del sol.
- puede sufrir retrogradaciones
- es la línea en el firmamento que atraviesa las constelaciones del zodiaco.
- es atravesada por la luna en los momentos en los que hay un eclipse de sol o de luna.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO? La eclíptica...

- **es atravesada por la Luna solo en los momentos en los que hay un eclipse de Sol o de Luna.**
- no puede sufrir retrogradaciones
- es la línea en el firmamento que atraviesa las constelaciones del zodiaco
- es la línea en el firmamento que marca la trayectoria anual aparente del Sol

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- El zodiaco es la serie de constelaciones que va atravesando la eclíptica.
- **La eclíptica atraviesa el zodiaco solamente en los equinoccios.**
- La eclíptica es la línea que sigue la trayectoria aparente del Sol por el cielo a lo largo del año.
- La eclíptica es la línea imaginaria del firmamento donde ocurren siempre los eclipses de Sol.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- El zodiaco es la serie de constelaciones que va atravesando la eclíptica.
- La eclíptica es la línea que sigue la trayectoria aparente del sol por el cielo a lo largo del año.
- **La eclíptica es el ecuador celeste**.
- La eclíptica no está en el mismo plano que el ecuador celeste.

La eclíptica...

- es el círculo máximo del firmamento, o sea, el ecuador celeste.
- es atravesada por el Sol únicamente en los momentos en los que se produce un eclipse.
- fue medida por Aristarco.
- **es cruzada por la Luna cuando se produce un eclipse de Sol o de Luna.**

¿En qué consiste el paralaje?

- En que el tamaño aparente de un objeto cambia con la distancia desde la que lo observamos.
- En el desplazamiento diario de las estrellas fijas y el resto de los astros.
- En que el brillo aparente de un astro cambia con la distancia desde la cual lo observamos.
- **En que la posición aparente de un objeto es distinta cuando se lo observa desde dos lugares diferentes.**

El paralaje estelar...

- fue uno de los principales apoyos empíricos que recibió la teoría de Copérnico en las primeras décadas tras la publicación del De Revolutionibus.
- consiste en el desplazamiento anual de este a oeste de las constelaciones.
- **consiste en que la posición de una estrella debería verse en puntos del firmamento ligeramente distintos cuando se la observa con 6 meses de diferencia, es decir, con la tierra situada en puntos opuestos de su órbita.**
- fue observado por primera vez por Galileo gracias al telescopio.

El paralaje estelar...

- **debería poder observarse si el sistema copernicano fuese cierto, salvo que el universo fuese mucho más grande de lo que se pensaba.**
- fue medido por primera vez por Eudoxo.
- consiste en el desplazamiento anual de este a oeste de las constelaciones.
- fue observado por Galileo con el telescopio.

Las estrellas fijas se llaman así porque...

- porque, en el modelo geoestacionario, su esfera se supone que no se mueve.
- no tienen retrogradaciones.
- vistas desde la Tierra, siempre están en la misma posición en el cielo.
- **siempre guardan la misma distancia unas respecto a otras**

Las estrellas fijas se llaman así porque...

- siempre guardan la misma distancia respecto a los planetas.
- vistas desde la tierra, siempre están en la misma posición en el cielo, independientemente de la hora y de la época del año.
- **las constelaciones que forman tienen siempre la misma forma y posición relativa.**
- porque, en el modelo geoestacionario, su esfera se supone que no se mueve.

Desde el punto de vista observacional, la diferencia entre los planetas y las estrellas fijas es que...

- los planetas brillan menos que las estrellas.
- **los planetas no mantienen su posición constante unos con respecto a otros.**
- las estrellas no mantienen su posición constante unas con respecto a otras.
- las estrellas están mucho más lejos.

¿Cuánto se desplaza en el firmamento la posición de la luna entre dos días consecutivos, en relación a las estrellas fijas?

- Depende de si está retrogradando o no
- Aproximadamente un grado, pues tarda un año en completar la vuelta completa (360º) al firmamento
- **360º divididos entre el número de días que tarda en completar sus fases, o sea unos 12º**
- Aproximadamente unos 30 días

Desde el punto de vista observacional, la diferencia entre los planetas, por un lado, y el Sol y la Luna por otro, es que...

- **los planetas tienen movimiento de retrogradación, y el Sol y la Luna no lo tienen.**
- los planetas y la Luna tienen movimiento de retrogradación, y el Sol no lo tiene.
- los planetas y el Sol tienen movimiento de retrogradación, y la Luna no lo tiene.
- los planetas se mueven siempre en dirección contraria al Sol y la Luna.

¿En qué consiste el fenómeno de la retrogradación?

- Todas las respuestas son correctas.
- En que dos o más planetas están alineados, vistos desde la Tierra.
- En que un planeta se desplaza más rápidamente que el sol durante unos días
- **En que un planeta se desplaza durante unos días en el sentido contrario al habitual**

¿En qué consiste el fenómeno de la retrogradación?

- En que un planeta (sin contar el desplazamiento diario) se desplaza durante unos días de oeste
- **En que un planeta (sin contar el desplazamiento diario) se desplaza durante unos días de este a oeste.**
- En que un planeta se desplaza más rápidamente que el sol durante unos días
- Todas las respuestas son correctas.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- La retrogradación es un movimiento aparente de los planetas a través del firmamento.
- La Luna no tiene retrogradación.
- **Las estrellas fijas pueden retrogradar.**
- Marque esta respuesta si cree que todas las anteriores son verdaderas.

La retrogradación de un planeta, en relación con su movimiento normal respecto a las estrellas fijas...

- **consiste en que el planeta se desplaza durante unos días en dirección este-oeste.**
- consiste en que el planeta se desplaza durante unos días en dirección norte-sur.
- consiste en que el planeta se desplaza durante unos días en dirección oeste-este.
- ninguna de las anteriores.

Los planetas exteriores retrogradan cuando están en oposición al Sol (o sea, en direcciones exactamente opuestas en el firmamento). ¿Por qué este hecho es más favorable para la teoría heliocéntrica que para la geocéntrica?

- Porque en el modelo de Ptolomeo solo puede explicarse suponiendo que el Sol está siempre sobre la línea recta que une la Tierra con el centro del epiciclo del otro planeta.
- Ninguna de las otras tres respuestas es correcta.
- **Porque es una consecuencia trivial del hecho de que los planetas exteriores están más lejos del Sol que la Tierra.**
- Porque es incompatible con el modelo de Ptolomeo.

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- Marte está siempre relativamente cerca de la posición del Sol en el firmamento, por lo que suele vérsele al anochecer y al amanecer.
- Marte siempre está relativamente cerca de la posición de Júpiter en el firmamento, debido a la atracción gravitatoria que este ejerce sobre aquel.
- **Venus y mercurio siempre están relativamente cerca de la posición del Sol en el firmamento, por lo que suele vérseles al anochecer y al amanecer.**
- La trayectoria aparente de la luna genera retrogradaciones.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **En el modelo geocéntrico, Venus y Mercurio no pueden tener fases**
- En el modelo heliocéntrico, Venus nunca se aleja mucho del Sol, porque su órbita es más pequeña que la de la Tierra.
- En el modelo heliocéntrico, la retrogradación de un planeta superior, como Marte, siempre ocurre cuando están en oposición con el Sol.
- En el modelo Ptolemaico, el deferente de Mercurio siempre está entre la Tierra y el Sol.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- En el modelo copernicano, Mercurio puede hallarse más lejos de la Tierra que el Sol.
- **En el modelo geocéntrico, Venus y Mercurio no podían tener fases, al revés que en el modelo heliocéntrico.**
- En el modelo heliocéntrico, Venus nunca se aleja mucho del Sol, porque su órbita es más pequeña que la de la Tierra.
- En el modelo heliocéntrico, la retrogradación de un planeta superior, como Marte, siempre ocurre cuando están en oposición con el sol.

¿Por qué el modelo geocéntrico no permite calcular la posición real de los planetas, y el heliocéntrico sí?

- Porque, si el modelo geocéntrico es correcto, la posición aparente de los planetas depende tanto de su movimiento real, como del movimiento de la tierra, por lo que no se puede sacar ninguna conclusión a partir de la posición observada.
- Porque, si el modelo heliocéntrico es correcto, la posición aparente de los planetas depende solo de su movimiento real, no del movimiento de la tierra, lo que permite calcular ese movimiento real a partir del movimiento observado.
- **Porque, si el modelo heliocéntrico es correcto, es posible que un planeta que se observa en dos posiciones distintas en momentos diferentes, esté realmente en la misma posición las dos veces.**
- Porque, si el modelo geocéntrico es correcto, es posible que un planeta que se observa en dos posiciones distintas en momentos diferentes, esté realmente en la misma posición las dos veces.

Cuál de estos movimientos NO se observa en los cuerpos celestes:

- Movimiento diario de este a oeste.
- Movimiento a lo largo del año de oeste a este, con respecto al Zodiaco.
- Movimiento transitorio de retrogradación de los planetas.
- **Movimiento circular uniforme.**

Los movimientos aparentes de la Luna son:

- **A lo largo del día, de este a oeste. A lo largo de varios días, de oeste a este.**
- A lo largo del día, de oeste a este. A lo largo de varios días, de este a oeste.
- A lo largo del día, en el mismo sentido que el Sol. A lo largo de varios días, cambiando de fase.
- A lo largo del día, en sentido opuesto al Sol. A lo largo de varios días, cambiando de fase.

Sin considerar la retrogradación, los movimientos aparentes de Marte son:

- **A lo largo del día, de este a oeste. A lo largo de varios días, de oeste a este.**
- A lo largo del día, de oeste a este. A lo largo de varios días, de este a oeste.
- A lo largo del día, mismo sentido que el Sol. A lo largo de varios días, en sentido opuesto al Sol
- A lo largo del día, en sentido opuesto al Sol. A lo largo de varios días, mismo sentido que el Sol

Sin considerar la retrogradación, los movimientos aparentes de Venus son:

- **A lo largo del día, de este a oeste. A lo largo de varios días, de oeste a este.**
- A lo largo del día, de oeste a este. A lo largo de varios días, de este a oeste.
- A lo largo del día, mismo sentido que el Sol. A lo largo de varios días, sentido opuesto al Sol.
- A lo largo del día, sentido opuesto al Sol. A lo largo de varios días, mismo sentido que el Sol.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- La retrogradación es un movimiento aparente de los planetas a través del firmamento.
- La retrogradación consiste en que un planeta parece retroceder en el firmamento con respecto a la dirección oeste-este que sigue normalmente.
- En el caso de los planetas exteriores (Marte, Júpiter, Saturno), la retrogradación se produce porque la Tierra adelanta al otro planeta mientras ambos giran alrededor del Sol.
- **No puede haber retrogradación en el caso de los planetas internos (Venus y Mercurio).**

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- La retrogradación es un movimiento aparente de los planetas a través del firmamento.
- La retrogradaron consiste en que un planeta parece retroceder en el firmamento con respecto a la dirección anual oeste-este que sigue normalmente.
- En el caso de los planetas exteriores (Marte. Júpiter, Saturno), la retrogradación se produce porque la Tierra adelanta al otro planeta mientras ambos giran alrededor del Sol.
- **La retrogradación siempre ocurre cuando el planeta está en el punto contrario de la eclíptica respecto al Sol.**

El universo de Platón

En la cosmología de Platón, ¿qué formas matemáticas se asociaban con los elementos?

