Lógica formal

Víctor Javier Moreno García

Índice de contenidos

Lógica Formal

(Lógica de Enunciados)

Apuntes basados en los libros “Introducción a la lógica formal” de Alfredo Deaño, “Formas lógicas: guía para el estudio de la lógica” de Amparo Díez y Pilar Castrillo, y las clases de Lógica 1 del grado de filosofía de la UNED.

Última actualización: 19/01/24 08:54:58

Verdad y validez. Lenguaje natural y lenguaje formal

La lógica no sólo es un instrumento útil para la filosofía, sino que también ha sido, es y seguirá siendo un lugar especialmente idóneo para plantear alguno de los problemas filosóficos más interesantes.

Lenguaje y metalenguaje

> *«'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', dijo Averroes», escribe Jorge Luis Borges.*
>
> *Dice Hipólito en su obra Refutatio omnium haereseum: «la frase 'el bien y el mal son uno' fue escrita por Heráclito».*
>
> *Es verdad que Valle-Inclán ha escrito: «A bordo de la Dalila, lo recuerdo con orgullo, asesiné a sir Roberto Yones»*

¿Qué tienen en común las tres afirmaciones que acabamos de hacer? Nadie se atrevería a decir que los tres textos hablan del mismo asunto, o que en ellos se menciona a las mismas personas. Y, pese a ello, es innegable que tienen algo en común (además de su artificiosidad).

En todos ellos se da lo que pudiéramos llamar una «**estratificación del lenguaje**» en todos ellos cabe observar la presencia de **distintos planos del lenguaje**. En efecto. Hay, en primer lugar, en cada uno de ellos, una frase —*'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', 'El bien y el mal son uno', 'A bordo de la Dalila, lo recuerdo con orgullo, asesiné a sir Robert Yones'*, respectivamente— que se refiere, o pretende referirse, a la realidad extralingüística, al mundo.

Encontramos, en segundo término, unas expresiones — *'dijo Averroes', 'fue escrita por Heráclito'* y *'Valle-Inclán ha escrito'* — que no se refieren a una realidad ajena al lenguaje—el mal, los poetas, sir Robert Yones—, sino a las frases antes citadas. Son, pues, expresiones que no se refieren propiamente al mundo, sino a otras expresiones. No hablan del mundo, sino de algo que se ha dicho acerca del mundo. Y están, por último, otras tres oraciones —*'escribe Jorge Luis Borges', 'dice Hipólito'* y *'es verdad'* que se refieren, no a los objetos, ni siquiera a las expresiones, antes mencionadas, que se refieren a los objetos, sino a las expresiones que se refieren a las expresiones que se refieren a los objetos. Así, en el caso del tercer ejemplo no decimos que sea verdad que Valle-Inclán asesinó a sir Robert Yones, sino que es verdad que dice que lo hizo.

En los tres ejemplos propuestos hay, pues:

- un nivel de lenguaje (L_0) donde nos referimos a objetos; a objetos no lingüísticos.
- Otro nivel (L_1) en el que no se habla de objetos, sino de las expresiones del nivel L_0 .
- Y un tercer nivel (L_2) en el que hacemos referencia a las expresiones del nivel L_1 .

<<'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor'	*dijo Averroes >>,*	*escribe J. L. Borges*
L_0	L_1	L_2

En rigor, por respecto a un determinado nivel de lenguaje —el L_2 , por ejemplo—, todos los niveles inferiores (en este caso el L_0 y el L_1) se consideran como un único nivel.

Es precisa tener clara la distinción entre lenguaje y metalenguaje.

- **Lenguaje:** conjunto de recursos expresivos que empleamos para hablar de cierto ámbito de la realidad. Una de las cosas de las que podemos hablar en el lenguaje es del propio lenguaje. Este lenguaje del que hablamos recibe el nombre de **lenguaje-objeto**
- **Metalenguaje:** es el lenguaje que empleamos para hablar del lenguaje-objeto. Igual que en el lenguaje, ha de tener palabras para nombrar las entidades que constituyen el lenguaje objeto que no son sino expresiones lingüísticas.

Ello no obsta, sin embargo, para que pueda decirse en general que el que una expresión pertenezca a un metalenguaje o al lenguaje-objeto depende del puesto concreto que esa expresión ocupe dentro de un determinado contexto. Veamos un ejemplo con las nociones de verdad y falsedad. En el enunciado siguiente, la expresión *'es falso'* pertenece al lenguaje-objeto por respecto a la expresión *'es verdadero*'.

$$\underbrace{\textit{Es verdadero que}}_{L_1}\ \underbrace{\textit{'Abulcasim ha estado en China', es falso}}_{L_0}$$

En cambio, en el enunciado (que viene a decir lo mismo que el anterior, a saber, que *'Abulcásim no ha estado en China'*) la expresión *'es verdadero'* pertenece al lenguaje-objeto por respecto a *'es falso'* (si bien cabría decir que pertenece al metalenguaje por respecto a la expresión *'Abulcásim ha estado en China'*).

$$\underbrace{\textit{Es falso que}}_{L_1}\ \underbrace{\textit{'Abulcásim ha estado en China' es verdadero}}_{L_0}$$

Usamos el lenguaje casi siempre para referirnos a los objetos no lingüísticos. Usamos primariamente el lenguaje en lugar de los objetos. Pero hay ocasiones en que usamos el lenguaje para hablar acerca del lenguaje (como se hace sistemáticamente, dicho sea de paso, en la lingüística). Usamos entonces un metalenguaje para mencionar las expresiones de un lenguaje. Los conceptos de uso y mención son paralelos a los de lenguaje y metalenguaje. Cuando decimos, por ejemplo,

"escuchaba la lluvia de las cabelleras en los cristales de mi indolencia"

lo que estamos haciendo es usar las palabras para tratar de expresar una determinada —y refinada— sensación. Cuando decimos, en cambio,

"la expresión "democracia popular' es una redundancia"

estoy, sin duda, usando ciertas palabras —estoy usando todas las palabras que he empleado para decir eso—, pero lo interesante aquí es que algunas de esas palabras —concretamente, las palabras *'democracia'* y *'popular'*—, además de estar siendo usadas, están siendo mencionadas. Las hemos usado para mencionarlas; las hemos empleado para hablar acerca de ellas mismas.

Nos limitamos a usar una palabra cuando nos servimos de ella **como signo**, es decir, para aludir a algo distinto de ella misma (como cuando empleamos la palabra *'viento'* para referimos a un determinado fenómeno de la naturaleza, o como cuando empleamos el término *'priscilianistas'* para aludir a los partidarios de cierta herejía). Mencionamos, en cambio, una palabra —además de usarla, o usándola con ese fin— cuando nos referimos a la palabra misma, cuando nos detenemos en ella, sin ir más allá. La señal de esta detención en la palabra —la indicación de que esta vez no nos referimos a la cosa, sino que «nos quedamos» en el lenguaje— son las **comillas**:

'Amar' es un verbo de significado muy complejo

Al mar, los marineros le llaman 'la mar'

Etc

Ejemplos con la palabra mesa:

1. *El libro está encima de la mesa.*
2. *La mesa lo decidirá.*
3. *'Mesa' tiene distintas acepciones.*
4. *'Mesa' tiene dos sílabas.*

Mientras que en (1) y (2) 'mesa' es el nombre de una entidad, en (3) y (4) 'mesa' es el nombre de una expresión lingüística del lenguaje-objeto. Para evitar confusiones, conviene no emplear un mismo signo como palabra del lenguaje-objeto y como nombre de una palabra del lenguaje-objeto. Existe consenso generalizado en no nombrar a las palabras mediante ellas mismas y en atenerse a la convención de poner entrecomilladas aquellas que son nombres de sí mismas.

En lo que sigue emplearemos el español como metalenguaje para hablar de los distintos lenguajes formales. Entonces deberíamos escribir las expresiones del lenguaje formal entre comillas:

'$(p \lor q) \to p$' *es un condicional válido*

Sin embargo, al ser distintos lenguaje-objeto y metalenguaje, apenas hay posibilidades de confusión, y la mayoría de las veces nos ahorraremos las comillas.

EJERCICIO 0: Especificar qué palabras se usan como nombres en cada una de ellas y reescribirlas usando las comillas para distinguir las palabras que son nombres de las que no lo son:

A) *Los términos "**empírico**" y "**experiencia**" son demasiado confusos y están demasiado alejados de nuestra experiencia.*

B) *En "**como como como como, engordo**" aparece la palabra "**como**" con tres acepciones distintas.*

C) *Por "**dialéctica**" se entiende hoy la dialéctica de Hegel incorporada a la obra de Marx y transformada en materialismo dialéctico.*

D) *La palabra "**significado**" tiene más de un significado. El significado que analiza el principio de verificabilidad es el significado cognitivo de las proposiciones.*

Habría ahora que generalizar y hablar del uso y la mención de expresiones —incluyendo no sólo palabras de todo tipo, sino también frases enteras, simples o compuestas. En realidad, cada vez que empleamos un metalenguaje estamos usando las expresiones de éste y, al propio tiempo, estamos usando y a la vez mencionando las expresiones del lenguaje-objeto de que se trate.

Sintaxis, semántica y pragmática

Tomemos las seis afirmaciones siguientes:

1. *En la frase 'era del año la estación florida' hay un hipérbaton.*
2. *Por 'conjunto vacío' se entiende, en teoría de conjuntos, el conjunto que carece de miembros.*
3. *Benjamín Péret escribía a veces en un lenguaje especial en el que, por ejemplo, la palabra francesa 'porte-feuilles' significaría, traducida al castellano, 'estanque cubierto de nenúfares'.*

4. *El orden de las palabras en 'de en Mancha la un lugar" no es el mismo que en el comienzo del Quijote.*
5. *Alguien podría pensar que la palabra 'algoritmo' viene del griego 'αλγο' ('dolor') y 'αριθμό' ('número"), y que significa 'número doloroso", o bien 'dolor numérico'.*
6. *Por increíble que pueda parecer, personas que pasan por peritos en psicoanálisis pronuncian la palabra 'libido' (del latín libido-inis) como si fuera esdrújula, y no llana.*

Ahora bien: ¿con qué finalidad las hemos mencionado? Una lectura atenta de los seis ejemplos revela que en conjunto nos han guiado tres finalidades distintas, una por cada dos ejemplos.

- En los casos 1 y 4 hemos mencionado sendas sartas de palabras para hablar acerca de las **relaciones entre ellas**, para hablar de ellas sin salimos del lenguaje → **sintaxis**
- En los casos 2 y 5, hemos mencionado una expresión para relacionarla con **lo que ella designa → semántica**
- Por último, en los casos 3 y 6 hemos mencionado una expresión para **relacionarla con los sujetos que la utilizan → semántica**

Semiótica

Denominamos «**semiótica**» a la ciencia que se ocupa del estudio de los signos, o de los lenguajes en cuanto sistemas de signos. La semiótica se divide en sintaxis, semántica y pragmática.

- La **semántica**, por su parte, será la disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello que éstos designan, entre los signos y aquello de lo cual hablamos por medio de ellos (entre los nombres propios y las entidades individuales a que se refieren, o entre los enunciados y los hechos que pretenden describir, por ejemplo): cuando decimos que la palabra '*algoritmo*' no significa '*dolor numérico*' estamos haciendo semántica de esa expresión.

  Hacemos abstracción del hablante, y nos limitamos a examinar la relación entablada entre los signos que componen un lenguaje y aquellas entidades a las que esos signos, precisamente por serlo, apuntan: una palabra designará, por ejemplo, un tipo de fenómeno atmosférico, otra un sentimiento, una tercera nombrará a un famoso asesino

- La **pragmática** sería aquel tipo de indagación semiótica en la que entra en juego la consideración de las relaciones entre los elementos de un lenguaje y los sujetos —individuos o comunidades lingüísticas— que emplean ese lenguaje como medio de comunicación.

  Nos interesamos por el lenguaje en cuanto forma de conducta, en cuanto actividad de un sujeto o de un grupo de sujetos

- La **sintaxis** será el puro estudio de las relaciones de los signos entre sí, la teoría de la construcción e identificación de las secuencias de signos bien formadas: decir que '*de en Mancha la un lugar'* están mal ordenadas, es una observación de carácter sintáctico.

  Nos abstraemos de todo aquello que no sea la pura materialidad de los signos, a fin de poder estudiar las nudas relaciones entre ellos: prescindimos del sujeto hablante, prescindimos de la referencia de las expresiones a algo ajeno a ellas; nos limitamos a considerar aisladamente la estructura de las cadenas de signos. Decimos que en '*era del año la estación florida*' hay un hipérbaton: alteración (poética) del orden habitual de las expresiones.

  - Es tarea propia de la sintaxis la construcción de **cálculos**. ¿A qué llamamos un cálculo?

La noción de cálculo

Dice Wittgenstein que el simbolismo de la química o la notación del cálculo infinitesimal, por ejemplo, son «suburbios de nuestro lenguaje».

> *«Podemos considerar nuestro lenguaje como una ciudad antigua: un laberinto de pequeñas calles y plazas, de casas viejas y nuevas, y de casas con añadidos que datan de épocas distintas; y todo esto rodeado de una multitud de barrios nuevos con calles rectas regularmente trazadas y casas uniformes»*

La **distinción entre lenguajes naturales y lenguajes artificiales** es a primera vista muy clara. Los lenguajes naturales los heredamos. Los lenguajes artificiales los construimos. Los lenguajes naturales son las lenguas, creadas y recreadas constantemente por la especie en el transcurso de muchos siglos y transmitidas a cada individuo en el transcurso de pocos años. Los lenguajes naturales son los que hablamos todos los días, esos complejos instrumentos de comunicación que sólo las gramáticas generativas parecen hoy capaces de describir de modo relativamente adecuado, esos lenguajes que, dicho de manera rudimentaria, se componen, en el fondo, de un léxico -finito- y de un conjunto de reglas que permiten combinar hasta el infinito los elementos de ese léxico.

Los lenguajes son, según diría Wittgenstein, *«una forma de vida»*. Hablar es parte de nuestra historia natural como pasear, como beber o como jugar. Por eso, por ser tan natural e inevitable, por constituir un componente tan profundo de nuestro comportamiento, por esa razón es el lenguaje tan huidizo, tan difícil de comprender, de aislar, de cercar científicamente.

En rigor -y la metáfora de Wittgenstein apunta verosímilmente a este hecho- los lenguajes naturales han sido también construidos, sólo que a ritmo lento, a lo largo de la secular relación del hombre con su medio: su riqueza, su ambigüedad, su infinitud de matices no son sino el reflejo de la riqueza de esa relación. Y un producto de esa relación —un resultado de la necesidad de controlar científicamente el medio— son también los lenguajes artificiales. Estos 'lenguajes artificiales' son por lo general lenguajes de precisión, medios artificiosos de expresión construidos por los científicos a fin de poder formular con mayor justeza las relaciones entre los objetos estudiados por sus ciencias respectivas. **Hablar es esencialmente recrear el lenguaje**. La explotación de esta posibilidad de recreación constante que el lenguaje ofrece se manifiesta de una manera pura y premeditada en la tarea de los constructores de lenguajes con fines científicos. Los constructores de lenguajes artificiales no hacen sino encauzar, dirigir, prolongar el lenguaje en beneficio de las distintas ciencias, orientando sistemáticamente en un determinado sentido las posibilidades de expansión continua que el lenguaje lleva en su seno como su rasgo más peculiar y profundo.

Los cálculos son, naturalmente, artificiales. Los cálculos no son, propiamente, lenguajes.

Un cálculo es una pura estructura, un **sistema de relaciones** que se compone de lo siguiente:

1. Un **conjunto de elementos primitivos**, llamados a menudo «**símbolos elementales**».
    - Constituyen las piezas a manejar dentro del sistema.
    - Debe definirse de manera efectiva (que podamos decidir, ante un objeto cualquiera, si es o no es miembro del conjunto en cuestión). Dos procedimientos de definición:
        - **Enumerar exhaustivamente los elementos** de ese conjunto: *{2, 4, 6, 8, 10}*, por ejemplo. Es laborioso cuando los elementos del conjunto son muchos y variados, y resulta inaplicable cuando los elementos del conjunto son infinitos.
        - **Definir el conjunto por medio de una propiedad** lo suficientemente precisa como para permitir una decisión en el sentido indicado: *«El conjunto de los enteros positivos pares menores que 12»*.

2. **Un conjunto de reglas —«reglas de formación» o «de construcción»**
   - Establecen las combinaciones correctas posibles de esos símbolos elementales.
   - El conjunto de las reglas de formación *'ha de proporcionar una definición efectiva de la noción de 'expresión bien formada del cálculo'*, de modo que sea posible, ante cualquier combinación de símbolos, decidir si es o no una fórmula bien construida.
     - En los lenguajes naturales hay también reglas de formación que permiten combinar los elementos del vocabulario para componer con ellos oraciones. Lo que ocurre es que en los lenguajes naturales esas reglas no están formuladas: el hablante de una lengua las aplica implícitamente, y sólo se hacen explícitas (sistemáticamente) cuando se elabora la gramática de esa lengua, o bien (ocasionalmente) cuando alguna construcción le resulta «extraña» al hablante y le incita a preguntarse por las reglas que le permitirían calificarla de correcta o incorrecta.
   - Las reglas de formación de oraciones en los lenguajes naturales, al estar implícitas, son defectivas en el sentido de que permiten la entrada de expresiones que ningún hablante aceptaría como ejemplos de uso natural del lenguaje y que, sin embargo, están correctamente construidas.
   - Por otra parte, la transgresión de las reglas de los lenguajes naturales tiene (estéticamente, por ejemplo) perfecto sentido. Así, Chomsky habla del *«estudio de la desviación de las reglas como medio estilístico»*.
3. **Un conjunto de «reglas de transformación»**.
   - Permiten transformar una combinación bien construida de símbolos en otra combinación que resultará igualmente bien construida. Como los conceptos de símbolo primitivo y de fórmula o expresión bien formada, el concepto de transformación ha de quedar definido de una manera efectiva, en el sentido de que ha de ser posible en todos los casos dictaminar si una transformación ha sido efectuada correctamente.
   - Los lógicos han comparado a menudo los cálculos con los juegos, sobre todo con el del ajedrez. En efecto: los símbolos primitivos corresponderían a las piezas del juego. Dado un objeto cualquiera podríamos decidir si se trata o no de una pieza de ajedrez: ante una máquina de vapor, por ejemplo, diríamos que no.

Al dejar de manejar formalmente el puro cálculo y pasar a interpretar sus símbolos se convierte a éste en un lenguaje. No se trata de un lenguaje natural, sino de un **lenguaje formalizado**, un lenguaje con estructura de cálculo, un lenguaje en el que no sólo es artificial el vocabulario, sino también —y esto es lo esencial— la sintaxis.

Así pues, aunque en la práctica los cálculos se construyen a menudo pensando en sus posibles aplicaciones (o aplicación concreta), hay que señalar que, desde el punto de vista teórico, son absolutamente independientes del lenguaje formalizado que se pueda obtener interpretándolos.

Entenderemos la **lógica como un conjunto de lenguajes formalizados**, es decir, como un conjunto de cálculos a los que se da una interpretación en el campo de investigación que, por lo menos desde Aristóteles, constituye el objeto de la lógica. De entre todos los cálculos que podemos construir hay algunos que por su especial estructura y su buen rendimiento son particularmente aptos para ser aplicados aun ámbito específico de problemas, el ámbito de los problemas lógicos.

La lógica, que durante más de veinte siglos ha consistido en una suma mal organizada de reflexiones acerca de las reglas formales del razonamiento, expresadas casi siempre en el lenguaje natural, constituye, en su forma contemporánea, la presentación formalizada de nuestro conocimiento acerca de ese determinado tema.

La idea de lógica formal

Algunos psicólogos han señalado que, en el curso de su desarrollo psíquico, el niño atraviesa una etapa caracterizada, entre otros rasgos, por la presencia de una *«orientación de espíritu»* animista, entendiendo por animismo la atribución de vida y conciencia a objetos inanimados.

Ahora bien: de todos es sabido que muchas de las características tenidas por exclusivas de la mentalidad infantil (el egocentrismo, tanto epistemológico como moral, por ejemplo) no desaparecen con la edad, sino que persisten en el adulto bajo formas a veces más refinadas. Cuando alguien, en su delirio, habla de *«física aria»* y *«física judía»*, o de *«ciencia proletaria»* y *«ciencia burguesa»*; cuando alguien, en concreto, emite una sarta de sonidos medianamente articulados que podría interpretarse en el sentido de que la lógica es una ciencia contrarrevolucionaria, estamos en presencia de una conducta animista de la mejor ley. La lógica no es ni un baluarte de la reacción ni una palanca para la edificación del socialismo.

La lógica es una ciencia, y las ciencias son, en principio, entidades políticamente disponibles, instrumentos ó medios de los que podemos servirnos con diversos fines. Son muchas las definiciones que podrían darse y se han dado de la lógica. Suele decirse que **el principal objetivo de la lógica es ofrecer una explicación de la noción de inferencia o argumento válido**. La lógica se ocupa de la justificación y crítica de la inferencia, de determinar su validez formal, que no su verdad empírica.

> la lógica es la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia.

Inferencia / Argumento

Nos permitiremos considerar '**inferencia**' como sinónimo de '**razonamiento**' o '**argumentación**'.

El razonamiento es un tipo de pensamiento cuyo rasgo característico es que en él se produce siempre el paso de una o más afirmaciones que tomamos como punto de partida a una afirmación que se sigue de aquellas. Lo específico de un razonamiento o **inferencia** es que **consiste en derivar una conclusión a partir de unas premisas**. Eso es razonar. Recordar, por ejemplo, o imaginar son también formas de pensamiento, pero no formas de razonamiento.

Es preciso distinguir entre el razonamiento como actividad de un sujeto (el acto de razonar) y el razonamiento en cuanto producto o resultado de esa actividad. Del razonamiento en la primera acepción se ocuparía la psicología del pensamiento en uno de sus capítulos. El razonamiento como resultado (plasmado en el lenguaje) es el objeto material de la lógica.

- **Inferencia o argumento:** conjunto de enunciados pertenecientes a un lenguaje previamente especificado en el que la verdad de uno de ellos (la **conclusión**) se puede justificar en la verdad de los otros (las **premisas**).

Enunciados

- **Enunciado:** clase de oraciones de las que siempre cabe preguntar, con buen sentido, si son verdaderas o falsas

No es lo mismo que una oración, ya que debido a palabras ambiguas y cambios de contexto, una misma oración puede realizarse para enunciados distintos; lo contrario también ocurre, distintas oraciones para un mismo enunciado. Sin embargo, salvando estas ambigüedades pueden usarse como sinónimos o equivalentes.

"Cada oración tiene un sentido (..) pero no toda oración muestra algo (apophantikós), sino sólo aquella que puede ser verdadera o falsa"

Aristóteles *(De Interpretatione)* llama a estas oraciones **oraciones apofánticas**. También podemos referirnos a ellas como **oraciones declarativas**. Al uso del lenguaje cuando lo empleamos para hacer oraciones verdaderas o falsas, lo llamamos, desde Aristóteles **uso apofántico**. (de 'απόφασις', declaración, enunciación).

«Todo discurso ('λόγος') es significativo (...). Pero no todo discurso es apofántico, sino sólo aquel en el que se da el ser, verdadero o falso. No se da esto en todos, pues, por ejemplo, un ruego no es ni verdadero ni falso».

La lógica actual no se ocupa exclusivamente, aunque sí básicamente, del discurso apofántico, es decir, de aquel tipo de discurso caracterizado porque sus enunciados tienen forzosamente un valor de verdad. A este tipo de discurso se le llama también enunciativo, declarativo, representativo, indicativo, descriptivo, asertórico, aseverativo, etc.

1. *La vida dura menos que un parpadeo.*
2. *Aristóteles es el padre de la lógica*
3. *Nadie es tan malo como para querer parecerlo*

No todo puede considerarse un enunciado. Las preguntas, interjecciones, imperativos... no pueden categorizarse como verdaderos o falsos. Ejemplos de oraciones que no son enunciados:

1. *¿Qué debemos hacer?*
2. *No cuentes conmigo.*
3. *Coged desde hoy mismo las rosas de la vida.*

Otras terminología para los enunciados son

- '**sentencia**' (anglicismo),
- '**juicio**' en la lógica tradicional, que alude al acto psíquico de juzgar, pero también para referirse al resultado de tal acto, lo juzgado,
- '**proposición**' más ambiguo, con varios significados:
    - Sinónimo de oración declarativa dotada de sentido
    - Sentido o significado de una oración declarativa dotada de sentido. Este es el modo en que Frege emplea su palabra *'pensamiento'*, que para él es el sentido de una oración declarativa → Algunos piensan que las portadoras de verdad o falsedad no son en realidad las oraciones, sino las proposiciones (Quine).

Una mera consecución de enunciados no es una inferencia. Para que lo sea es necesario presentar uno o más enunciados (premisas) como razón o fundamento de otros (conclusión), que en la formalización se coloca siempre como el último enunciado de la secuencia. En lenguaje natural no lo hará necesariamente en dicha posición, y en ocasiones se adelanta a las premisas:

No hay que tener miedo de dejar esta vida, si los dioses existen, pues éstos ningún mal podrán hacerte (Marco Aurelio)

O aparece en el medio:

En la Edad Media y en el Renacimiento el expediente usual para liberarse de los judíos era el exilio. A la aniquilación física sólo se llegó en la 'ilustrada' época moderna. Por consiguiente, es discutible que quepa hablar de progreso moral, habida cuenta de que aniquilar es un acto más grave que obligar a exiliarse.

Y otras veces la conclusión ni siquiera aparece enunciada por resultar obvia:

> *Cuanto más noble y perfecta es una cosa, tanto más tardíamente llega a la madurez. Un hombre alcanza la madurez de su poder de razonamiento y de sus facultades mentales no antes de los veintiochos años; la mujer a los dieciocho (Schopenhauer, 'Sobre la mujer')*

Normalmente, un argumento del lenguaje natural incluye expresiones que nos sirven para identificar bien la conclusión, bien las premisas del mismo:

- Seguidas por la **conclusión**: *'por consiguiente', 'por tanto', 'luego', 'de donde se deduce'*
- Seguidas por **premisas**: *'puesto que', 'dado que', 'ya que'*

EJERCICIO 1: Determinar cuáles de los siguientes textos contienen una inferencia, e identificar la conclusión de la misma para los casos que la contengan:

A) *La filosofía no es una disciplina al lado de las ciencias. Si la meta de las ciencias es hallar verdades expresables en proposiciones, la tarea de la filosofía es en cambio clarificar esas proposiciones. Los resultados de la filosofía no son proposiciones filosóficas sino clarificaciones de proposiciones filosóficas (Wittgenstein, Tractatus).*
   - Hay inferencia. Conclusión: *"la filosofía no es una disciplina al lado de las ciencias"*

B) *Yo no puedo dudar de mi propia existencia como ser pensante. Puedo dudar de la existencia de mi propio cuerpo y de todas las demás cosas físicas. Por tanto, en tanto que ser pensante soy realmente distinto de mi cuerpo y podría existir con completa independencia de él o de cualquier cosa física (Descartes, Discurso del método)*
   - *Ha*y inferencia. Conclusión: *"En tanto que ser pensante soy realmente distinto de mi cuerpo y podría existir con completa independencia de él o de cualquier cosa física"*

C) *La muerte no es nada terrible, pues si lo fuera, así se lo habría parecido a Sócrates (Epicteto).*
   - Hay inferencia. Conclusión: *"la muerte no es nada terrible"*

D) *Estamos tejidos de idéntica tela que los sueños y nuestra corta vida se cierra con un sueño (Shakespeare).*
   - No hay inferencia. No hay relación ni conclusión derivada entre los enunciados.

E) *4 es divisible por 2, ya que todo número par es divisible por 2.*
   - Hay inferencia. Conclusión: "*4 es divisible por 2*".

EJERCICIO 2: Para cada una de las siguientes piezas discursivas, determinar cuál es el argumento que se intenta proponer en ellas, identificando en cada caso la(s) premisa(s) y la conclusión:

A) *El argumento creacionista es todo él poco más que un intento de falsar la evolución presentando supuestas contradicciones entre sus partidarios. Su propuesta creacionista es, dicen, 'científica' porque sigue el modelo popperiano de tratar de echar abajo la evolución. Sin embargo, el argumento de Popper ha de emplearse en ambas direcciones. Uno no se convierte en científico por el simple acto de tratar de falsar otro sistema científico, sino que tiene que presentar un sistema alternativo que también satisfaga el criterio de Popper*

-que sea también en principio falsable. El 'creacionismo científico' es una expresión autocontradictoria, un sinsentido, precisamente porque no puede falsarse. Puedo imaginar observaciones y experimentos que refutarían cualquier teoría evolucionista que conozca, pero no puedo imaginar qué datos podrían llevar a los creacionistas a abandonar sus creencias. Los sistemas imbatibles son dogmas, no ciencia. (Stephen Jay Gould, "Evolution as Fact and Theory")

- Conclusión: *El 'creacionismo científico' es una expresión autocontradictoria, un sinsentido, precisamente porque no puede falsarse.*

B) *Los materiales de la naturaleza (aire, tierra, agua) que permanecen intocados por el esfuerzo humano no pertenecen a nadie ni son propiedad de nadie. De aquí se sigue que una cosa sólo puede convertirse en propiedad de alguien si éste la trabaja para cambiar su estado natural. De donde concluyo que todo lo que un hombre mejora con el trabajo de sus manos y de su cerebro le pertenece a él y sólo a él. (Locke, Segundo tratado sobre el gobierno)*

- Conclusión: *todo lo que un hombre mejora con el trabajo de sus manos y de su cerebro le pertenece a él y sólo a él*

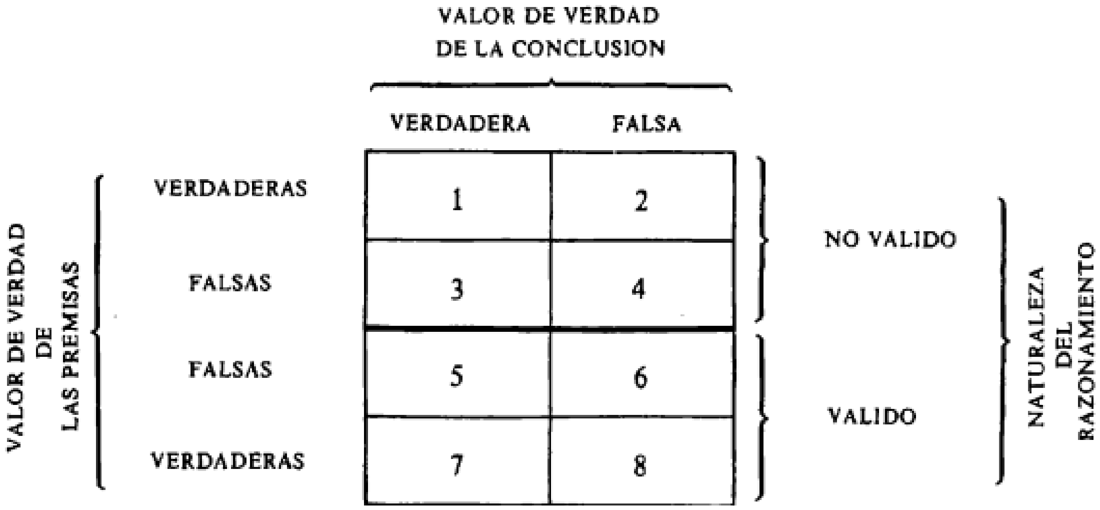
C) *Me parece que los únicos objetos de las ciencias abstractas o de la demostración son la cantidad y el número, y que todos los intentos de extender la clase más perfecta de conocimiento humano más allá de estos límites son mera sofistería e ilusión... Todas las demás investigaciones de los hombres conciernen sólo a cuestiones de hecho y existencia... Si procediéramos a revisar las bibliotecas convencidos de estos principios, ¡qué estragos no haríamos! Si tomamos cualquier volumen de teología o metafísica escolástica, por ejemplo, preguntemos: "¿Contiene algún razonamiento abstracto sobre la cantidad y el número?" No. "¿Contiene algún razonamiento experimental acerca de cuestiones de hecho o existencia?" No. Tírese entonces a las llamas, pues no puede contener más que sofistería e ilusión. (Hume, Investigación sobre el conocimiento humano)*

- Conclusión: *Todo volumen de teología o metafísica escolástica debe ser tirado a las llamas, pues no puede contener más que sofistería e ilusión.*

Verdad y validez. Validez formal

Puesto que lo que constituye un razonamiento es la relación que en él se da entre unos enunciados que se toman como premisas y otro enunciado que resulta como conclusión, parece razonable dividir los razonamientos según la índole de esa relación: **razonamientos válidos y razonamientos no válidos**. Siendo la validez del razonamiento referida a su validez 'formal'.

En el lenguaje ordinario se emplean a menudo expresiones como *'no me parece compatible con lo anterior decir ahora que...'*, *'después de haber defendido tal cosa, no me sorprende que ahora defienda tal otra'*, *'¿qué tiene de extraño, a la vista de tales acontecimientos, que...?'*, *'no es lógico que...'*, y otras muchas por el estilo. Hablamos también a veces de *«coherencia»*, *«consecuencia»*, *«lógica interna»*, etc. El uso de expresiones de este tipo parece sugerir la idea de que en el pensamiento natural está **implícita una distinción entre verdad y validez**, entre, por una parte, la validez —la corrección formal— de un razonamiento, y, por otra parte, el hecho de que sus premisas, su conclusión, o ambas, sean verdaderas.



1. (premisas y conclusión verdadera; razonamiento no válido):

   Si San Pablo era monoteísta, entonces Sócrates y Yantipa no contrajeron matrimonio por el rito ortodoxo griego.

   Es así que Sócrates y Yantipa no contrajeron matrimonio por el rito ortodoxo griego

   Luego San Pablo era monoteísta

2. (premisas verdaderas; conclusión falsa; razonamiento no válido):

   Algunos poetas escribieron también libros de ensayo

   Catulo era poeta.

   Luego Catulo escribió libros de ensayo.

3. (premisas falsas; conclusión verdadera; razonamiento no válido):

   Todos los psicólogos conductistas son partidarios del psicoanálisis.

   Watson era partidario del psicoanálisis.

   Luego Watson era partidario del conductismo.

4. (premisas falsas; conclusión falsa; razonamiento no válido):

   Si Richard Strauss compuso Metamorfosis, entonces Mahler es autor de El buque fantasma.

   No es así que Richard Strauss compuso Metamorfosis.

   Luego Mahler es autor de El buque fantasma.

5. (premisas falsas; conclusión verdadera; razonamiento válido):

   Todos los revolucionarios usan uniforme.

   Mussolini no usaba uniforme.

   Luego Mussolini no era revolucionario.

6. (premisas y conclusión falsas; razonamiento válido):

   Si Lewis Carroll es el autor de la Imitación de Cristo, entonces Stalin fue un famoso teólogo de la Contrarreforma.

   Es así que Lewis Carroll es el autor de la Imitación de Cristo.

   Luego Stalin fue un famoso teólogo de la Contrarreforma.

7. (premisas y conclusión verdadera; razonamiento válido):

   Todo número entero positivo es divisible por 1.

   7 es un número entero positivo.

   Luego 7 es divisible por 1.

8. (premisas verdaderas; conclusión falsa; razonamiento válido):

   No existen razonamientos de tipo 8

No hay razonamientos válidos que tengan premisas verdaderas y conclusión falsa. Precisamente se dice que un razonamiento es válido cuando, si sus premisas son verdaderas, necesariamente su conclusión lo es también. El razonamiento que hemos puesto como ejemplo de los de tipo 6 es un razonamiento válido, pese a que sus premisas y su conclusión sean falsas. Por su parte, el razonamiento que hemos puesto como ejemplo de los de tipo 1 es no-válido, aun cuando sus premisas y su conclusión sean verdaderas.

¿Por qué es válido el razonamiento de tipo 6? Porque si sus premisas fueran verdaderas, entonces también lo sería su conclusión. Los ejemplos que hemos inventado intentan ilustrar la siguiente idea (importante, que sin poseerla es imposible entender qué es la lógica formal): la idea de que

la validez de un razonamiento es independiente de la verdad de sus premisas y su conclusión

Puede haber razonamientos cuyas premisas y cuya conclusión sean verdaderas y que, sin embargo, sean no-válidos. Y puede haber razonamientos que sean válidos, pero que tengan premisas y conclusión falsas. Lo decisivo es comprender que un razonamiento es válido cuando es imposible que, siendo verdaderas sus premisas, sea falsa su conclusión. Que las premisas sean de hecho verdaderas o no lo sean, es otra cuestión; una cuestión que cae fuera de la lógica.

Averiguar si es verdad que Lewis Carroll escribió la *Imitación de Cristo* no es cosa de la lógica, sino de la historia de la literatura. Que el 7 es un número entero positivo sólo podemos saberlo sabiendo aritmética. Para comprobar que Catulo no escribió libros de ensayo hemos de recurrir a los estudiosos de la literatura latina. Estudiar lógica no consiste en estudiar si tales o cuales enunciados —relativos a tal o cual materia— son efectivamente verdaderos. Estudiar lógica consiste en estudiar qué otros enunciados, dados los anteriores como verdaderos, habría que aceptar como verdaderos también. La noción fundamental, constituyente, de la lógica no es la de verdad material, la de verdad de hecho, sino la de coherencia.

La lógica no se ocupa de verdades materiales, sino de las relaciones formales entre ellas.

Por eso en lógica, la expresión 'razonamiento válido' es una abreviatura de 'razonamiento formalmente válido". Por eso en nuestra definición de lógica hemos hablado de '**validez formal**'.

De manera general, decimos que **un argumento es válido cuando**:

- Si sus **premisas** son **verdaderas**, su **conclusión** tiene que ser **forzosamente verdadera**.
- **No es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa**.

La validez garantiza que si las premisas de una inferencia son de hecho verdaderas, entonces la conclusión también lo será. Por eso, si una inferencia contiene premisas verdaderas y una conclusión falsa, podemos decir con certeza que el argumento es inválido.

Todas las hayas tienen raíces.

Todos los árboles que crecen en Asturias tienen raíces.

Luego, en Asturias crecen hayas.

Si bien todos los enunciados son verdaderos, según el segundo punto de validez para el argumento sea válido, se requiere que no sea **posible** que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Saber que las premisas y la conclusión son de hecho verdaderas no nos asegura esto. De hecho, hay hayas en Asturias, pero podría ocurrir que de hecho las hayas tengan raíces, todos los árboles de Asturias tengan raíces pero que en Asturias no hubiese hayas. Podría ser que el mundo fuese de tal modo que aun siendo premisas verdaderas, la conclusión no lo fuese. Esto hace que el primer ejemplo sea una argumentación inválida, aunque sus premisas y conclusión son verdaderas.

Las hayas crecen sólo allí donde llueve con cierta regularidad.

En Almería no llueve con regularidad.

Luego, en Almería no crecen hayas.

De nuevo tenemos un argumento en que tanto sus premisas como su conclusión son verdaderas. A diferencia que en el primer ejemplo, aquí el argumento es válido, ya que no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea a la vez falsa.

Las águilas vuelan.

Las águilas son aves.

Luego todas las aves vuelan.

Las premisas de este argumento son de hecho verdaderas y la conclusión falsa. No tenemos que esforzarnos imaginando ninguna otra posibilidad para ver que este argumento es inválido.

Las avestruces son aves.

Todas las aves vuelan.

Luego, las avestruces vuelan.

Es un caso de inferencia válida que tiene como conclusión un enunciado falso. Para que un argumento sea válido no requiere que la conclusión sea de hecho verdadera. La validez lo que hace es excluir la posibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión deje de serlo. Al ser argumento verdadero y la conclusión falsa, al menos una de las premisas ha de ser falsa.

EJERCICIO 3: Escribir un ejemplo de inferencia en el que:

A) Alguna de las premisas sea falsa, la conclusión verdadera y la inferencia sea válida

Todo nacido en Venezuela es sudamericano (V)

Algún nacido en Venezuela es nacido en la costa pacífica (F)

Luego, algún sudamericano es nacido en la costa pacífica (V)

B) Alguna de las premisas sea falsa, la conclusión verdadera y la inferencia sea inválida

Todos los nacidos en XX tienen mucho dinero (F)

Fulanito nacio en XX (V)

Fulanito tiene mucho dinero (V – pero no necesariamente por haber nacido en XX, sino porque heredó una fortuna a los 15 años y después le tocó la lotería, 3 veces)

C) Alguna de las premisas sea falsa, la conclusión sea falsa y la inferencia sea válida.

Todos los vehículos de 4 ruedas son coches (F)

Las silla de ruedas tienen 4 ruedas (V)

Las sillas de ruedas son coches (F)

D) Alguna de las premisas sea falsa, la conclusión sea falsa y la inferencia sea inválida.

Todos los tomates son frutas (V)

Todos los tomates son de color rojo (F)

Todas la frutas son de color rojo (F)

Relación entre validez y verdad

Para saber si un argumento es válido, no se necesita conocer el valor de verdad ni de las premisas ni de la conclusión, ni es necesario que sean de hecho verdaderas. Si se da el caso de que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, a ciencia cierta la inferencia es inválida.

Que un argumento sea válido no requiere en modo alguno que las premisas sean verdaderas

Cuando un argumento es válido, la verdad de la conclusión es una consecuencia necesaria de la verdad de las premisas. Es más, para poder comprobar la verdad de la conclusión de un argumento válido basta con comprobar la verdad de las premisas del mismo.

La validez de una inferencia y la verdad de sus enunciados se puede resumir en:

- Si las premisas de una inferencia son todas verdaderas y la inferencia es válida, la conclusión es verdadera
- Si la inferencia es válida y la conclusión es falsa, al menos una de sus premisas ha de ser falsa
- Si las premisas son todas verdaderas y la conclusión es falsa, la inferencia es inválida

Para que una inferencia sea una **buena inferencia** no basta con que sea válida (es necesario que lo sea), es preciso además que sus premisas sean verdaderas, pues de lo contrario no se consigue establecer la verdad de la conclusión.

- Los predicados “**verdadero**” y “**falso**” se aplican a enunciados, nunca a inferencias.
- Los predicados “**válido**” e “**inválido**” son aplicables a inferencias y no a enunciados.

Una inferencia no establecerá la verdad de una conclusión a menos que sus premisas sean verdaderas y que de ellas se siga lógicamente la conclusión.

Esto es, **la validez de un argumento no apoya por sí sola la verdad de la conclusión**, requiere también que las premisas sean verdaderas. Sin embargo, el lógico no puede limitarse a la consideración de aquellas inferencias que tienen premisas verdaderas como si sólo las buenas inferencias fueran de interés. También tienen interés ciertas inferencias de cuyas premisas no sabemos en realidad si son verdaderas o falsas. Por ejemplo, un científico puede estar interesado en la verificación de alguna hipótesis cuyo valor de verdad no conoce de antemano, mediante la deducción de consecuencias que puedan someterse a contrastación empírica. Por otro lado, en nuestros asuntos cotidianos, todos nos enfrentamos con más frecuencia de la deseada con la situación de tener que elegir entre diversos cursos de acción posibles, como la necesidad de evaluar las posibles consecuencias de dichas alternativas.

La validez no es la única propiedad deseable de una inferencia, pero es la única de la que se ocupa la lógica. El cometido del lógico es determinar si las premisas de un argumento constituyen una buena razón para la conclusión, o si la conclusión se sigue de las premisas; es decir, determinar si un argumento es válido.

Inferencias inválidas con premisas verdaderas

No todas las inferencias que no son válidas y que tienen premisas verdaderas son persuasivas (es decir, que sean adecuadas para convencer a un pensador racional de la verdad de su conclusión). Si bien este concepto es un tanto vago, sirve para puntualizar lo siguiente:

Premisas entimenas

La mayoría de inferencias del discurso cotidiano son **entimenas**: inferencias en las que se deja me mencionar o están elípticas una o más premisas.

"El terror no es otra cosa que la justicia pronta, severa, inflexible; luego es una emanación de la virtud" (Robespierre)

→ Presupone premisa*: "la justicia es una virtud".*

Sócrates es un hombre.

Sócrates es mortal

→ Presupone premisa *"todo hombre es mortal".*

Petición de principio

A veces la identificación de la premisa o premisas que se sobreentienden en la inferencia no son problemáticas, pero no siempre es así. Un requisito que han de cumplir las premisas tácitas para que sea lícito usarlas en inferencias es que sean tales que se pueda presuponer que todo el mundo las aceptará como verdaderas. Cuando en una inferencia se invoca como premisa tácita o se emplea una premisa que dice lo mismo (aunque bajo otro disfraz) que la conclusión, se incurre en la falacia denominada **petición de principio**. El nombre viene de la expresión latina *petitio principii* y de la tesis, establecida por Aristóteles, de que no se puede postular o afirmar aquello mismo que es preciso demostrar. Se comete, en efecto, una petición de principio cuando se da por probado lo que se quiere probar, es decir, cuando se incluye (a veces subrepticiamente) la conclusión como una de las premisas. El siguiente ejemplo lo suelen esgrimir los contrarios al aborto:

El aborto supone quitarle la vida a un feto humano.

Es moralmente malo quitarle la vida a un ser humano.

Luego, el aborto es moralmente malo.

Este argumento tal y como está formulado es inválido. Necesita para su validez una premisa que no está explícita en el mismo, siendo ésta precisamente la afirmación *"Un feto humano es un ser humano"*, cuyo carácter es tan controvertido como la propia conclusión cuya verdad pretende apoyar, y está tan necesitada de pruebas como ella. Se trata pues de un argumento que incurre en la falacia de la petición de principio.

Otro ejemplo más sencillo en el que se ve claramente que la conclusión ya está incluida en la premisa:

Yo siempre digo la verdad.

Por lo tanto, yo nunca miento.

Ni la **petición de principio** ni el **razonamiento circular** (en el que premisas y conclusión se respaldan recíprocamente) son buenas formas de argumentar; no sirven para establecer la verdad de la conclusión, ni siquiera en el caso en el que sean inferencia perfectamente válidas desde el punto de vista lógico.

Conclusión y premisas sin relación

Cuando sea lógicamente imposible que la conclusión derive de las premisas no cabe la posibilidad de que la premisa sea verdadera y la conclusión falsa, al no ser relevantes para la conclusión.

Madrid es la capital de España.

Luego, el Pisuerga pasa por Valladolid

EJERCICIO 4: Determinar si son o no son buenos los siguientes argumentos. Justificarlo:

A) *El número de los meses del año es impar, dado que todo número es par o impar y que el número de los meses del año no es par.*

- No es buen argumento. La inferencia es inválida al tener una conclusión igual a una premisa: *"el número de los meses es impar"* <> *"dado que.. el número de los meses del año no es par"*, siendo esta además falsa
  - p : el número de los meses del año es par
  - q : el número de los meses del año es impar = $\neg p$

$p \vee q$ V
$\neg p$ F
------
q F

B) *Si Dios es omnipotente, entonces no hay nada que no pueda hacer. O puede construir una montaña tan grande que no la pueda mover o no puede. En cualquiera de ambos casos, hay algo que no puede hacer. Luego Dios no es omnipotente.*

- Buen argumento, premisas verdaderas e inferencia válida
  - p : Dios es omnipotente
  - q : hay algo que Dios no puede hacer
  - r : puede construir una montaña tan grande que no la pueda mover

$p \to \neg q$ V
$r \vee \neg r$ V
$(r \to q) \wedge \neg(r \to q)$ V

$\neg p$ V

C) *Van Gogh es contemporáneo de Gauguin, ya que son célebres las peleas que mantuvieron y que dos personas no pueden pelear a menos que sean contemporáneos.*

- Buen argumento, con premisas verdaderas y forma inferencial válida
  - p : Van Gogh y Gauguin pelean
  - q : Van Gogh es contemporáneo de Gauguin

$p \to q$ V
p V
----
q V

D) *Una cosa sólo puede convertirse en propiedad de alguien si éste la trabaja para cambiar su estado natural. Por consiguiente, si alguien mejora con su trabajo algo, este algo le pertenece.*

- p : La cosa c se convierte en propiedad de Pepito
- q : Pepito trabaja la cosa c para cambiar su estado natural

Esta interpretación también está forzada: Sólo si alguien trabaja para cambiar el estado natural de una cosa, entonces esa cosa (no otra) se convierte en propiedad de ese alguien (no otro).

$p \to q$ F

$q \to p$ F

Con estos ejercicios estamos introduciéndonos, sin saberlo, en lógica de predicados y reforzando la idea de que **la formalización es discutible y depende siempre de la interpretación en castellano**.

EJERCICIO 5: Las siguientes inferencias dependen para su validez de alguna premisa no explícita. Señalarlas en cada uno de los casos:

A) Sólo están legitimados para ejercer el poder los elegidos democráticamente. Por consiguiente, los dictadores no están legitimados para ejercer el poder.

- Premisa implícita: *los dictadores no son elegidos democráticamente*

B) 81 no es un número primo porque 81 es divisible por 3.

- Premisa implícita: *un número primo es aquel sólo divisible por sí mismo y por la unidad*

C) María es más alta que su marido. Luego hay alguna mujer más alta que algún hombre.

- Premisa implícita: *María es una mujer y su marido es un hombre*

D) *María es más alta que Juan. Juan es más alto que Pedro. Luego, María es más alta que Pedro.*

- Premisa implícita: *Todo aquel que sea más alto que otro, si éste es más alto que un tercero, el primero será más alto que el tercero*

Formas lógicas y constantes lógicas

Todo razonamiento tiene una forma y un contenido; una estructura, y un asunto de que trata. Los dos razonamientos siguientes:

Si todos los esquizofrénicos son psicóticos	*Si todos los santos son creyentes*
y todos los psicóticos son personas desdichadas,	*y todos los creyentes se muestran reacios a la desamortización,*
entonces los esquizofrénicos son personas desdichadas.	*entonces todos los santos se muestran reacios a la desamortización*

son, obviamente, distintos por su contenido. Su forma, sin embargo, es la misma. Esa forma, toscamente representada, sería, en ambos casos, ésta:

Si todos los... son... y todos los... son..., entonces todos los... son...,

o, mejor,

Si todos los a *son* b *y todos los* b *son* c *, entonces todos los* a *son* c *,*

donde a , b y c son, como veremos, variables que indican el lugar posible de un contenido, de cualquier contenido de un cierto tipo: en lugar de a , por ejemplo, podemos escribir '*esquizofrénicos*' o '*santos*', o '*corsarios*' o '*filósofos*', o cualquier otro término general.

La noción de forma de un razonamiento puede ilustrarse por analogía con las formas musicales. La misma relación habría entre, por una parte, una forma de razonamiento y, por otra parte, los infinitos razonamientos distintos —distintos por su contenido—que podrían hacerse con esa forma —de esa forma—, que entre la forma soneto, por ejemplo, y los infinitos poemas —elegíacos, satíricos, de amor, etc.— escritos en forma de soneto, o que entre la forma sonata y las diferentes sonatas que nos es dado escuchar.

A la lógica le importa únicamente la forma de los razonamientos. La lógica es lógica formal, ciencia de las formas o esquemas válidos de razonamiento. ¿A qué llamamos una forma válida de razonamiento? A un esquema de inferencia tal que, dado cualquier razonamiento que podamos hacer interpretando las variables de ese esquema, si las premisas del razonamiento son verdaderas, entonces necesariamente la conclusión será verdadera también. El esquema

Si todos los a *son* b *y todos los* b *son* c *, entonces todos los* a *son* c

es un esquema válido porque, sean cuales fueren los términos generales con que sustituyamos las variables a , b y c , si es verdad que todos los a son b y que todos los b son c , necesariamente ha de ser verdadero el enunciado '*todos los* a *son* c '. En un razonamiento válido, **la verdad de la conclusión se sigue necesariamente de la verdad de las premisas**, en virtud de la sola forma de éstas. En los *Analíticos Primeros*, Aristóteles define el **silogismo** como aquel discurso (λόγος) en el que, afirmadas ciertas cosas, por el simple hecho de haberlas afirmado se sigue necesariamente otra cosa distinta de ellas. Ahora bien: el silogismo es sólo un tipo de esquema válido de inferencia, entre otros muchos, y la definición aristotélica no se aplica sólo al silogismo, sino a todo razonamiento formalmente válido.

De esa definición nos interesa ahora sobre todo retener la expresión '*necesariamente*'. En efecto: lo esencial en todo razonamiento formalmente válido es la **relación de necesidad que se establece entre premisas y conclusión**, de tal modo que la verdad de las primeras acarrea inevitablemente la verdad de la segunda.

Es evidente que no en todo razonamiento se da esta conexión necesaria. Hay ocasiones en las que la conclusión se deriva de las premisas no de una manera necesaria, no inexorablemente, sino sólo con un mayor o menor grado de probabilidad. Así, por ejemplo, en una inferencia como

Si la concepción ondulatoria de la luz es correcta, entonces la luz se moverá a mayor velocidad en el aire que en el agua.

Es así que, como mostró el experimento de Foucault, la velocidad de la luz es mayor en el aire que en el agua.

De las premisas no se sigue necesariamente que la concepción ondulatoria de la luz sea correcta, e incorrectas las concepciones rivales (en este caso, la concepción corpuscular). La segunda premisa únicamente añade mayor apoyo empírico a esa concepción; la confirma (pero no de un modo concluyente), la hace más probable, más plausible.

De igual modo, de las premisas

El ochenta por ciento de los campesinos andaluces en 1933 eran anarcosindicalistas

Antonio Jiménez era en 1933 un campesino andaluz,

sólo podríamos concluir (en el caso de que fueran verdaderas) que es probable, si bien en muy alto grado, que Antonio Jiménez fuera anarcosindicalista.

Hay, pues, de una parte, razonamientos formalmente válidos, en los que la conclusión se sigue necesariamente de las premisas, de tal modo que sería contradictorio afirmar las primeras y negar la segunda (con otras palabras: sería imposible imaginar circunstancias que, haciendo verdaderas las premisas, hicieran falsa la conclusión); y hay, de otra parte, razonamientos en los que la verdad de las premisas no conduce fatalmente a la verdad de la conclusión, sino sólo —y de múltiples y complicadas maneras, como han mostrado los análisis de los metodólogos de la ciencia empírica y de los psicólogos del razonamiento— a su mayor o menos probabilidad. A los razonamientos del primer tipo —aquellos que son válidos por su sola forma— se les llama a menudo «**razonamientos deductivos (válidos)**», otorgándose a los del segundo los nombres de «**razonamientos inductivos», «probabilísticos», «plausibles»** y otros muchos que señalan, frente a la relativa simplicidad de la inferencia deductiva, la todavía inabarcada complejidad de esta última clase de razonamientos.

Imaginemos un ejemplo de inferencia similar a la del ejemplo de las hayas en Asturias, pero en el que las premisas sean verdaderas, pero la conclusión falsa

Todos los dragos tienen raíces

Los árboles que crecen en Asturias tienen raíces

Luego, en Asturias crecen dragos

Al ser una inferencia en la que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, es una inferencia no válida (si bien en el ejemplo original la conclusión si era verdadera. Ambos ejemplos de inferencia comparten algo que no es el contenido (hayas $\neq$ dragos), sino la estructura. Existe una conexión profunda entre la validez y la forma de los argumentos: en líneas generales podemos decir que **la validez de una inferencia depende de la forma o estructura lógica de la misma.**

Decimos **forma** o **estructura lógica**, pues esta estructura de la que resulta dependiente la validez de una inferencia no es la mera estructura lingüística de la misma, aunque tenga que ver con ella. Mientras que la estructura lingüística de una oración puede describirse mediante la gramática del lenguaje natural específico, la estructura lógica no depende de los rasgos gramaticales del lenguaje en el que está formulada. Si traducimos un argumento válido en español al inglés o a otra lengua, el resultado debe seguir siendo un argumento válido.

Las inferencias formuladas en una lengua natural, cualquiera que ésta sea, son difíciles (si no imposibles) de evaluar debido a la naturaleza vaga y ambigua de las expresiones, modismos engañosos u otras peculiaridades propias del lenguaje. De que ahí la tarea de analizar y evaluar inferencias requiera la reconstrucción formal de la misma en un lenguaje lógico.

El hecho de que la ambigüedad de expresiones, la vaguedad o imprecación de las palabras, la presencia de expresiones carentes de referencia constituyan rasgos necesarios, más que imperfecciones, sustenta la creencia ya expresada por **Wittgenstein** en el '*Tractatus*' de que **el lenguaje disfraza el pensamiento**:

> *"El lenguaje disfraza el pensamiento. Y de tal modo que por la forma externa del vestido no es posible concluir acerca de la forma del pensamiento disfrazado; porque la forma externa del vestido no está diseñada para revelar la forma del cuerpo, sino que tiene una finalidad totalmente distinta"*

Un ejemplo para ilustrar la idea de que la forma gramatical puede resultar engañosa, sean los enunciados compuestos *"Juan es alto y Juan es rubio"* y *"Algunos son altos y algunos son rubios"*. Ambos tienen la misma estructura gramatical, pero no se comportan del mismo modo desde el punto de vista inferencial, ya que si bien del primero se sigue el enunciado *"Juan es alto y rubio"*; en el segundo se puede sustituir "*rubios*" por "*morenos*", de modo que *"Algunos son altos y algunos son morenos"* seguiría siendo verdadera, ya que *"Algunos morenos son rubios"*, sería falsa.

Para poder evaluar la validez de las inferencias del lenguaje natural es preciso especificar previamente la forma lógica de las mismas, lo que estriba en su traducción a un esquema de los lenguajes formales existentes. Dichos lenguajes y los métodos que tienen para comprobar la validez de sus fórmulas pueden ser utilizados como teorías lógicas para dar cuenta de la validez de un número indefinido de inferencias expresadas en el lenguaje común. El concepto intuitivo de implicación lógica (o inferencia válida) se puede elucidar con ayuda de la noción técnica de **validez** definida para las fórmulas de tales lenguajes. Este uso requiere la representación esquemática previa, quedando por tanto determinar la validez de la fórmula correspondiente y si es válida en ese lenguaje. Este proceso recibe el nombre de **formalización** o **esquematización**.

Si todo estuviera permitido, nadie estaría privado de libertad. Alguien está privado de libertad, luego hay algo no permitido.

Puede parafrasearse como *"si todo está permitido entonces no es cierto que alguien está privado de libertad".*

En este argumento hay dos tipos de expresiones: expresiones lógicas de las que depende la validez del argumento (son de la forma '*no (es cierto que)*', '*si ... entonces*') y expresiones no lógicas. El esquema lógico o la **forma lógica** de un argumento se obtiene abstrayendo del mismo la expresiones no lógicas y sustituyéndolas por **variables** que las representan.

si *p* entonces *no q*
q
----
no p

"Si 4 fuera un número impar; no sería divisible por 2. 4 es divisible por 2. Luego 4 no es un número impar."

Las expresiones lógicas como *'no', y 'si .. entonces'* se llaman **constantes lógicas**, nombre con el que se quiere resaltar que se trata de expresiones que reciben una interpretación constante en el lenguaje lógico del que forman parte. Lo característico de este tipo de expresiones es que no se pueden sustituir por otras expresiones lógicas sin correr el riesgo de que la validez del esquema se vea afectada.

No todas las partículas lógicas están en el mismo nivel lingüístico. Las ya vistas, y otras como *'o', 'y', 'si y sólo si'*, tienen el cometido de conectar enunciados entre sí. En torno a estas partículas se articula la llamada **lógica de enunciados** o **proposicional** cuyo cometido es estudiar la validez de aquellos argumentos que dependen exclusivamente de las conexiones entre los enunciados componentes.

Hay enunciados cuya validez no es función sólo de las partículas lógicas que conectan los enunciado del mismo, sino que dependen además de la estructura interna de dichos enunciados componentes.

Ningún inmigrante es muy adinerado

Algunos delincuentes son muy adinerados

Luego, algunos delincuentes no son inmigrantes

A diferencia de lo que ocurría en ejemplos anteriores, en el que aparecían las partículas *todo* y *algo*, éstas no condicionaban en modo alguno la validez del mismo, aquí estamos ante un argumento cuya validez depende precisamente de la presencia de las partículas *ningún* y *algunos*. Para ver que no forman parte del enunciado, sino que son partículas lógicas, basta reparar en que su sustitución por otras de la misma categoría sintáctica podría afectar la validez del argumento.

Si en la primera premisa sustituimos *ningún* por *algún* el argumento dejaría de ser válido. Esto quiere decir que hay argumentos cuya validez no depende sólo de las conexiones entre las afirmaciones que contiene, sino que también depende de la estructura interna de las mismas, en concreto de partículas como *todos* y *algunos*. Estas partículas lógicas constituyen las constantes en torno a la cuales se articula, como veremos, la llamada **lógica cuantificacional** o **lógica de predicados**.

EJERCICIO 6: Poner un par de ejemplos de inferencias que tengan la misma forma que la inferencia siguiente:

Juan aprobará la lógica sólo si domina las técnicas de la deducción. Juan no domina las técnicas de la deducción. Luego, Juan no aprobará la lógica.

- Comeremos lentejas sólo si tenemos todos los ingredientes. No tenemos todos los ingredientes, luego no comeremos lentejas
- Para poder salir en bici necesito tener las ruedas hinchadas. La rueda de detrás tiene un pinchazo, luego no podré salir en bici.
- Madrid ciudad celebrará elecciones anticipadas sólo si su alcalde dimite. El alcalde de Madrid ciudad no dimite. Luego Madrid ciudad no celebrará elecciones anticipadas.
- Se quitarán los crucifijos de los colegios sólo si se aprueba una nueva ley sobre libertad religiosa. No se aprueba una nueva ley sobre libertad religiosa. Luego no se quitarán los crucifijos de los colegios.

si p,...	$p \rightarrow ..$
sólo si p, entonces ...	$.. \rightarrow p$

La afirmación que sigue a un “sólo si” es una condición necesaria, es el consecuente del condicional. No equivale al “si y sólo si”, que se formaliza con un bicondicional.

EJERCICIO 7: *“Algunos pensadores son escépticos. Pirrón es un pensador. Luego Pirrón es escéptico”* es una inferencia de la forma *‘Algunos F son G, A es F; luego A es G’*. Mostrar que esta forma no es válida ofreciendo un par de ejemplos en los que las premisa sean verdaderas y la conclusión falsa.

- Algunos coches son Ferrari. Mi KIA es un coche, luego mi KIA es un Ferrari.
- Algunas aves vuelan. El avestruz es un ave, luego el avestruz vuela.

Principios

Según tendremos ocasión de ver, en lugar de hablar de «principios» podíamos haber hablado de leyes o de reglas. Ya hemos visto cómo en el lenguaje común existen una serie de expresiones y giros que se utilizan para estimar formalmente —es decir, en términos de pura coherencia, y con abstracción del posible valor de verdad de los enunciados que lo componen— cualquier razonamiento. La lógica pretende llevar a cabo esa estimación o valoración de una manera estructurada; la lógica pretende codificar los principios que guían el análisis de la validez formal de los razonamientos, sistematizar un conjunto de leyes o de reglas para el estudio de las condiciones formales en las que un enunciado se puede inferir válidamente a partir de otro.

La lógica como ciencia

La lógica es una ciencia. Y una **ciencia formal**. Dicho de otro modo: una **ciencia deductiva**. Toda ciencia es un sistema de enunciados.

La lógica, por tanto, también lo es, pero con la peculiaridad de que sus enunciados están deductivamente trabados. En lógica, como veremos, hay axiomas y teoremas (o bien, reglas básicas y reglas derivadas de inferencia), y estos últimos se deducen, se siguen formalmente de los primeros.

Las verdades lógicas, cada una de las cuales no es sino el enunciado de un modelo válido de inferencia, están organizadas en un sistema deductivo: es decir, que algunas de ellas se toman como primitivas, y de ellas se extraen las restantes por deducción.