- **Axiomas, definiciones y nociones comunes.**
- **Cuerpos sólidos regulares**
- Los objetos que proyectaban sombras en la caverna.
- Triángulos equiláteros, rectángulos e isósceles.

¿A qué se conoce en astronomía como "el problema de Platón"?

- Utilizar hipótesis para explicar los movimientos de los astros (p.ej. los planetas)
- A "salvar las apariencias"
- **Explicar los movimientos de los astros empleando únicamente movimientos circulares uniformes.**
- Explicar los movimientos de los astros con movimientos uniformes de esferas homocéntricas

¿Qué es lo que se conoce en astronomía como "el problema de Platón"?

- Explicar los movimientos aparentes de los astros utilizando la teoría de las Ideas.
- **Explicar los movimientos aparentes de los astros suponiendo que sus movimientos reales son circulares y uniformes.**
- Demostrar empíricamente la esfericidad de la Tierra.
- Explicar los movimientos aparentes de los astros utilizando epiciclos y ecuantes.

Las esferas homocéntricas de Eudoxo

Indique la respuesta FALSA. El sistema de esferas homocéntricas:

- No conseguía explicar por qué el brillo de los planetas variaba.
- Fue utilizado por Aristóteles en su cosmología.
- **Incluía epiciclos y excéntricas.**
- Era compatible con las teorías cosmológicas de Platón.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **El modelo de esferas homocéntricas fue rechazado porque no conseguía explicar la retrogradación.**
- El modelo de esferas homocéntricas fue desarrollado principalmente por Eudoxo.
- El modelo de esferas homocéntricas fue el adoptado por Aristóteles en su cosmología.
- El modelo de esferas homocéntricas no explicaba por qué variaba el brillo de los planetas.

Indique la respuesta FALSA. El sistema de esferas homocéntricas:

- Explicaba por qué el brillo de los planetas variaba.
- Era una forma de resolver "el problema de Platón".
- Fue formulado por Eudoxo.
- **Introducía epiciclos**

Uno de los principales problemas del modelo de Eudoxo era que...

- **la distancia de un planeta a la Tierra siempre era constante**
- incluía hipótesis incompatibles con la cosmología de Aristóteles
- solo se aplicaba a los planetas, no al Sol ni a la Luna.
- no permitía explicar las retrogradaciones, pues las esferas eran homocéntricas

El universo de Aristóteles

¿En qué orden están situados los elementos, en el sistema cosmológico de Aristóteles, contando a partir del centro del universo hacia fuera?

- Éter, fuego, aire, agua, tierra.
- **Tierra, agua, aire, fuego, éter.**
- Fuego, aire, agua, tierra, éter.
- Éter, tierra, agua, aire, fuego.

Los elementos, según Aristóteles,...

- están divididos en trece libros.
- consisten en poliedros regulares.
- **están ordenados en el cosmos según su peso.**
- contienen definiciones, nociones comunes, postulados y teoremas.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **El modelo cosmológico de Aristóteles no permitía explicar por qué la Tierra es inmóvil.**
- La cosmología de Aristóteles es una teoría física, no matemática, que pretendía explicar las causas de los movimientos celestes, más que predecirlos.
- Aristóteles pensaba que los cometas eran un fenómeno atmosférico.
- Aristóteles explicaba la diferencia entre la física celeste y la terrestre con su teoría hilomórfica: al estar compuestos de materia, los cuerpos terrestres son imperfectos.

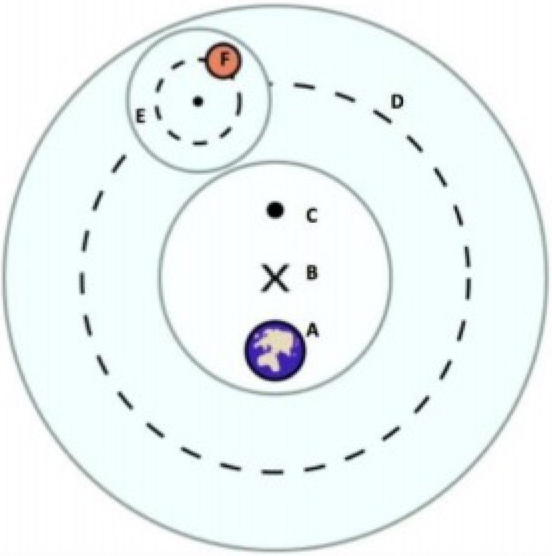
¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **Aristóteles explicaba los movimientos irregulares de los planetas mediante su teoría hilemórfica: al estar compuestos de materia, los planetas son imperfectos.**
- La cosmología de Aristóteles es una teoría física, no matemática, que pretendía explicar las causas de los movimientos celestes, más que predecirlos.
- Aristóteles pensaba que los cometas eran un fenómeno atmosférico.
- El modelo cosmológico de Aristóteles permitía explicar por qué la Tierra es inmóvil (por ser el elemento más pesado).

El modelo de Apolonio y Ptolomeo

En el modelo geocéntrico de Ptolomeo, ¿qué se entiende por una excéntrica?

- Una órbita que no es perfectamente circular.
- **Una órbita cuyo centro no coincide con el centro del universo, es decir, con el centro de la Tierra.**
- Una órbita cuyo centro coincide con el centro de la Tierra, pero no con el centro del universo.
- Un mecanismo para explicar por qué la velocidad de un astro no es siempre constante.



Identifique correctamente tres elementos del sistema de Ptolomeo en esta imagen:

- **A: excéntrica. C: ecuante. D: deferente** ...
- B: excéntrica. A: ecuante. F: epiciclo
- A: Tierra. E: deferente. F: planeta
- A: centro del cosmos. D: epiciclo. F: planeta.

En el modelo de los epiciclos de Ptolomeo...

- La tierra se mueve sobre un epiciclo.
- Todos los epiciclos tienen necesariamente el mismo tamaño
- El centro del epiciclo no puede estar situado sobre el deferente
- **Un planeta brillaría menos al retrogradar, si el epiciclo girase en sentido contrario al deferente.**

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **El sistema de epiciclos fue el primer modelo matemático utilizado para explicar la retrogradación mediante órbitas circulares.** ... (el primero sería el de Eudoxo?)
- El sistema de epiciclos lo propuso Apolonio y lo desarrolló Ptolomeo.
- El sistema de epiciclos permite explicar por qué los planetas brillan más cuando retrogradan.
- En el sistema de epiciclos, el planeta no está situado directamente sobre la órbita, sino en un círculo cuyo centro sí que está situado en la órbita.

¿Cuál de estas afirmaciones NO es un postulado del sistema de Ptolomeo que sea contradictorio con la cosmología aristotélica?

- **El Sol pasa a ser el centro del cosmos, en lugar de la Tierra.**
- La existencia de epiciclos implica que unas esferas celestes se intersectan con otras.
- La excentricidad de las órbitas implica que estas giran en torno a un punto vacío.
- La existencia de un punto ecuante implica que los movimientos de las órbitas no son regulares.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- Los epiciclos permiten explicar por qué los planetas brillan más cuando retrogradan.
- **La hipótesis de los epiciclos fue introducida por Ptolomeo .....** (lo hizo Apolonio)
- Ni Platón ni Aristóteles utilizaban epiciclos en su modelo cosmológico.
- Los epiciclos permiten explicar por qué los planetas retrogradan.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- Ni Platón ni Aristóteles utilizaban epiciclos en su modelo cosmológico.
- **La hipótesis de los epiciclos fue introducida por Ptolomeo.**
- Los epiciclos permiten explicar por qué los planetas brillan más cuando retrogradan.
- Los epiciclos permiten explicar *por qué los planetas retrogradan.*

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- Los epiciclos permiten explicar por qué los planetas brillan más cuando retrogradan.
- La hipótesis de los epiciclos fue utilizada por Ptolomeo
- **Aristóteles utilizaba epiciclos en su modelo cosmológico**
- Los epiciclos permiten explicar por qué los planetas retrogradan.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- El sistema de epiciclos lo propuso Apolonio y lo desarrolló Ptolomeo.
- En el sistema de epiciclos, el planeta no está situado directamente sobre la órbita, sino en un círculo cuyo centro sí que está situado en la órbita.
- El sistema de epiciclos permite explicar por qué los planetas brillan más cuando retrogradan.
- **El sistema de epiciclos permitió explicar por primera vez los eclipses, mediante la relación entre los epiciclos del Sol y de la Luna.**

En el sistema de Ptolomeo, un ecuante...

- **es un punto que se sitúa fuera del centro de la órbita de un planeta.**
- es el centro del epiciclo.
- coincide con el centro de la Tierra.
- gira alrededor de la tierra, de modo que el planeta pueda retrogradar.

¿Cuál es la principal función de un ecuante?

- Dividir la órbita de un planeta en dos partes iguales.
- **Hacer compatible el movimiento angular constante de un planeta con su movimiento irregular en el firmamento.**
- Permitir que la velocidad de giro de un epiciclo pueda ser distinta de la de su deferente.
- Señale esta respuesta si cree que las tres anteriores son correctas.

¿Cuál es la principal función de los ecuantes en el sistema de Ptolomeo?

- Generar órbitas elípticas.
- Explicar la retrogradación.
- Los ecuantes no forman parte del sistema de Ptolomeo.
- **Explicar los cambios de velocidad de un astro a lo largo de su trayectoria**

Señala la respuesta FALSA. Un ecuante...

- **puede coincidir con el centro de la órbita.**
- es una hipótesis que contradice la cosmología de Aristóteles.
- puede combinarse con una órbita excéntrica.
- permite explicar por qué los astros no orbitan aparentemente con velocidad constante.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **La excéntrica es un concepto equivalente al de ecuante (un punto situado fuera del centro de la Tierra)**
- La excéntrica es una órbita cuyo centro geométrico no coincide con el centro de la Tierra.
- Con la excéntrica se consigue explicar por qué las estaciones no tienen la misma duración.
- La excéntrica es incompatible con la física de Aristóteles.