La lógica es la teoría formal del razonamiento, el estudio de la argumentación formalmente válida, la ciencia de la inferencia deductiva. Hablar de un razonamiento formalmente válido es como hablar de un razonamiento deductivamente válido, pues la conexión entre premisas y conclusión sólo es necesaria (sólo es deductiva) cuando es la pura forma de las premisas la que nos arrastra a la conclusión. Nos encontramos, entonces, con que la lógica, que es la ciencia de la deducción, es a su vez una ciencia organizada deductivamente, una ciencia cuyos enunciados —es decir, las verdades lógicas, cada una de las cuales expresa un modo válido de razonamiento— están ligadas por deducción, se deducen unos de otros. Resulta, pues, que la lógica es una ciencia «reflexiva», una ciencia que se dobla, que se vuelve sobre sí misma: es la ciencia deductiva de la deducción, la ciencia formal de la validez formal de las inferencias. Es una ciencia que **se rige por los mismos principios que estudia**.

Ni que decir tiene que la lógica, en el transcurso de su larga y sinuosa historia, ha tenido a menudo conflictos fronterizos con algunas otras disciplinas, o incluso ha sido, pura y simplemente, confundida con ellas: con la psicología del razonamiento, con la teoría de la ciencia, con la teoría del conocimiento o con la ontología.

Por supuesto también que la lógica, en cuanto ciencia del análisis formal del razonamiento, no pretende en modo alguno agotar todos los aspectos de éste. Hay en el razonamiento —dicho sea cometiendo la vulgaridad de parafrasear una vez más una frase del Hamlet— muchas más cosas que su pura forma, otras muchas cosas que la lógica no busca. Ocurre simplemente que la actividad científica —y precisamente por eso la actividad científica necesita de la filosofía— opera sobre la base de la división —técnica, y no social— del trabajo. De ahí que no hayamos dicho que la lógica sea la ciencia del razonamiento a secas, sino la **ciencia que se ocupa de los aspectos formales del razonamiento**.

Cada ciencia, como decía Aristóteles, «recorta» o acota para sí un campo de objetos, aplicándose a estudiar las leyes que describen y explican el comportamiento de éstos, reconstruyendo racionalmente ese campo. Ya que cada disciplina estudia una especie de objetos, es natural que lo haga en un lenguaje específico. Nada tiene de extraño que cada ciencia, aun compartiendo con otras ciencias muchos rasgos, presente rasgos peculiares, reflejados en el peculiar lenguaje que utiliza. Cada ciencia se hace (o consiste en) su propio lenguaje, tanto más alejado del lenguaje cotidiano (más «técnico), cuanto más lejana, cuanto menos urgente, «natural» o inmediata aparezca al pensamiento vulgar la necesidad de plantearse los problemas relativos al campo de objetos que constituye el tema de esa ciencia. En algunos casos, las ciencias se limitarán a utilizar el lenguaje común enriquecido con unos pocos términos técnicos. En otros casos —el de la matemática, por ejemplo—, se impone la necesidad de contar con un lenguaje enteramente artificial. Así ocurre también con la lógica.

La naturaleza de su objeto de estudio —la forma de los razonamientos— hace necesario para esta ciencia el uso de un lenguaje especial. En efecto: como se desprende de los análisis psicológicos del razonamiento natural, la distinción entre forma y contenido, y, subscuentemente, la consideración de aquélla independientemente no es, en el sujeto, espontánea. La capacidad de discernir entre una y otro se alcanzaría tan sólo —e incluso hay psicólogos que piensan que es una idealización suponer que todos los sujetos la alcanzan claramente— en la última etapa del desarrollo de las capacidades cognoscitivas, y sólo se actualizaría cuando el sujeto se viera en la necesidad de resolver problemas diseñados con el fin fundamental de ponerla en ejercicio. Por ello, una ciencia que se constituye como tal empeñándose en la tarea de abstraer la forma de los razonamientos prescindiendo de los contenidos a los que esta se encuentra, en cada caso, incorporada, ha de vencer la resistencia del pensamiento —y, por ende, del lenguaje— natural, en el que forma y contenido se dan entremezclados, en el que la primera se encuentra casi siempre oculta o difuminada por el segundo. La lógica, pues, ha de hacerse con un lenguaje en el que la forma aparezca aislada, en el que la estructura de los razonamientos se muestre sola.

Antes hemos dicho, simplificando considerablemente, que el lenguaje consta, en resumidas cuentas, de un vocabulario —un repertorio de términos— y una sintaxis —un repertorio de reglas para combinarlos. Pues bien: a la lógica no le basta con disponer de un vocabulario propio, artificial. Le es necesario además, y sobre todo, contar con una sintaxis artificial, artificialmente rigurosa. Le es necesaria la formalización.

Formalizar un lenguaje es trazar —en el correspondiente metalenguaje, por supuesto— su estructura, su sintaxis. Ya hemos visto, en efecto, cómo en un lenguaje natural es posible construir expresiones que, siendo irreprochables desde el punto de vista sintáctico, carecen, sin embargo, de sentido. Se hace necesario, en lógica, «endurecer» las reglas —sintácticas— de formación, en aras de evitar que en los sistemas lógicos puedan crearse enunciados de esa naturaleza. Con otras palabras: a la lógica le interesa que la sintaxis y la semántica coincidan en lo posible; la lógica desearía que todos los enunciados bien formados —es decir, sintácticamente correctos— tuvieran sentido —es decir, fueran semánticamente buenos—, y desearía asimismo que la inversa fuera verdadera —es decir, querría que todos los enunciados a los que quepa reconocer un sentido fueran también sintácticamente impecables. Se trata, sin embargo, de un deseo simplemente piadoso, que despierta en los lingüistas actuales una sonrisa de suficiencia —dado que, en la lingüística actual, la sintaxis, la semántica y la pragmática constituyen un fructífero revoltijo— y en los lógicos actuales una sonrisa de tristeza, dado que hoy se sabe, a ciencia cierta, que **el ideal de coincidencia de sintaxis y semántica es inalcanzable** incluso en lógica.

La lógica es un saber formalizado acerca de los principios formales del razonamiento

Operadores lógicos proposicionales. Reglas de formación de fórmulas. Formalización del lenguaje natural

El lenguaje de la lógica de enunciados

El apartado más elemental de la lógica formal es la lógica de enunciados o de proposiciones, lógica que nos llega hoy en forma de cálculo (o sistema de cálculos). El cálculo base, el cálculo en el que se apoya y sobre el cual se construye el edificio de la lógica es el cálculo de enunciados.

La tarea de la lógica es el análisis, formal de los razonamientos. Y el lugar de ese análisis es el lenguaje. Sólo en el lenguaje, sólo en la medida en que están formulados en un lenguaje se ofrecen los razonamientos a la posibilidad del análisis. **El análisis del razonamiento supone**, por tanto, **un análisis del lenguaje**. Un **análisis lógico del lenguaje**. En efecto: ante una expresión como

dieron las seis y llamó Cabra a lición: fuimos y oímos todos,

el análisis literario reparará en las características del estilo de Francisco de Quevedo; el análisis lingüístico hablará —si se trata, por ejemplo, en concreto, de un análisis sintáctico— de sintagmas nominales, de sintagmas verbales, etc. El análisis, en cambio, desde el nivel en que ahora nos encontramos, se limitará a señalar la existencia de cuatro enunciados:

a) 'Dieron las seis',

b) 'Llamó Cabra a lición',

c) 'Fuimos',

d) 'Oímosla todos'.

Y en el siguiente cuarteto de Garcilaso la lógica no hallaría tampoco por ahora sino cuatro proposiciones, a una por verso:

El ancho campo me parece estrecho.

La noche clara para mí es oscura.

La dulce compañía, amarga y dura.

Y duro campo de batalla el lecho.

El análisis del lenguaje en que se basa la lógica de proposiciones divide el lenguaje.—y ya es simplificar— en dos tipos de elementos:

- De una parte, **oraciones**, frases enteras.
- De otra parte, **conjunciones** —en un sentido lógico del término—, partículas que sirven para enlazar oraciones y formar oraciones compuestas a base de oraciones simples.

Estas son las dos únicas categorías de signos que la lógica de enunciados considera: los enunciados tomados en bloque, por un lado, y, por otro lado, las conexiones entre ellos. Por ejemplo:

Cuando se hubieren acabado los mil años, será Satanás soltado de su prisión y saldrá a extraviar a las naciones que moran en los cuatro ángulos de la tierra, a Gog y a Magog, y reunirlos para la guerra.

¿A qué queda reducido este texto cuando lo analizamos lógicamente desde el nivel de la lógica de enunciados? Queda reducido todo él a una sola proposición compuesta: compuesta de dos proposiciones, la segunda de las cuales es a su vez también una proposición compuesta. El resultado del análisis, presentado muy rudimentariamente, sería éste:

Cuando ..., [entonces] ... y ... y ...

Así pues, el texto entero constituye una única proposición compuesta. Dentro de ella distinguiríamos, por una parte, una primera proposición, simple o atómica, que sería '*se hubieren acabado los mil años*'. Y una segunda proposición compuesta de tres proposiciones enlazadas por la conjunción 'y', a saber: *'será Satanás soltado de su prisión', 'saldrá a extraviar a las naciones que moran en los cuatro ángulos de la tierra' y '[saldrá a] reunirlos para la guerra'.* Y esto es todo.

Vemos, entonces, qué es lo que se quiere decir al afirmar que este primer apartado de la lógica se ocupa de las relaciones de inferencia entre enunciados tomados en bloque. Quiere decir que el análisis lógico se detiene por ahora, al borde de los enunciados, sin penetrar en la estructura. interna de éstos, siendo el enunciado la unidad de análisis. Quiere decir que la lógica de enunciados es una lógica de los enunciados sin analizar. Quiere decir que la lógica de enunciados sólo tendrá en cuenta aquellas formas de deducir un enunciado a partir de otro que sean válidas sin necesidad de analizar por dentro cada uno de ellos. Los elementos que componen internamente un enunciado—términos que designan individuos, términos que designan propiedades son, por el momento, irrelevante desde el punto de vista lógico. Sólo interesan los enunciados como tales

Los dos razonamientos siguientes pueden darnos ocasión para hacer dos observaciones:

Si la sociedad de los hombres ha de ser siempre como ahora, entonces la corrupción es eterna.

Es así que la corrupción no es eterna.

Luego, no ha de ser siempre como ahora la sociedad de los hombres;

y

Si florecen las hortensias, entonces se marchitan los tulipanes.

Es así que no se marchitan los tulipanes.

Luego, no florecen las hortensias,

En primer lugar, habría que insistir en la **distinción entre forma y contenido de un razonamiento**. En cada uno de los dos citados el contenido es diferente. Es obvio que en uno y otro se habla de cosas dispares: de la condición humana, en el primero; en el segundo, de floricultura.

Lo cual es tanto como decir, en segundo lugar, que la forma permanece constante, mientras que el contenido varia. Lo cual, a su vez, es tanto como volver a decir que hay dos tipos de signos: los signos constantes, que representan esa forma que no varía, y los signos variables que constituyen el contenido, distinto en cada caso.

Ahora bien: puesto que la lógica se fija tan sólo en la forma, parece que los dos razonamientos que acabamos de presentar se reducirían, desde el punto de vista lógico, a lo siguiente:

Si ..., entonces ...

Es así que no ...

Luego, no...

Pero con esto no basta. Porque la lógica, si bien prescinde dé los contenidos concretos, distintos en cada ocasión, variables de un razonamiento a otro, no puede prescindir de la idea de contenido en general, de la idea de que la forma lógica —que la lógica, de oficio, considera aislada— es siempre la forma de algún contenido. La lógica necesita, pues, encontrar el medio de indicar la presencia de un contenido, sin por ello comprometerse con ningún contenido concreto. Necesita un tipo de signos que sean el esquema de cualquier contenido, que nos hagan presentir que en el lugar de ellos, podríamos poner un enunciado cualquiera. Hemos dicho 'un enunciado cualquiera' y hemos dicho bien. Porque si estarnos en lógica de enunciados, el contenido de los razonamientos lo constituirán ésos enunciados, mientras que la forma vendrá señalada por el segundo tipo de signos, signos como *'y', 'no', 'si... entonces ...'*, y otros más, que sirven para poner a aquellos en relación.

Elementos del lenguaje

El análisis de la forma lógica de una inferencia se puede desarrollar en distintos niveles o con diferentes grados de finura. El tipo de análisis más superficial es aquel en que se investigan las relaciones lógicas entre enunciados. La lógica de enunciados estudia la estructuras de los enunciados compuestos tomando como unidades mínimas del análisis a los enunciados componentes.

Algunos enunciados complejos del discurso tienen la peculiaridad de ser **veritativo-funcionales**. Esto significa que el valor de verdad del enunciado en cuestión es función de los valores de verdad de los enunciados simples que lo componen o, lo que es lo mismo, depende de forma precisa de esos valores. No todos los enunciados compuestos presentan este rasgo. Por ejemplo

(1) El cobre es conductor de la electricidad porque es metal

es un enunciado compuesto con dos enunciados componentes, lo mismo que

(2) El cobre es conductor de la electricidad y es un metal

pero, a diferencia de éste último, no es veritativo-funcional, es decir, no es verdadero o falso sólo en función de sus componentes. De igual modo, el enunciado

(3) María cree que el autor del Tractatus es Russell

es un enunciado complejo con un sólo enunciado componente, al igual que

(4) No es el caso que el autor del Tractatus es Russell

pero, a diferencia de con este último, no es veritativo-funcional.

El lenguaje de la lógica de enunciados, lógica proposicional, o lógica de conectores (por referencia a las '*conectivas*' o '*conectores*' que reciben sus constantes lógicas) está diseñado para estudiar precisamente este tipo de enunciados veritativo-funcionales. Se compone de los siguientes elementos:

1. Variables enunciativas $p, q, r, s, ...$
2. Conectivas $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. Símbolos de puntuación (, [, {,),], }

- Las **variables** enunciativas pueden usarse para representar enunciados simples del lenguaje natural.
- Las conectivas se denominan **negación** $(\neg)$, **conjunción** $(\wedge)$, **disyunción** $(\vee)$, **condicional** $(\rightarrow)$ y **bicondicional** $(\leftrightarrow)$. Todas contribuyen a fijar con precisión cómo el valor de verdad de la fórmula en que figuran depende de los valores de verdad de los componentes.
- Los paréntesis y demás **símbolos de puntuación** sirven para señalar el alcance de conectivas de modo que no existan ambigüedades sintácticas.

Negación

La negación es una conectiva monádica. *'No es el caso que* p *'* es una función de verdad de p . Si p es verdadera, $no-p$ es falsa, y si p es falsa, $no-p$ es verdadera. Su símbolo es $\neg$

p	$\neg p$
1	0
0	1

El hecho de que la palabra '**no'** en español aparezca con frecuencia en el interior del enunciado hace fácil el pasar por alto que dicho enunciado es un enunciado compuesto o molecular, así en

(1) La lógica no es difícil

es un enunciado molecular, ya que se podría escribir

(1a) No ocurre que la lógica sea difícil

De dos enunciados, uno de los cuales es la negación del otro, se dice que son contradictorios entre sí. Si dos en enunciados son contradictorios es lógicamente imposible que sean verdaderos a la vez y que sean falsos a la vez. Pero la inserción de '*no*' en un enunciado no siempre da como resultado su negación ni produce, por tanto un enunciado **contradictorio**. Por ejemplo

(2) Algunos estudiantes no son inteligentes

pese a contener la palabra 'no', no constituye la negación de

(3) Algunos estudiantes son inteligentes

Ambos enunciados podrían ser, y de hecho posiblemente lo sean, verdaderos. Del mismo modo en

(4) Juan cree que Kant es un gran filósofo

(5) Juan cree que Kant no es un gran filósofo

no son contradictorios entre sí, toda vez que podrían ser falsos a la vez. Esto es lo que ocurriría en caso de que Juan no tuviera opinión alguna acerca del talento de Kant como filósofo.

Por otro lado, para que dos enunciados no puedan ser verdaderos a la vez no es preciso que uno sea la negación del otro, por ejemplo:

(6) Madrid tiene más de cuatro millones de habitantes

(7) Madrid tiene exactamente cuatro millones de habitantes o meno que cuatro

No pueden ser verdaderos a la vez, sin que ninguno sea la negación explícita del otro.

Dados dos enunciados para los que es lógicamente imposible que sean verdaderos a la vez se dice que son **inconsistentes**. Por tanto es evidente que todos los enunciados contradictorios son inconsistentes, pero el recíproco no es cierto: hay inconsistencias que no son contradictorias.

EJERCICIO 1: Decir cuáles de los siguientes pares de enunciados constan de un enunciado y su negación:

A) Todo lo que reluce es oro. No todo lo que reluce es oro.

- Enunciado y su negación

B) Algunos filósofos son altivos. Algunos filósofos no son altivos.

- La partícula 'algunos' da pie a que ambas puedan ser verdaderas o falsas simultáneamente.

C) Juan confía en que la lógica no sea difícil. Juan no confía en que la lógica no sea difícil.

- Enunciado y su negación

D) *Juan parte de la base de que la lógica es difícil. Juan parte de la base de que la lógica no es difícil.*

- La segunda parte de cada enunciado : '*la lógica (no) es difícil*' sería la referencia al nivel inferior del lenguaje objeto al que se refiere la primera parte de la oración, en la que se afirma que '*Juan parte de la base de que...*'

E) *María se comió algunos bombones pero no se comió todos.*

EJERCICIO 2: Poner un par de ejemplos de pares de enunciados que sean inconsistentes, pero en los que ningún miembro sea la negación del otro miembro del par.

- *Todos los libros que poseo se publicaron por primera vez después del año 2000. El último libro que me he comprado es 'El señor de los anillos'.*
- *Luis vivió durante el siglo XVIII. El décimo cumpleaños de Luis fue en 2010.*
- *La mezquita de Córdoba fue construida hace más de doce siglos. La mezquita de Córdoba fue construida hace exactamente doce siglos o menos.*
- *María se comió todos los bombones. Pedro se comió todos los bombones*

Conjunción

El símbolo de la conjunción ' $\wedge$ ' es considerado normalmente como el que mejor concuerda con sus contrapartidas del lenguaje natural. La tabla de verdad de esta conectiva muestra como la fórmula $p \wedge q$ es verdadera si y sólo si son verdaderos los dos componentes, y éstas parecen ser también la condiciones de verdad de la oraciones del lenguaje natural compuestas por '*y*', '*pero*',...

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Sin embargo, esta conectiva también está aquejada de alguna falta de correlación con su contrapartida del lenguaje natural: la conjunción representa una operación conmutativa, en el sentido de que el orden de los conyuntos es irrelevante: $p \wedge q \equiv q \wedge p$. Hay sin embargo construcciones conjuntivas de los lenguajes naturales que carecen de esta propiedad:

(8) Juan y María se casaron y tuvieron un hijo

que no equivale a

(9) Juan y María tuvieron un hijo y se casaron

conviene reparar en que muchos de los enunciados del lenguaje natural en que aparece el término 'y', o equivalentes, entre sus constituyentes en realidad no son enunciados complejos de la forma ' $p \wedge q$ '. A diferencia de lo que sucede, en un enunciado como

(10) Juan y María son estudiantes

que no es sino la conjunción de los dos enunciados *'Juan es estudiante'* y *'María es estudiante'*.

(11) Juan y María se casaron

no se puede descomponer en *'Juan se casó'* y *'María se casó'*, sino que se trata de un solo enunciado formado por un predicado **diádico** y dos términos singulares.

EJERCICIO 3: Indicar cuáles de los enunciados de la serie siguiente son enunciados compuestos susceptibles de ser formalizados mediante ' $\wedge$ ':

A) Todas las horas hieren. La última mata.
   - p = Todas las horas hieren.
   - q = La última hora mata.
   - $p \wedge q$

B) La soledad y la creación son de la misma partida.

C) Russell y Whitehead fueron amigos.

D) Russell y Whitehead escribieron los Principia Mathematica.

E) Arrojamos el pasado al abismo sin querer inclinarnos para ver si está bien muerto.
   - p *= arrojamos el pasado al abismo*
   - q *= queremos inclinarnos para ver si está bien muerto*
   - $p \wedge \neg q$

F) Jean P. Sartre dejó sin escribir una ética aunque siempre escribía sobre ética.
   - p *= Sartre dejó sin escribir una ética*
   - q *= Sartre siempre escribía sobre ética*
   - $p \wedge q$

EJERCICIO 4: Poner un par de ejemplos de enunciados en los que aparezca 'y' pero que no puedan ser tomados como ejemplos de enunciados conjuntivos desde el punto de vista lógico.

- *La empresa 'Ruiz y asociados' está en bancarrota*
- *Andrea y Ana se quieren mucho*
- *Pedro y Andrés forman una pareja estupenda.*
- *El rey y la reina son las piezas más importantes del ajedrez.*
- *Francisco y Juan se dieron la mano.*
- *Francisco y Carmen se besaron.*

Disyunción

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La disyunción es el nombre que recibe el símbolo $\vee$. Para que una disyunción sea verdadera basta con que al menos uno de los dos componentes de la misma lo sea. Esto se corresponde con el sentido no-excluyente de la disyunción en el lenguaje ordinario. Es evidente que la partícula '*o*' presente en el enunciado

(12) La justicia es el interés del más fuerte o está al servicio sólo de una minoría

tiene un sentido no excluyente. El enunciado compuesto sólo afirma la verdad de al menos uno de los componentes, pero sin excluir la del otro.

Sin embargo, algunas veces, con el 'o' del lenguaje ordinario se está indicando un tipo más estricto de disyunción, que es verdadera sólo si uno de los dos enunciados unidos por *'o'* lo es. Es lo que ocurre en enunciados como

(13) La justicia es el interés del más fuerte o Trasímaco no tiene razón

También ocurre en expresiones como la contenidas en los terribles versos de Miguel Hernández

(14) He regresado al tigre, aparta o te destrozo

En casos como éstos hablamos de un **sentido excluyente de la disyunción**, sentido que, si bien no se corresponde exactamente con el de la disyunción lógica, puede ser representado mediante símbolos lógicos ($\vee\vee$ o w) del modo siguiente:

$$p\vee\vee q \equiv (p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$$

p	q	$p\vee\vee q$	$(p\vee q)$	$(p\wedge q)$	$\neg(p\wedge q)$	$(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

Como ocurre con otras conectivas, la definición explícita de la disyunción nos permite ver cómo funciona esta conectiva en una inferencia. Dado que la disyunción es verdadera cuando alguno de sus componentes lo es, siempre podremos inferir de una disyunción y de la negación de uno de sus componentes la afirmación del otro (**regla de inferencia de la alternativa**, también llamado **silogismo disyuntivo)**. En cambio, por esta misma razón, no será lícito derivar la negación de uno de los componentes de una disyunción a partir de ésta y de la afirmación del otro.

EJERCICIO 5: Determinar cuáles de los siguientes enunciados pueden esquematizarse como $p\vee q$:

A) *Entonces era otoño en primavera,/ o tal vez al revés (Angel González) Es poesía.*
   - No se puede, sin cambiar el significado.

B) *El trato constante con la paradoja predispone a los matemáticos a la neurosis o al humor.*
   - Sí (el trato constante con la paradoja predispone a los matemáticos a la neurosis o el trato constante con la paradoja predispone a los matemáticos al humor).

C) *La filosofía es una batalla contra el embrujamiento de nuestra inteligencia por el lenguaje o Wittgenstein se equivoca.*
   - Sí.

D) *Toda madre tiene un hijo o una hija.*
   - No. Cambiaría el significado (toda madre tiene un hijo o toda madre tiene una hija).

E) *Algunos filósofos son empiristas o ninguno lo es.*
   - Sí, pero excluyente (Algunos filósofos son empiristas o ningún filósofo es empirista)

Condicional

El condicional $\rightarrow$ es la conectiva de la lógica proposicional cuyo significado se aparta más del de las expresiones correspondientes del lenguaje natural. Esta conectiva también recibe el nombre de **implicación material** o función flecha.

A los esquemas compuestos mediante esta conectiva, $p \rightarrow q$, se los denomina condicionales, llamándose **antecedente** al componente que ocupa la posición p y **consecuente** al que ocupa la posición q. el condicional es, al igual que la conjunción y la disyunción, un enunciado compuesto que admite, como un todo global, un valor de verdad.

Un condicional sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, siendo verdadero en todos los demás casos.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Estas condiciones veritativas se apartan bastante de los usos habituales de los hablantes en relación con los condicionales del lenguaje natural. Cuando el antecedente es verdadero, es cierto que la actitud propia del hablante es otorgarle al condicional el valor de verdad del consecuente, esto es, considerarlo verdadero cuando el consecuente es verdadero y falso cuando el consecuente es falso. Pero cuando el antecedente es falso, la asignación de un valor de verdad para el condicional se hace más arbitraria, debido a que en dicho caso, en el lenguaje natural, es como si no hubiésemos hecho una aserción condicional. La opción más conveniente, sin embargo, es considerar al condicional como verdadero en tales casos. Así pues, $p \rightarrow q$ se construye como verdadero cuando p y q son ambos verdaderos, cuando p es falso y q verdadero, y cuando ambos son falsos, y se construye como falso únicamente cuando p es verdadero y q falso. Entonces, serán verdaderos los enunciados

(15) Si cuatro es un número par, entonces es divisible por dos.

(16) Si siete es un número par, entonces es mayor que cuatro.

(17) Si siete es un número par; entonces es divisible por dos.

Un tipo de condicional cuyo sentido no se corresponde en modo alguno con el de $p \rightarrow q$ es el llamado **condicional contrafáctico**, esto es, aquel condicional cuyo antecedente es de hecho falso. La razón es que, dado que un condicional material con antecedente falso es siempre verdadero, tanto si su consecuente es falso como verdadero, no puede resultar adecuado como análisis de este tipo de enunciados contrafácticos, ya que la condiciones de verdad de dicho condicional material nos obligarían a aceptar como verdaderos enunciados como

(18) Si Frege hubiera conocido la filosofía de Quine, no la habría aceptado

(19) Si Frege hubiera conocido la filosofía de Quine, la habría aceptado

Por el mero hecho de Frege no conocía tal filosofía, siendo así que el uso común del lenguaje parece exigir que uno de ellos sea verdadero y el otro falso. Esto parece indiciar que un análisis adecuado de este tipo de condicionales ha de sobrepasar el ámbito de los meros valores veritativos para atender a las conexiones entre el contenido expresado por el antecedente y el expresado por el consecuente.

El análisis de los enunciados de *'si... entonces'* como condicionales materiales resulta menos inadecuado en el caso de que tales enunciados esté expresados en el modo indicativo, aún cuando también aquí puedan señalarse discordancias.

La mayor fuente de discordancia entre el condicional de la lógica y el significado de 'si... entonces' de los condicionales del lenguaje común estriba en que, mientras que el primero lo único que hace es afirmar que no se da el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, en los segundos, normalmente hacemos una afirmación más fuerte que la meramente veritativo-funcional; afirmamos una conexión causal o lógica o de algún otro tipo entre antecedente y consecuente, como ocurre en los siguientes enunciados

(20) Si el agua se hiela, entonces sus molécula forman cristales.

(21) Si María es madre, entonces es mujer.

(22) Si Juan es soltero, entonces no está casado.

Ante tales discrepancias, algunos lógicos han reaccionado rechazando el condicional material como análisis adecuado de los condicionales del lenguaje ordinario y tratando de construir algún análisis alternativo. Otros autores han preferido salvaguardar el condicional material dando cuenta de estas discrepancias apelando a la distinción entre el contenido semántico estricto de una oración y los principios pragmáticos que rigen la conversación. Esta es la postura mantenida por Grice, en su teoría de la simplicaturas conversacionales. Esta teoría se basa en la introducción de una distinción fundamental entre lo que una oración dice y lo que implica conversacionalmente. Mientras que lo primero es función de su significado convencional, lo que implica es función del contexto, de las intenciones del hablante y de ciertas "máximas conversacionales" que gobiernan el uso. Imaginemos, parra entenderlo, la siguiente conversación entre dos alumnos:

A: Juan sacó matrícula de honor en lógica, ¿no?

B: Y yo soy obispo de Astorga

La réplica de B a A es una afirmación a todas luces falsa. Mediante ella B está resaltando lo equivocado que está A respecto a las capacidades de estudio de Juan. Dicho de otro modo, el significado literal de la oración emitida por B difiere de lo implicado por B al proferirla. Lo que B ha dicho 'implica' la falsedad de lo que A ha insinuado, pero no en el sentido de la implicación lógica, sin en un sentido que tiene que ver con ciertos principios y supuestos conversacionales.

Según la teoría griceana, la diferencia entre dos enunciados como

(23) Juan se matriculó en lógica y María en metafísica

(24) Juan y María se casaron y tuvieron un hijo

no es de sentido (ambos tienen un sentido que recoge perfectamente el símbolo $\wedge$), sino que es una diferencia que puede explicarse conversacionalmente. El enunciado (24) tiene una implicatura que no tiene el (23), la de que los acontecimientos se han sucedido en el orden reflejado en él, esto es, primero se casaron y luego tuvieron un hijo. De igual modo pueden explicarse las diferencias de aquellos condicionales cuyo sentido no parece quedar recogido por el condicional de la lógica. En consecuencia, no hay nada que impida formalizar mediante este símbolo cualquier tipo de enunciado hipotético del lenguaje natural, ya que la validez de las inferencias en las que interviene permanece inalterada aun cuando se ignoren los significados adicionales que puedan tener.

Características de suficiencia y necesariedad en el condicional

Encontramos en el lenguaje natural muchas variantes idiomáticas de '*si... entonces*':

p sólo si q

q, si p

q siempre que p

q en caso de que p

p es suficiente para q

q es necesario para p

p implica q

no p a menos que q

El condicional puede ayudarnos a analizar y a comprender mejor dos nociones empleadas con mucha frecuencia en nuestro lenguaje común: las de **condición suficiente y necesaria**:

- A es **condición suficiente** de B en caso de que B sea verdadero si A es verdadero. Así pues, el antecedente de un enunciado condicional establece la condición suficiente para su consecuente.
- B es **condición necesaria** de A en caso de que A sea verdadero sólo si B es verdadero. Así, el consecuente de un condicional establece una condición necesaria para su antecedente.

De aquí se desprende que si A es una condición suficiente para B, entonces B es una condición necesaria para A y viceversa. Un enunciado como

(25) Si María es madre, entonces es mujer

Establece que el que María sea madre basta o es suficiente para que sea mujer, y establece también que el que María sea mujer es una condición necesaria para que sea madre, esto es, que si María no es mujer entonces no es madre. No conviene confundir, pues, la afirmación de una condición meramente necesaria con la de una condición a un tiempo necesaria y suficiente. En este último caso, y sólo en él, nos serviremos del **bicondicional** a la hora de esquematizar.

Algunas lecturas posibles del condicional

Algunas lecturas posibles del condicional $A \rightarrow B$

- Si A, entonces B (Si A, B)
- Cuando A, B
- A sólo si B (Sólo si B, A)
- A sólo cuando B
- No A, a menos que B
- Sólo si B, A (B, si A)
- Sólo cuando B, A
- A es (condición) suficiente para B
- B es (condición) necesaria para A
- Para A, es necesario que B
- Basta A para B (Para B, basta con A)
- B siempre que A

Algunas lecturas posibles de $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

- Si A, entonces si B, entonces C
- Cuando A, entonces si B, entonces C
- A sólo si cuando B, entonces C
- A sólo cuando si B, entonces C
- No A, a menos que si B, entonces C
- Sólo si B, entonces C, A
- Sólo cuando si B, entonces C, A
- A es suficiente para que B baste para C
- si B, entonces C es necesario para A
- Si A, entonces B sólo si C
- Si A, entonces B sólo cuando C

Observad que se puede sustituir el “si” del condicional por un “cuando”.

Consideraciones de formulación del condicional

De manera general podemos atender a las siguientes consideraciones a la hora de interpretar las características de suficiencia y necesariedad en los condicionales:

Si A entonces B / Sólo si A entonces B / A si y sólo si B

- Si A , entonces B (B si A) : $A \to B$
  - Lo que va detrás de "**si**" es un antecedente.
  - *El hecho de que ocurra* A *, es suficiente para que ocurra* B
- Sólo si A , entonces B (B sólo si A) : $B \to A$
  - Lo que va detrás de un "**sólo si**" es un consecuente.
  - *El que se haya dado* B *es necesario para que haya ocurrido* A
- Si y sólo si A , entonces B (A si y sólo si B / B si y sólo si A) : $A \leftrightarrow B$
  - Lo que va detrás de un "**si y sólo si**" es antecedente y consecuente, es un bicondicional.
  - A *y* B *son respectivamente condición el uno del otro*

No A a menos que B

No aprobaré, a menos que estudie = Si no estudio, no aprobaré = Para aprobar es necesario estudiar:

- No A a menos que B
  - A : Apruebo
  - B : Estudio
- $\neg B \to \neg A$
- $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ **ley de contraposición del condicional**
  - B es condición necesaria para A

No A a menos que B y C

No aprobaré, a menos que estudie y lleve un boli al examen = Si no ocurre que estudio y llevo un boli al examen, no aprobaré = Para aprobar es necesario que estudie y que lleve un boli al examen

- No A a menos que B y C
  - A : Apruebo
  - B : Estudio
  - C : Llevo un boli al examen
- $\neg(B \wedge C) \to \neg A$
- $A \to (B \wedge C)$

A a menos que B

Aprobaré, a menos que se acabe el mundo = Si no se acaba el mundo, aprobaré = Para no aprobar es necesario que se acabe el mundo

- A a menos que B
  - A : Apruebo
  - B : Se acaba el mundo
  - $\neg B \to A$
  - $\neg A \to B$

A a menos que no B

Aprobaré a menos que no lleve un boli al examen = Si llevo un boli al examen, aprobaré = Si no apruebo es que no llevaba un boli al examen

- A a menos que no B
  - A : Apruebo
  - B : Llevo un boli al examen
  - $B \rightarrow A$ que según la ley de contraposición del condicional equivale a $\neg A \rightarrow \neg B$

EJERCICIO 6: Traducir a condicionales estándar los siguientes enunciados

A) *Las células de una planta no pueden sintetizar los alimentos a menos que tengan clorofila*
  - Si las células de las plantas pueden sintetizar alimentos, entonces tienen clorofila
    - $p \rightarrow q$
    - p : *"las células de una planta pueden sintetizar alimentos".*
    - q : *"las células de una planta tienen clorofila".*
  - $\neg q \rightarrow \neg p$ por la ley de contraposición del condicional equivale a $p \rightarrow q$

B) *Para que una ley positiva sea legítima es condición necesaria que no atropelle la moral*
  - Si una ley positiva es legítima, entonces no atropella la moral
    - $p \rightarrow \neg q$
    - p : *"una ley positiva es legítima ".*
    - q : *"una ley positiva atropella la moral"*

C) *Para que un número sea divisible por 2, basta con que sea par*
  - Si un número es par, entonces es divisible por 2
    - $p \rightarrow q$
    - p : *"es un número par".*
    - q : *"es un número divisible por dos"*

D) *No se puede ver a menos que haya luz*
  - Si se puede ver, entonces hay luz
    - $p \rightarrow q$
    - p : *"se puede ver"*
    - q : *"hay luz"*

EJERCICIO 7: Simbolizar los siguientes enunciados por medio del condicional, reservando p para 'la inflación baja' y q para 'se controla el gasto público'

A) *La inflación no bajará a menos que se controle el gasto público.*
  - $\neg q \rightarrow \neg p$
  - *Si no se controla el gasto público, entonces no baja la inflación*
  - Sería equivalente a $p \rightarrow q$ por la **ley de contraposición del condicional**

B) Para que la inflación baje es necesario que se controle el gasto público.

- $p \rightarrow q$
- *Si la inflación baja, entonces se ha controlado el gasto público (condición necesaria)*

C) La inflación sólo bajará si se controla el gasto público.

- $p \rightarrow q$
- *la bajada del gasto público necesita necesariamente del control de la inflación*

Bicondicional

El **bicondicional** se representa mediante el símbolo $\leftrightarrow$, y se lee *'si y sólo si'*. Un bicondicional equivale a la conjunción de dos condicionales recíprocos. *'Si* p *entonces* q y *Si* q *entonces* p.

Es decir, si es verdad que p es condición de q, del hecho de que se dé p podemos inferir formalmente que se dará q; pero del hecho de que se haya dado q no podemos inferir formalmente que se haya dado p. Cabe, en efecto, la posibilidad de que q. se haya dado por otras causas, puesto que no hemos dicho que p sea la única causa de q.

Pero podríamos decir que p es a la vez condición suficiente y necesaria de q. Podríamos decir no simplemente *'Si* p *entonces* q *'*, sino '*si y sólo si* p, *entonces* q *'*

Ahora bien: si es verdad que p es condición a la vez suficiente y necesaria de q, entonces del hecho de que se haya dado p podemos inferir formalmente que se ha dado q, y del hecho de que se haya dado q podemos también inferir formalmente que se ha dado p. Quiere decirse, por tanto, que la expresión *'si y sólo si* p, *entonces* q *'* equivale a la expresión *'si* p, *entonces* q, *y si* q, *entonces* p *'*

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Con cierta frecuencia se incurre en el error de confundir un enunciado condicional con uno bicondicional, se trata de enunciado distintos, como se desprende de la consideración de los ejemplos

(26) María aprobará la metafísica si realiza un examen satisfactorio

(27) María aprobará la metafísica si y sólo si realiza un examen satisfactorio

En (26) *"realizar un examen satisfactorio"* es una condición suficiente pero no necesaria para que María apruebe, puede haber otros modos de lograrlo. En cambio, en (27) *"realizar un examen satisfactorio"* no es sólo condición suficiente, sino también necesaria. No hay otro modo de aprobar.

Tendemos a tirar del condicional para enunciados con la conectiva *'sólo si'*. Sin embargo, con carácter general, dicha expresión no puede interpretarse así. El enunciado

(28) Una persona puede ser Presidente de los Estados Unidos sólo si ha nacido en esta nación

no implica que si una persona ha nacido en Estados Unidos entonces puede ser Presidente de dicha nación. Puede que haya (los hay) otros requisitos para poder acceder al cargo, como ser mayor de edad. La única forma correcta de parafrasear el enunciado (28) sería

(28a) Si una persona no ha nacido en los Estados Unidos no puede ser presidente de dicha nación

y en consecuencia, el símbolo que hemos de emplear en su representación en lenguaje lógico es el del condicional $\rightarrow$.

También tendemos a considerar la expresión *'a menos que'* como si de un bicondicional se tratara. Que esta interpretación es errónea se desprende de considerar el siguiente enunciado:

(29) Juan no aprobará la lógica a menos que se matricule.

Lo único que este enunciado expresa es la idea de que Juan no puede aprobar la lógica si no se matricula, osea, es condición necesaria que se matricule para que pueda aprobar. En modo alguno encierra también la idea de que vaya a aprobar si se matricula. Se trata de nuevo de un enunciado condicional, y no bicondicional.' $\neg p$ a menos que q ' significa únicamente ' p sólo si q '.

Veamos un ejemplo que incluye las cinco conectivas: $[(\neg p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee r]$

p	q	r	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \vee r$	$[(\neg p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee r]$
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1

Consideraciones sobre el condicional y el bicondicional

Condicional ≠ implicación lógica

No hay que confundir el condicional (mal llamado a veces implicación material) con la **implicación lógica,** por más que sean nociones relacionada entre sí.

- La implicación es una de las conectivas que sirve para construir fórmulas de un lenguaje a partir de otras fórmula de dicho lenguaje.
- La implicación lógica es una expresión que se coloca entre nombres de fórmula de dicho lenguaje.

Cuando decimos '*si* p , *entonces* q ' estamos diciendo que si se da el hecho enunciado por el antecedente, entonces se dará el hecho enunciado por el consecuente. Cuando decimos ' " p " *implica* " q " estamos diciendo que **la verdad del antecedente implica la verdad del consecuente**. Y de sobra sabemos que '*verdad*' y '*falsedad*' son **predicados metalingüísticos** por respecto a aquello de lo que se predican.

> Condicional e implicación son, por tanto, nociones situadas en niveles distintos de lenguaje.

Cuando decimos, *'si* p *entonces* q *'* establecemos una relación entre dos enunciados, en concreto que p es **condición suficiente** para q ; mediante esta conectiva formamos un enunciado compuesto que es verdadero siempre que no ocurra que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Cuando decimos que un esquema implica otro, estamos diciendo que, suponiendo que el primer es verdadero, la estructura de los dos garantiza que el segundo también lo es.

De este modo, al enunciado

Spinoza era descendiente de marranos, luego Spinoza era descendiente de marranos o su familia procedía de España

le corresponde la fórmula condicional $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Pues bien, cuando una inferencia es válida, como en este caso, la fórmula condicional correspondiente es siempre verdadera bajo todas las interpretaciones posibles de sus variables, en este caso verdadera para todas las interpretaciones posibles de sus variables

A toda inferencia le corresponde un enunciado hipotético cuyo antecedente es la conjunción de la premisas y cuyo consecuente es la conclusión

En este caso decimos que el esquema p implica lógicamente el esquema $p \vee q$. En general, cuando un condicional es **tautológico** (o verdadero para todas las interpretaciones de sus componentes) podemos decir que el antecedente del mismo implica su consecuente.

Esta conexión ha llevado a adoptar la palabra '**implica**' como lectura del condicional, pero para evitar el riesgo de confundir dicha conectiva con la implicación lógica, es preferible denominar '**condicional'** a dicha conectiva y leerla como *'si... entonces'* y reservar el nombre '**implicación**' para la segunda noción, para el que también veremos que tenemos el término de '**consecuencia lógica**' en la que del primero "se sigue" el que el segundo sea consecuencia de éste.

Cuando entre las premisas y la conclusión de una inferencia media una relación de implicación decimos que la inferencia es válida, pero no se puede decir que *"las premisas infieren la conclusión"*. Son las personas quienes infieren o extraen conclusiones de las premisas, éstas implican, que no infieren conclusiones, cuando la inferencia es válida. Decir, por tanto,

el enunciado 'no está el mañana ni el ayer escrito (A. Machado)' implica el enunciado 'no está el mañana escrito'

equivale a decir

la expresión 'si no está el mañana ni el ayer escrito, entonces no está el mañana escrito' es lógicamente verdadera

En ambos casos estamos usando un metalenguaje.

Bicondicional ≠ equivalencia

Si no hay que confundir la implicación con el condicional, tampoco hay que hacerlo entre equivalencia y bicondicional. Se dice que dos esquemas son equivalentes si cada uno de ellos implica el otro, esto es, si el primero implica el segundo y el segundo implica al primero.

Las siguientes fórmulas son equivalentes porque la primera implica la segunda y ésta a su vez la primera.

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

Del mismo modo que una implicación no es sino un condicional válido, una equivalencia no es sino un bicondicional válido o verdadero para todas sus interpretaciones posibles. Es falso que '*si y sólo si* p *, entonces* q ' signifique lo mismo que ' p *es equivalente a* q '.

- Cuando decimos ‘*si y sólo si* p *, entonces* q ’ estamos usando el lenguaje para decir que lo enunciado por p es **condición suficiente y necesaria** de lo enunciado por q .
- Cuando decimos ‘ p *es equivalente a* q ' estamos utilizando el metalenguaje para expresar una relación entre nombres de enunciados —reducidos a sus valores de verdad—, y no entre los enunciados mismos. En este sentido, lo correcto estrictamente sería ‘“ p ” es equivalente a “ q ”’.

Cuando decimos ‘*si y sólo si* p *, entonces* q *’* estamos diciendo que sólo en el caso de que se dé lo enunciado por el antecedente se dará lo enunciado por el consecuente. Cuando decimos ‘ “ p ” *es equivalente a “* q *”* estamos diciendo que los valores de verdad del antecedente son en todos los casos los mismos que los del consecuente.

Paradojas de la implicación material

La equivocidad de la palabra “implica” unida a la falta de concordancia entre el condicional material y nuestros usos normales del condicional hace que nos resulten sorprendentes o paradójicos ciertos principios que incluyen esta conectiva y que son principios perfectamente válidos de la lógica clásica de enunciados. Estos principios, que precisamente por dicha razón se denominan ‘**paradojas de la implicación material**’ son los siguientes:

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

El primero de ellos parece decir que si un enunciado es verdadero, entonces es implicado por cualquier enunciado; el segundo, que si un enunciado es falso, entonces implica cualquier enunciado. Su carácter paradójico desaparece si reparamos en que dichos principios son equivalentes a los principios

- $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv p \rightarrow (\neg q \vee p)$
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv \neg p \rightarrow (\neg p \vee q)$

que lo único que afirman es que toda disyunción que tiene al menos un componente verdadero, es verdadera.

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\neg q \vee p$	$p \rightarrow (\neg q \vee p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	$\neg p \vee q$	$\neg p \rightarrow (\neg p \vee q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Además de estos enunciados, también resultan contraintuitivos los siguientes:

- $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
- $(p \vee \neg p) \rightarrow q$

El segundo de ellos es el principio conocido con el nombre de ***Ex contradictione quodlibet*** (es decir, de una contradicción se sigue cualquier cosa), también denominado a veces **principio de**

Duns Escoto, ya que en un principio se pensó que había sido este lógico y no el Pseudo Escoto quien lo había establecido por primera vez.

En relación con el tema de las paradojas se cuenta siempre una anécdota de Russell, que estaba manteniendo que un enunciado falso implica cualquier cosa, y un filósofo escéptico le preguntó:

> *- ¿Quiere usted decir que si 2+2=5, entonces es usted el Papa?*
>
> *Russell contesta afirmativamente con la siguiente prueba:*
>
> *- Si suponemos que 2+2= 5, entonces seguramente estará usted de acuerdo en que, si restamos 2 a cada lado tendremos 2=3. Invirtiendo los términos tenemos 3=2 y restando 1 de cada lado nos da 2=1. de modo que como el Papa y yo somos dos personas, y 2=1, entonces el Papa y yo somos uno. Luego, yo soy el papa*

Reglas de formación de fórmulas

A partir de los elementos del vocabulario se pueden construir **fórmulas** en un lenguaje formal y que son equivalente de la oraciones de un lenguaje natural. Mientras que no existen leyes precisas para delimitar con total precisión la secuencia de palabras que constituye una oración en un lenguaje natural, sí existen para la secuencia de símbolos que constituyen las fórmula en el lenguaje proposicional.

Nos servimos para ello de las letras X, Y, Z , letras **metalingüísticas,** metavariables: símbolo del lenguaje desde el que hablamos del lenguaje proposicional, con los que definimos la clase de las fórmulas de la lógica enunciativa del siguiente modo:

1. Toda variable enunciativa es una fórmula.
2. Si X es una fórmula, también lo es $\neg X$.
3. Si X e Y son fórmulas, también lo son $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$, $(X \leftrightarrow Y)$.
4. Sólo son fórmulas las secuencias que satisfacen alguna de las cláusulas 1-3.

Como es fácil colegir de la descripción informal que hemos hecho de las conectivas, en la lógica enunciativa clásica se contemplan sólo dos valores veritativas posibles para las fórmula: V y F ; de las que en consecuencia han de cumplirse los siguientes principios:

- <u>Principio de identidad:</u> $A = A$. En lógica no hay problemas de identidad como sí ocurren en el mundo, donde $Yo_{hoy} \neq Yo_{ayer}$.
- <u>Principio de bivalencia:</u> Requisito para la utilización de la lógica de enunciados en la evaluación de inferencias del lenguaje natural, y que establece que **un enunciado sólo puede ser verdadero o falso**.
- <u>Principio del tercio excluso (PTE)</u>: **e**stablece que la disyunción de un enunciado con su negación es una verdad lógica. $(p \vee \neg p) \quad V$
  - Algunos lógicos ven en este requisito una gran limitación y ven la conveniencia de desarrollar lógicas en la que se admitan más de dos valores de verdad. Estas lógicas que no asumen el principio de bivalencia se conocen como lógicas **polivalentes**, o más acertadamente, **multivaluadas.**
- <u>Principio de no contradicción:</u> No puede ser que $\neg(A \wedge \neg A)$ sea falso

Otro requisito para que esta utilización sea posible es que consideremos que las conectivas elegidas representan adecuadamente expresiones del lenguaje ordinario como *'no', '', 'si ... entonces'*.

Formalización del lenguaje natural

Podríamos sentirnos tentados a pensar que los signos constantes del lenguaje de la lógica de enunciados corresponden estrictamente a las llamadas «conjunciones» —copulativas, disyuntivas, etc.— del lenguaje ordinario: es decir, que a cada signo constante corresponde una y una sola conjunción, y que a cada conjunción corresponde uno y un solo signo constante. Pues bien: no ocurre así. Ni cada constante lógica corresponde a una única conexión entre enunciados en el lenguaje ordinario, ni tampoco todas las conjunciones del lenguaje ordinario tienen una traducción al lenguaje lógico.

El lenguaje de la lógica es un lenguaje artificial y como tal es un lenguaje restringido, con un radio de expresión corto. Son lenguajes diseñados especialmente para formular sólo determinadas cosas. Sin embargo, si su capacidad expresiva es menor, es mayor su precisión que la de cualquier lengua.

- Los lenguajes naturales sirven para todo.
- Los lenguajes artificiales sirven a un objetivo concreto. Y esa misión específica la cumplen con mayor exactitud que el lenguaje ordinario —cuya ambigüedad es, por lo demás, algo a celebrar en muchos casos.

Sabemos ya por qué las ciencias utilizan, en mayor o menor grado, lenguajes especiales: porque cada ciencia tiene su propio objeto de estudio, y, en consecuencia, sus propias necesidades expresivas. La lógica tiene por objeto el estudio de la validez formal de las inferencias. Las inferencias, los razonamientos, aparecen inevitablemente formulados en el lenguaje —en algún lenguaje—. Al lenguaje hay, pues, que acudir para analizarlos. **El análisis lógico del razonamiento acarrea, pues, el análisis lógico del lenguaje.** De ese análisis lógico del lenguaje resulta el lenguaje artificial, de la lógica. En general, el lenguaje de una ciencia procede, por una parte, de un análisis «desinteresado» (es decir, objetivo, sin prejuicios, aunque con hipótesis) de un determinado campo de objetos —el de los números, el de las transformaciones sociales, el de los movimientos de los cuencos celestes—, y, por otra parte, de un análisis «interesado» del lenguaje natural, de un análisis del lenguaje natural interesado en señalar —para subsanarlas—las deficiencias expresivas del lenguaje natural respecto de ese campo de objetos, aquello que el lenguaje natural no puede decir acerca de esos objetos con la precisión requerida.

Así nacen —así se justifican— los lenguajes artificiales en los que hallan expresión los enunciados de la ciencia. Así se justifica también el lenguaje de la lógica: sólo que en este caso, y por la razón de que el objeto de esta ciencia —los razonamientos— sólo se constituye como tal en cuanto dado en un lenguaje, el análisis de su objeto peculiar y el peculiar análisis del lenguaje que esa ciencia conlleva se confunden de hecho. El análisis del lenguaje que la lógica lleva a efecto es, pues, análisis que busca en el lenguaje aquellos y sólo aquellos **elementos que sean relevantes para la validez formal de los razonamientos**. La lógica analizará simplemente los rasgos lógico-formales del lenguaje ordinario.

De ese análisis resultará el lenguaje de la lógica, que se constituye integrando esos elementos extraídos del lenguaje ordinario en la estructura de un cálculo, El lenguaje lógico es, pues, en el sentido literal del término, un lenguaje abstracto: un lenguaje construido abstrayendo del lenguaje ordinario determinados aspectos, determinados usos, determinados tipos de expresiones que son relevantes desde el punto de vista lógico-formal.

El lenguaje lógico retiene del lenguaje natural aquello que interesa a la lógica, y prescinde de todo lo demás. En él sólo quedan recogidos y reorganizados aquellos elementos del lenguaje que se utilizan para urdir razonamientos.

Hacer lógica consiste, pues, en analizar formalmente las inferencias y en traducir luego los resultados de ese análisis a un lenguaje construido precisamente con el propósito de que en él resplandezca la forma de las inferencias.

Cuando uno no tiene imaginación, la muerte es poca cosa;

cuando uno la tiene, la muerte es demasiado.

¿Cuál sería el resultado del análisis lógico de este texto? Quizá sea triste, pero es éste:

$$(\neg p \to q) \wedge (p \to \neg q)$$

El texto se compone, en efecto, de dos enunciados, compuestos ambos, separados por un punto y coma. Visto desde la perspectiva del lenguaje lógico, un punto y coma sin más equivale a una conjunción. Cada uno de los dos enunciados es un condicional, puesto que en este contexto la conjunción '*cuando*' desempeña la misma función lógica que la conjunción '*si..., entonces...*'. Por lo demás, el enunciado '*uno no tiene imaginación*' es, obviamente, la negación de '*uno la tiene*', razón por la cual podemos esquematizar uno y otro por $\neg p$ y p, respectivamente. Otro tanto cabe decir acerca de '*la muerte es poca cosa*' (q) y 'la muerte es demasiado' ($\neg q$).

Hemos, pues, traducido un fragmento del lenguaje ordinario al lenguaje artificial de la lógica. En el curso de la traducción se han perdido matices, y matices importantes (si es que se puede decir que el contenido entero de un texto es un «matiz» de éste); pero no se trata de matices importantes desde el punto de vista lógico. Porque lo único importante desde un punto de vista lógico es la estructura del enunciado, y eso no sólo no lo hemos perdido, sino que lo hemos retenido en solitario; clarificándolo, por añadidura.

El lenguaje de la lógica no es, por tanto, sino la presentación formalizada de determinados rasgos o aspectos del lenguaje ordinario, algo así como la «puesta en limpio» de toda una zona de nuestro lenguaje cotidiano, la formalización del lenguaje en cuanto medio de expresión de inferencias, en cuanto instrumento para enunciar razonamientos con una determinada forma. En el lenguaje ordinario encontramos, en efecto, argumentaciones, razonamientos, inferencias. Es decir, en el lenguaje ordinario hallamos expresiones de carácter lógico-formal. Lo que el lógico formal hace es extraer del lenguaje natural esas expresiones, aislarlas, e integrarlas en una estructura de cálculo interpretando con ellas los elementos de éste.

Y, ¿cuál es, entonces, la relación entre ese lenguaje formalizado y la parte del lenguaje natural a la que parece corresponder? ¿Cuál es la relación entre los signos del lenguaje lógico y los signos paralelos en el lenguaje ordinario?. Ya hemos dicho en un principio que no hay una estricta correspondencia entre unos y otros. Ni a cada signo lógico corresponde una y una sola expresión del lenguaje ordinario, ni viceversa. La relación entre ellos no es de uno a uno sino de uno a muchos, o bien en otras ocasiones, de muchos a uno. Veamos cómo y por qué.

Del lenguaje natural, en comparación con el lenguaje lógico, se pueden decir dos cosas: que es demasiado rico, o que es demasiado pobre. Y no se trata de una contradicción, puesto que cada cosa se dice en un sentido distinto.

En un cierto sentido se puede decir que el lenguaje natural —cualquiera de las lenguas— es súper abundante desde el punto de vista lógico, es decir, que para expresar una misma relación lógica, el lenguaje natural se permite utilizar distintas expresiones.

Veamos un ejemplo. Sean los diez enunciados siguientes, tan distintas por lo demás, se reducen, desde el punto de vista lógico, a ésta: $p \to q$, pudiéndose reformular en consecuencia

1. *Es agradable caminar bajo la lluvia, siempre que se tenga algo suficientemente triste en que pensar.*
   - *Sí se tiene algo suficientemente triste en que pensar, entonces es agradable caminar bajo la lluvia.*
2. *Si la tarde está oscura, me invadirá el optimismo.*
   - *Sí la tarde está oscura, entonces me invadirá el optimismo.*
3. *Cuando alguien escribe como Borges, puede disculpársele todo.*
   - *Sí alguien escribe como Borges, entonces puede disculpársele todo.*
4. *Bien pensado, no hay por qué ser bienpensante.*
   - *Sí bien se piensa, entonces no hay por qué ser bienpensante.*
5. *Como siga aparentando tanta felicidad, empezaré a pensar que sufre considerablemente.*
   - *Sí sigue aparentando tanta felicidad, entonces empezaré a pensar que sufre considerablemente.*
6. *Se puede decir que Marx era un hegeliano, con tal de que se aclare en qué sentido y hasta qué punto.*
   - *Sí se aclara en qué sentido y hasta qué punto, entonces se puede decir que Marx era un hegeliano.*
7. *En no habiendo vino no hay ya amor (Eurípides).*
   - *Sí no hay vino, entonces ya no hay amor.*
8. *Tú dedícate al amor libre y verás cómo te sorprende la muerte en pecado mortal.*
   - *Si te dedicas al amor libre, entonces la muerte te sorprenderá en pecado mortal.'*
9. *En caso de que sople el viento, podremos navegar a vela.*
   - *Sí sopla el viento, entonces podremos navegar a vela*
10. *De haberlo meditado bien, no me hubiera atrevido a escribir este libro.*
    - *Sí lo hubiera meditado bien, entonces no me hubiera atrevido a escribir este libro.*

Donde se echa de ver que en el lenguaje lógico no hay preocupaciones de estilo. La estructura lógica es la misma en todos los casos, aunque esté representada en cada caso por giros lingüísticos distintos. Así, una expresión como

> *Ese lapso, corto quizá si se le mide por el calendario, es interminablemente largo cuando, como yo, se ha galopado a través de él.*

se reduciría, en un análisis lógico, a esto: $(p \to q) \wedge (r \to \neg q)$, es decir:

> *Si se le mide por el calendario, entonces ese lapso de tiempo es corto, y si se ha galopado, como yo, a través de él, entonces es interminablemente largo.*

El análisis lógico, es, pues, en este sentido, un **análisis reductivo**: un análisis que reduce la diversidad lingüística a una unidad lógica. Varios signos lingüísticos: *'si..., entonces...'*, *'cuando..., entonces...'*, *'... con tal que...'*, se reducen a un solo signo lógico:

Otras veces, sin embargo, ocurre a la inversa: a un solo signo del lenguaje natural corresponde más de una constante lógica. En este segundo sentido, el análisis. lógico no reduce, sino que **explicita**. Veamos algunos ejemplos:

1. *Miré los muros de la patria mía / si un tiempo fuertes ya desmoronados (Quevedo).*
2. *Caminara siete leguas / sin encontrar cosa viva / si no fuere cuervos negros / que los perros no querían (Romance de la muerte ocultada).*
3. *Y en prueba de cuanto te digo, ve a Delfos, pregunta a los oráculos y mira si ha faltado a la verdad mi mensaje (Sófocles).*
4. *¿Adocenarte? ¿¡Tú... del montón!? ¡Si has nacido para caudillo! (Escrivá).*
5. *¿Qué es ese azul que apenas si es montaña, si es nieve, si es azul? (Alberti).*
6. *Compañero en el trabajo soy con los obreros, que si ellos ejercitan músculos en los cuales se consumen las energía físicas, yo también, en otro orden de trabajo, consumo sustancias del cuerpo para poder arrancar un átomo al cerebro (Nicolás Salmerón).*
7. *Si alguna vuelta he cantao / ante panzudos patrones / he picaniao las razones / profundas del proberío (A. Yupanqui).*
8. *Si podemos presumir un descuido por parte de uno, dos o tres, sin duda el cuarto hubiera pensado en ello (E. Allan Poe).*

En todos estos enunciados aparece el término *si'*. No todos esos enunciados, sin embargo, son propiamente condicionales. En el caso 3, por ejemplo, el 'si' sirve para introducir una oración interrogativa indirecta; en el caso 8 —como en el 1— esa partícula parece tener sentido adversativo, equivalente a *'si bien', 'aunque'* o '*mientras*'. ¿Qué decir, por otra parte, del 'si' de 'apenas si es montaña'? ,,,

El análisis lógico revela, pues, la existencia de una diversidad profunda por debajo de la aparente uniformidad. Lo lingüísticamente idéntico resulta ser lógicamente diverso. Otro tanto ocurre en los ejemplos siguientes:

1. *Cuando Randolph Cárter cumplió los treinta años, perdió la llave de la puerta de los sueños (Lovecraft).*
2. *Cuando nació Buonarroti, Mercurio y Venus ascendían, triunfales, desnudos, hacia el trono de Júpiter (M. Mújica Lajuez).*
3. *Cuando en el juego no intervienen el amor y el odio, la mujer juega de manera mediocre (Nietzsche).*
4. *Cuando empiece la guerra, quizá nuestros hermanos se transformen (Brecht).*

Vemos aquí, aún más claramente que en el ejemplo anterior, que todos los enunciados tienen la misma estructura lingüística. Pero no la misma estructura lógica. De los cuatro, sólo uno de ellos, el tercero, es un condicional. En él la expresión '*cuando*' podría ser sustituida por '*si..., entonces...*' sin que cambiara el sentido del enunciado, cosa que no ocurre en los otros casos. En ellos, el término '*cuando*' no está empleado en su acepción condicional, sino con su sentido temporal. Es evidente que el segundo enunciado, por ejemplo, no sería equivalente a este otro:

> *Si nació Buonarroti, entonces Mercurio y Venus ascendían, triunfales, desnudos, hacia el trono de Júpiter*

Digamos, con Wittgenstein, que **el lenguaje**, lejos de constituir una unidad, **no es sino repertorio indefinidamente ampliable de juegos de lenguaje**, de sistemas de comunicación distintos entre sí, que engranan con el mundo de diversos modos y se gobiernan por distintos conjuntos de reglas.

Cantar es, por ejemplo, un juego de lenguaje. Lo es también relatar historias, dar órdenes, rezar o insultar. Cuando yo digo *«el día había transcurrido del modo como suelen transcurrir estos días»* estoy jugando —repitiendo a Hermann Hesse— a contar algo. Cuando digo *«Perdónanos nuestras deudas»* estoy jugando a suplicar. Cuando digo *«Si no estoy preocupado por ese asunto, entonces es que no soy un neurótico. Pero, puesto que soy un neurótico, ese asunto me preocupa»*, estoy jugando a razonar, a inferir unos enunciados a partir de otros.

Y es que hay un juego de lenguaje, una forma de jugar con el lenguaje ordinario, que consiste; en razonar, en hacer inferencias. Pues bien: el lenguaje de la lógica, construido sobre la base de este juego ordinario de lenguaje, es un juego de lenguaje formalizado que consiste, pura y simplemente, en razonar. Las relaciones entre el juego de la lógica en el lenguaje ordinario y el juego de la lógica en un lenguaje formalizado no se pueden establecer de una vez por todas. Hemos dicho ya que el segundo es una reconstrucción, una «puesta en limpio» del primero: las "reglas ~de razonamiento, que en aquél eran vagas e implícitas, se vuelven en éste explícitas y precisas; la estructura de los razonamientos, que en aquél estaba oculta o incluso desfigurada, se hace en éste patente a solas. La traducción de un lenguaje a otro no es una traducción automática. Exige, como toda traducción, percepción de matices, imaginación, atención, en suma, a un contexto ilimitado.

Cómo formalizar

Cuando nos enfrentamos a la tarea de formalizar enunciados compuestos moleculares, lo primero que hay que tener en cuenta es que es preciso hacer explícitos todos y cada uno de los enunciados incluidos en la expresión del enunciado compuesto, teniendo en cuenta la posible aparición sincopada. Por ejemplo, en

> *Los intelectuales de principios del siglo XVII no podían expresarse libremente pero les quedaba el recurso de ironizar, como hicieron Cervantes y Quevedo.*

cabe destacar la presencia de cuatro enunciados atómicos: '*Los intelectuales de principios del siglo XVII no podían expresarse libremente*', '*a los intelectuales del XVII les quedaba el recurso de ironizar*', '*Cervantes echó mano del recurso de la ironía*' y '*Quevedo echó mano del recurso de la ironía*'.