¿Cuál era una de las principales ventajas del sistema de epiciclos?

- Que era coherente con la cosmología aristotélica, al girar todos los astros en círculos perfectos en torno a la tierra.
- Que simplificaba mucho los cálculos astronómicos.
- Los epiciclos no poseían ninguna ventaja frente al sistema de esferas homocéntricas de Eudoxo.
- **Que permitía explicar por qué los planetas brillaban más durante la retrogradación.**

Según el sistema de Ptolomeo, ¿por qué los planetas externos brillan más cuando están retrogradando?

- **Porque en ese momento están pasando por el lado de su epiciclo más próximo a la tierra.**
- Porque en ese momento es cuando están más cerca del sol.
- Porque poseen brillo intrínseco.
- Porque van en dirección contraria a su dirección habitual.

¿Qué significa la siguiente afirmación? "En el sistema geocéntrico, los tamaños de las órbitas de los planetas eran arbitrarios".

- **Que los fenómenos astronómicos observados serían los mismos, aunque cada planeta estuviese a una distancia diferente de la Tierra, simplemente con ajustar la velocidad con la que se supone que giran.**
- Que el brillo de los planetas depende de cómo de cerca o de lejos se encuentren del Sol, no de la tierra.
- Que, al contrario del sistema heliocéntrico, en el sistema geocéntrico no hay ninguna explicación satisfactoria de por qué los planetas giran todos ellos en la misma dirección.
- Las otras respuestas son todas incorrectas.

El orden y los tamaños relativos de las órbitas de los planetas...

- **son arbitrarios en el sistema geocéntrico.**
- son arbitrarios en el sistema copernicano.
- no pueden ser determinados observacionalmente en el sistema heliocéntrico.
- pueden ser determinados observacionalmente en el sistema geocéntrico.

El orden y los tamaños relativos de las órbitas de los planetas...

- fue observado por primera vez con el telescopio por Galileo.
- es una de las leyes de Kepler.
- **no pueden ser determinados mediante mediciones astronómicas en el sistema geocéntrico.**
- no pueden ser determinados mediante mediciones astronómicas en el sistema heliocéntrico.

En el sistema de Ptolomeo (con Venus moviéndose en un epiciclo)...

- Venus se vería siempre en fase de “lleno”, lo que es equivalente a que no existen fases.
- **Venus no podría verse nunca en fase de “lleno”, pues para eso tendría que estar más allá del Sol.**
- Venus no podría verse nunca en fase de “nuevo”, pues siempre está recibiendo la luz del Sol.
- Todas las respuestas anteriores son falsas.

En el sistema de Ptolomeo, ¿cuál de estos enunciados es VERDADERO?

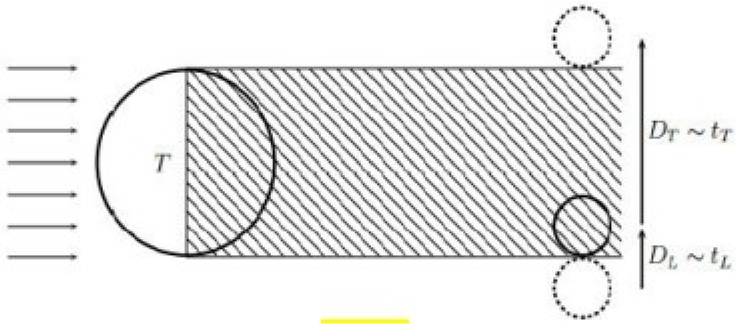
- El deferente de un planeta se mueve siempre a velocidad constante con respecto al centro de la tierra.
- **La retrogradación se explica porque el planeta, situado en el epiciclo, se mueve a veces en dirección contraria a su deferente.**
- La variación de luminosidad de un planeta se explica porque su distancia con respecto al Sol cambia según la posición del planeta en el epiciclo.
- La variación de luminosidad de un planeta se explica porque varía de manera intrínseca.

¿Cuál de estos tres aspectos del sistema de Ptolomeo NO supone un conflicto con la cosmología de Aristóteles?

- **El centro de una órbita excéntrica carecía de realidad física.**
- No había ninguna explicación física de por qué la velocidad de la órbita dependía del ecuante, que era un punto vacío.
- Los epiciclos son esferas que se intersectan con otras.
- Los tres aspectos anteriores son incompatibles con la cosmología de Aristóteles.

Aristarco

Señale la respuesta FALSA. En esta imagen, relativa a la medición que hizo Aristarco del tamaño de la Luna...



- se asume que la Luna se desplaza con velocidad constante
- se está produciendo un eclipse de Sol
- es irrelevante si se asume el modelo geocéntrico o el heliocéntrico
- se intenta comparar el diámetro de la Luna con el tamaño de la sombra de la Tierra

¿Cómo midió Aristarco el tamaño de la Luna?

- Comparando su tamaño aparente con el del Sol durante un eclipse de Sol.
- Midiendo el tiempo que tarda en atravesar la Luna la sombra de la tierra durante un eclipse de Sol.
- Comparando su tamaño aparente con el del Sol durante un eclipse de Luna.
- **Midiendo el tiempo que tarda en atravesar la Luna la sombra de la tierra durante un eclipse de Luna**

Indica la respuesta FALSA. Aristarco midió la distancia entre la Tierra y el Sol...

- comparando el diámetro aparente de la Luna con el diámetro aparente del Sol
- en términos de la distancia entre la Tierra y la Luna
- con un error mucho mayor que sus otras mediciones astronómicas.
- midiendo el ángulo de la Tierra, la Luna y el Sol cuando la Luna está en cuarto creciente

¿Cómo midió Aristarco la distancia entre la tierra y la luna?

- **Una vez conocido el diámetro de la luna y el ángulo que este ocupa en el cielo.**
- Midiendo el ángulo que forma la luna y el sol durante un eclipse de luna.
- Comparando el diámetro de la luna en momentos distintos de su órbita.
- Observando la luna cuando esta se hallaba en cuarto creciente, y formaba por lo tanto un ángulo de 90º con la tierra y el sol.

¿Cómo midió Aristarco la distancia de la Tierra a la Luna, una vez determinada por él la proporción entre los diámetros lunar y terrestre?

- **Calculándolo a partir del diámetro de la luna y del ángulo que la luna ocupa en el cielo.**
- Midiendo el tiempo que tardaba la luna en atravesar la sombra de la tierra en un eclipse.
- Gracias a que el diámetro aparente de la luna es igual al del sol.
- Observando la luna cuando estaba en cuarto creciente, y formaba por lo tanto un ángulo de 90º con la tierra y el sol

¿Cómo midió Aristarco la distancia de la Tierra a la Luna, una vez determinada por él la proporción entre los diámetros lunar y terrestre?

- **Midiendo el ángulo que ocupa la luna en el firmamento**
- Midiendo lo que tarda la luna en atravesar la sombra de la tierra durante un eclipse.
- Todas las otras respuestas son correctas.
- Comparando el ángulo que forma la luna con la tierra y el que forma la tierra con el sol

¿Cómo midió Aristarco la distancia de la Tierra a la Luna, una vez determinada por él la proporción entre los diámetros lunar y terrestre?

- Midiendo lo que tardaba una caravana de camellos en viajar desde Siena hasta Alejandría
- **Midiendo el ángulo que ocupa la luna en el firmamento**
- Midiendo lo que tarda la luna en atravesar la sombra de la tierra durante un eclipse.
- Comparando el ángulo que forma la luna con la tierra y el que forma la tierra con el sol

¿Cuál de estos datos astronómicos NO fue calculado por Aristarco?

- La distancia de la Tierra a la Luna.
- La distancia de la Tierra al Sol.
- El tamaño de la Luna en relación con el de la Tierra.
- **El tamaño de la Tierra.** (lo hizo Eratóstenes)

Eratóstenes

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **Eratóstenes vivió en el siglo II dC.** (→ vivió entre 276 a.e.c.-Alejandría, 194 a.e.c.)
- Teeteto vivió en el siglo IV a.C.
- Hipócrates de Quíos vivió en el siglo V a.C.
- Eratóstenes vivió en el siglo II d.C.
- Herón de Alejandría vivió en el siglo I d.C

Eratóstenes…

- fue el primero en aceptar la esfericidad de la Tierra.
- estimó la distancia entre la Tierra y la Luna basándose en lo que tarda esta en atravesar la sombra de la primera durante un eclipse.
- defendió el modelo heliocéntrico.
- **midió el tamaño de la Tierra.**

¿Cómo midió Eratóstenes el tamaño de la Tierra?

- **Comparando el ángulo que forman los rayos del sol a la misma hora en distintas latitudes.**
- Esa medición la realizó Aristarco, no Eratóstenes.
- Midiendo la altura de la Gran Pirámide y comparando su sombra con la de un bastón recto.
- Midiendo el tiempo que tarda en atravesar la luna la sombra de la tierra durante un eclipse de luna.

La medición del tamaño de la tierra por parte de Eratóstenes...

- asumía el modelo geocéntrico, aunque Eratóstenes defendía el modelo heliocéntrico.
- asumía que el ángulo que forma la sombra de un objeto era la misma en dos latitudes diferentes
- **requirió medir la distancia entre dos puntos diferentes en el mismo meridiano.**
- utilizó el segundo Teorema de Tales.

¿Por qué seleccionó Eratóstenes una ciudad situada en el trópico de Cáncer para medir el tamaño de la Tierra?

- porque en el trópico de Cáncer, a medianoche en el solsticio de verano, el Sol puede verse desde el fondo de un pozo.
- porque en el trópico de Cáncer, a mediodía en el solsticio de invierno, el Sol está justo en la vertical del cielo.
- **porque en el trópico de Cáncer, a mediodía en el solsticio de verano, el Sol está justo en la vertical del cielo.**
- porque en el trópico de Cáncer, a mediodía del equinoccio, los objetos no proyectan sombras.

¿Cuál de estos datos NO se utilizó en la medición del tamaño de la Tierra que hicieron los astrónomos griegos?

- La diferencia en el ángulo con el que caen los rayos del Sol en el solsticio de verano en dos ciudades situadas en latitudes distintas.
- **El tiempo que tarda la Luna en atravesar la sombra de la Tierra.**
- La distancia entre dos ciudades situadas en latitudes distintas.
- La proporcionalidad entre dos ángulos y los segmentos de circunferencia correspondientes a dichos ángulos.

CIENCIA EN LA EDAD MEDIA

La era de los descubrimientos

¿De qué modo demostró el descubrimiento de América la falsedad de la cosmología de Sacrobosco?