Es importante parafrasear adecuadamente un enunciado compuesto con el fin de detectar todos los enunciados simples que lo componen, agrupándolos adecuadamente a fin de detectar la conectiva dominante que prima sobre las demás.

Una vez detectadas las conectivas hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Alcance: la expresión más breve en la que aparece.
  - por ejemplo el alcance de $\neg$ en los siguientes ejemplos es distinto: $\begin{cases} \neg p \\ \neg(p \wedge q) \end{cases}$
- La conectiva que tiene **mayor alcance** en un enunciado es la conectiva principal:
  - $p \vee q \wedge r$ es ambigua, ya que podría interpretarse como $p \vee (q \wedge r)$ como $(p \vee q) \wedge r$, cuyos significados son distintos. Los **paréntesis** resultan por tanto de máxima utilidad, ya que **definen el alcance de las diversas** conectivas.

Veamos algunos ejemplos:

> *Si todos los hombres se guiaran por la razón, reinarían la justicia y la solidaridad y el poder estatal sería superfluo. (Spinoza).*

La tarea más importante que hemos de afrontar, en un caso así, es la de decidir si se trata de un enunciado en el que prima el condicional o si estamos más bien ante un enunciado conjuntivo, esto es, habría que esquematizarlo como

$$p\rightarrow(q\wedge r\wedge s)$$

o más bien como

$$[p\rightarrow(q\wedge r)]\wedge s$$

A la hora de decidir al respecto, es preciso atender a las premisas que generalmente nos da el propio lenguaje. Así, el hecho de que no haya una coma antes del enunciado *'y el poder estatal...'* parece ser una indicación de que la mejor interpretación es la primera. Pero hay veces que el lenguaje no nos da ninguna pista, siendo más difícil adivinar lo que el proponente del enunciado haya querido significar con él. Sea el enunciado:

> *Si las hipótesis científicas no pueden dar lugar a predicciones a menos que vayan más allá de lo observado, entonces las hipótesis científicas no son meros resúmenes de observaciones registradas.*

Es un enunciado condicional cuyo antecedente es, a su vez, un enunciado condicional. Si representamos:

p : *'las hipótesis científicas pueden dar lugar a predicciones'*

q : *'la hipótesis científicas van más allá de lo observad'*

r : *'la hipótesis científicas son meros resúmenes de observaciones registradas*

Tendríamos $(\neg q\rightarrow\neg p)\rightarrow\neg r$ en lugar de $\neg q\rightarrow(\neg p\rightarrow\neg r)$, que pese a lo que pueda pensarse, no son equivalentes entre sí.

p	q	r	$\neg q\rightarrow\neg p$	$(\neg q\rightarrow\neg p)\rightarrow\neg r$	$\neg p\rightarrow\neg r$	$\neg q\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

EJERCICIO 8: Determinar, mediante la oportuna colocación de símbolos de puntuación, las distintas formas en que podría eliminarse la ambigüedad de la expresión $p\wedge\neg q\vee r$:

- $(p\wedge\neg q)\vee r$
- $p\wedge(\neg q\vee r)$
- $p\wedge\neg(q\vee r)$

EJERCICIO 9: Esquematizar los siguientes enunciados, prestando especial atención a la colocación de los paréntesis y demás símbolos de puntuación:

A) *Si Wittgenstein está en lo cierto entonces si las leyes de la lógica son tautologías no contienen ninguna información.*
   - p : *Wittgenstein está en lo cierto*
   - q : *las leyes de la lógica son tautologías*
   - r : *las leyes de la lógica contienen información*
   - $p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$

B) *Si Frege tiene razón, el que las leyes de la lógica sean formales no implica que no contengan información*
   - p : *Frege tiene razón*
   - q : *Las leyes de la lógica son formales*
   - r : *Las leyes de la lógica contienen información*
   - $p \rightarrow \neg (q \rightarrow \neg r)$

C) *Si Frege tiene razón y las leyes de la lógica son informativas entonces no es cierto que sean tautologías o que Wittgenstein tenga razón.*
   - p : *Frege tiene razón*
   - q : *Las leyes de la lógica son informativas*
   - r : *Las leyes de la lógica son tautologías*
   - s : *Wittgenstein tiene razón*
   - $(p \wedge q) \rightarrow \neg (r \vee s)$

Dado que el objetivo perseguido con la formalización es la justificación y crítica de la inferencia, la tarea de formalizar no consiste en simbolizar enunciados aislados unos de otros, sino teniendo en cuenta el contexto de la inferencia que deseamos evaluar. La tarea de parafrasear lógicamente el lenguaje común supone no sólo traducir conectivas de este lenguaje a conectivas lógicas, sino también reformular las cláusulas componentes en la medida en que sea necesario para asegurarlas frente a los cambios de significación que puedan producirse en el seno de las inferencias.

María no preparó a conciencia el examen de Álgebra y lo aprobó

María preparó a conciencia el examen de Análisis y no lo aprobó

es evidente que si tuviéramos que tomarlos en consideración conjuntamente, no podríamos tomar el *'lo aprobó'* del primero como el mismo *'lo aprobó'* del segundo, no pudiendo formalizar como $p \wedge q$ y $r \wedge \neg q$, sino que habríamos de hacerlo como $p \wedge q$ y $r \wedge \neg s$.

En general, la adecuación del análisis de una inferencia depende de que respetemos el principio de no dar a una misma expresión interpretaciones diferentes, cosa que, en el caso de la formalización en el ámbito de la lógica de enunciados, se traduce en la necesidad de emplear una variable enunciativa distinta para cada enunciado diferente.

En la inferencia común algunas veces se produce una violación de este principio. En tal caso se incurre en lo que se llama **falacia de equivocación**. Un ejemplo de ésto es el siguiente:

El hombre es el único animal que tropieza dos veces en la misma piedra. Las mujeres no son hombres. Luego la mujeres no tropiezan dos veces en la misma piedra.

Es obvio que esto no lleva a engaño a nadie, dada la obviedad de la equivocación cometida. Pero mucha veces el doble sentido de un término en una inferencia no es tan obvio.

A la hora de formalizar es importante estar atentos a los cambios de significación que puedan producirse dentro de los límites del argumento propuesto, así como ser capaces de detectar un mismo enunciado detrás de la diferencias estilística o de expresión de las distintas formulaciones en que aparezca en el seno de este. Veamos el siguiente ejemplo:

> *Si la historia de la creación incluida en el Génesis es una descripción literal verdadera, entonces los primeros tres días de la existencia de la Tierra no hubo Sol. El concepto de 'día' se define por referencia al Sol. No puede ser a la vez el caso de que el concepto se defina así y que la Tierra existiera tres días antes de que se creara el Sol. De donde se deduce que la historia de la creación del Génesis no es una descripción literal verdadera.*

Si consideráramos aisladamente los enunciados contenidos en ella, es obvio que los enunciados

> *durante los primeros tres días de la existencia de la Tierra no hubo Sol*
>
> *la Tierra existiera tres días antes de que se creara el Sol*

no pueden considerarse equivalentes, dado que el primero de ellos es una negación, en tanto que el segundo no lo es, y en el que se presupone que el Sol fue creado, cosa que no hace el primero. Sin embargo, a efectos de analizar la inferencia y poder justificar la validez de la misma, no sería inapropiado hacer caso omiso de esas diferencias y considerar ambos enunciados como significando lo mismo y, por tanto, como susceptibles de ser simbolizados en una misma variable. Aceptado esto y simbolizando, la forma de esta inferencia sería:

$p \to q$	*Nuestra primera premisa verdadera es* r
r	*Para que* $\neg(r \wedge q)$ *sea cierta,* $r \wedge q$ *ha de ser falsa, y como* r *es verdadera, entonces* q *ha de ser falsa*
$\neg(r \wedge q)$	*Para que* $p \to q$ *sea verdadera, siendo* q *falsa, sólo puede serlo siendo* p *falsa a su vez*

$\neg p$	*Nuestra conclusión es por tanto que* p *es falsa (* $\neg p$ *)*

> *El Sol sale y se pone si y sólo si la Tierra gira. No puede ocurrir que si la Tierra gira la Luna no se mueva alrededor de la Tierra. Luego el Sol sale y se pone o el clima varía de una estación a otra.*

Estamos ante un argumento con dos premisas. La primera es un enunciado bicondicional ('*si y sólo si*') lo que nos hace dudar de si toma el enunciado como bicondicional o conjuntivo, es decir, dudamos entre $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ y $p \wedge (q \leftrightarrow r)$.

El que no haya una coma antes de la conjunción y de que el sujeto gramatical de la oración, el Sol, no se repita, son indicios suficientes para decantarnos por la primera interpretación.

La segunda premisa es la negación de un enunciado condicional cuyo consecuente es a su vez una negación de un enunciado atómico. El hecho de que en el lenguaje común el símbolo de negación aparezca dentro del enunciado no debe inducirnos al error de pasarla por alto y no recogerla en nuestra simbolización. Hemos de formular la segunda premisa como $\neg(r \to \neg s)$.

Por último, hemos de interpretar la conclusión como un enunciado disyuntivo, uno de cuyos disjuntos es una oración conjuntiva; y no como una conjunción: $(p \wedge q) \vee t$. Quedando la inferencia así:

$(p \wedge q) \leftrightarrow r$
$\neg(r \to \neg s)$

$(p \wedge q) \vee t$

Es preciso tener en cuenta que la negación no siempre afecta a un enunciado atómico, sino que en ocasiones su alcance es la totalidad de un enunciado molecular. Esto ocurre en un enunciado como

No ocurre que el dinero pueda comprar la felicidad o pueda comprar la amistad

Lo que se niega es el enunciado disyuntivo, que habría de esquematizarse como $\neg(p \vee q)$ o como $\neg p \wedge \neg q$, que son formalmente equivalentes.

Veamos otro ejemplo donde aparece una de estas negaciones:

Si los monistas están en lo cierto, entonces si podemos ser falibles en nuestras creencias lógicas la leyes lógicas no serían necesarias. Si los revisionistas tienen razón, entonces que las leyes lógicas sean necesarias no implica que no podamos ser falibles en nuestras creencias lógicas. Por tanto, si las leyes lógicas son necesarias y los monistas tienen razón, entonces los revisionistas no la tienen

Que se formalizaría como

$p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
$s \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg q)$

$(r \wedge p) \rightarrow \neg s$

p *: los monistas están en lo cierto*
q *: podemos ser falibles en nuestras creencias lógica*
r *: las leyes lógicas son necesarias*
s *: los revisionistas tienen razón*

Por último, sea la siguiente inferencia:

Si Juan no estudia adecuadamente o se dedica a perder el tiempo, entonces los padres de Juan no seguirán pagando sus estudios a menos que cambie de actitud y se tome la cosas en serio. Por tanto, si Juan se dedica a perder el tiempo y no cambia de actitud, entonces sus padres no seguirán pagándole los estudios.

Se trata de una inferencia con una sola premisa. Lo primero que habrá que hacer es buscar el esquema correspondiente a la forma de la misma, buscando la conectiva principal del párrafo anterior al punto y seguido, que no es otra que *'si... entonces'*.

(Juan no estudia adecuadamente o se dedica a perder el tiempo) $\rightarrow$ *(los padres de Juan no seguirán pagando sus estudios a menos que cambie de actitud y se tome la cosas en serio.)*

El segundo paso consiste en averiguar cuál es la conectiva principal del consecuente (el párrafo incluido en el segundo paréntesis) y que no es otra que *'a menos que'*, para la cual hemos de buscar su correlación en el lenguaje simbólico.

'No p *a menos que* q *'* es traducible en el lenguaje simbólico por cualquiera de la expresiones siguientes, todas ellas equivalentes entre sí:

- $\neg q \rightarrow \neg p$: si no se da q , entonces no se da p
- $p \rightarrow q$: si se da q , es que se ha dado p
- $\neg p \vee q$: o no se da p , o se da q

Optando por la tercera posibilidad, se puede parafrasear de nuevo como:

(Juan no estudia lo suficiente o Juan se dedica a perder el tiempo) $\rightarrow$ *[¬(los padres de Juan siguen pagándole a Juan los estudios)* $\vee$ *(Juan cambia de actitud y Juan se toma las cosas en serio)*

La conclusión es más sencilla de formalizar, siendo el resultado de la formalización de la inferencia

$(\neg p \vee q) \rightarrow [\neg r \vee (s \wedge t)]$

$(q \wedge \neg s) \rightarrow \neg r$

p : *Juan estudia adecuadamente*
q : *Juan se dedica a perder el tiempo*
r : *Los padres de Juan pagan sus estudios*
s : *Juan cambia de actitud*
t : *Juan se toma las cosas en serio*

EJERCICIO 10: Formalizar las siguientes inferencias:

A) *Si mi creencia en que el gato está sobre el felpudo fuera uno de los estados de mi cerebro, entonces podría determinar que tengo la creencia examinando mi cerebro. Si pudiera determinar que tengo la creencia examinando mi cerebro, entonces podría decir que creo que el gato está sobre el felpudo sin adoptar ninguna postura sobre la situación del gato. Pero puedo decir que el gato está sobre el felpudo precisamente si y sólo si adopto una postura acerca de su situación. Por consiguiente dicha creencia no es un estado de mi cerebro.*

- p : *mi creencia en que el gato está sobre el felpudo es uno de los estados de mi cerebro*
- q : *puedo determinar que tengo la creencia examinando mi cerebro*
- r : *afirmo la posición del gato*
- s : *adopto una postura sobre la situación del gato*

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow (r \wedge \neg s)$
$s \leftrightarrow r$

$\neg p$

B) *Si las operaciones de nuestra voluntad no fueran causadas, no podríamos tratar de influir en la conducta de los demás. Si no pudiéramos tratar de influir en dicha conducta, argumentar, exhortar y mandar serían gastar saliva en balde. En este caso, buena parte de las acciones de las que se ocupa la moralidad se convertirían en irracionales.*

Suponiendo que la moralidad no excluye la acción racional, entonces hemos de concluir que las acciones tienen causas.

- p : *las operaciones de nuestra voluntad son causadas*
- q : *puedo tratar de influir en la conducta de los demás*
- r : *argumentar, exhortar y mandar es gastar saliva en balde*
- s : *buena parte de la acciones de la moralidad son irracionales*

$\neg p \rightarrow \neg q$
$\neg q \rightarrow r$
$r \rightarrow s$
$\neg s$
----
p

C) *Si lo mantenido por Wittgenstein en el Tractatus es correcto entonces la filosofía no es una ciencia o no consiste en proposiciones. La filosofía consiste en proposiciones o es una actividad. Si la filosofía no es una ciencia entonces no explica los hechos. Luego si lo mantenido por Wittgenstein en el Tractatus es correcto entonces la filosofía es una actividad o no explica los hechos.*

- p : *lo mantenido por Wittgenstein en el Tractatus es correcto*
- q : *la filosofía es una ciencia*
- r : *la filosofía consiste en proposiciones*
- s : *la filosofía es una actividad*
- t : *la filosofía explica los hechos*

$p \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$
$r \vee s$
$\neg q \rightarrow \neg t$

$p \rightarrow (s \vee \neg t)$

EJERCICIOS DE FORMALIZACIÓN DE ENUNCIADOS:

1. Resulta muy desagradable caerle bien a la gente que te cae mal (El Perich).
    - p : *Resulta muy desagradable caerle bien a la gente que te cae mal*
2. Tu escritura es ilegible.
    - p : *tu escritura es legible* $\Rightarrow \neg p$
3. Para solucionar el problema de la vista cansada basta con mirar una cama durante diez minutos o una silla durante veinte (El Perich)
    - p : *mirar una cama durante diez minutos*
    - q : *mirar una silla durante veinte minutos*
    - r : *solución al problema de la vista cansada*
    - $(p \vee q) \rightarrow r$
4. Ni llueve ni hace frío.
    - p : *llueve*
    - q : *hace frío*
    - $\neg p \wedge \neg q$
5. María es aficionada al tenis, pero no al fútbol.
    - p : *María es aficionada al tenis*
    - q : *María es aficionada al fútbol*
    - $p \wedge \neg q$
6. Goya y Velázquez son pintores.
    - p : *Goya es pintor*
    - q : *Velázquez es pintor*
    - $p \wedge q$
7. Aunque la pornografía es gravemente peligrosa, también es cierto que no se conoce ni un solo caso de muerte provocada por la pornografía (El Perich)
    - p : *la pornografía es gravemente peligrosa*
    - q : *se conoce algún caso de muerte provocada por la pornografía*
    - $p \wedge \neg q$
8. Se busca chico o chica para compartir piso.
    - p : *se busca chico o chica para compartir piso*
        - *'chico o chica' es el objeto que se busca, el complemento directo. No es que se estén realizando dos búsquedas diferentes de manera simultánea.*
9. Ana Obregón es bióloga o actriz.
    - p : *Ana Obregón es bióloga*
    - q : *Ana Obregón es actriz*
    - $p \vee q$

10. De haber tomado medidas en su momento, no se hubieran propagado los incendios forestales.
    - p *: tomar medidas a tiempo*
    - q *: se propagan los incendios forestales*
    - $p \to \neg q$
11. Aunque la mayoría de los ríos españoles no son navegables, en compensación casi todos son andables (El Perich)
    - p *: la mayoría de ríos españoles son navegables*
    - q *: casi todos los ríos españoles son andables*
    - $\neg p \wedge q$
12. Si los elefantes se fugan, entonces el domador se quedará muy triste.
    - p *: los elefantes se fugan*
    - q *: el domador está triste*
    - $p \to q$
13. La política es el arte de buscar problemas, encontrarlos, hacer un diagnóstico falso y aplicar después los remedios equivocados. (Groucho Marx)
    - p *: la política es el arte de buscar problemas*
    - q *: la política es el arte de encontrar problemas*
    - r *: la política es el arte de hacer un diagnóstico falso de los problemas*
    - s *: la política es el arte de aplicar los remedios equivocados*
    - $p \wedge q \wedge r \wedge s$
14. Si bien es cierto que el camello es el animal que más tiempo puede permanecer sin beber, es preciso reconocer que cuando bebe se pone insoportable. (El Perich)
    - p *: el camello es el animal que más tiempo puede permanecer sin beber*
    - q *: el camello bebe*
    - r *: el camello se pone insoportable*
    - $p \wedge (q \to r)$
15. No reírse de nada es de tontos, reírse de todo es de estúpidos. (Groucho Marx)
    - p *: no reírse de nada es de tontos*
    - q *: reírse de todo es de estúpidos*
    - $p \wedge q$
16. Ser buena persona no tiene ninguna utilidad a la hora de aprender a nadar. (El Perich)
    - p *: ser buena persona no tiene ninguna utilidad a la hora de aprender a nadar.*
17. Si sigues cumpliendo años, acabarás muriéndote. (Groucho Marx)
    - p *: seguir cumpliendo años*
    - q *: acabar por morirse*
    - $p \to q$
18. Esta oración es falsa.
    - p *: esta oración es falsa (→ es una paradoja por la autorreferencia "esta oración ´")*

19. Si cerramos un ojo resulta muy difícil poder apreciar las distancias. Si cerramos los dos, mucho más. (El Perich)
    - p *: si cerramos un ojo resulta muy difícil poder apreciar las distancias. Si cerramos los dos, mucho más*

    Otra opción: $(p \to q) \wedge (r \to s)$
    - p *: cerrar un ojo*
    - q *: es difícil apreciar la distancias*
    - r *: cerrar los dos ojos*
    - s *: es mucho más difícil apreciar las distancias*
20. Cuando un médico se equivoca, lo mejor es echarle tierra al asunto (Woody Allen)
    - p *: un médico se equivoca*
    - q *: es mejor echarle tierra al asunto*
    - $p \to q$
21. Te traeré flores siempre que vaya a Valencia.
    - p *: te traigo flores*
    - q *: voy a Valencia*
    - $q \to p$
22. El ángulo a es obtuso si y sólo si mide más de 90º.
    - p *: a es un ángulo obtuso*
    - q *: a es un ángulo de más de 90º*
    - $p \leftrightarrow q$
23. Sólo si estudias aprobarás.
    - p *: estudias*
    - q *: aprobarás*
    - $q \to p$

    'sólo si' siempre va seguido del consecuente de un condicional, indica una condición necesaria (para aprobar es necesario haber estudiado, por lo que si he aprobado, es que he estudiado, si no estudias, no apruebas: $\neg p \to \neg q$ *)*
24. Si Dios existe, espero que tenga una buena excusa. (Woody Allen)
    - p *: Dios existe*
    - q *: espero que tenga una buena excusa*
    - $p \to q$
25. El que haya progreso equivale a que no exista el analfabetismo.
    - p *: hay progreso*
    - q *: existe analfabetismo*
    - $p \leftrightarrow \neg q$
26. No es cierto que sea falso que no llueve.
    - p *: llueve*
    - $\neg p$ *: no llueve*
    - $\neg\neg p$ *: es falso que no llueve*
    - $\neg\neg\neg p$ *: no es cierto que sea falso que no llueve*

27. No vi la película, pero leí la novela.
    - p *: vi la película*
    - q *: leí la novela*
    - $\neg p \wedge q$
28. Llueve y o bien nieva o sopla viento.
    - p *: llueve*
    - q *: nieva*
    - r *: sopla viento*
    - $p \wedge (q \vee r)$
29. O está lloviendo y nevando, o está soplando el viento (pero no las dos cosas).
    - p *: llueve*
    - q *: nieva*
    - r *: sopla viento*
    - $(p \wedge q) \vee \vee r$
30. O los hombres han nacido iguales o no son libres (o ambas cosas).
    - p *: los hombres han nacido iguales*
    - q *: los hombres son libres*
    - $p \vee \neg q$
31. O bien Moriarty y Crumm son ambos culpables, o Crumm es inocente (pero ambas).
    - p *: Moriarty es culpable*
    - q *: Crumm es culpable*
    - $(p \wedge q) \vee \vee \neg q$
32. O Crumm es culpable, o él y Moriarty lo son conjuntamente (pero no las dos cosas).
    - p *: Crumm es culpable*
    - q *: Moriarty es culpable*
    - $p \vee \vee (p \wedge q)$
33. *O bien Moriarty es culpable o Crumm es inocente, o ambos son culpables.*
    - p *: Moriarty es inocente*
    - q *: Crumm es inocente*
    - $(\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
34. *Luis se irá si Pablo se queda.*
    - *Si Luis se ha ido, es porque Pablo se ha quedado. El que Luis se haya ido es condición necesaria para que Pablo se haya quedado*
    - p *: Luis se va*
    - q *: Pablo se queda*
    - $q \rightarrow p$

35. *Si Pablo se queda, entonces Luis se va.*
    - *ahora, que Pablo se quede es condición suficiente (aunque la formalización de* p *y* q *es inversa al punto anterior)*
    - p *: Pablo se queda*
    - q *: Luis se va*
    - $p \rightarrow q$
36. *Supuesto que Pablo se quede, Luis se irá.*
    - p *: Pablo se queda*
    - q *: Luis se va*
    - $p \rightarrow q$
37. *Luis se irá en caso de que Pablo se quede.*
    - p *: Luis se va*
    - q *: Pablo se queda*
    - $q \rightarrow p$
38. *O Holmes lleva razón, o Moriarty y Crumm son o ambos culpables o ambos inocentes; y Crumm es culpable.*
    - p *: Holmes lleva razón*
    - q *: Moriarty es inocente*
    - r *: Crumm es inocente*
    - $\{p \vee [(\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)]\} \wedge \neg r$

q	r	$\neg q \wedge \neg r$	$q \wedge r$	$(\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1

- *El punto y coma (;) determinan la conjunción que sería la conectiva principal entre los enunciados a ambos lados de la misma, o sea:* $\{..\} \wedge \neg r$
- *Primer enunciado tenemos una disyunción como conectiva principal:* $\{p \vee [\ldots]\}$
- *La segunda parte de este enunciado sería a la vez otra disyunción de otros dos enunciados, que serían cada uno una conjunción (ambos culpables o ambos inocentes):* $(\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$
  - *Por lo que viendo el resultado final para esta disyunción, realmente creo podríamos ponerla como la negación de las disyunción excluyente* $\neg(q \vee \vee r)$ *, quedándonos así reformulada la formalización total como*

$$\{p \vee \neg(q \vee \vee r)\} \wedge \neg r$$

39. *Democracia significa un modo de vida en el que la libertad y la justicia están presentes.*
    - p *: Democracia significa un modo de vida en el que la libertad y la justicia están presentes*
    - *También se podría pensar en lo siguiente:*
      - p *: Democracia significa un modo de vida en el que la libertad está presente.*
      - q *: Democracia significa un modo de vida en el que la justicia está presente.*
      - $p \wedge q$ *. Esta propuesta no es buena. Un ejemplo similar: una jarra con una clara es una jarra con cerveza y gaseosa. En cambio, es falso que una jarra con una clara es una jarra con cerveza y también es falso que es una jarra con gaseosa).*

40. *Cientos de vidas podrían salvarse cada año si la gente utilizara el cinturón de seguridad.*
    - p *: cientos de vidas podrían salvarse cada año*
    - q *: la gente utiliza el cinturón de seguridad*
    - $q \to p$
41. *No es el caso que, si La Luna está hecha de queso verde, entonces los vehículos espaciales no pueden alunizar en ella.*
    - p *: La Luna está hecha de queso verde*
    - q *: los vehículos espaciales pueden alunizar en ella*
    - $\neg(p \to \neg q)$
42. *Si la Reina Roja está furiosa, entonces o el Conejo Blanco está desconcertado o Alicia no será coronada reina.*
    - p *: La Reina Roja está furiosa*
    - q *: El Conejo Blanco está desconcertado*
    - r *: Alicia será coronada reina*
    - $p \to (q \vee \neg r)$
43. *Si los verdaderos amigos tienen todo en común, entonces tú no puedes ser más rico que tu compañero si dices que sois verdaderos amigos. (Platón)*
    - p *: los verdaderos amigos tienen todo en común*
    - q *: tú eres más rico que tu compañero*
    - r *: dices que sois verdaderos amigos*
    - $p \to (r \to \neg q)$
44. *Que 2 es un número primo significa que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.*
    - p *: 2 es un número primo*
    - q *: 2 es sólo divisible por sí mismo y por la unidad*
    - $p \leftrightarrow q$
45. *Juan irá a la fiesta sólo si María va.*
    - p *: Juan va a la fiesta*
    - q *: María va a la fiesta*
    - $p \to q$
    - *Que María esté en la fiesta es una condición necesaria que Juan pone para ir. De modo que lo que Juan excluye es que él esté en la fiesta (* p *) y que María no esté. La presencia de Juan implica la presencia de María. Es posible que María asista y Juan no, pues la presencia de María es una condición necesaria para ir él, pero no suficiente, es posible que también desee que esté Pepito.*
46. *Obtendrás la licenciatura a condición de que superes el último curso.*
    - p *: obtienes la licenciatura*
    - q *: superas el último curso*
    - $p \to q$ *Se entiende que es una condición necesaria*

47. Juan entrará en la Universidad sólo si obtiene buena puntuación en los exámenes.
    - p : Juan entra en la universidad
    - q : Juan obtiene buena puntuación en los exámenes
    - $p \rightarrow q$ {Una vez más: "sólo si" indica una condición necesaria}
48. Proporciónenos los medios y nosotros solucionaremos el asunto.
    - p : nos proporcionas los medios
    - q : nosotros solucionamos el asunto
    - $p \rightarrow q$
49. A menos que me detenga a comer en la carretera, llegaré a primera hora de la tarde.
    - p : me paro a comer en carretera
    - q : llego a primera hora de la tarde
    - $\neg p \rightarrow q$
50. Nos veremos en el parque, supuesto que no llueva.
    - p : nos vemos en el parque
    - q : llueve
    - $\neg q \rightarrow p$
51. Creer en otras mentes es racional si y sólo si creer en Dios es racional.
    - p : creer en otras mente es racional
    - q : creer en Dios es racional
    - $p \leftrightarrow q$
52. Luis hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.
    - p : Luis hará el doctorado
    - q : Luis obtiene la licenciatura
    - $p \leftrightarrow q$
53. Un conjunto C es un subconjunto propio de un conjunto D si y sólo si no hay ningún miembro de C que no sea miembro de D, pero hay un miembro de D que no es miembro de C.
    - p : Un conjunto C es un subconjunto propio de un conjunto D
    - q : Algún miembro de C que no es miembro de D
    - r : Algún miembro de D no es miembro de C
    - $p \leftrightarrow (\neg q \wedge r)$
54. Si los que ya son sabios no buscan la sabiduría y los ignorantes impenitentes tampoco, entonces los que la busquen no serán los sabios ni los ignorantes, sino aquellos que reconocen su propia ignorancia y desean remediarla.
    - p : los que ya son sabios buscan la sabiduría
    - q : los ignorantes impenitentes buscan la sabiduría
    - r : los que reconocen su propia ignorancia y desean remediarla buscan la sabiduría
    - $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$ (otra posible solución $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \wedge r]$

p	q	r	$(\neg p\wedge\neg q)$	$(\neg p\wedge\neg q)\rightarrow r$	$(\neg p\wedge\neg q)\wedge r$	$(\neg p\wedge\neg q)\rightarrow[(\neg p\wedge\neg q)\wedge r]$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0

Si suponemos $(\neg p\wedge\neg q)\equiv s$ *, entonces*

s	r	$(s\wedge r)$	$s\rightarrow(s\wedge r)$	$s\rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

55. *Los animales, como las plantas, son seres vivos.*
    - p *: los animales son seres vivos*
    - q *: las plantas son seres vivos*
    - $p\wedge q$
56. *Dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección.*
    - p *: dos rectas son paralelas*
    - q *: dos rectas tienen la misma dirección*
    - $q\rightarrow p$
57. *Decir que la suma de sucesiones positivas es una sucesión positiva y el producto de sucesiones positivas es una sucesión positiva equivale a decir que la suma y el producto de dos números reales positivos es un número real positivo.*
    - p *: la suma de sucesiones positivas es una sucesión positiva*
    - q *: el producto de sucesiones positivas es una sucesión positiva*
    - r *: la suma de dos números reales positivos es un número real positivo*
    - s *: el producto de dos números reales positivos es un número real positivo*
    - $(p\wedge q)\leftrightarrow(r\wedge s)$
58. *Si perseveras en tus decisiones y no cedes al desaliento frente a los obstáculos, entonces comprobarás cómo el éxito te sonríe.*
    - p *: perseveras en tus decisiones*
    - q *: aguantas frente a los obstáculos*
    - r *: compruebas que el éxito te sonríe*
    - $(p\wedge\neg q)\rightarrow r$

59. Si Frankestein cruza nuestra calle, ha de indicar qué y cuántos fines persigue, y si miente, le damos con las puertas en las narices, pero si dice la verdad, le invitaremos a cenar
    - p : Frankestein cruza nuestras calles
    - q : Frankestein indica qué fines persigue
    - r : Frankestein indica cuántos fines persigue
    - s : dice la verdad
    - t : le damos con las puertas en las narices
    - u : le invitamos a cenar
    - $[p\to(q\wedge r)]\wedge[(\neg s\to t)\wedge(s\to u)]$
60. El hidróxido de aluminio es maleable y mejor conductor de la electricidad que el cobre.
    - p : El hidróxido de aluminio es maleable
    - q : El hidróxido de mejor conductor de la electricidad que el cobre
    - $p\wedge q$
61. Si el hombre es moral, no está determinado unívocamente por el ambiente y cabe exigirle cuenta de sus elecciones.
    - p : el hombre es moral
    - q : el hombre está determinado unívocamente por el ambiente
    - r : cabe exigirle cuenta de sus elecciones
    - $p\to(\neg q\wedge r)$
62. Si el Rh de la futura madre es negativo, debe analizarse inmediatamente después de cada parto la sangre del recién nacido y, si ésta es Rh positivo, ha de administrarse a la parturienta el suero apropiado, si se desea evitar complicaciones a otros hijos.
    - p : Si el Rh de la futura madre es negativo
    - q : debe analizarse inmediatamente después de cada parto la sangre del recién nacido
    - r : la sangre del recién nacido es Rh positivo
    - s : ha de administrarse a la parturienta el suero apropiado
    - t : se desea evitar complicaciones a otros hijos
    - $(p\to q)\wedge[r\to(t\to s)]$ si la madre es Rh-, entonces hay que analizar la sangre del recién nacido; si la sangre del recién nacido es Rh+, entonces, si se desea evitar complicaciones a otros hijos entonces hay que administrar el suero apropiado.
        - También se puede entender que el "y" no separa todo lo que sigue de lo anterior, sino que el signo lógico principal es el condicional: $p\to\{q\wedge[r\to(t\to s)]\}$
63. O la Televisión modifica sus esquemas y renueva su programación o se producirá una huida masiva de telespectadores y veremos las calles inundadas de gente.
    - p : la Televisión modifica sus esquemas
    - q : la Televisión renueva su programación
    - r : se producirá una huida masiva de telespectadores
    - t : veremos las calles inundadas de gente
    - $(p\wedge q)\vee(r\wedge t)$

64. *Si se ganan las elecciones y nuestros representantes acceden al poder, confiaremos en ellos si y sólo si cumplen sus promesas y el poder no les corrompe.* p *: se ganan las elecciones*
    - q *: nuestros representantes acceden al poder*
    - r *: confiaremos en ellos*
    - s *: cumplen sus promesas*
    - t *: el poder les corrompe*
    - $(p \wedge q) \rightarrow [r \leftrightarrow (s \wedge \neg t)]$
65. *El cálculo formal A no es un cálculo lógico a menos que sea correcto.*
    - p *: El cálculo formal A es un cálculo lógico*
    - q *: El cálculo formal A es correcto*
    - $\neg q \rightarrow \neg p$ (por contraposición del condicional equivale a $p \rightarrow q$)
66. *Basta con que el cálculo formal A sea lógico para que sea correcto.*
    - p *: el cálculo formal A es lógico*
    - q *: el cálculo formal A es correcto*
    - $p \rightarrow q$
67. *El cálculo formal A sólo es un cálculo lógico si es correcto*
    - p *: el cálculo formal A es lógico*
    - q *: el cálculo formal A es correcto*
    - $p \rightarrow q$
68. *El cálculo formal A no es un cálculo lógico ni correcto*
    - p *: el cálculo formal A es lógico*
    - q *: el cálculo formal A es correcto*
    - $\neg p \wedge \neg q$
69. *Si el cálculo formal A no es correcto, entonces no es un cálculo lógico.*
    - p *: el cálculo formal A es lógico*
    - q *: el cálculo formal A es correcto*
    - $\neg q \rightarrow \neg q$
70. *Si el cálculo formal A no es lógico, entonces no es correcto.*
    - p *: el cálculo formal A es lógico*
    - q *: el cálculo formal A es correcto*
    - $\neg p \rightarrow \neg q$
71. *Para que la epistemología kantiana sea correcta, no basta con que sean sintéticos los enunciados de la geometría; es necesario también que lo sean los de la aritmética.*
    - p *: la epistemología kantiana es correcta*
    - q *: los enunciados de la geometría son sintéticos*
    - r *: los enunciados de la aritmética son correctos*
    - $p \rightarrow (q \wedge r)$ *La clave es la partícula "es necesario" cuando hace alusión a los enunciados de la aritmética, que como han de darse en conjunción a los geométricos ("también"), hace a ambos condición necesaria para* p *.*

72. El argumento A es inválido si sus premisas son verdaderas y la conclusión falsa.
    - p : el argumento A es válido
    - q : las premisas de A son verdaderas
    - r : la conclusión de A es verdadera
    - $(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$
73. Las leyes de educación no serán efectivas a menos que se dediquen recursos suficientes a su aplicación.
    - p : las leyes de educación son efectivas
    - q : se dedican recursos suficientes a la aplicación de las leyes de educación
    - $\neg q \rightarrow \neg p$
74. Si los monistas tienen razón, entonces, si nuestras creencias son falibles, las leyes lógicas son leyes fisiológicas.
    - p : los monistas tienen razón
    - q : nuestras creencias son falibles
    - r : las leyes lógicas son leyes fisiológicas
    - $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
75. Si el argumento A tiene premisas verdaderas y conclusión verdadera no puede tener una forma lógica inválida.
    - p : el argumento A tiene premisa verdaderas
    - q : el argumento A tiene conclusión verdadera
    - r : la forma lógica de A es válida
    - $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$
76. El argumento A es válido sólo si tiene conclusión falsa.
    - p : el argumento A es válido
    - q : el argumento A tiene conclusión verdadera
    - $p \rightarrow \neg q$
77. El argumento válido A no tiene conclusión verdadera a menos que tenga premisas verdaderas.
    - p : el argumento válido A tiene conclusión verdadera
    - q : el argumento válido A tiene premisas verdaderas
    - $\neg q \rightarrow \neg p$ (contraposición del condicional: $p \rightarrow q$: "si el argumento válido A tiene conclusión válida, entonces tiene premisas verdaderas"
78. El argumento válido A no tiene premisas verdaderas a menos que tenga conclusión verdadera.
    - p : el argumento válido A tiene premisas verdaderas
    - q : el argumento válido A tiene conclusión verdadera
    - $\neg q \rightarrow \neg p$

79. *El argumento A es válido si y sólo si tiene una forma que impide la presencia de premisas verdaderas y conclusión falsa.*
    - p *: el argumento A es válido*
    - q *: tiene una forma que impide la presencia de premisas verdaderas y conclusión falsa*
    - $p \leftrightarrow q$
80. *Si la conclusión del argumento A es una tautología, su forma es necesariamente válida.*
    - p *: la conclusión del argumento A es una tautología*
    - q *: la forma del argumento A es válida*
    - $p \rightarrow q$
81. *Si el argumento A tiene contradicción en sus premisas, su conclusión se sigue necesariamente de ellas.*
    - p *: el argumento A tiene contradicción en sus premisas*
    - q *: la conclusión del argumento A se sigue necesariamente de sus premisas*
    - $p \rightarrow q$
82. *El argumento A tiene contrad. en sus premisas sólo si la forma del argumento es válida.*
    - p *: el argumento A tiene contradicción en sus premisas*
    - q *: la forma del argumento A es válida*
    - $p \rightarrow q$
83. *No saldremos del solipsismo a menos que creamos firmemente que el lenguaje alcanza la realidad extralingüística.*
    - p *: salimos del solipsismo*
    - q *: creemos firmemente que el lenguaje alcanza la realidad extralingüística*
    - $\neg q \rightarrow \neg p$
84. *La distinción entre lo teórico y lo observacional se puede establecer sólo si se puede establecer claramente la distinción entre analítico y sintético.*
    - p *: la distinción entre lo teórico y lo observacional se puede establecer*
    - q *: se puede establecer claramente la distinción entre analítico y sintético*
    - $p \rightarrow q$
85. *No es necesario tener mucho dinero para comprar un coche, si se tienen avales para obtener un crédito.*
    - p *: es necesario tener mucho dinero para comprar un coche*
    - q *: se tienen avales para obtener un crédito*
    - $q \rightarrow \neg p$
86. *No es suficiente, aunque sí necesario, acudir al examen para aprobar la asignatura.*
    - p *: acudir al examen*
    - q *: aprobar la asignatura*
    - $\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
        - ese “aunque” supone una conjunción entre ambos condicionales:
        - No es verdad que baste p para q y sí es necesario p para q .

87. Si el nombre propio sólo aporta como valor semántico su referencia al objeto, tiene razón Kripke en que no hay enunciados de identidad contingentemente verdaderos, pero hay que concluir, además, que tampoco hay enunciados de identidad informativos.
    - p : el nombre propio sólo aporta como valor semántico su referencia al objeto
    - q : tiene razón Kripke en que no hay enunciados de identidad contingentemente verdaderos
    - r : hay enunciados de identidad informativos
    - $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
88. Cuando acudes al examen y no te faltan los conocimientos mínimos, apruebas el examen siempre que respondas bien a las preguntas.
    - p : acudes al examen
    - q : te faltan los conocimientos mínimos
    - r : apruebas el examen
    - s : respondes bien a las preguntas
    - $(p \wedge \neg q) \rightarrow (s \rightarrow r)$
89. Toda teoría decidible es axiomatizable, pero no toda teoría axiomatizable es decidible.
    - p : toda teoría decidible es axiomatizable
    - q : toda teoría axiomatizable es decidible
    - $p \wedge \neg q$
90. Si los dualistas tienen razón, entonces no es verdad que si las leyes lógicas no son fisiológicas, entonces nuestras creencias no son falibles.
    - p : los dualistas tienen razón
    - q : la leyes lógicas son fisiológicas
    - r : nuestras creencias son falibles
    - $p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg r)$
91. Si no puedes comprar moneda antes de viajar, entonces es necesario que no olvides la visa en casa, si no quieres tener problemas.
    - p : puedes comprar moneda antes de viajar
    - q : olvidas la visa en casa
    - r : quieres tener problemas
    - $\neg p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)$
92. Si la pena de muerte antepone la defensa de la sociedad a la conservación de la persona, entonces, si supone la destrucción total de la persona, imposibilita la corrección del penado.
    - p : la pena de muerte antepone la defensa de la sociedad a la conservación de la persona
    - q : la pena de muerte supone la destrucción total de la persona
    - r : la pena de muerte imposibilita la corrección del penado
    - $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

93. La pena de muerte imposibilita la corrección del penado sólo si es condenable éticamente.
    - p : la pena de muerte imposibilita la corrección del penado
    - q : el condenado es condenable éticamente
    - $p \rightarrow q$
94. Si mi teoría de la relatividad es exacta, los alemanes dirán que soy alemán y los franceses que soy ciudadano del mundo; pero si no, los franceses dirán que soy alemán y los alemanes que soy judío (Einstein).
    - p : mi teoría de la relatividad es exacta
    - q : los alemanes dirán que soy alemán
    - r : los franceses dirán que soy ciudadano del mundo
    - s : los franceses dirán que soy alemán
    - t : los alemanes dirán que soy judío
    - $[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [\neg p \rightarrow (s \wedge t)]$
95. Si el principio de razón suficiente es válido y Leibniz está en lo cierto, entonces un juicio es verdadero sólo si puede ser conocido.
    - p : el principio de razón suficiente es válido
    - q : Leibniz está en lo cierto
    - r : un juicio es verdadero
    - s : un juicio puede ser conocido
    - $(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow s)$
96. Si la reina Roja está furiosa, entonces o el conejo blanco tiene prisa o Alicia siente curiosidad.
    - p : la reina Roja está furiosa
    - q : el conejo blanco tiene prisa
    - r : Alicia siente curiosidad
    - $p \rightarrow (q \vee r)$
97. Frege no es el fundador de la Lógica moderna a menos que sea el autor de la Conceptografía y de los Fundamentos de la Aritmética.
    - p : Frege es el fundador de la Lógica moderna
    - q : Frege es el autor de la Conceptografía
    - r : Frege es el autor de los Fundamentos de la Aritmética
    - $\neg (q \wedge r) \rightarrow \neg p$
98. Cuando los tipos de interés están muy bajos, es el momento de comprar un piso, pero cuando el suelo está muy caro, es el momento de vender.
    - p : los tipos de interés están muy bajos
    - q : (ahora) es el momento de comprar un piso
    - r : el suelo está muy caro
    - s : (ahora) es el momento de vender un piso
    - $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

99. Si Quine está en lo cierto y cualquier creencia de nuestro sistema de creencias se puede rechazar, no sólo son falibles los enunciados con contenido empírico, sino también los principios y leyes lógicas.
    - p : Quine está en lo cierto
    - q : cualquier creencia de nuestro sistema de creencias se puede rechazar
    - r : los enunciados con contenido empírico son falibles
    - s : los principios lógicos son falibles
    - t : las leyes lógicas son falibles
    - $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge (s \wedge t))$
100. Si Marx no hubiera vivido en el siglo XVIII, no habría escrito El Capital o bien no se habría dejado influir por Hegel.
    - p : Marx vivió en el siglo XVIII
    - q : Marx escribió el Capital
    - r : Marx se dejó influir por Hegel
    - $\neg p \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$

MÁS EJERCICIOS DE FORMALIZACIÓN:

1. Si el día es soleado y el coche funciona bien, el viaje sería ameno
    - p : el día es soleado
    - q : el coche funciona bien
    - r : el viaje es ameno
    - $(p \wedge q) \rightarrow r$
        - La clave es la coma (,) que da a entender el condicional
2. Si el objetivo de la guerra es destruir o doblegar a otro sistema suprapersonal, entonces hay guerra si y sólo si existen violencia física y ruptura de relaciones diplomáticas
    1. p : el objetivo de la guerra es destruir
    2. q : el objetivo de la guerra es doblegar a otro sistema suprapersonal
    3. r : hay guerra
    4. s : existe violencia física
    5. t : existe ruptura de relaciones diplomáticas
    6. $(p \vee q) \rightarrow [r \leftrightarrow (s \wedge t)]$
3. Si tenemos la mañana libre y hace buen tiempo, entonces no es cierto que nos quedemos en casa o veamos la televisión
    - p : tenemos la mañana libre
    - q : hace buen tiempo
    - r : nos quedamos en casa
    - s : vemos la televisión
    - $(p \wedge q) \rightarrow \neg (r \vee s)$

La sintaxis puede dar lugar a confusión, pero como en general tiene un significado de condición, se entiende el "entonces no es cierto que" como una negación de todo lo que viene detrás, que sería el resultado de dicha condición

4. Si el toro tuviera sentido del humor o fuese un animal vengativo, se sentará en medio de la plaza y dormirá una plácida siesta. Si el toro se sentase en medio de la plaza, entonces los espectadores se marcharan decepcionados o el torero se sentirá ridículo. Ni el torero se siente ridículo, ni los espectadores se marchan decepcionados. Así que el toro no tiene sentido del humor y dormirá una plácida siesta.
   1. p : el toro tiene sentido del humor
   2. q : el toro es un animal vengativo
   3. r : el toro se sienta en medio de la plaza
   4. s : el toro duerme una plácida siesta
   5. t : los espectadores se marchan decepcionados
   6. u : el torero se siente ridículo

$$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$$
$$r \rightarrow (t \vee u)$$
$$\neg t \wedge \neg u$$

$$\neg p \wedge s$$

5. Si existieran seres extraterrestres y tuviesen inteligencia, nos habrían enviado algún mensaje de salutación o habrían venido a hacernos alguna visita. Si nos hubiesen visitado, habrían presentado públicamente sus credenciales ante los humanos. Si hubiesen presentado públicamente sus credenciales ante los humanos, entonces todos los humanos los describirían de modo similar. No es cierto que todos los humanos describan a los seres extraterrestres de modo similar o que éstos no tengan necesariamente figura antropomórfica. Los seres extraterrestres no tienen figura antropomórfica y no nos han enviado ningún mensaje de salutación. Por lo tanto, si existieran seres extraterrestres, no tendrían inteligencia.
   - p : existen seres extraterrestres
   - q : los seres extraterrestres tienen inteligencia
   - r : los seres extraterrestres nos han enviado algún saludo
   - s : los seres extraterrestres nos han visitado
   - t : los seres extraterrestres presentan públicamente sus credenciales
   - u : todos los humanos describen a los seres extraterrestres de modo similar
   - w : los seres extraterrestres tienen forma antropomórfica(p and q) %implica (r or s)

$$s \rightarrow t$$
$$t \rightarrow u$$
$$\neg(u \vee \neg w)(*)$$
$$\neg w \wedge \neg r$$

$$p \rightarrow \neg q$$

   - (*) ese 'no es cierto que' engloba a todo lo que sigue en el enunciado, por lo tanto $\neg(x)$, siendo $x = u \vee \neg w$

6. *La física cuántica describe la naturaleza a base de observables clásicos o a base de estados abstractos. Si la describe mediante los primeros, entonces nos permite representar las cosas intuitivamente, pero nos exige renunciar a la causalidad. En cambio, si la describe mediante los segundos, nos impide la representación intuitiva, pero nos permite conservar la causalidad. La física cuántica nos permitirá representar las cosas intuitivamente, a no ser que nos exija renunciar a la causalidad. Por tanto, no es cierto que nos permita representar las cosas intuitivamente sólo si no renuncia a la causalidad.*
   - p *: la física cuántica describe la naturaleza a base de observables clásicos*
   - q *: la física cuántica describe la naturaleza a base de estados abstractos*
   - r *: la física cuántica nos permite representar las cosas intuitivamente*
   - s *: la física cuántica nos permite conservar la causalidad*

     $p \vee q$
     $p \rightarrow (r \wedge \neg s)$
     $q \rightarrow (\neg r \wedge s)$
     $r \vee \neg s (*)$

     $\neg (r \rightarrow \neg \neg s)(**)$

   - *(*) Ese 'a no ser' lo podemos entender como un 'o'. O una cosa o la otra*
     - *otro modo de verlo sería* $\neg(\neg r \wedge s)$
   - *(**) 'no es cierto que':* $\neg(...)$ *si no renuncia a s', dos negaciones, 'no' y 'renuncia'* $\neg \neg s$

Métodos de evaluación semántica

Definición de las conectivas

Hasta ahora hemos visto los elementos que componen el lenguaje de la lógica proposicional y notas sobre cómo realizar una correcta esquematización de inferencias o argumentos. Esta noción de validez puede enfocarse desde dos perspectivas: la **semántica** y la **sintáctica:**

- En la perspectiva **semántica,** decir que un argumento es válido equivale a decir que la conclusión del mismo es una **consecuencia lógica** de las premisa.
- En la perspectiva **sintáctica**, decir que un argumento es válido es decir que la conclusión se sigue o se deduce de la premisas

Lo primero que hemos de hacer para poder precisar la noción de consecuencia lógica es definir semánticamente la distintas conectivas ya vistas:

- Negación ($\neg X$) de una fórmula verdadera es falsa, y de una falsa es verdadera.
- Conjunción ($X \wedge Y$) de dos fórmulas es verdadera si ambas son verdaderas, y falsa con que al menos una de ellas lo sea.
- Disyunción ($X \vee Y$) de dos fórmulas es verdadera cuando al menos una de ellas lo es, y falsa cuando ambas son falsas.
- Condicional ($X \rightarrow Y$) es falsa cuando la fórmula antecedente es verdadera y la consecuente falsa, y es verdadera en los demás casos.
- Bicondicional ($X \leftrightarrow Y$) es verdadera cuando ambas son verdaderas o ambas son falsas.

Recordado el comportamiento semántico de las conectivas, podemos determinar el valor de verdad de una fórmula compuesta o molecular cualquiera, ya que el valor de ésta depende del valor de verdad de sus componentes y del modo en que éstas forman dicha fórmula molecular.

Designando mediante I (de interpretación) cualquier función que asigna a una fórmula un valor veritativo, decimos que si X es una fórmula molecular, $I(X)$ dependerá del valor de sus formula constituyentes (donde al ser una lógica bivalente sólo podrá ser verdadero (1) o falso (0)) y de cómo se comporten las conectivas que contenga con los valores veritativos de éstas.

Supongamos $I(p)=1$ y $I(q)=0$, para $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$, entonces si evaluamos teniendo en cuanta la definiciones de la conectivas tenemos:

- $I(p \vee q)=1$, ya que $I(p)=1$
- $I((p \vee q) \wedge \neg p)=0$, al ser $\neg(p)=0$
- $I([(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q)=1$, ya que $I((p \vee q) \wedge \neg p)=0$ y $I(q)=0$

Consideraciones generales sobre las conectivas

La negación es una conectiva **monádica**, ya que es la única que puede afectar a una sola proposición ($\neg p$), aunque también puede hacerlo a una proposición compuesta ($\neg(p \wedge q)$).

El resto de conectivas son **diádicas**, ya que siempre han de referirse a dos proposiciones $p \wedge q$, $q \rightarrow (p \vee s)$, y nunca a una sola, no siendo posibles expresiones como $q \wedge$, $\vee p$, $r \leftrightarrow$, Cabe preguntarse ¿cuántas son las conectivas monádicas? Y, ¿cuántas las diádicas? Es decir: ¿cuántas operaciones pueden realizarse con una sola proposición? ¿. Con dos proposiciones?.

- Con una sola proposición se pueden llevar, a cabo cuatro operaciones. Hay **cuatro conectivas monádicas**, por tanto.
- Con dos proposiciones son posibles dieciséis operaciones. Son, **dieciséis las conectivas diádicas**.

¿Por qué?. No porque de hecho sólo hayamos encontrado cuatro y dieciséis, respectivamente, sino porque, por principio, son cuatro y dieciséis, y no pueden ser ni menos ni más.[1] Dados dos enunciados cualesquiera, son cuatro las combinaciones que pueden hacerse de sus valores de verdad. Ahora bien: puesto que la falsedad de un enunciado supone la verdad de su negación (y viceversa, por supuesto) cabría dar a estas cuatro combinaciones la siguiente forma:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

$$\overset{a}{(p\wedge q)}\vee\overset{b}{(p\wedge\neg q)}\vee\overset{c}{(\neg p\wedge q)}\vee\overset{d}{(\neg p\wedge\neg q)}$$

Es decir: que o bien p y q son verdaderos (caso a); o bien p es verdadero y q es falso (en cuyo caso $\neg q$ será verdadero) (caso b); ... En lo que sigue, y con el único fin de abreviar la explicación, designaremos cada una de las cuatro combinaciones con las letras a, b, c, d, teniendo así el conjunto de cuatro elementos $\{a,b,c,d\}$

Dado este conjunto, y la posibilidad de hacer subagrupaciones de 1, 2 y 3 elementos, tendríamos los siguientes subconjuntos, a los que hemos de añadir el conjunto vacío ϕ (aquel sin ningún elemento) y el conjunto "total", el que incluye los 4 elementos y corresponde al conjunto como tal. Es decir:

$$\overset{a}{(p\wedge q)}\vee\overset{b}{(p\wedge\neg q)}\vee\overset{c}{(\neg p\wedge q)}\vee\overset{d}{(\neg p\wedge\neg q)}$$

$\{\phi\}$
{a} {b} {c} {d}
{a, b} {a, c} {a, d} {b, c} {b, d} {c, d}
{a, b, c} {a, b, d} {a, c, d} {b, c, d}
{a, b, c, d}

Tenemos ya, pues, los dieciséis subconjuntos. Pero, ¿qué es lo que estos dieciséis conjuntos representan? ¿Qué representa, por ejemplo, el .subconjunto {a}? Representa el hecho de que de los cuatro pares de enunciados, sólo $(p\wedge q)$ es verdadero. Es decir : que ese subconjunto corresponderá a una conectiva cuya tabla, de verdad será la siguiente: 1, 0, 0, 0.

El subconjunto {b, c} representará, que son verdaderos los pares segundo y cuarto, y falsos los otros dos. Corresponderá, por tanto, a una conectiva cuya tabla de verdad sería 0, 1, 0, 1 Etcétera, Tenemos, así, dieciséis casos:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

1 Núm. proposiciones: núm. operaciones → 1: 4, 2: 16, 3: 256, 4: 65536, 5: 4294967296..... n: 2^(2^n)

Que podríamos representar también así:

1	2	3	4	5	6	7	8
$p \wedge q$	-	-	-	$p \wedge q$	$p \wedge q$	$p \wedge q$	-
-	$p \wedge \neg q$	-	-	$p \wedge \neg q$	-	-	$p \wedge \neg q$
-	-	$\neg p \wedge q$	-	-	$\neg p \wedge q$	-	-
-	-	-	$\neg p \wedge \neg q$	-	-	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$

9	10	11	12	13	14	15	16
-	-	$p \wedge q$	$p \wedge q$	$p \wedge q$	-	$p \wedge q$	-
$p \wedge \neg q$	-	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q$	-	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q$	-
$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	-	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	-
-	$\neg p \wedge \neg q$	-	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	-

De modo análogo, para 1 sola proposición tendríamos 4 conectivas monádicas $\overset{a}{(p)} \vee \overset{b}{(\neg p)}$

p	1	2	3	4
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

1	2	3	4
p	-	p	-
-	$\neg p$	$\neg p$	-

Las conectivas como funciones de verdad

Disponemos ya, por tanto, de veinte signos constantes en total. Hemos dicho, un tanto vagamente que la misión de estos signos constantes de la lógica de enunciados —y de ahí uno de sus nombres, el de «conectivas»— era la de servir de enlace entre variables, la de conectar proposiciones. Pero, ¿cómo podríamos caracterizarla con más precisión? ¿Cuál es, en rigor, su naturaleza?

Son funciones. <u>**Funciones de verdad**</u>, O, al menos, como tales pueden entenderse.

¿Qué es una función? Empezando por el principio, y a la espera de una definición más estricta que en su momento daremos, podemos decir que una función es un tipo especial de relación. De relación, ¿entre qué? Tomemos una expresión como x^2+7 , del valor que demos a x dependerá el valor de esa expresión entera. $x=5 \rightarrow 5^2+7=32$, $x=5 \rightarrow 2^2+7=11$, etcétera.

Otro ejemplo sería, "*El lugar donde nació x", S*i en vez de x escribimos 'William Shakespeare', la expresión entera se convertirá en una descripción de Stratford-on-Avon. Si escribimos 'Julio Cortázar', estaremos refiriéndonos a Bruselas. Etc.

Una función es, por tanto, una relación entre dos campos: el campo de los valores que se pueden asignar a la variable independiente —a los que llamaremos «**argumentos de la función**»– Y el campo de los valores, que, en correspondencia con aquéllos, toma la variable dependiente —y a los que llamaremos propiamente «**valores de la función**». Así, en el ejemplo citado, '32', en el primer caso, y '11', en el segundo, son los nombres del valor de la función cuando los valores del argumento de la función llevan, respectivamente, los nombres '5' y '2'.

Pensemos en expresiones funcionales del siguiente Tipo: "*El autor de x es Henry Purcell*". Podemos dar libremente valores a x. Podemos darle, por ejemplo, el valor '*Concierto de Brandeburgo n.° 1*' Preguntémonos ahora cuál sería el valor de la expresión

El autor del Concierto de Brandeburgo n.° 1 es Henry Purcell

Este enunciado es falso. ¿Cuál será, en este caso, el valor de la función? En el primer ejemplo que hemos puesto, el valor de la función era un número. En el segundo, el nombre de un lugar. En este último, **el valor de la función es un valor de verdad**. Según el valor que asignemos al argumento, la expresión será verdadera o falsa. La verdad y la falsedad serán los valores posibles de la función, el campo de valores de ésta.

Si las examinamos ahora más de cerca, observamos que cada una de las conectivas constituye una operación, que aplicada—en el caso de las conectivas diádicas— a dos enunciados poseedores de unos determinados valores de verdad, da lugar a nuevos valores de verdad. Así, la conectiva '$\leftrightarrow$' por ejemplo, es una operación que, aplicada a dos proposiciones, p y q, cuando p vale 1 y q vale 1, da el valor 1; cuando p vale 1 y q vale 0, da el valor 0; cuando p vale 0 y q vale 1, da el valor 0; y cuando p vale 0 y q vale 0, da el valor 1. Y así con todas las demás conectivas, tanto monádicas como diádicas.

Dicho de otro modo: el valor de verdad de un enunciado compuesto con una conectiva, como $p \vee q$, $(p \wedge q) \rightarrow r$,... es una función de los valores de verdad de los enunciados que lo componen. Estos serán los argumentos de la función, y aquél el valor de ésta. Esa es la razón de que las conectivas a menudo se las llame, también '**functores**'.

Así, por ejemplo, en lugar de presentar el condicional de la forma en que hemos hecho hasta ahora, o la conjunción, podríamos denominarlos como f_{13} o f_1 respectivamente:

p	q	$f_{13}=f \rightarrow q$	$f_1 = p \wedge q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Que equivaldría a decir que:

$$\begin{cases} f_{13}(1,1)=1 \\ f_{13}(1,0)=0 \\ f_{13}(0,1)=1 \\ f_{13}(0,0)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(1,1)=1 \\ f_1(1,0)=0 \\ f_1(0,1)=0 \\ f_1(0,0)=0 \end{cases}$$

Las conectivas pueden, por tanto, interpretarse como funciones. Como funciones de verdad. En efecto: los argumentos de estas funciones son valores de verdad —los valores, 1 o 0, de los enunciados simples—; y los valores de la función son también valores de verdad —los valores, 1 o 0, del enunciado compuesto con la conectiva. Son, pues, los valores de verdad lo único que interviene. Mejor dicho: en rigor, es lo único que podría intervenir. En efecto: un enunciado transmite un determinado contenido y, a la vez, posee un determinado valor de verdad. Pero al esquematizar, como hacemos en lógica, los enunciados concretos por variables de enunciado, hemos prescindido de los contenidos —irrelevantes desde el punto de vista lógico— y nos hemos quedado tan sólo con unos posibles valores de verdad.

Interdefinibilidad (La reducción de functores)

Si bien hemos identificado 20 conectivas posibles en la combinación del análisis de una y dos proposiciones, la realidad es que en realidad todas ellas son reducibles a las 5 ya analizadas.

Que sean reductibles quiere decir que son definibles en términos de estas. Son definibles mediante as llamadas «**definiciones contextuales**».

Definir contextualmente un símbolo no es otra cosa que definir un contexto en el que aparece el símbolo de que se trate en términos de otro contexto en el que el símbolo en cuestión ya no aparece. Definir contextualmente una conectiva consiste, entonces, en mostrar cómo puede sustituirse una expresión, compuesta con esa conectiva por una expresión que no la contenga y que sea, desde luego, equivalente a la primera. Se trata, obviamente, de definiciones sintácticas, en las que no se hace alusión alguna al significado de los términos, sino tan sólo a sus relaciones.

Así, definir contextualmente la función que en nuestra tabla lleva el número 9 (y que corresponde, dicho sea de paso, a la disyunción excluyente) se reduciría a la negación del bicondicional:

p	q	$f_9 = f \vee \vee q$	$\neg f_7 = \neg p \leftrightarrow q$
1	1	0	$\neg 1 = 0$
1	0	1	$\neg 0 = 1$
0	1	1	$\neg 0 = 1$
0	0	0	$\neg 1 = 0$

Análogamente se podría definir contextualmente la función 6 como: $pf_6 q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

p	q	$pf_6 q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

No es necesario, por tanto, utilizar las dieciséis funciones diádicas. Nos basta con cuatro de ellas más la negación. Pero todavía podemos ir, más lejos en nuestro afán por economizar signos. Podemos todavía reducir el número de constantes.

Todas las funciones diádicas son, en efecto, reductibles a dos. E incluso nos es dado elegir cuáles sean esas dos:

- O bien la negación y la disyunción,
- O bien la negación y la conjunción.
- O bien la negación y el condicional

Los contextos en que aparezca cualquiera de las restantes funciones diádicas pueden ser definidos en términos de contextos en los que intervengan, bien tan sólo $(\neg, \vee)$, $(\neg, \wedge)$, $(\neg, \rightarrow)$

Veamos cómo. Es evidente que, puesto que las dieciséis funciones diádicas son reductibles a las cinco que conocemos, si mostramos que estas cinco son reductibles a dos habremos mostrado que a estas dos son reductibles las dieciséis.

Hemos dicho que en el lenguaje lógico los contenidos del razonamiento se esquematizan mediante variables con un determinado campo de valores. En el caso concreto de la lógica de enunciados o de proposiciones, esas variables tendrán como campo de valores el conjunto de los enunciados. Serán variables de enunciado. Una expresión como $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ es un esquema de infinitas expresiones: el esquema de las infinitas expresiones que podríamos obtener sustituyendo p y q por enunciados distintos cada vez.

Pues bien, ahora, al mostrar cómo unas conectivas pueden ser definidas en términos de otras, vamos a utilizar, no ya variables, sino variables de variables, **metavariables**. Y así como las variables $p,q,r,s,t,\ldots$ pueden ser sustituidas por proposiciones cualesquiera, así nuestra metavariables, $X,Y,Z,\ldots$ podrán ser sustituidas por cualesquiera expresiones compuestas de variables de enunciado. Utilizamos metavariables para hablar acerca de expresiones construidas con variables de enunciado, para *mencionar* variables de enunciado. Ellas pertenecen, por tanto, al metalenguaje. Son, pues, **variables metalógicas**, y, señaladamente, sintácticas, pues en las expresiones en que aparecen sólo se hace referencia a las relaciones entre secuencias de signos, y no también, por ejemplo, al significado de éstos.