- Porque en el modelo de Sacrobosco, aceptado durante la Edad Media, se suponía que la tierra era plana.
- Porque el modelo de Sacrobosco se basaba en la Biblia.
- Porque en el modelo de Sacrobosco el tamaño de la Tierra es mucho más grande de lo que pensaba Colón.
- **Porque en el modelo de Sacrobosco sólo podía haber una gran masa continental, y el resto de la Tierra estaba cubierto por océano.**

Los descubrimientos geográficos del siglo XV-XVI influyeron en el desarrollo de la astronomía...

- demostrando que la Tierra era mucho más grande que lo que había medido Eratóstenes.
- al mostrar que la Tierra no era el centro del universo.
- **mostrando que los científicos de la Antigüedad no conocían algunos hechos fundamentales sobre el mundo.**
- al demostrar por primera vez que la Tierra era esférica.

Los descubrimientos geográficos del comienzo de la Edad Moderna influyeron en el desarrollo de la astronomía...

- **al mostrar que existían hechos importantes sobre la Tierra que los científicos de la Antigüedad desconocían por completo.**
- al mostrar que la Tierra era mucho más grande de lo que pensaba Ptolomeo.
- al mostrar que la Tierra no era el centro del cosmos.
- al mostrar que la Tierra era redonda, contrariamente a lo que pensaban los astrónomos griegos.

Los descubrimientos geográficos de los siglos XV-XVI influyeron en el desarrollo de la astronomía...

- no influyeron de modo alguno, pues solo afectan a la geografía, no a la astronomía.
- **Mostrando que algunas teorías aceptadas por los científicos y filósofos de la Antigüedad se basaban en razonamientos especulativos y eran contrarias a la experiencia.**
- al mostrar que la Tierra no era el centro del cosmos
- al mostrar que las mediciones de la Tierra y el sistema solar echas por Eratóstenes y Aristarco tenían errores mucho más grandes de lo que se pensaba durante la Edad Media.

LA NUEVA ASTRONOMÍA: COPÉRNICO – KEPLER – GALILEO

El modelo heliocéntrico de Copérnico

¿De qué año a qué año vivió Copérnico?

- 1393-1433.
- **1473-1543.**
- 1433-1493.
- 1583-1643

Aparte del movimiento de rotación y de traslación, Copérnico añadió un tercer movimiento a la Tierra. ¿En qué consistía?

- En el movimiento secular a través de la Vía Láctea, que no es observable a simple vista sin ayuda del telescopio.
- En un pequeño ecuante, necesario para explicar los cambios en la velocidad de traslación respecto al Sol inmóvil.
- **En un movimiento anual de rotación, para que el eje de la Tierra siempre apuntase hacia el mismo punto en el firmamento.**
- Todas las anteriores son falsas.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- En el modelo Ptolemaico, el deferente de Mercurio siempre está entre a la Tierra y el Sol.
- En el modelo heliocéntrico, la retrogradación de un planeta superior, como Marte, siempre ocurre cuando están en oposición con el Sol.
- En el modelo heliocéntrico, Venus nunca se aleja mucho del Sol, porque su órbita es más pequeña que la de la Tierra.
- **En el modelo heliocéntrico, los planetas exteriores pueden tener fases.**

¿Cómo explica el modelo copernicano que Júpiter recorre una distancia menor que Marte en su retrogradación?

- Porque Júpiter se mueve más rápidamente que Marte.
- **Porque Júpiter está más lejos de la Tierra que Marte.**
- Porque el epiciclo de Júpiter es más pequeño que el de Marte.
- Las otras tres respuestas son equivalentes

¿Cómo explica el modelo de Copérnico que Venus nunca pueda estar en oposición al Sol?

- Porque Venus siempre está situado entre el Sol y la Tierra.
- Porque Venus retrograda cuando pasa por delante del Sol.
- En realidad, Venus sí que puede verse desde la Tierra en oposición al Sol (es decir, en el punto de la eclíptica opuesto al punto en el que se halla el Sol).
- **Porque la órbita de Venus es más pequeña que la de la Tierra.**

Teniendo en cuenta el modelo copernicano, y el hecho de que la órbita de la tierra es más grande que la de Venus y más pequeña que la de Marte, ¿cuál de estos enunciados es falso?

- Marte puede ser observado desde la tierra a cualquier hora del día.
- Venus puede ser observado en el extremo opuesto de la eclíptica con respecto al sol.
- Venus solo puede ser observado desde la tierra cerca del amanecer o del anochecer.
- **Marte puede ser observado en el extremo opuesto de la eclíptica con respecto al sol.**

¿Cuál de estos enunciados NO es un hecho que el modelo heliocéntrico explique de manera más simple que el modelo geocéntrico?

- Que los planetas superiores (Marte, Júpiter y Saturno) brillen más cuando están opuestos al Sol.
- La retrogradación de los planetas.
- Que los planetas inferiores (Mercurio y Venus) retrograden cuando están en conjunción con el Sol.
- Ninguno de los anteriores

¿Cuál de estos hechos explica de modo mucho mas natural el sistema heliocéntrico, en comparaci6n con el sistema geocéntrico?

- Que el Sol se desplace aparentemente de este a oeste.
- Que los movimientos de rotaci6n y traslación de la Tierra no los percibamos.
- **Que la retrogradación de los planetas mas alejados del sol dure menos días que la de los planetas mas cercanos.**
- Marque esta respuesta si cree que todas las respuestas anteriores son correctas

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA?

- En el modelo de Copérnico, la Luna gira en torno al Sol, mientras que en el de Brahe lo hace en torno a la tierra.
- **Los modelos de Copérnico y de Tycho Brahe no pueden distinguirse observacionalmente por las posiciones aparentes de los planetas, ya que estas son las mismas según ambos modelos.**
- Tanto el modelo de Copérnico como el de Brahe implicaban la existencia de paralaje estelar.
- Marque esta respuesta si cree que las tres anteriores son incorrectas

¿Cuál de estos hechos fue usado como objeción al sistema copernicano por los defensores del sistema geocéntrico?

- Aunque no tenía ecuantes, el sistema copernicano incluía numerosos epiciclos menores y excéntricas, de modo que no era mucho más simple que el de Ptolomeo.
- El movimiento de la Tierra no lo experimentamos directamente.
- Si el sistema copernicano fuese correcto, las estrellas deberían mostrar paralaje.
- **Señale esta respuesta si cree que todas las anteriores son correctas.**

¿Cuál de estos hechos NO fue uno de los argumentos que se usaron contra el sistema copernicano?

- El movimiento de la Tierra debería producir efectos observables a simple vista.
- El modelo copernicano implica que debería observarse un paralaje en las estrellas fijas, paralaje que no se observa.
- El modelo copernicano no explicaba por qué caen los cuerpos hacia la Tierra, si no está en el centro del cosmos.
- **El sistema copernicano era demasiado complejo matemáticamente, como para poder ser empleado para medir y predecir los fenómenos astronómicos.**

¿Cuál de estos hechos NO fue usado como objeción al sistema copernicano por los defensores del sistema geocéntrico?

- Aunque no tenía ecuantes, el sistema sí que tenía que incluir epiciclos menores y excéntricas, de modo que no era tan simple.
- El movimiento de la Tierra no lo experimentamos directamente.
- **El sistema copernicano solo contiene movimientos circulares, no elípticos.**
- El movimiento de la Tierra contradecía a las teorías físicas aceptadas, y a algunos pasajes de la Biblia

¿De qué modo apoyaban los principios galileanos de inercia y relatividad la cosmología copernicana?

- Explicaban por qué el movimiento de la Tierra sobre su eje y alrededor del Sol no se observaban.
- Explicaban por qué no era necesario buscar una causa del movimiento orbital de los planetas en torno al Sol.
- Debilitaban la física aristotélica, sobre la que se basaban las principales críticas científicas al heliocentrismo.
- **Todas las respuestas son correctas.**

Tycho Brahe

En el sistema de Tycho Brahe...

- **la Tierra permanece en el centro del universo.**
- el Sol permanece en el centro del universo, como en el sistema copernicano, pero los planetas giran en torno a la Tierra.
- las órbitas de los planetas son cuerpos sólidos, al revés que en el sistema copernicano.
- la Luna es el único cuerpo que gira en torno al Sol.

En el modelo de Tycho Brahe...

- Debería observarse paralaje estelar.
- **Venus tendría las mismas fases que según el sistema copernicano.**
- El sol es el único astro que gira alrededor de la tierra; los demás giran en torno al sol.
- La tierra gira alrededor del sol, pero los planetas lo hacen alrededor de la tierra.

En el sistema de Tycho Brahe...

- Las estrellas fijas deberían mostrar un paralaje, pero este no se observaba a simple vista.
- El Sol gira en torno a la Tierra, y todos los demás astros* giran en torno al sol.
- Todas las otras respuestas son falsas.
- **Las órbitas de los planetas se cruzan con la órbita del sol**

En el sistema de Tycho Brahe...

- Las estrellas fijas deberían mostrar un paralaje, pero este no se observaba a simple vista.
- El Sol gira en torno a la Tierra, y todos los demás astros giran en torno al sol.
- Todas las otras respuestas son falsas.
- **Las órbitas de algunos planetas se cruzan con la órbita del sol, y por lo tanto, las órbitas no pueden ser sólidas.**

Kepler

¿Cuál de estos enunciados NO es una de las leyes de Kepler?

- El período de un planeta al cuadrado, dividido por el radio medio de su órbita al cubo, es un valor constante, igual para todos los planetas.
- Las órbitas de los planetas son elípticas
- **La línea recta que une un planeta y el centro de la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.**
- El radio medio de la órbita de un planeta al cubo, dividido por su período al cuadrado, es un valor constante, igual para todos los planetas.

¿Cuál de estos enunciados NO es una de las leyes de Kepler?

- El radio medio de la órbita de un planeta al cubo, dividido por su período al cuadrado, es un valor constante, igual para todos los planetas.
- Las órbitas de los planetas son elípticas
- **El radio medio de un planeta al cuadrado, dividido por el período de su órbita al cubo, es un valor constante, igual para todos los planetas.**
- La línea recta que une un planeta con el sol barre áreas iguales en tiempos iguales

Indique la respuesta FALSA. Tras medir cuatro posiciones reales de la Tierra en su órbita, Kepler pudo determinar...

- que la órbita terrestre encajaba en una circunferencia con suficiente aproximación, dado el margen de error de sus observaciones.
- que solo con tres observaciones, la órbita de la Tierra habría podido encajar en un círculo.
- **que la órbita terrestre no encajaba en un círculo, ni siquiera teniendo en cuenta el margen de error, sino en una elipse.**
- que la posición del Sol no coincidía con el centro de la órbita.

¿Cuál de estos enunciados es una de las leyes de Kepler?