Así pues, del mismo modo que una expresión como $p\vee q$ esquematiza cualquier disyunción entre enunciados concretos, una expresión como $X\vee Y$ esquematizará cualquier esquema de disyunción obtenido sustituyendo las variables metalógicas por variables lógicas, que podrán ser sustituidas a su vez por enunciados concretos. La expresión $X\vee Y$ puede ser sustituida entonces por $p\vee q$, o por $(p\wedge q)\vee(q\wedge r)$, o por $[q\rightarrow(q\wedge r)]\vee[q\rightarrow(p\wedge r)]$

Negación y disyunción

Podemos definir el resto de funciones diádicas en términos de los functores negación y disyunción.

1. $(X\wedge Y)=\neg(\neg X\vee\neg Y)$: Una conjunción de enunciados equivale a la negación de la disyunción de la negación de dichos enunciados.

X	Y	$X\wedge Y$	$\neg X\vee\neg Y$	$\neg(\neg X\vee\neg Y)$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

2. $(X\rightarrow Y)=(\neg X\vee Y)$: Cualquier expresión en que aparezca un condicional equivale a la disyunción entre ambos términos con el primer término negado

X	Y	$X\rightarrow Y$	$\neg X\vee Y$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

3. $(X\leftrightarrow Y)=\neg[\neg(\neg X\vee Y)\vee\neg(\neg Y\vee X)]$: Si recordamos, el bicondicional equivale a la conjunción de sendos condicionales: $X\leftrightarrow Y=(X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow X)$. Si combinamos para esta definición las dos vistas anteriormente tenemos que el bicondicional equivale a una conjunción de condicionales, por lo que desarrollando llegamos a la definición aquí mostrada

X	Y	$X\leftrightarrow Y$	$\neg X\vee Y$	$\neg Y\vee X$	$\neg[\neg(\neg X\vee Y)\vee\neg(\neg Y\vee X)]$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Negación y conjunción

Pero también podríamos definirlos en términos de contextos en los que intervienen como únicas constantes la negación y la conjunción, tendríamos las siguientes definiciones:

1. $(X \vee Y) = \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
   - Una disyunción de enunciados equivale a la conjunción negada de los enunciados negados
2. $(X \rightarrow Y) = \neg(X \wedge \neg Y)$
   - Que una cosa sea condición de otra es lo mismo que decir que no es el caso de que se de la primera y no se de la segunda. Lo mismo que para el condicional está claro que 'si p, entonces q', podríamos decir también que 'no p, sin q' (*no se da lo enunciado por* p *sin que se de lo enunciado por* q *).*
3. $(X \leftrightarrow Y) = [\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(Y \wedge \neg X)]$
   - De nuevo desarrollando el bicondicional como la conjunción de sendos condicionales y aplicando las definiciones previas, llegamos a la reducción de la definición.

Negación y condicional

También podríamos tomar como functores no definidos —y definir en términos de ellos todos los demás— la negación y el condicional, con la siguientes definiciones:

1. $(X \vee Y) = (\neg X \rightarrow Y)$
2. $(X \wedge Y) = \neg(X \rightarrow \neg Y)$
3. $(X \leftrightarrow Y) = \neg[(X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow X)]$

Reduciendo reductores

De veinte funciones hemos pasado a cinco, y de cinco hemos pasado a dos. Pero es más: de dos podemos pasar a una. Y esa una pueden ser dos. Hay dos funciones diádicas, en términos de cualquiera de las cuales se pueden definir todas las demás. Esas dos funciones son:

1. La función 14 de nuestra tabla, llamada '**incompatibilidad**', '**negación alternativa**' o '**función barra de Sheffer**'. Se representa $p|q$ y se la conoce también con el nombre de '**negación de la conjunción**'.
2. O bien la función número 4, '**negación conjunta**', '**función flecha**', o '**negación de la disyunción**'

Incompatibilidad
Negación alternativa
Barra de Sheffer

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Negación conjunta
Función flecha
Negación de la disyunción

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Veamos cómo pueden reducirse a la incompatibilidad las cinco funciones básicas:

1. $X \vee Y = [(X|Y)|(Y|Y)]$
2. $X \wedge Y = [(X|Y)|(X|Y)]$
3. $X \rightarrow Y = [(X|X)|(X|X)]|(Y|Y)$
4. $X \leftrightarrow Y = \langle\{[(X|X)|(X|X)]|(Y|Y)\}|\{[(Y|Y)|(Y|Y)|(X|X)]\}\rangle$ $|\langle\{[(X|X)|(X|X)]|(Y|Y)\}|\{[(Y|Y)|(Y|Y)]|(X|X)\}\rangle$
5. $\neg X = (X|X)$

Así pues, incluso la negación, que parecía irreductible, puede ser definida también en términos de esta única función. Otro tanto podríamos hacer utilizando, en lugar de la incompatibilidad, la negación conjunta o función flecha.

A nadie escapa que estas posibilidades de reducir el número de funciones tienen un interés puramente teórico. Porque en la práctica —como lo prueba, por ejemplo, la luenga definición del bicondicional en términos de la incompatibilidad—, el uso de una sola función, y aún de sólo dos, complicaría grandemente las fórmulas y haría el cálculo poco menos que inmanejable.

Sin olvidar, por tanto, la posibilidad que en teoría tenemos de prescindir de alguna o de todas ellas, seguiremos utilizando la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional.

Tautologías, contradicciones y expresiones consistentes

> *A no ser que se produzca un milagro, esta será la última vez que Henry Jekyll piensa con su propio cerebro y vea su imagen reflejada en el espejo (R. L. Stevenson).*

Cuando traducimos la expresión de esta forma $[\neg p \rightarrow (q \wedge r)]$; ya sea para componer directamente esquemas de enunciados que, provistos en cada caso de un contenido distinto, pueden dar lugar a infinitos enunciados concretos, como cuando formulamos, por ejemplo, el esquema $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Por lo que se refiere a esta última posibilidad, podemos construir, enlazando variables mediante conectivas, infinitos esquemas de enunciados, infinitas formas de expresiones. Así,

$$p \wedge (q \vee r)\ ,\ (p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge \neg r)\ ,\ [(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p\ ,\ (p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \wedge r)$$

Ahora bien: si estos esquemas —y otros con los que hubiéramos podido prolongar la serie— son, todos ellos, esquemas de enunciados, es decir, esquemas que se convertirán en determinados enunciados compuestos cada vez que sustituyamos las variables por determinados enunciados simples, no todos ellos son esquemas de inferencia. Porque no en todos ellos se infieren unos enunciados a partir de otros. En efecto: en el primer esquema, por ejemplo, lo único que hacemos es enunciar la conjunción de p con la disyunción de q y r ; y en el cuarto enunciamos que o bien si y sólo si p entonces q , o bien $\neg q$ y r . En ninguno de estos casos existen premisas ni conclusión.

Por el contrario, en los casos segundo y tercero estamos enunciando esquemas de inferencia: estamos diciendo —en el caso tercero, por ejemplo— que si es verdad que lo enunciado por p es condición de lo enunciado por q , y es también verdad que no se da lo enunciado por q , entonces es verdad que no se da lo enunciado por p . Aquí —como también en el caso segundo (*'si y sólo si..., entonces..'*)— sí: aquí hay unas premisas y una conclusión que se infiere de ellas.

No se trata, por tanto, simplemente de esquemas de enunciados, sino, específicamente de esquemas que presentan relaciones de inferencia entre enunciados. Sustituyendo las variables por determinados enunciados simples obtendríamos un razonamiento, un enunciado compuesto en el que se expresa un razonamiento. Es este último tipo de esquema de enunciado el que sobre todo interesa a la lógica.

Toda ciencia es un sistema de enunciados. De enunciados que se refieren, de un modo más o menos lejano, a los objetos de los que esa ciencia se ocupa. Puesto que la lógica se ocupa del razonamiento desde el punto de vista de su forma, lo que sus enunciados enunciarán serán formas de razonar. Y puesto que la lógica es la ciencia de la inferencia formalmente válida, a la lógica le ha de interesar distinguir aquellas formas de inferencia que son válidas de aquellas otras que no lo son. Y le interesará retener y enunciar con rigor las formas válidas de inferencia. Así pues, los enunciados de la lógica representarán, en general, formas de inferencia, y, señaladamente, formas válidas de inferencia.

De acuerdo con esto, tomemos, por ejemplo, los siguientes esquemas de inferencia:

$$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$$
$$[(p\wedge q)\to r]\to(p\vee r)$$
$$[(p\wedge q)\to p]\to[(q\vee r)\wedge(\neg q\wedge\neg r)]$$

¿Son válidos los tres? ¿Se trata de tres formas válidas de razonar?, Veámoslo por medio de las tablas de verdad. La primera expresión es un condicional. Hallemos, pues, en primer lugar, los valores de verdad de su antecedente (rojo) y los de su consecuente (azul).

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$p\to r$	$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$
1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0	0	**1**
1	0	1	0	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	0	1	**1**
0	0	1	1	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	1	1	**1**

Para el segundo caso, su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge q\to r$	$p\vee r$	$[p\wedge q\to r]\to(p\vee r)$
1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	1	**1**
1	0	1	0	1	1	**1**
1	0	0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	1	1	**1**
0	1	0	0	1	0	**0**
0	0	1	0	1	1	**1**
0	0	0	0	1	0	**0**

Y para el tercero tenemos

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge q\to p$	$q\vee r$	$\neg q\wedge\neg r$	$(q\vee r)\wedge(\neg q\wedge\neg r)$	$[(p\wedge q)\to p]\to (q\vee r)\wedge(\neg q\wedge\neg r)$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0

Nos encontramos con tres distintos tipos de esquemas de inferencia:

1. **Tautologías**: Aquellos cuya tabla de verdad da el valor verdad en todos los casos. Son verdaderos para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de los enunciados que los componen.
   - Son esquemas válidos. Las tautologías son, pues, enunciados formalmente verdaderos de la lógica de proposiciones que representan otras tantas formas válidas de razonar
   - La doctrina de que los enunciado de la lógica son tautologías y, en consecuencia, no son informativos fue formulada por Wittgenstein en su famoso *Tractatus (6.1, 6.11)*. Lo propio de los enunciados tautológicos es que son verdaderos bajo cualesquiera circunstancias o posibilidades e verdad. En este sentido, no dicen anda en absoluto.
2. **Expresiones contingentes:** Aquellos otros cuya tabla de verdad da en ocasiones el valor 1 y en ocasiones el valor 0, es decir, que no son formalmente verdaderos, pero tampoco falsos formalmente.
3. **Contradicciones:** Aquellas otras expresiones que son falsas en todos los casos posibles, aquellas cuya tabla de verdad da siempre como resultado el valor falsedad.

Mediante el método de las tablas de verdad podemos, por tanto, detectar la validez de un esquema de inferencia. Para decidir si una forma de razonar es válida o no, basta con hacer su tabla de verdad.

Si al cabo de ésta encontramos que todas las combinaciones posibles de los valores de verdad dan como resultado el valor verdad, entonces diremos que se trata de una forma válida de inferencia.

EJERCICIO: Determina el tipo al que corresponden las siguientes fórmulas.

- $(p\to q)\to(q\to p)$: contingente

p	q	$(p\to q)$	$(q\to p)$	$(p\to q)\to(q\to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

- $[(p \to q) \to p] \to p$: tautológica

p	q	$(p \to q)$	$[(p \to q) \to p]$	$[(p \to q) \to p] \to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

- $p \to \neg(q \to p)$: contingente

p	q	$(q \to p)$	$\neg(q \to p)$	$p \to \neg(q \to p)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1

Validez de los esquemas de inferencia

Existe una importante conexión entre el concepto de tautología y el concepto de validez. Ya que **a todo esquema de inferencia corresponde un condicional que tiene por antecedente el conjunto de las premisas y por consecuente la conclusión.** Supongamos que el condicional *«Si P1, P2, .. Pn, entonces C»* es una tautología, en el sentido expuesto el esquema de inferencia que tiene por premisas los elementos del antecedente y por conclusión el consecuente de dicho condicional es válido, en el sentido de que C ha de ser verdadera si toda las premisas lo son.

¿Qué quiere decir que una forma de razonar es válida? Quiere decir que, para cualquier razonamiento que podamos hacer con esa forma, si las premisas son verdaderas, entonces lo es también necesariamente la conclusión. Lo cual a su vez quiere decir que, cuando un razonamiento es formalmente válido, resulta contradictorio afirmar sus premisas y negar su conclusión. Por ejemplo: puesto que el esquema de inferencia es, como antes hemos visto, válido

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

la conjunción de sus premisas con la negación de su conclusión es una contradicción.

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge \neg(p \to r)$$

Usando el lenguaje de la lógica de enunciados:

- podemos construir un **número infinito de expresiones esquemáticas**. Algunas serán simplemente esquemas de enunciados y otras serán, específicamente, esquemas de inferencia.
- podemos construir **infinitos esquemas de inferencia**. De éstos, unos serán válidos y otros no lo serán.
- podemos construir **infinitos esquemas válidos de inferencia**.

Sin embargo, la validez de muchas formas de inferencia deductivas no depende sólo de los significados de la conectivas lógicas, sino también de la presencia en ella de otros términos lógicos como 'todos', 'algunos'..., ya que todas la tautologías son verdades lógicas, pero no todas la verdades lógicas son tautología.

Consistencia e inconsistencia. Satisfacibilidad

También la consistencia es una noción conectada con la de validez.

un conjunto de enunciados es consistente si es posible que sean verdaderos a la vez.

Supongamos que, en el curso de una conversación alguien afirma lo siguiente:

1. *Se puede ir al aeropuerto en metro o en autobús*
2. *El autobús que iba al aeropuerto ha dejado de funcionar*
3. *El metro al aeropuerto no funciona todavía*

Las afirmaciones de tal persona son inconsistentes, ya que si bien ninguno de los enunciados 1-3 es una contradicción, toda vez que cualquiera de ellos podría ser verdadero. Es el conjunto de ellos el que resulta contradictorio. Sea, en cambio, el siguiente conjunto de enunciados:

1. *Se puede ir al aeropuerto en metro o en autobús*
2. *Hay metro cada cinco minutos*
3. *El autobús tarda mucho.*

Este conjunto sí es consistente, aún cuando alguno de los enunciados fuese falso, podrían ser verdaderos a la vez, que es lo que le hace consistentes.

Enunciados inconsistentes son aquellos que es lógicamente imposible que sean verdaderos a la vez. Todos los enunciados contradictorios son inconsistentes

Si, dado un esquema de inferencia, el conjunto formado por las premisas y la negación de la conclusión es consistente, entonces sabemos que es posible que todas la premisas sean verdaderas y la conclusión falsa; en otras palabras, sabemos que el argumento es inválido. Por ejemplo:

$p \vee q$
p

$\neg q$

Se puede ver que es inválido reparando en el conjunto de fórmulas. El conjunto de fórmulas formado por cada una de las dos premisas y la conclusión negada es consistente, es decir: todas estas fórmulas pueden ser verdaderas a la vez.

$$\begin{cases} p \vee q \\ p \\ q \end{cases}$$

Cuando, por el contrario, el conjunto formado por la premisas y la negación de la conclusión de un esquema de inferencia es inconsistente, dicho esquema es válido.

Para conjuntos de fórmulas, es preferible hablar de **satisfacibilidad** mejor que de consistencia.

Un **conjunto de fórmulas es satisfacible** si y sólo si (*syss*) hay al menos una interpretación que las hace verdaderas a la vez y se dice que es insatisfacible en caso contrario.

consistentes satisfacibles		$\neg(p \wedge \neg p)$ ...	válidas tautológicas
	contingentes	p ...	inválidas
inconsistentes insatisfacibles contradictorias		$p \wedge \neg p$,,	

EJERCICIO: Poner un par de ejemplo de conjuntos de tres enunciados inconsistentes entre si:

- Cuando se estudia, se aprueba. No se aprueba aunque se estudie. Se estudia.
- Si Juan habla, sube el pan. No es verdad que Juan no habla o sube el pan. Sube el pan.

EJERCICIO: Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son insatisfacibles:

1) $\begin{cases} p \to q \\ p \\ \neg q \end{cases}$ Conjunto de fórmulas insatisfacible → Si p es V, para que sea V ($p \to q$), es necesario que también sea V q . Pero entonces la tercera fórmula no puede ser V.

2) $\begin{cases} p \to q \\ \neg(\neg p \vee q) \end{cases}$ Conjunto de fórmulas insatisfacible → $\neg(\neg p \vee q)$ es V si $(\neg p \vee q)$ es F, por lo que q es F y $\neg p$ V, o sea, p es V y q es F, que hace que $p \to q$ sea F

3) $\begin{cases} p \to (\neg q \wedge r) \\ p \wedge \neg q \\ \neg r \end{cases}$ Conjunto de fórmulas insatisfacible → $\neg r$ V significa que r es F, por lo que $(\neg q \wedge r)$ nunca podrá ser V, así pues, $p \to (\neg q \wedge r)$ requiere que p sea F para poder ser V. En consecuencia, la conjunción segunda nunca podrá ser verdadera.

Consecuencia lógica y verdad lógica

Venimos afirmando que el que un argumento sea válido supone que sea imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Esto equivale a decir que un argumento válido es aquel en el que la conclusión es una consecuencia lógica de la premisas. Estamos ya en condiciones de dar una definición precisa de este concepto de **consecuencia** ($\models$)

$$[X_1, .., X_n] \models Y \text{ syss } \forall I / I(X_1) = I(X_2) = .. = I(X_n) = 1 \text{, entonces } I(Y) = 1$$

Y es **consecuencia lógica** del conjunto de fórmulas X_i si y sólo si toda interpretación que hace verdaderas a la X_i hace también verdadera a Y .

Así, por ejemplo, decimos que « $p \vee q$ » es una consecuencia lógica de p porque para toda interpretación posible, si $I(p)=1$, entonces $I(p \vee q)=1$. también podemos decir que p **implica** $p \vee q$.

Una noción estrechamente relacionada con ésta de consecuencia o implicación lógica es la de verdad lógica o tautología.

Una fórmula es una **verdad lógica (o tautología)** si es verdadera para todas las interpretaciones posibles de sus componentes, esto es, si es verdadera en virtud de su forma lógica.

Dicho de un modo preciso: $\models X \text{ syss } \forall I / I(X) = 1$

Así, por ejemplo, $p \vee \neg p$ es una verdad lógica porque resulta verdadera para todas la asignaciones posibles de valores veritativos a p .

Determinación de la validez de argumentos

Determinar que **un argumento es formalmente válido** consiste en ver que *la conclusión es una consecuencia lógica del conjunto de la premisas*

- Es decir, que no haya ninguna interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión).

- Los **enunciados** (castellano) son *verdaderos* o *falsos*.
- Las **fórmulas** (formas de los enunciados) son *tautológicas (válidas), contradictorias o contingentes (meramente satisfacibles)*.
- Los **conjuntos de fórmulas** son *contradictorios o satisfacibles*.
- Los **argumentos** (castellano) tienen *forma válida o inválida*.
- Los **esquemas inferenciales** (formas de los argumentos) son *válidos o inválidos*, significa que hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión

Lo más frecuente es que ni en las premisas ni en la conclusión tengamos verdades lógicas. La mayor parte de la veces utilizamos argumentaciones válidas para alcanzar conclusiones cuyo valor de verdad dependerá del valor de verdad de las premisas. No que demostramos la verdad de la conclusión, sólo que la verdad de las premisas implica la verdad de la conclusión, demostramos la verdad de un condicional.

Cuando decimos que un argumento es válido, no afirmamos ni la verdad de las premisas ni la verdad de la conclusión, solo decimos que *en caso de que las premisas sean verdaderas, la conclusión tendrá que ser verdadera*, siguiéndose con necesidad lógica de la verdad de las premisas.

$Arg \approx [(P_1 \wedge P_2 \wedge .. P_n) \rightarrow C]$ Se demuestra una fórmula de tipo condicional, cuyo antecedente es la conjunción de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión

Cuando la conclusión de un argumento correcto es una verdad lógica, podemos hablar de demostración en dos sentidos:

1. demostración de la validez de la fórmula correspondiente a la conclusión
2. demostración de que las premisas implican la conclusión (pues una fórmula válida es implicada por cualquier fórmula o conjunto de fórmulas, incluido el conjunto vacío). Es decir, demostración de la validez de la relación condicional entre premisas y conclusión.

Se dice que **un argumento es demostrativo cuando es válido y todas sus premisas son verdaderas**, pues la corrección lógica nos asegura que la conclusión es, en ese caso, verdadera. Pero cuando no es la lógica la que sanciona la verdad de las premisas, no podemos decir que la deducción lógica es una demostración de la verdad de la conclusión.

De modo general, tenemos los siguientes método para convalidar un argumento:

- Sintácticos: encaminado a construir la conclusión a partir de las premisas, aplicando reglas deductivas que validan así el argumento. (≈ deducción natural)
- Semánticos: encaminado a analizar las premisas y la negación de la conclusión para alcanzar fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas para encontrar, o bien una contradicción (lo cual prueba que las premisas implican la conclusión) o bien un contraejemplo que invalida, así, la conclusión. (≈ árboles semánticos)

Validez mediante tablas de verdad

Uno de los modos de ver si el argumento es tautológico es mediante la construcción de su correspondiente **tabla de verdad** y comprobar que todas las posibles interpretaciones son verdaderas (columna de la conclusión corresponde toda ella a 1s).

- Éste es un procedimiento que nos permite ver la corrección o incorrección de cualquier fórmula construida con variables enunciativas y conectivas lógicas y, por consiguiente, determinar de un modo mecánico y efectivo la validez de argumentos del lenguaje natural en este nivel proposicional.
- En ocasiones este método resulta engorroso debido al elevado número de filas a medida que aumentan las variables.

Validez mediante contraejemplos

Afortunadamente, contamos con otros procedimientos que nos permiten determinar cuándo un esquema de inferencia es válido. Considerando el esquema en su totalidad, puede escribirse como un condicional que tiene por antecedente la fórmulas correspondientes a las premisas, y por consecuente a la conclusión, siendo dicho condicional tautológico si, y sólo si, no hay interpretación alguna que haga verdadero al antecedente y falso al consecuente. Sea la inferencia siguiente:

La lógica es difícil o a la mayoría de los estudiantes no les gusta.	$p \vee \neg q$
No ocurre que las matemáticas no sean fáciles y la física difícil.	$\neg(\neg r \wedge s)$
No ocurre que la lógica no sea difícil y la física tampoco. Luego a la mayoría de los estudiantes les gusta la lógica o las matemáticas son fáciles.	$\neg(\neg p \wedge \neg s)$ -------------- $q \vee r$

Si este fuera un esquema de inferencia válido, sólo permitiría inferir conclusiones verdaderas de premisas verdaderas. Si pudiéramos, por tanto, hallar un ejemplo de argumento con esta estructura en el que a partir de premisas verdaderas pudiéramos inferir una conclusión falsa, habríamos mostrado que semejante forma de inferencia no es válida ni, por tanto, ninguno de los argumentos con dicha forma. Esto es lo que ocurre con el siguiente esquema:

El Pisuerga pasa por Valladolid o Barcelona no está en sus márgenes. No ocurre que Valladolid no esté al lado del mar y que Barcelona esté en el interior de España. No ocurre que el Pisuerga no pase por Valladolid y que Barcelona no esté en el interior de España. Luego Barcelona está a orillas del Pisuerga o Valladolid está junto al mar.

Se trata de un argumento en el que la premisas son verdaderas y la conclusión, en cambio, falsa. Esto quiere decir que el esquema en cuestión no es válido, dado que admite ejemplos como éste, que por ello recibe el nombre de **contraejemplos.**

- El **contraejemplo de una fórmula** es un enunciado (castellano) falso con la forma de la fórmula;
- El **contraejemplo de un esquema inferencial** es un argumento (castellano) con premisas verdaderas y conclusión falsa y con la forma del esquema inferencial.

Respecto la *validez*, teniendo en cuenta que:

- la validez, aplicada a fórmulas, significa tautología
- la validez, aplicada a esquemas inferenciales, significa que hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión

En ambos casos, la presentación de un contraejemplo es suficiente para mostrar la invalidez de la forma lógica examinada.

En realidad, para mostrar que la inferencia no es válida no hace falta sustituir la variables enunciativa del esquema correspondiente a la misma por enunciados concretos, no hace falta hallar ningún contraejemplo o contraargumento. Basta con asignar a la fórmula correspondiente a la conclusión valores que la hagan falsa y luego comprobar si todas la premisas son verdaderas para tales asignaciones. En efecto, si un esquema es válido no admite ninguna interpretación que haga el antecedente verdadero y el consecuente falso.

Poner un contraejemplo no es negar la conclusión. Aunque sí hay métodos para la búsqueda de contraejemplos que parten del supuesto de la conclusión negada (árbol semántico).

Buscar un contraejemplo de un esquema argumentativo consiste en poner un ejemplo de argumento con la forma del esquema, tal que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Conviene aclarar el valor de verdad de cada enunciado que se escribe.

Conjunto de las premisas y negación de la conclusión

Otro criterio para determinar si la conclusión de un argumento es consecuencia lógica de las premisas es ver si es o no insatisfacible el conjunto formado por las premisas y la negación de la conclusión:

- $(P)=[X_1,..X_n]\Rightarrow X_i=1$
  - si nos vemos obligados a asignar a una misma fórmula atómica valores distintos, entonces el conjunto no es satisfacible
- ($\neg C$). Si con los valores asignados para satisfacer (P) no se puede satisfacer $\neg C$ entonces equivale a decir que no hay ninguna interpretación que haga verdaderas a las fórmulas que constituyen P y falsa a C .

En el ejemplo anterior, $\neg C=\neg(q\vee r)$. Para que la conclusión negada sea verdadera tanto q como r han de ser falsas. Es decir, para que $I(q\vee r)=0$, $I(q)=0$ y $I(r)=0$. Si $I(r)=0$, entonces para que la segunda premisa sea verdadera $I(s)=0$, y sabiendo esto, para que la premisa tercera sea verdadera $I(p)=1$, con lo que también lo sería la primera premisa.

$p\vee\neg q$
$\neg(\neg r\wedge s)$
$\neg(\neg p\wedge\neg s)$

$q\vee r$

Es decir, hemos llegado al caso de que siendo verdaderas todas las premisas (P) es también verdadera la negación de la conclusión ($\neg C$), es decir, premisas verdaderas y conclusión falsa para las asignaciones que hemos identificado:

$$I(p)=1, I(q)=0, I(r)=0, I(s)=0 .$$

De esto deducimos que el esquema no es válido.

EJERCICIO: Determinar la validez de los argumentos siguientes

Para ello hemos de probar que no es posible tener premisas con esa forma verdaderas y resultar falsa la conclusión.

1. *Si mi creencia en que el gato está sobre el felpudo fuera uno de los estados de mi cerebro, entonces podría determinar que tengo la creencia examinando mi cerebro. Si pudiera determinar que tengo la creencia examinando mi cerebro, entonces podría decir que creo que el gato está sobre el felpudo sin adoptar ninguna postura sobre la situación del gato. Pero puedo decir que el gato está sobre el felpudo precisamente si y sólo si adopto una postura acerca de su situación. Por consiguiente dicha creencia no es un estado de mi cerebro.*
   - p *: Mi creencia es un estado de mi cerebro.*
   - q *: Puedo determinar que tengo una creencia examinando mi cerebro.*
   - r *: Puedo decir que creo que el gato está sobre el felpudo.*
   - s *: Adoptar una postura sobre la situación del gato.*

   $p \rightarrow q$
   $q \rightarrow (r \wedge \neg s)$
   $r \leftrightarrow s$

   $\neg p$

   - partamos de la afirmación de la negación de la conclusión $I(p)=1$. Con esto, la primera premisa será verdadera si $I(q)=1$, por lo que en la segunda premisa $I(r \wedge \neg s)=1$. El que esta conjunción sea verdadera supone que $I(r)=1$ y que $I(\neg s)=1$, por lo que $I(s)=0$, lo cual no es compatible para con la tercera premisa, ya que en el bicondicional hemos de tener $I(r)=I(s)$, que no es el caso.
     - Por lo tanto no podemos encontrar una interpretación que haga verdaderas la premisas y falsa la conclusión → esquema de inferencia válido

2. *Si las operaciones de nuestra voluntad no fueran causadas, no podríamos tratar de influir en la conducta de los demás. Si no pudiéramos tratar de influir en dicha conducta, argumentar, exhortar y mandar serían gastar saliva en balde. En este caso, buena parte de las acciones de las que se ocupa la moralidad se convertirían en irracionales. Suponiendo que la moralidad no excluye la acción racional, entonces hemos de concluir que las acciones tienen causas.*
   - p *: las operaciones de nuestra voluntad son causadas*
   - q *: puedo tratar de influir en la conducta de los demás*
   - r *: argumentar, exhortar y mandar es gastar saliva en balde*
   - s *: buena parte de la acciones de la moralidad son irracionales*

   $\neg p \rightarrow \neg q$
   $\neg q \rightarrow r$
   $r \rightarrow s$
   $\neg s$
   ----
   p

   - Afirmamos la negación de la conclusión $I(\neg p)=1$. Para que la primera premisa sea verdadera, $I(\neg q)=1$, la segunda premisa nos fuerza que $I(r)=1$. De la tercera premisa deducimos entonces que $I(s)=1$, que entra en contradicción con la cuarta premisa.
     - No podemos encontrar una interpretación que haga verdaderas la premisa y falsa la conclusión. → inferencia válida

3. *Si lo mantenido por Wittgenstein en el Tractatus es correcto entonces la filosofía no es una ciencia o no consiste en proposiciones. La filosofía consiste en proposiciones o es una actividad. Si la filosofía no es una ciencia entonces no explica los hechos. Luego si lo mantenido por Wittgenstein en el Tractatus es correcto entonces la filosofía es una actividad o no explica los hechos.*
   - p *: lo mantenido por Wittgenstein en el Tractatus es correcto*
   - q *: la filosofía es una ciencia*
   - r *: la filosofía consiste en proposiciones*
   - s *: la filosofía es una actividad*
   - t *: la filosofía explica los hechos*

   $p \to (\neg q \vee \neg r)$
   $r \vee s$
   $\neg q \to \neg t$

   $p \to (s \vee \neg t)$

   - Conclusión falsa: antecedente verdadero y consecuente falso. $I(p)=1$, $I(s \vee \neg t)=0$, para lo que requiere que $I(s)=0$ y $I(\neg t)=0$, o sea, $I(t)=1$. En la segunda premisa tenemos en consecuencia que $I(r)=1$, y con todo lo deducido hasta el momento, en la primera premisa necesitamos que $I(\neg q \vee \neg r)=1$, donde al ser $I(\neg r)=0$, $I(\neg q)=1$, por lo que según la tercera premisa, $I(\neg t)$ ha de ser verdadero, pero ya nos habíamos comprometido a $I(\neg t)=0$
     - no es posible hallar un contraejemplo, lo que hace al esquema de inferencia válido

---

EJERCICIO: Dados los esquemas de inferencia siguientes, hallar para cada uno de ellos asignaciones de valores de verdad tales que la premisas sean verdaderas y la conclusión falsa:

1. $p \to q$

   $q \to p$
   - suponemos verdadera la negación de la conclusión, de modo que $I(\neg(q \to p))=1$, es decir, el condicional de la conclusión es falso, lo que sólo ocurriría con $I(q)=1$ y $I(p)=0$.
   - Sin embargo, $I(p \to q)=1$ para estos valores, por lo que tenemos un caso de premisas verdaderas y conclusión falsa, lo que invalida el argumento.
2. $p \vee q$
   $r \to \neg p$

   $\neg r \to q$
   - Para que sea falsa la conclusión, $\neg r=1$ y $q=0$. Así, la primera premisa sería verdadera siendo $p=1$,. En la segunda premisa tendríamos que sería verdadera fuese cual fuese el valor de p .
   - No validez del argumento al tener un caso con $(P)=1$ y $(C)=0$
3. $q \vee \neg s$
   $q \to p$

   $p \to \neg s$
   - La conclusión queda falsada para $p=1$ y $\neg s=0$. Así, en la primera premisa tenemos que $q=1$, de modo que para que la segunda premisa sea verdadera en efecto $p=1$. Es decir, tenemos un caso de premisa verdaderas y conclusión falsa, por lo que el argumento es inválido.