- Dos cuerpos celestes se atraen en proporción al producto de sus masas, y en proporción inversa al cuadrado de la distancia que hay entre ellos.
- Los planetas se desplazan con movimiento uniformemente acelerado.
- El cuadrado del radio de la órbita dividido entre el cubo del período orbital es una constante igual para todos los planetas
- **El radio de la órbita de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales**

Según la primera ley de Kepler.

- Los planetas giran en torno al Sol con velocidad uniforme.
- **La trayectoria de un planeta en torno al Sol es una elipse.**
- La velocidad de los planetas es mayor cuanto más cerca están del Sol.
- Todas las respuestas anteriores son incorrectas.

¿Cuál de estos enunciados es una de las leyes de Kepler?

- Dos cuerpos celestes se atraen en proporción al producto de sus masas, y en proporción inversa al cuadrado de la distancia que hay entre ellos.
- Los planetas se desplazan con movimiento uniformemente acelerado.
- **El cuadrado del período orbital de un planeta dividido entre el cubo de su radio orbital es una constante igual para todos los planetas.**
- El radio de la órbita de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

¿Cuál de estos descubrimientos astronómicos se basó en la técnica del paralaje?

- **La determinación de las órbitas reales de los planetas, por Kepler.**
- El descubrimiento de que las estrellas están mucho más lejos que los planetas, por Galileo.
- El descubrimiento de los satélites de Júpiter, por Galileo.
- La distancia de la Tierra a la Luna, por Eratóstenes.

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- **Kepler descubrió su "Segunda Ley" aplicando el concepto de logaritmo.**
- Kepler utilizó el sistema heliocéntrico para determinar las posiciones reales de los astros, y no solo sus posiciones aparentes en el cielo.
- Kepler utilizó sus tres leyes para elaborar las Tablas Rudolfinas, mucho más precisas que las tablas astronómicas anteriores.
- Los tres enunciados anteriores son verdaderos

¿Cuál de estos enunciados es FALSO?

- Kepler determinó la forma de las órbitas de los planetas basándose en la idea de que la posición real del planeta vuelve a ser la misma cuando ha completado su órbita, aunque lo veamos en puntos distintos del firmamento.
- Kepler halló su tercera ley gracias al uso de los logaritmos.
- **Kepler sostuvo que el Sol estaba en justo el centro de la órbita de cada planeta, lo que le permitió prescindir de la noción de excéntrica.**
- Marque esta respuesta si cree que los tres enunciados anteriores son verdaderos

¿Qué principio utilizó Kepler para medir la posición real de la Tierra en varios puntos de su órbita?

- El hecho de que tanto la posición real como la posición aparente de Marte era la misma cuando había pasado justamente un año marciano (687 días).
- El hecho de que la posición aparente de Marte tras un año marciano (687 días) era la misma, pero su posición real no.
- El hecho de que la posición aparente de la Tierra tras un año marciano (687 días) era diferente.
- **El hecho de que la posición real de Marte tras un año marciano (687 días) era la misma, pero su posición aparente no.**

¿Cómo descubrió Kepler su tercera ley?

- Al medir en términos de logaritmos la fuerza magnética que el Sol ejercía sobre los planetas.
- **Al ver que la relación entre el periodo de los planetas y su distancia al Sol, expresadas en términos de logaritmos, era lineal.**
- Mediante el paralaje, utilizando los datos observacionales acumulados por Tycho Brahe.
- Las otras tres respuestas son falsas

¿Cuál de estos hechos es una consecuencia de la segunda ley de Kepler?

- Que los planetas se mueven más despacio cuanto más cerca están del sol.
- Que la línea que une un planeta con la tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Que la velocidad de los planetas no es constante.**
- Que las órbitas de los planetas no pueden ser circulares.

La primera y la segunda leyes de Kepler implican, conjuntamente, que...

- **un planeta se mueve más despacio cuanto más lejos está del sol.**
- un planeta retrogradará cuando se halle en la parte de su órbita más cercana al sol
- un planeta se mueve más despacio cuando está retrogradando.
- un planeta retrogradará cuando se halle en la parte de su órbita más alejada del sol

Según la tercera ley de Kepler, si T es el período orbital de un planeta, y R el radio de su órbita, siendo K una constante, se cumple que...

- $T^2 = R \cdot K^3$
- $T^3 = K \cdot R^3$
- »» $T^2 = K \cdot R^3$
- $T^3 / R^2 = K$

Galileo

¿Cuál de los enunciados a-b-c es FALSO?

- Galileo observó con el telescopio muchas más estrellas que las que se pueden ver a simple vista.
- Galileo observó que las estrellas siguen siendo un mero punto luminoso al observarlas con el telescopio, mientras que los planetas se ven como un círculo.
- Galileo no consiguió observar con el telescopio el paralaje estelar predicho por Copérnico.
- **Todos los enunciados anteriores son verdaderos.**

Cuando Galileo observó las estrellas con el telescopio...

- el hecho de que su número aumentase constituía un argumento en contra del modelo copernicano.
- **el hecho de que su brillo no aumentase constituía un argumento a favor del modelo copernicano.**
- el hecho de que la Vía Láctea estuviera formada por estrellas, y no fuese una mancha continua, era incompatible con el modelo geocéntrico.
- observó en ellas el paralaje que predecía el modelo copernicano.

¿Cuál de estos enunciados NO representa uno de los datos en los que se basó Galileo para afirmar que la superficie de la Luna era irregular?

- El “terminador” (la línea que separa la zona iluminada y la zona en sombra cuando no hay Luna llena) era una línea irregular.
- Dentro de la zona en sombra, pero cerca del “terminador”, aparecían puntos iluminados, que Galileo interpretó como la cumbre de algunas montañas.
- **El tamaño aparente de la Luna aumenta al observarse con el telescopio, al contrario que el de las estrellas fijas.**
- Todas las respuestas anteriores son correctas.

La observación telescópica de la Luna por Galileo permitió descubrir que...

- la Luna tenía un movimiento de rotación.
- la Luna tenía satélites.
- la Luna causaba los eclipses al interponerse entre el Sol y la Tierra.
- **la Luna no era perfectamente esférica.**

La observación telescópica de la Luna por Galileo permitió descubrir que...

- **la superficie de la Luna no era perfectamente lisa.**
- la órbita de la Luna no era una circunferencia perfecta.
- existía al menos un astro que no giraba en torno al Sol, sino en torno a la Tierra.
- la Luna tenía un movimiento de rotación, además del de traslación.

La observación telescópica de la Luna por parte de Galileo permitió descubrir que...

- La Luna tenía un movimiento de rotación.
- **La superficie de la Luna contenía montañas y valles**
- La Luna no poseía luz propia.
- La Luna causaba los eclipses al interponerse entre el Sol y la Tierra

La observación telescópica de las estrellas por parte de Galileo permitió descubrir que...

- las constelaciones son figuras arbitrarias, no corresponden a la posición real de las estrellas en el espacio.
- su brillo y tamaño aparente cambia al observarlas mediante el telescopio, pues se ven más cerca.
- **la Vía Láctea no es un fenómeno atmosférico, sino que está formada por estrellas individuales.**
- las estrellas muestran el paralaje que predecía el modelo copernicano, lo que constituyó uno de los argumentos más poderosos para aceptarlo.

¿Por qué fue importante el descubrimiento de las manchas solares como argumento en contra del sistema geocéntrico?

- Porque mostraba que la Tierra no era el centro del universo.
- Porque era incompatible con el modelo de Ptolomeo desde el punto de vista geométrico.
- Porque mostraba que el Sol no era el centro del universo, sino una estrella como las demás, pues su brillo, igual que el de estas cuando se observan al telescopio, también cambia.
- **Porque debilitaba la idea aristotélica de que los cuerpos celestes obedecen principios físicos diferentes a los terrestres.**

¿Por qué el descubrimiento galileano de las fases de Venus constituyó un argumento muy concluyente contra el modelo astronómico de Ptolomeo?

- Porque en el sistema de Ptolomeo, Venus no podía tener fases.
- **Porque en el sistema de Ptolomeo, Venus no podía tener una fase como la de "Luna llena".**
- Porque en el sistema de Ptolomeo, Venus no podía tener una fase como la de "Luna nueva".
- Porque en el sistema de Ptolomeo, Venus tendría todas las fases que observó Galileo, pero en un orden distinto.

¿Cuál de estos descubrimientos de Galileo con el telescopio fue una prueba de que no todos los astros giraban directamente en torno a la tierra?

- **Los satélites de Júpiter**
- Las fases de Venus
- La irregularidad de la superficie lunar
- Las estrellas que componían la Vía Láctea

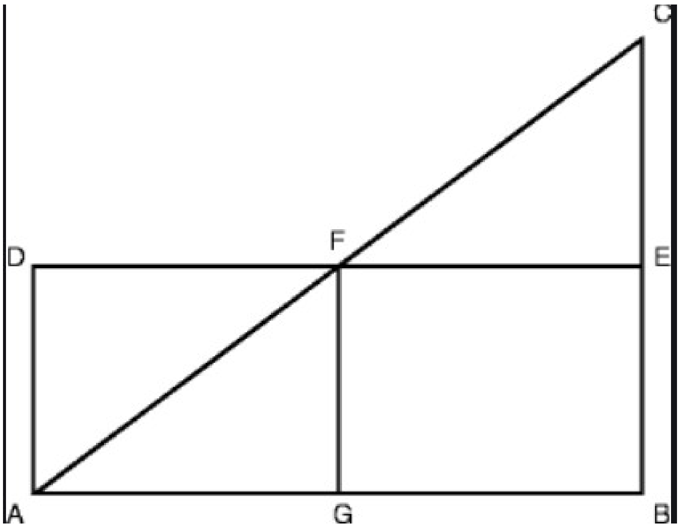
EL ORIGEN DE LA FÍSICA MODERNA

¿Cuál de los enunciados NO es esencial en un experimento?

- La construcción de un sistema artificial, que no se da espontáneamente en la naturaleza.
- La posibilidad de manipular algunas de las condiciones en que se desarrolla el experimento.
- La repetibilidad o reproducibilidad del experimento.
- **Todos los elementos anteriores son esenciales en un experimento.**

Escuela de Merton

Señale la respuesta INCORRECTA. En esta imagen (que ilustra la llamada "regla de Merton")...



- La línea AC representa un movimiento uniformemente acelerado
- **B representa una distancia doble que G**
- C representa una velocidad doble que E
- La línea DE representa un movimiento con velocidad uniforme

Señale la respuesta INCORRECTA. En esta imagen que ilustra la llamada "regla de Merton" (pregunta anterior)

- **D representa una velocidad doble que A**
- B representa un tiempo doble que G
- La línea DE representa un movimiento con velocidad uniforme
- C representa una velocidad doble que D

La "regla de Merton" es conocida también como...

- Teorema de Galileo.
- **Teorema de las velocidades medias.**
- Teorema de Arquímedes.
- Ninguna de las anteriores.

La "regla de Merton" afirma que un cuerpo que se mueve durante una unidad de tiempo con movimiento uniformemente acelerado, partiendo del reposo...

- **recorre la misma distancia que un cuerpo que se mueve durante el mismo tiempo con velocidad uniforme, a la mitad de la velocidad que la que el primer cuerpo alcanza al final.**
- recorre espacios iguales en tiempos iguales.
- recorre el doble de distancia que un cuerpo que se mueve durante el mismo tiempo con velocidad uniforme, a la mitad de la velocidad que la que el primer cuerpo alcanza al final.
- .alcanza en cada instante una velocidad proporcional a la distancia recorrida.

El estudio del movimiento de Galileo

Una de las principales contribuciones de la física de Galileo fue...

- **descubrir que el movimiento de los cuerpos puede analizarse matemáticamente.**
- descubrir que en el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad depende directamente de la distancia recorrida.
- descubrir que en el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad depende inversamente de la distancia recorrida.
- enfocar el movimiento de caída libre como un problema de hidrostática (aplicando el principio de Arquímedes).

Indique la respuesta INCORRECTA entre las tres primeras (si alguna lo es): La matematización galileana del movimiento incluye...

- la noción de velocidad instantánea.
- la descomposición de un movimiento en sus componentes en direcciones perpendiculares.
- el desarrollo de la ley de los cuadrados (la distancia recorrida depende del cuadrado del tiempo).
- **Todos los enunciados anteriores son verdaderos.**

Una de las innovaciones del método experimental de Galileo fue que...

- Permitía observar lo que ocurría en el movimiento de caída libre si no existía rozamiento
- **Permitía comprobar las predicciones cuantitativas de una hipótesis sobre el movimiento, y no solo sus aspectos cualitativos**
- No requería que los experimentos se realizaran físicamente, porque bastaba con los experimentos mentales.
- No requería asumir ninguna hipótesis sobre la forma matemática del movimiento

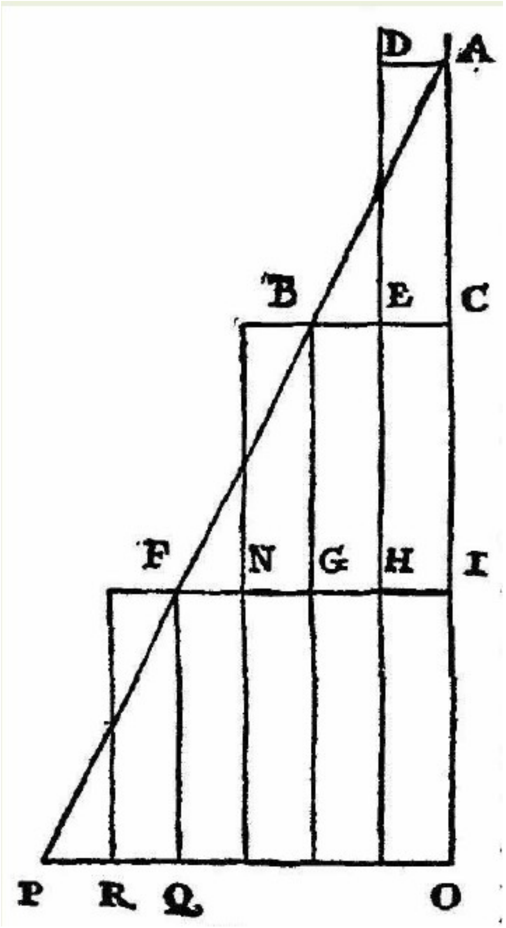
¿Por qué el experimento galileano del plano inclinado es un ejemplo del método experimental característico de la ciencia moderna?

- **Porque nos permite manipular libremente algunos aspectos del experimento y ver cómo cambian las consecuencias.**
- Porque los resultados que se observan son siempre iguales, independientemente de las circunstancias.
- Porque fue el primer experimento científico publicado mediante la imprenta.
- Porque no es necesario realizarlo físicamente, sino que puede deducirse a priori a partir de los principios teóricos.

¿Cuál de las proposiciones a-b-c es FALSA? En los primeros estudios de Galileo sobre el movimiento de caída libre...

- **se adopta la definición de "movimiento acelerado" desarrollada por los Mertonianos.**
- se estudia el movimiento de caída como un caso de hidrostática.
- se define "movimiento acelerado" como aquel en el que la velocidad es proporcional a la distancia recorrida.
- Todas las respuestas son verdaderas.

¿Qué elemento de esta figura representa distancias recorridas?



- La línea oblicua.
- El eje horizontal.
- La altura.
- Los rectángulos

¿Cuál de los siguientes enunciados es FALSO acerca del diagrama aquí mostrado (imagen de la pregunta anterior)?

- La superficie del triángulo ABC es igual a la del rectángulo ADEC, y ambas representan una distancia.
- La línea vertical ACIO representa el tiempo de caída
- **La línea horizontal PRQO representa el espacio total recorrido por el cuerpo al caer**
- Si el cuerpo que cae libremente recorre una unidad de distancia entre A y C, recorrerá cuatro unidades de distancia entre A e I.

¿Cuál de estos hechos fue establecido por Galileo en sus experimentos con el plano inclinado?

- Los cuerpos caen con aceleración constante.
- Las distancias recorridas por un grave son proporcionales al cuadrado del tiempo que lleva cayendo.
- Las distancias recorridas por un grave aumentan como los números impares.
- **Marque esta respuesta si cree que las tres respuestas anteriores son correctas.**

¿Cuál de las proposiciones a-b-c es FALSA? A partir de la "regla de Merton", Galileo calcula que un cuerpo en caída libre recorre...

- en la unidad de tiempo *n*, un número de unidades de distancia igual a *2n-1*.
- un espacio total igual a n^2 unidades de distancia, cuando lleve cayendo *n* unidades de tiempo.
- **un espacio total igual a n^2 unidades de distancia, en la unidad de tiempo *n*.**
- Todas las respuestas son correctas.

¿Cuál de estos fenómenos NO se observa en el experimento del plano inclinado, según Galileo?

- **Una bola cayendo por un plano inclinado recorre un espacio total igual a 2n-1 unidades de distancia (o sea, 1, 3, 5, 7...), cuando lleve cayendo n unidades de tiempo (o sea, 1, 2, 3, 4...).**
- Si una bola empieza a caer por el plano inclinado desde una altura mayor que otra, la primera alcanza una velocidad mayor.
- Si dos bolas caen desde la misma altura en planos con diferente inclinación, alcanzan ambas la misma velocidad.
- Se observan todos los fenómenos anteriores.

¿Cuál de los fenómenos a-b-c NO se observa en el experimento del plano inclinado según Galileo?

- Si una bola empieza a caer por el plano inclinado desde una altura mayor que otra, la primera alcanza una velocidad mayor.
- **Si una bola cae desde la misma altura por dos planos inclinados con diferente inclinación, alcanza mayor velocidad al caer del plano más inclinado.**
- La bola tarda intervalos iguales en atravesar espacios del plano inclinado que están en la proporción 1::4::9::16::25:...:n^2.
- Todos los fenómenos a-b-c se observan, según Galileo, en el experimento del plano inclinado.

Según Galileo, ¿cuál era la causa física de que los planetas girasen en torno al sol? (Si cree que las tres primeras respuestas son verdaderas, marque la nº 4).

- La gravedad.
- **La inercia.**
- El magnetismo.
- Todas las anteriores.

¿Cuál de estos hechos era un argumento a favor, según Galileo, de la conservación del momento (o cantidad de movimiento)?

- **Que el peso de un péndulo tendía a volver a la misma altura de la que partió, independientemente de los obstáculos puestos a la cuerda.**
- Que el período de un péndulo depende de la altura desde la que empiece a caer.
- Que el período de un péndulo es constante, independientemente de la longitud de la cuerda.
- Que una bola cayendo por un plano inclinado llega tanto más lejos cuanto menos vertical sea el plano, siempre que tenga la misma longitud

El experimento con un péndulo, representado en la imagen, le sirvió a Galileo como argumento para formular...

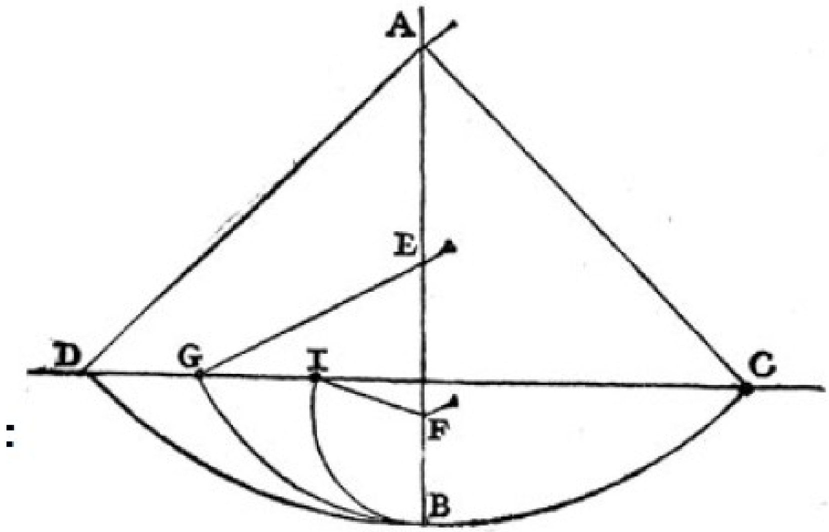


Fig. 46

- La ley de movimiento uniformemente acelerado en el plano inclinado.
- La ley de caída libre.
- **El principio de inercia (o ley de conservación del momento).**
- La regla de Merton

Según Galileo, si un péndulo que está suspendido del punto A lo soltamos desde el punto C... (imagen de pregunta anterior)

- se desplazará en línea recta desde C a D, si no encuentra ningún obstáculo.
- se moverá horizontalmente a partir del punto B
- alcanzará el punto E, si la cuerda encuentra un obstáculo en el punto G.
- **Todas las respuestas anteriores son falsas.**

La ley de caída libre de Galileo predice que, en el vacío...

- todos los cuerpos caen con velocidad uniforme.
- **todos los cuerpos caen con la misma aceleración.**
- los cuerpos más pesados caen más rápidamente que los más ligeros.
- los cuerpos más pesados sufren más resistencia, pero caen a la misma velocidad que los más ligeros.

¿Por qué resultaba fundamental el estudio físico del movimiento de caída de los graves para el desarrollo de la astronomía heliocéntrica?

- **Para poder explicar por qué no notábamos el movimiento de la Tierra.**
- Para poder explicar la retrogradación.
- Todas las respuestas son correctas.
- Para poder explicar por qué es la tierra la que gira alrededor del Sol y no al revés.

¿Por qué resultaba fundamental el estudio físico del movimiento de caída de los graves para el desarrollo de la astronomía heliocéntrica?

- Para poder explicar la retrogradación.
- Todas las respuestas son correctas.
- **Para poder explicar por qué el movimiento de la Tierra no implicaba que los objetos en caída libre no cayeran justo debajo del punto de partida.**
- Para poder explicar por qué es la tierra la que gira alrededor del sol y no al revés.

¿Cuándo se demostró experimentalmente la ley de caída de los cuerpos de Galileo en el vacío?

- Cuando los astronautas llegaron a la Luna y pudieron soltar dos cuerpos de distinto peso para observar cómo caían.
- Lo hizo el propio Galileo, desde la Torre de Pisa.
- Se hizo en vida de Galileo, gracias a la invención de la bomba de vacío por Otto von Guericke.
- **Todas las respuestas anteriores son falsas.**

Según Galileo...

- el movimiento de caída libre es producido por la misma fuerza que mantiene a los planetas en sus órbitas
- en el vacío, todos los cuerpos caerían con velocidad constante y la misma para todos, es decir si no fuera por el rozamiento del aire.
- **el movimiento de caída libre es uniformemente acelerado**
- el movimiento de caída libre es circular, porque, aunque en distancias pequeñas parezca rectilíneo, en realidad va siguiendo la superficie de la tierra.

De acuerdo con la ley de caída de Galileo, la trayectoria de los proyectiles...

- es vertical
- es pendular
- es un plano inclinado
- **es parabólica**

¿Cuál de los enunciados a-b-c es FALSO? La noción galileana de inercia...

- se infiere del principio de que, un cuerpo que ha caído por un plano inclinado, o por un movimiento pendular, tiende a recuperar la misma altura desde la que cayó.
- presupone un movimiento circular, y no rectilíneo.
- se opone a la idea aristotélica de que todo movimiento requiere una causa.
- **Todas las respuestas a-b-c son correctas.**

La relatividad del movimiento significa que...

- **el movimiento de un cuerpo solo puede definirse en relación con otros cuerpos.**
- la velocidad y la aceleración de un cuerpo son relativos al tiempo.
- la cosmovisión galileana es mecanicista.
- la velocidad depende del tiempo.
- si viajamos dentro de una nave, es imposible determinar si nos estamos moviendo o no.
- si sobre un cuerpo no se ejerce ninguna fuerza, se mueve con velocidad constante.

Mecánica Cartesiana

¿Quién indicó por primera vez que el movimiento inercial es rectilíneo y con velocidad uniforme?

- Newton
- Aristóteles
- Galileo
- Descartes

¿Quién formuló por primera vez la moderna ley de la inercia, según la cual, si sobre un cuerpo no se ejerce ninguna fuerza, se moverá indefinidamente en línea recta con velocidad constante?

- Newton
- Kepler
- Galileo
- Descartes

La teoría cartesiana de los vórtices...

- **intentaba explicar el movimiento de los planetas y satélites como el resultado de colisiones**
- permitía predecir con notable exactitud las posiciones de los planetas.
- fue explicada por Newton mediante la Ley de la Gravitación Universal.
- Todas las respuestas son correctas.

¿En qué consiste la "teoría de los vórtices" cartesiana?

- Es una versión matemática de la teoría de Kepler sobre la fuerza magnética que ejerce el Sol sobre los planetas.
- Es una aplicación del principio de inercia.
- **Es un intento de explicar el movimiento orbital de los astros por analogía con el giro del agua en un remolino.**
- Todas las anteriores son correctas.

¿Cuál de estos hechos fue uno de los principales problemas de la mecánica cartesiana para sus contemporáneos?

- **No podía explicar fácilmente cómo pueden existir cuerpos de diferente densidad.**
- Era inconsistente con los resultados del experimento del plano inclinado.
- Era inconsistente con los experimentos de caída libre en el vacío.
- No era fácilmente matematizable.

¿Cuál es la principal diferencia entre la noción de "movimiento inercial" en Galileo y en Descartes?

- Para Galileo, el movimiento inercial es relativo. Para Descartes, es un movimiento en el espacio absoluto.
- **Para Galileo, el movimiento inercial es circular. Para Descartes, es rectilíneo.**
- Para Galileo, el movimiento inercial es sólo el de caída libre. Para Descartes, puede ser cualquier otro movimiento.
- Todas las respuestas son correctas

¿Cuál es la diferencia principal entre la ley de inercia de Galileo y la de Descartes?

- **Según Descartes, el movimiento inercial es rectilíneo, y según Galileo, es circular.**
- Según Descartes, el movimiento inercial es siempre el resultado de alguna colisión; según Galileo, puede deberse a cualquier causa.
- Según Galileo, el movimiento inercial es solo de caída; según Descartes, puede ser cualquier otro tipo de movimiento.
- Todas las respuestas son correctas.

¿Cuál es la principal diferencia entre la mecánica cartesiana y la newtoniana?

- Que la mecánica de Descartes no se basa en ecuaciones matemáticas
- **Que en la mecánica de Descartes la única fuerza admitida es la colisión entre cuerpos.**
- Que la mecánica Newtoniana no puede explicar el movimiento orbital.
- Que la mecánica de Descartes se basa en razonamientos geométricos

Christian Huygens

¿A qué físico se debe la demostración de que la fuerza que ejerce el Sol sobre los planetas depende del inverso del cuadrado de la distancia?

- **Huygens**
- Kepler
- Galileo
- Newton

¿A partir de qué leyes físicas demostró Huygens la ley del inverso del cuadrado?

- De la ley de caída libre de Galileo y de la ley de inercia de Descartes.
- De la ley de caída libre de Galileo y de la segunda ley de Kepler.
- **De la ley de la fuerza centrífuga y de la tercera ley de Kepler.**
- De la ley de la fuerza centrífuga y de la segunda ley de Kepler.

Isaac Newton

Newton nació el mismo año en que murió Galileo. ¿Qué año fue?

- 1622.
- **1642.**
- 1662.
- 1682.

El concepto newtoniano de masa...

- **es una propiedad intrínseca de la materia, diferente de la extensión y del momento (cantidad de movimiento).**
- supone una vuelta a la física aristotélica (hilemorfismo).
- es la inversa del concepto de fuerza.
- explica la ley de inercia.

El concepto newtoniano de masa...

- Es una conjetura contraria a la identificación cartesiana entre "materia" y "extensión".
- Está conceptualmente unido al de "fuerza" a través de la "segunda ley de Newton", pues solo aplicando una fuerza pueden medirse las masas.
- Tiene un aspecto "pasivo" (la "inercia") y otro activo (la "gravedad").
- **Todas las respuestas son correctas.**

En el libro I de los Principia Mathematica...

- se calcula qué movimientos produce una fuerza dada.
- se calcula qué fuerza puede producir un movimiento dado.
- se estudia el movimiento no sometido a fuerza de resistencia.
- **Todas las respuestas son correctas.**

¿Cuál de los enunciados a-b-c es FALSO?

- El libro II de los Principia Mathematica es una refutación de la teoría de los vórtices.
- **La Primera Ley de Newton afirma que la aceleración experimentada por un cuerpo es proporcional a la fuerza ejercida sobre él.**
- La Ley de la Gravitación Universal fue derivada por Newton a partir de las leyes de Kepler.
- Todos los enunciados anteriores son verdaderos.

¿Cuál de estos enunciados es VERDADERO?

- El libro I de los Principia Mathematica explica los movimientos de los planetas.
- **El libro II de los Principia Mathematica investiga los movimientos a través de un medio, según varias leyes de la fuerza de resistencia.**
- El libro III de los Principia Mathematica contiene el enunciado de las tres Leyes de Newton.
- El libro I de los Principia Mathematica expone los fundamentos del cálculo infinitesimal.

¿Qué teorema geométrico se utiliza en la demostración newtoniana de la Segunda Ley de Kepler?

- El principio de inercia cartesiano.
- El teorema de Pitágoras.
- El primer teorema de Tales.
- **Que triángulos con base y altura iguales, tienen áreas iguales.**

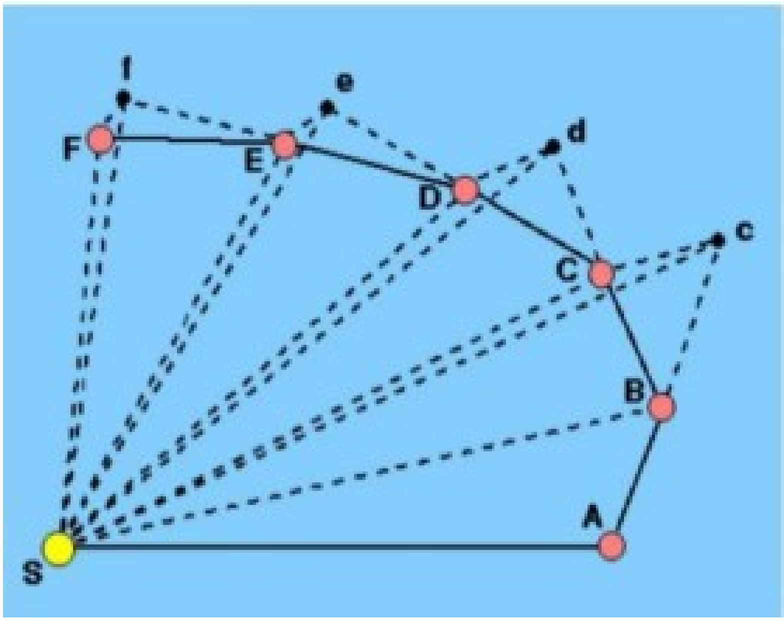
¿Cuál era, según los Principia de Newton, la causa de que dos objetos cualesquiera en el universo se atrajesen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia que los separa?

- La gravedad.
- El magnetismo.
- **No tenía respuesta a esa pregunta.**
- La inercia

¿Qué quería decir Newton con la frase "hypotheses non fingo"?

- Que solo puede conocerse lo que se puede demostrar matemáticamente.
- Que la ley de la gravedad no es una hipótesis, sino algo suficientemente demostrado.
- Que la ley de la gravedad es sólo una hipótesis, que quizá pudiera ser refutada en el futuro mediante nuevos experimentos y observaciones.
- **Ninguna de las otras respuestas es correcta.**

En esta imagen se representa el argumento de Newton para demostrar la segunda ley de Kepler. Indique el enunciado que NO corresponde a un paso de dicha demostración

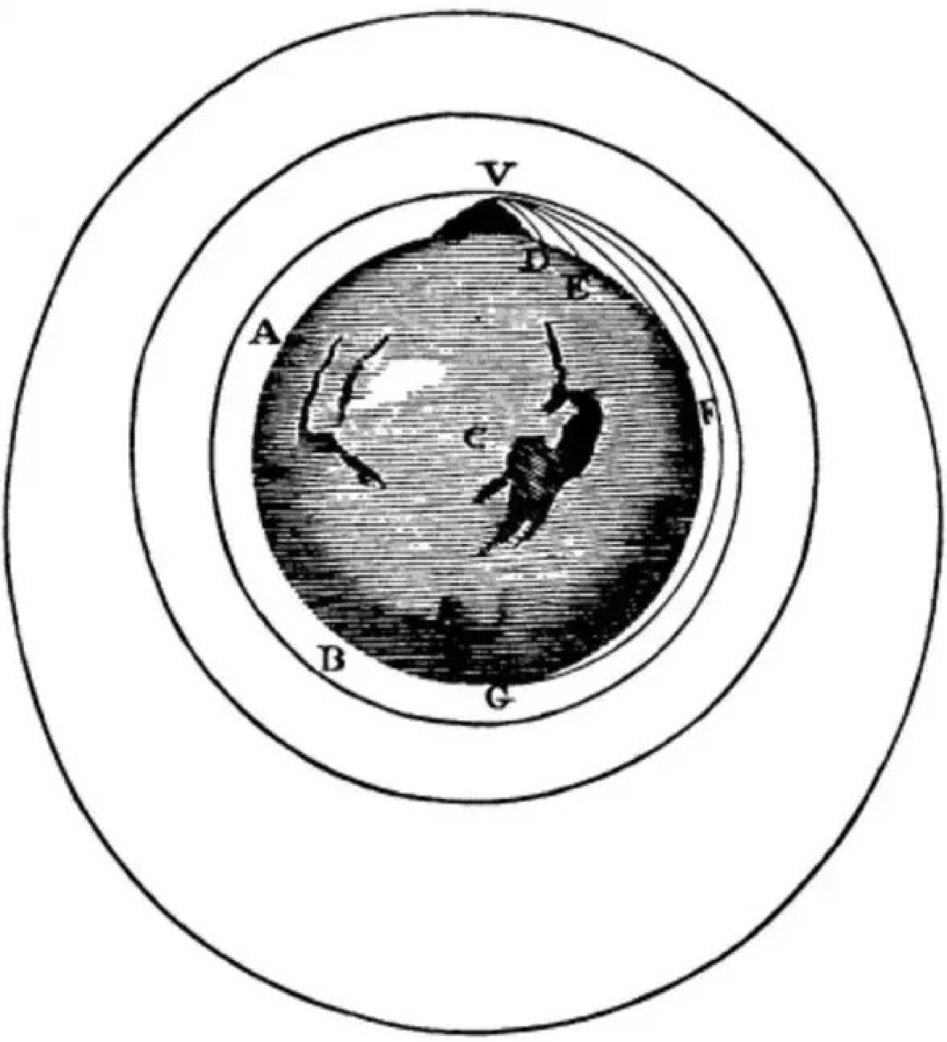


- **Suponemos que, sobre el cuerpo representado por el círculo rosa, se está ejerciendo una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que lo separa del cuerpo S.**
- Si sobre el cuerpo no se ejerciera ninguna fuerza, cuando llegara desde A a B en una unidad de tiempo, continuaría hasta c en la siguiente unidad de tiempo.
- El área del triángulo SBc es igual a la del triángulo SBC.
- El área del triángulo SAB es igual al área del triángulo SBc

¿Qué demuestra Newton mediante este diagrama (imagen de la pregunta anterior, donde el cuerpo representado por el círculo rojo es atraído por una fuerza central, es decir, ejercida siempre desde el mismo punto, en este caso el punto amarillo)?

- La ley de caída libre
- **Que la línea que une ambos cuerpos barrerá áreas iguales en tiempos iguales**
- Que la trayectoria del cuerpo rojo será rectilínea, al ser atraído por una fuerza constante
- La primera ley de Kepler

Según Newton, si disparásemos una bala de cañón horizontalmente (en dirección paralela al suelo) desde lo alto de una montaña (punto V)...



- dejará de experimentar la atracción de la gravedad terrestre si se dispara con una velocidad que le permita volver al punto de partida.
- caerá, como máximo, en el punto G, y si lo lanzamos aún más deprisa, quedará en órbita.
- las otras tres respuestas son falsas.
- caerá inevitablemente en algún punto de la superficie terrestre, independientemente de la velocidad con que lo lancemos, a causa del rozamiento del aire.

Según la física de Newton, ¿por qué la Luna no cae a la Tierra?

- La Luna sí que cae, pero con una velocidad tan pequeña que la Tierra, mientras orbita al ededor del Sol, ya se ha alejado de su posición cuando la Luna se acerca.
- **Porque su velocidad orbital compensa exactamente la atracción gravitatoria que se da entre la Tierra y la Luna.**
- La Luna sí que cae hacia la Tierra, pero en un movimiento parabólico.
- Las otras tres respuestas son falsas.

¿Cómo explica la teoría newtoniana la ley de caída de los graves de Galileo?

- Porque la gravedad que experimenta un cuerpo es constante en todos los lugares del universo.
- **Porque la fuerza gravitatoria que experimentan dos cuerpos distintos es proporcional a sus masas.**
- La teoría de Newton no consiguió explicar la ley de caída de los graves de Galileo; fueron los experimentos con tubos de vacío los que confirmaron dicha ley.
- Señale esta pregunta si cree que todas las demás son verdaderas.

Según la Ley de la Gravedad newtoniana, ¿por qué una manzana cae del árbol, pero la Luna no cae hacia la Tierra?

- **La Luna sí cae, pero al hacerlo en una trayectoria curva, acaba volviendo al punto de partida**
- La Luna sí que cae, pero al estar a una distancia mucho más grande, lo hace con una aceleración tan pequeña que la Tierra ya se ha alejado de su posición cuando la Luna se acerca.
- La Luna no cae porque también es atraída por el Sol.
- Todas las respuestas son falsas.

¿Cómo demuestra Newton que de la Ley de la Gravedad se sigue necesariamente la Ley de Caída de los Graves de Galileo?

- Demostrando que la fuerza con la que la Tierra atrae a un cuerpo es inversamente proporcional a la masa de dicho cuerpo.
- Demostrando que la fuerza de gravedad solo depende inversamente del cuadrado de la distancia, y no de la masa.
- Demostrando que la fuerza con la que la Tierra atrae a un cuerpo es universal, es decir, es la misma para todos los objetos
- **Demostrando que la fuerza con la que la Tierra atrae a un cuerpo depende de la masa de este cuerpo.**

¿De qué modo explica Newton, mediante la Ley de la Gravedad, que es válida la Ley de Caída Libre de Galileo?

- Demostrando que todos los cuerpos son atraídos por la Tierra con la misma fuerza.
- Demostrando que todos los cuerpos son atraídos por la Tierra con la misma velocidad constante
- **Demostrando que cada cuerpo es atraído por la Tierra con una fuerza directamente proporcional a su masa.**
- Todas las respuestas son correctas.

¿De qué modo explica Newton, mediante la Ley de la Gravedad, que todos los cuerpos caen (en ausencia de otras fuerzas aparte de la gravitatoria) con la misma aceleración?

- Demostrando que todos los cuerpos son atraídos por la Tierra con la misma fuerza.
- Demostrando que todos los cuerpos son atraídos por la Tierra con la misma velocidad constante
- **Demostrando que cada cuerpo es atraído por la Tierra con una fuerza directamente proporcional a su masa.**
- Demostrando que cada cuerpo es atraído por la Tierra con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

¿Cómo se demostró por primera vez que la fuerza con la que el sol atrae a un planetas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa?

- **Sustituyendo el valor del período orbital de un planeta (según la 3ª ley de Kepler) en la fórmula de la fuerza centrífuga.**
- Mediante el experimento mental newtoniano de un cañón que dispara una bala desde la cima de una montaña, con velocidades crecientes.
- A partir de la 2ª ley de Kepler, que relaciona la velocidad de un planeta con la longitud de la línea recta que lo une al sol y la superficie barrida por dicha línea recta.
- Demostrando que dos cuerpos son atraídos por otro con una fuerza directamente proporcional a la masa de cada uno.

Sean LGU la Ley de Gravitación Universal de Newton, y LCL la Ley de Caída Libre de Galileo. ¿Cuál de los enunciados a-b-c es VERDADERO?

- LGU es matemáticamente equivalente a LCL (ambas pueden derivarse a partir de la otra).
- **LCL se sigue matemáticamente de LGU, pero no al revés.**
- LGU se sigue matemáticamente de LCL, pero no al revés.
- Todos los enunciados a-b-c son falsos.

Referencias

Relación de imágenes

Lo que sigue es la relación de todas las imágenes insertadas en el presente documento. En el lugar de aparición de cada una de ellas se encuentra como nota al pie la pertinente referencia que da cuenta atributiva del autor original de la misma y la licencia de uso bajo la que se encuentra.

En caso de no encontrarse tal indicación expresa, se trata de imágenes elaboradas por mi en su totalidad o en parte sobre imágenes pertenecientes al dominio público.

Referencias bibliográficas

SOLÍS SANTOS, Carlos; **SELLÉS GARCÍA**, Manuel

- (2008) *“Historia de la ciencia”*

WARDHAUGH, Benjamin

- (2022) *“Las infinitas vidas de Euclides. La historia del libro que forjó nuestro mundo”*

ZAMORA BONILLA, Jesús Pedro:

- (2020) *“Matemática griega 1. Historia general de la ciencia 1. UNED”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=jjyQCymuBtY
- (2020) *“Matemática griega 2. Historia general de la ciencia 1. UNED”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=7ZxLqrxaQoM
- (2020) *“La astronomía griega”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=ondfTzD7bFU
- (2020) *“Pitágoras y Aristarco”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=MKjDOZIQIo4
- (2020) *“La revolución copernicana 1”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=up7Q418Cpxk
- (2020) *“La revolución copernicana 2”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=8ltO7WvInkg
- (2020) *“El origen de la física moderna (Galileo)”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=TaMzhScaOts
- (2020) *“El origen de la física moderna (Newton)”* (videolecciones de la asignatura del grado de filosofía de la UNED) - https://www.youtube.com/watch?v=HLO6CZ7Ltlw