EJERCICIO: Determinar si los siguientes argumentos son válidos o no. Para los que no lo sean dar una interpretación que muestre su invalidez.

1. *Si Madrid es la capital de España, no lo es Barcelona. Luego si Barcelona fuera la capital de España, no lo sería Madrid*

- p : *Madrid es la capital de España*
- q : *Barcelona es la capital de España*

$p \rightarrow \neg q$

$q \rightarrow \neg p$

- Para sea falsa la conclusión, necesitamos $q=1$ y $\neg p=0$, por lo que $p=1$. Para que la primera premisa sea verdadera, tendríamos que $\neg q=1$, por lo que $q=0$.
- Hay un conflicto entre nuestra asignación de verdad a q, por lo que no sería viable la validez de un argumento en que fuesen verdaderas las premisas y falsa la conclusión, por lo tanto el razonamiento que queremos validar es, en efecto, válido
- También podríamos analizarlo mediante tabla de verdad, donde como vemos, se trata de una tautología y, por tanto, el razonamiento es verdadero

p	q	$p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2. *Las proposiciones de la lógica son analíticas o su verdad depende sólo de la definición de los conceptos involucrados en ella. Las proposiciones de la lógica son analíticas si y sólo si su verdad se puede establecer con independencia de la experiencia. Si las proposiciones de la lógica no hablan de la experiencia y son vacías, su verdad puede establecerse con independencia de la experiencia. Las proposiciones de la lógica no hablan del mundo pero no son vacías. Luego la verdad de las proposiciones de la lógica no depende sólo de la definición de los conceptos involucrados en ella.*

- p : *Las proposiciones de la lógica son analíticas*
- q : *la verdad (de las proposiciones lógicas) depende sólo de la definición de los conceptos involucrados en ella*
- r : *la verdad se puede establecer con independencia de la experiencia*
- s : *las proposiciones de la lógica hablan de la experiencia*
- t : *las proposiciones de la lógica son vacías*

$p \vee q$
$p \leftrightarrow r$
$(\neg s \wedge t) \rightarrow r$
$\neg s \wedge \neg t$

$\neg q$

- Supongo la negación de la conclusión, por lo que en efecto $q=1$, esto hace que la primera premisa sea automáticamente verdadera al serlo q.
- p puede ser entonces tanto 0 como 1, y sea el que sea, r habría de tener el mismo valor dado el bicondicional de la segunda premisa.
- Fijándonos en la cuarta premisa, para que sea verdadera $s=t=0$, por lo que el antecedente del condicional de la segunda premisa es falso (al ser $\neg s \neq t$), lo que hace que la premisa en sí sea verdadera, de nuevo, independientemente del valor de r.
- Es decir, tenemos un caso en que, para $q=1$, $s=t=0$ e indistintamente del valor que tomen p y r, que se cumple que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa.
- Por lo tanto, se demuestra la invalidez del argumento

Métodos de evaluación sintáctica: Deducción Natural. Reglas básicas y derivadas

La lógica de enunciados como sistema de regla de inferencia

El razonamiento natural

La lógica presenta el resultado de sus análisis en forma de leyes que expresan esquemas válidos de inferencia, moldes correctos de razonamiento tales que, interpretadas sus variables con enunciados cualesquiera, si los enunciados que han pasado a construir las premisas son verdaderos, verdadero será también, y necesariamente, el enunciado que aparece como conclusión.

A juzgar por lo visto hasta ahora, parece como si el sujeto procediera, cada vez que realiza un razonamiento, del siguiente modo: eligiendo de entre un repertorio de formas válidas de razonar que habría que suponer alojado en algún departamento de su cerebro la forma apropiada al caso, interpretando luego los lugares vacíos de ésta —indicados por las variables de enunciado— con los contenidos a que trate de aludir, y exponiendo finalmente el razonamiento así elaborado a un interlocutor tan capacitado como él para reconocer cuándo un razonamiento es válido, e incapaz, por tanto, en ese caso, de aceptar las premisas y a la vez rechazar la conclusión.

No sería extraño, sin embargo, que las cosas ocurrieran de otro modo. En primer lugar, parece claro que la generalidad de los sujetos tiene gran dificultad para aislar la forma del contenido y hacer consideraciones puramente formales. Por lo demás, los sujetos se limitan a realizar razonamientos que de hecho tienen una determinada forma. Si al sujeto se le preguntara qué es lo que él hace cuando hace un razonamiento, posiblemente diría —en el caso de que se trate de un sujeto bien dotado para la reflexión— que comienza por sentar unas premisas y extrae luego una conclusión que se apoya en ellas, que tiene a aquéllas como fundamento. Representar el razonamiento del sujeto mediante el simbolismo lógico supone «poner en limpio» a posteriori la forma implícita del razonamiento, algo en lo que, como decimos, el sujeto no ha reparado. Al obrar así hemos realizado una especie de radiografía del razonamiento, un retrato de su osamenta. Pero en las fotografías las figuras están quietas. Dicho de otro modo, y abandonando ya la metáfora: al **representar la estructura del razonamiento mediante una ley lógica** —si es que el sujeto ha realizado un razonamiento formalmente correcto— nos estamos limitando a **hacer un croquis de su inferencia**, a presentar esquemáticamente el recorrido argumental del sujeto, pero no estamos repitiendo —de forma analizada— el curso de su razonamiento, estamos perdiéndonos el proceso de inferencia, es decir, el paso de las premisas a la conclusión. Estaríamos aplicando el análisis lógico para hacer, por así decir, una «instantánea» del razonamiento. Y de lo que se trata es de aplicar el análisis lógico «cinematográficamente».

Mejor sería, entonces, describir el comportamiento razonador del sujeto diciendo que ha consistido en pasar de uno o más enunciados —las premisas— a un enunciado al que aquéllas sirven de justificación. Y ese paso sólo puede estar justificado en virtud de una regla de inferencia. Y **las reglas de la inferencia —deductiva— pertenecen a la lógica formal**. No así —o no así necesariamente, ni siquiera frecuentemente— las premisas y la conclusión. Lo normal es que las premisas y la conclusión no sean enunciados formalmente verdaderos, sino enunciados verdaderos empírica-mente. Y eso no siempre, porque pudiera ocurrir que se tratara de simples hipótesis —es decir, de enunciados cuyo valor de verdad está por ver— o incluso de enunciados de los que se sabe —o, al menos, se piensa, lo cual para el caso viene a ser lo mismo— que son falsos. La lógica, en efecto, es, ya lo hemos dicho, la ciencia del razonamiento coherente. Y **se puede ser coherente aunque no se parta de premisas verdaderas**. En efecto: ser coherente consiste en aceptar como verdadero lo que se seguiría de las premisas sí éstas fueran verdaderas (lo sean o no de hecho). Pongamos un ejemplo sangrante: una persona —si cabe llamarle así— puede «pensar» que hay razas superiores (entre ellas, casualmente, la suya propia); en ese caso, lo coherente sería que dicha «persona», llegado el caso, no tuviera serios inconvenientes en exterminar o esclavizar a los individuos pertenecientes a razas «inferiores». Recuérdese una vez más la definición que hemos dado de 'razonamiento formalmente válido': una razonamiento es formalmente válido cuando, si sus premisas son verdaderas, entonces necesariamente lo es también la conclusión. En ningún momento se dice que las premisas deban ser verdaderas (y mucho menos formalmente verdaderas). Su verdad se presenta a título de hipótesis: si lo son, lo será también la conclusión; si no lo son, el valor de verdad de la conclusión puede ser cualquiera.

En resumen: si a un sujeto que razonara con naturalidad y a la vez fuera capaz de describir en términos lógicos su propio proceso de razonamiento, no diría:

> *Es formalmente verdadero el enunciado '...' que expresa el razonamiento que acabo de realizar cuyas premisas son, además, de hecho verdaderas*

sino

> *Lo que acabo de decir es que si aceptamos como premisa la proposición de que ..., hemos de aceptar inevitablemente como conclusión la proposición de que ....*

Y esa obligatoriedad (hemos de ...) en el paso de las premisas a la conclusión la imprime —sólo podría imprimirla— una regla de inferencia, un dispositivo lógico que, a partir de unas premisas con una forma determinada, arrastra una determinada conclusión.

Pero aún hay más: no sólo es que el papel de la lógica en el razonamiento natural se manifieste bajo la forma de reglas de inferencia más bien que bajo la forma de leyes. Es que, por otra parte, y como ya hemos indicado hace un instante, el punto de partida, en los razonamientos que hacemos ordinariamente, no está constituido prácticamente nunca por enunciados formalmente verdaderos, sino por enunciados verdaderos de hecho, por enunciados que se nos antojan plausibles, por enunciados oscuramente verdaderos —y cuyo valor de verdad pudiera quizá aclararse precisamente extrayendo sus consecuencias—, o incluso por enunciados reconocidamente falsos, pero cuyas implicaciones nos interesa conocer.

Recordemos, sin embargo, cómo procede la demostración en un sistema axiomático. Allí partíamos siempre de enunciados formalmente verdaderos —axiomas, o teoremas ya demostrados —, para llegar, transformando tautológicamente esas expresiones, a enunciados que son también formalmente verdaderos.

Ciertamente, podríamos aplicar la lógica, en la forma de sistema axiomático, al análisis de la inferencia natural. Podríamos, por ejemplo, ante un razonamiento ordinario proferido por un sujeto cualquiera, extraer su forma y tratar luego de deducir ese esquema como teorema. Si lo consiguiéramos, habríamos demostrado que la expresión es una ley, y, por ende, que el razonamiento del sujeto era formalmente válido. Pero este modo de analizar el razonamiento natural resultaría en exceso artificial.

Leyes y reglas

Puesto que el razonamiento natural opera, desde un punto de vista lógico, a base de reglas de inferencia, y puesto que la lógica pretende constituir el análisis sistemático del razonamiento desde el punto de vista de su forma, parecería razonable, en aras de una más ajustada aplicabilidad de nuestra ciencia a su objeto propio, hacer el intento de presentar la lógica como sistema de reglas de inferencia. Vayamos por partes. En primer lugar, ¿qué es una regla de inferencia? ¿Cuántas reglas de inferencia hay o podría haber? ¿Recuerda el lector cuántas leyes había en el cálculo de enunciados? Recordémoslo: infinitas. Pues bien: infinitas son también en número las reglas de inferencia. Y ello por la sencilla razón de que **a cada ley corresponde una regla y a cada regla corresponde una ley**. El conjunto de las leyes y el conjunto de las reglas son equivalentes.

Una ley y una regla son lo mismo, sólo que dicho de dos maneras distintas. Una ley es un enunciado de la lógica. Una regla, también.

- Una **ley es el enunciado de un esquema válido de inferencia**, mientras que
- Una **regla es el enunciado de una instrucción para realizar una inferencia válida**.

Los ejemplos señalarán mejor la diferencia entre unas y otras. Tomemos una ley:

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$$

Cualquier enunciado que tenga esta forma será verdadero, formalmente verdadero. Y, puesto que lo que acabamos de enunciar es una forma válida de inferencia, cualquier inferencia que posea esa estructura será una inferencia válida.

Como a cada ley corresponde una regla, he aquí la regla que correspondería a esa ley:

> *'Si tomamos como premisas un condicional y la negación de su consecuente, podemos inferir la negación de su antecedente como conclusión'.*

¿Cómo formalizar el enunciado de esta regla? Es evidente que las leyes están escritas en el lenguaje del cálculo. Y es igualmente evidente que las reglas lo están en el metalenguaje.

En la formalización de esta regla correspondiente al modus tollendo tollens hemos empleado términos tales como 'premisas', 'condicional', 'negación', 'conclusión', 'consecuente', etc., términos todos que pertenecen siempre a un metalenguaje, en la medida en que están destinados, *ex officio*, a mencionar expresiones de un lenguaje —de un lenguaje lógico-formal, concretamente. Para referirnos a ellos hemos de utilizar, pues, variables metalingüísticas. Metalingüísticas, por lo que acabamos de decir. Variables, porque el enunciado de una regla es un enunciado general, aplicable a cualesquiera expresiones que tengan las características exigidas por la regla.

Podríamos, entonces, abreviar la formulación de nuestra regla diciendo:

> *«Si tomamos como premisas una expresión de la forma $X \to Y$ y una expresión de la forma $\neg Y$ podemos inferir como conclusión una expresión de la forma $\neg X$ '».*

«*Podemos inferir*». ¿Qué es lo que queremos decir con eso? Queremos decir, en nuestro ejemplo, que la expresión $\neg X$ es válidamente deducible a partir de $X \to Y$ y $\neg Y$, que aquélla se sigue formalmente de éstas, que unas premisas como esas implican una conclusión de esa forma.

Ya hemos indicado que el condicional puede servir para reflejar, para mostrar la implicación de un enunciado o esquema de enunciados por otro. Pero, independientemente de esta posibilidad de verterla al lenguaje del cálculo —mediante un condicional lógicamente verdadero—, lo cierto es que la relación de deducibilidad pertenece al metalenguaje. No es, en efecto, una relación entre expresiones del cálculo, sino entre los nombres de esas expresiones (lo que va entrecomillado, o como en estos apuntes, en la tipología específica del lenguaje formal). Y la expresión 'es deducible' no lo está, en el párrafo anterior.

Simbolizarla mediante un condicional, sería traicionar todas las consideraciones que hemos venido haciendo en lo que va de este apartado. Simbolizaremos, como es costumbre, mediante una raya horizontal que separa las premisas de la conclusión. Por tanto, al escribir la siguiente inferencia estamos diciendo que cualquier expresión como la que figura debajo de la raya es deducible de cualesquiera expresiones que tengan la misma forma que las expresiones inscritas sobre ella.

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

Acabamos de formular una regla de inferencia. Formulemos otra:

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow Z \end{array}$$

A esta regla, en justa correspondencia, corresponde una ley:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Puesto que, en principio, ni las reglas tienen preferencia sobre las leyes ni éstas sobre aquéllas, lo mejor sería quizá presentar su mutua correspondencia en línea:

Ley	Regla en lenguaje técnico	Regla en símbolos
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$	Si tomamos como premisas un condicional y su antecedente podemos inferir el consecuente como conclusión.	$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$
$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p$	Si de una proposición se siguen a la vez un enunciado y su negación, podemos inferir la negación de esa proposición.	$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ X \rightarrow \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$
$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	Si tomamos como premisas una disyunción y la negación de uno de sus miembros, podemos inferir el otro miembro como conclusión.	$\begin{array}{l} X \vee Y \\ \neg X \\ \hline Y \end{array}$

Así pues, podemos presentar los modos válidos de razonar indiferentemente en la forma de leyes o en la forma de reglas. Se trata, sin embargo, de una indiferencia tan sólo en la teoría. En la práctica —es decir, según lo que se pretende hacer con la lógica— hay razones para inclinarse por una forma de presentación más bien que por otra.

Y así, cuando de lo que se trata —como ahora sucede— es de buscar una aplicación más ajustada de la lógica al análisis del razonamiento común —tanto en la vida cotidiana como en la ciencia—, de dar cuenta formalmente de los procedimientos naturales de deducción, parece preferible la presentación de la lógica en forma de reglas de inferencia.

Pero hemos dicho mal. O, mejor dicho, no lo hemos dicho todo. Hemos dicho que la lógica puede presentarse bien en forma de leyes, bien en forma de reglas. Y debiéramos haber dicho que la lógica puede presentarse en forma de **sistema de reglas** o en forma de **sistema de leyes**, a elegir.

Ya hemos explicado, en efecto, que la lógica es una ciencia, y, por ende, un sistema. Y ya hemos visto que la teoría lógica más elemental se puede presentar como sistema de leyes. Porque es que no nos hemos limitado a dar una lista de leyes de la lógica de enunciados. Hemos, además, presentado esas leyes en forma de cálculo: fundamentado todas y cada una de ellas a partir de unas pocas establecidas como axiomas.

Por lo tanto, de lo que se trata ahora es de presentar, alternativamente, la lógica de enunciados como sistema de reglas de inferencia. No simplemente de dar una lista de reglas paralelas a la lista de leyes, sino de sistematizar las reglas, de presentar la casi totalidad de éstas como reglas derivadas a partir de un pequeño número de reglas primitivas.

Puesto que es posible derivar todas las leyes a partir de unas pocas leyes-axiomas que se pueden contar con los dedos de una mano, y puesto que las reglas no son sino un trasunto de las leyes —o viceversa—, podemos también derivar el resto de las reglas de inferencia a partir de un conjunto de reglas primitivas. Ahora bien: cuando derivamos un enunciado dentro de un sistema lo hacemos de acuerdo con determinadas reglas de inferencia.

Cuando lo que se deriva son justamente reglas de inferencia —es decir, expresiones que son meta-lingüísticas por respecto a los enunciados en cuya derivación intervienen—, las reglas de inferencia que permiten derivarlas serán, en cuanto metarreglas de inferencia, meta-metalingüísticas. Si tomamos como nivel básico el de un razonamiento cualquiera expresado en un lenguaje natural, nos hallamos ante cuatro niveles distintos de lenguaje:

<table>
<tr><td>Nivel 0</td><td colspan="2">El razonamiento en cuestión, formulado, por ejemplo, en castellano.
‘Si Dios no existe y todo está permitido, entonces vamos inexorablemente hacia el caos. Ahora bien: no vamos hacia el caos. Por otra parte, Dios no existe. Luego no todo está permitido’</td></tr>
<tr><td>Nivel 1</td><td>La expresión del resultado de formalizar este razonamiento, la presentación de su forma separada del contenido:</td><td>$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$
$\neg r$
$\neg p$

$\neg q$</td></tr>
<tr><td>Nivel 2</td><td>La regla de inferencia que nos permite realizar un razonamiento de esa forma, que nos autoriza a pasar de unas premisas con esa estructura a una conclusión como ésa:</td><td>$(\neg X \wedge Y) \rightarrow Z$
$\neg Z$
$\neg X$

$\neg Y$</td></tr>
<tr><td>Nivel 3</td><td colspan="2">La derivación de esta regla de inferencia —puesto que normalmente se la consideraría como una regla derivada— a partir de otras reglas primitivas.
Supongamos, en efecto, que contáramos ya con —como mínimo— estas cuatro reglas admitidas a título de reglas básicas:
<table><tr><td>$X \rightarrow Y$
$\neg Y$

$\neg X$</td><td>$X \vee Y$
$\neg X$

Y</td><td>$\neg(X \wedge Y)$

$\neg X \vee \neg Y$</td><td>$\neg\neg X$

X</td></tr><tr><td>MT: Modus Tollens</td><td>IA: Inferencia Alternativa</td><td>DeM: ley de De Morgan</td><td>DN: Doble Negación</td></tr></table></td></tr>
</table>

Podríamos, entonces, derivar nuestra regla a partir de estas otras cuatro:

1.	$(\neg X \wedge Y) \to Z$	Premisa
2.	$\neg Z$	Premisa
3.	$\neg X$	Premisa
4.	$\neg(\neg X \wedge Y)$	MT 1,2
5.	$\neg\neg X \vee \neg Y$	DeM 4
6.	$X \vee \neg Y$	DN 5
7.	$\neg Y$	IA 6,3

Tomando como premisas $(\neg X \wedge Y) \to Z$, $\neg Z$ y $\neg X$ hemos inferido $\neg Y$. La legitimidad de esa inferencia entre cualesquiera expresiones de esa forma, la representaremos entonces así:

$$\begin{array}{l} (\neg X \wedge Y) \to Z \\ \neg Z \\ \neg X \\ \hline \neg Y \end{array}$$

Con lo cual hemos obtenido la regla que buscábamos.

Decir que la hemos obtenido significa que hemos conseguido demostrarla a partir de otras reglas de acuerdo con un principio de orden superior.

Presentar la lógica —o, por ahora, la lógica de enunciados tan sólo— como un sistema de reglas de inferencia significa, entonces, elegir un conjunto de reglas básicas y derivar (o mostrar la posibilidad de derivar) de él el conjunto —potencialmente infinito— de las restantes.

Todo consiste, por tanto, en hacer un cálculo de reglas, en lugar de un cálculo de leyes. Y puesto que al construir un cálculo de ese tipo no buscamos otra cosa —según hemos dicho al comienzo de este apartado, en la exposición de motivos— que poder llevar a cabo un análisis lógico más fiel de la inferencia natural; y puesto que las inferencias de las que —al menos primeramente— se ocupa la lógica son las inferencias deductivas, a nadie puede extrañar que un sistema de este tipo reciba el nombre de **«cálculo de deducción natural»**. Lo que estamos haciendo, en efecto, no es otra cosa que dar forma de cálculo a la forma natural de deducir.

En purísima lógica, de lo que se trataría sería de deducir nuevas reglas más complejas a partir de un pequeño repertorio de reglas primitivas. Cuando de lo que se trata, en cambio, es de aplicar la lógica a un material extralógico, se suele proceder eligiendo unas pocas reglas primitivas, derivando de éstas algunas reglas auxiliares —que, en rigor, no serían necesarias, pero que son muy útiles para abreviar las deducciones—, y dedicando unas y otras al análisis de la validez de cualquier inferencia sobre cualquier materia. Con esto basta. ¿Por qué? Tomemos un ejemplo. Sea el siguiente razonamiento

> *«"Los matrimonios podrían ser buenos, al menos durante un cierto tiempo, si hubiera armonía y satisfacción sexual. Pero para que eso ocurriera haría falta una educación que favoreciera la sexualidad, una experiencia sexual prenupcial y una emancipación con respecto a la moral convencional. Ahora bien: estos mismos factores, que son los que permitirían realizar buenos matrimonios, significan al propio tiempo la condena de esta institución". Luego en los matrimonios no hay armonía ni satisfacción sexual.»*

Formalicemos este razonamiento.

p = *'hay armonía y satisfacción sexual'.*

q = *'los matrimonios pueden ser buenos'.*

r = *'se imparte una educación que favorece la sexualidad'.*

s = *'hay experiencias sexuales prenupciales'.*

t = *'se está emancipado con respecto a la moral convencional'.*

$$\begin{array}{l} (p \to q) \\ (r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p \\ (r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow (q \wedge \neg q) \\ \hline \neg p \end{array}$$

Supongamos que disponemos de las tres reglas siguientes:

- La segunda es la reducción al absurdo (RA)
- La tercera es la propia definición contextual del bicondicional: (Rdf $\leftrightarrow$)

$$\begin{array}{l} X \to Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array} \qquad \begin{array}{l} X \to (Y \wedge \neg Y) \\ \hline \neg X \end{array} \qquad \begin{array}{l} X \leftrightarrow Y \\ \hline X \to Y \mid Y \to X \end{array}$$

Procedamos entonces a intentar demostrar la validez formal de este razonamiento, a intentar mostrar que de unas premisas de esa forma se sigue una conclusión con esa estructura:

1.	$(p \to q)$	Premisa
2.	$(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p$	Premisa
3.	$(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$	Premisa
4.	$\neg(r \wedge s \wedge t)$	RA 3
5.	$p \to (r \wedge s \wedge t)$	Rdf $\leftrightarrow$ 2
6.	$\neg p$	MT 4,5

Quiere esto decir que $\neg p$ se infiere válidamente de esas premisas. Lo cual a su vez quiere decir que la expresión

$$(p \to q) \wedge [(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p] \wedge [(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)] \to \neg p$$

es una tautología, una ley. Lo cual quiere a su vez decir que la expresión

$$\begin{array}{l} (X \to Y) \\ W \leftrightarrow X \\ W \leftrightarrow (Y \wedge \neg Y) \\ \hline \neg X \end{array}$$

que no es sino la versión metalógica, la traducción a regla de aquella ley, enuncia un procedimiento correcto de deducción, una regla correcta de inferencia que permite extraer de unas premisas una conclusión que se sigue válidamente de ellas. Podríamos entonces aplicar esta regla como regla derivada para abreviar toda deducción cuyas premisas tengan la misma forma que la de nuestro ejemplo. En efecto: contando con esa regla —a la que llamaremos, para abreviar 'RWR' (regla de Wilhelm Reich)— la derivación que antes hemos realizado constaría de cuatro pasos, en lugar de seis:

1.	$(p \to q)$	Premisa
2.	$(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p$	Premisa
3.	$(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$	Premisa
4.	$\neg p$	RWR 1,2,3

Ésta es la razón de que no necesitemos entregarnos a la demostración de más y más reglas hasta el infinito. Nos basta con unas pocas reglas primitivas y unas pocas reglas derivadas —aquellas cuya función de abreviación de las deducciones se haga necesaria con mayor frecuencia.

Con eso basta, porque por cada derivación correcta que realicemos obtendremos la posibilidad de formular una nueva regla de inferencia: la que se obtendría enunciando que de cualesquiera premisas que tuvieran esa forma puede inferirse siempre válidamente una conclusión así construida.

La nueva regla de este modo obtenida sería algo así como la moraleja que extraemos de esa derivación y que nos permitirá abreviar ulteriores derivaciones de enunciados que tengan la misma estructura.

Leyes de la lógica de enunciados

Los enunciados de esquemas válidos de inferencia constituirán **leyes de la lógica**. He aquí algunas de las leyes de la lógica de enunciados, seleccionadas, ya sea por la regularidad con que se dan —es decir, por la frecuencia con que los sujetos construyen razonamientos de esa forma—, ya por su importancia en el razonamiento científico o en la argumentación ordinaria.

1. $\neg\neg p \rightarrow p$: **Ley de Doble Negación**
2. $(p \wedge q) \rightarrow p$ (intersección de dos conjuntos cuyo contenido pertenece al primero $A \cap B \subset A$)
   - 2b. $(p \wedge q) \rightarrow q$
3. $p \rightarrow (p \vee q)$ (junto con la ley 2 se conocen como **Leyes de simplificación**)
   - 3b. $q \rightarrow (p \vee q)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$: **Ley de contraposición (del condicional)**
5. $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$: **Ley de conmutatividad de la conjunción**
6. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$: **Ley de conmutatividad de la disyunción**
7. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$: **Ley de conmutatividad del bicondicional**
8. $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$: **Ley de asociatividad de la conjunción**
9. $[(p \vee q) \vee r] \rightarrow [p \vee (q \vee r)]$: **Ley de asociatividad de la disyunción**
10. $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$: **Ley de asociatividad del bicondicional**
11. $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$: **Ley distribuitividad de la conjunción por la disyunción**
12. $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$: **Ley de distribuitividad de la disyunción por la conjunción**
13. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$: **Ley de distribuitividad del condicional por la conjunción**
14. $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$: **Ley de distribuitividad del condicional por la disyunción**
15. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow r)]$: **Ley de transitividad del condicional**
16. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow [(p \leftrightarrow r)]$: **Ley de transitividad del bicondicional**
17. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$: **Ley de exportación**
   - 17b. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$: **Ley de importación**
18. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$: **Ley del dilema constructivo**[2]
19. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$: **Segunda ley del dilema constructivo**
20. $[(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)] \rightarrow (\neg r \vee \neg s)$: **Ley del dilema destructivo**
21. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$: **Ley de Clavius (*consequentia mirabilis)***

---

2 *«O debemos filosofar o no debemos hacerlo. Si debemos hacerlo, entonces debemos hacerlo. Si no debemos hacerlo, entonces también debemos hacerlo [para explicar por qué no debemos hacerlo]. Luego en cualquier caso debemos filosofar.»* (Aristóteles, en el Protréptico)

La forma estructurada es: $[(p \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow p)] \rightarrow p$

22. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$: **Primera ley de De Morgan**
23. $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$: **Segunda ley de De Morgan**
24. $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$: **Primera ley de inferencia de la alternativa**
25. $[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$: **Segunda ley de inferencia de la alternativa**
26. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$: **Modus ponendo ponens** (al ser p condición suficiente de q)
27. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$: **Modus tollendo tollens** (al ser q condición necesaria de p)

Deducción axiomática y deducción natural

No vamos todavía a presentar ese omnipotente sistema de reglas aristocráticas y reglas de clase media alta. Antes queda algo por aclarar. Decíamos que la diferencia fundamental entre el modo axiomático de deducir y el modo natural de hacer inferencias deductivas era que en el primer caso se partía de enunciados formalmente verdaderos y a enunciados formalmente verdaderos se llegaba al cabo de la deducción, mientras que en el segundo se puede partir —y es eso lo más frecuente— de enunciados indeterminados en su valor de verdad o incluso declaradamente falsos, llegándose a enunciados que tampoco son tautológicos.

Los enunciados formalmente verdaderos, verdaderos en virtud de su sola forma, son —y esto no es más que otra manera de decir lo mismo— verdaderos en todos los casos posibles, verdaderos para cualquier contenido que se adapte a esa determinada forma: son, en una palabra, vacíos.

Y los razonamientos naturales, aunque a menudo se caractericen por su vaciedad, no son vacíos en este sentido. Dicho de otro modo (que es casi el mismo): las expresiones que obtenemos al finalizar las deducciones en un sistema axiomático son verdaderas por sí mismas, por razón de su propia estructura. Las que los sujetos obtienen a diario en las contadas ocasiones en que están iluminados por la lógica sólo son verdaderas si se acepta que lo son las premisas.

Veamos, con un ejemplo, las diferencias entre ambos modos de proceder. Ese mismo ejemplo nos servirá también, sin embargo, para mostrar las semejanzas. Ya hemos dicho, en efecto, que las diferencias son diferencias en el modo de presentar las cosas, y no en el modo de ser éstas.

Supongamos que un individuo, al que llamaremos F, intenta despertar en otro individuo, cuyo nombre será M, impulsos autodestructivos, diciéndole —entre las muchas cosas que podría decirle — lo siguiente (Y supongamos ahora que el primer hablante, F, es un lógico taimado que no exhibe al principio su condición de tal, pero que la hace valer en un cierto momento de una manera implacable:

F. La felicidad, amigo mío, es imposible. En todo caso, si no es imposible, al menos está muy lejos. Verá usted por qué. Si intenta usted seriamente contribuir a hacer la revolución, tarde o temprano le introducirán en la cárcel, lo cual prácticamente nunca resulta grato. Ahora bien: ¿qué otra cosa puede hacer usted? ¿Integrarse en el sistema planetario de explotación? Puede usted hacerlo, por supuesto, pero entonces —siendo, como es usted, lúcido— pronto hará presa en usted la mala conciencia. Triste, es, pues, su destino: o la mazmorra o el remordimiento.

M. Ciertamente, sus presupuestos son irreprochables. Pero su conclusión me parece un tanto desesperanzada. Yo creo que hay otras salidas.

F. De modo que acepta usted las premisas —así se llaman— de que parto, pero no la conclusión a la que llego. ¿No es eso? Bien. Formalicemos. Las premisas serían éstas:

1. $p \rightarrow r$
2. $q \rightarrow s$
3. $\neg(p \leftrightarrow q)$

Y ésta sería la conclusión: $\neg(r \leftrightarrow s)$

Convendrá usted conmigo en que si se acepta que algo es condición suficiente de otra cosa y se acepta que se da lo primero, hay que aceptar necesariamente que se da lo segundo.

M. Desde luego.	*Formalización del diálogo*
F, Excelente. Vaya usted apuntando. Entonces usted acepta que hay una alternativa clara: o p o q. Esta es una de nuestras premisas. Me acepta usted, por otra parte, que la primera de estas dos únicas posibilidades conduce a una situación, la situación de estancia en la cárcel, que representaremos mediante la variable r. Reconoce usted, en tercer lugar, que la segunda de las alternativas nos lleva a la mala conciencia, estado de cosas cuya existencia representamos mediante la variable s. ¿Estamos?	1. $\neg(p \leftrightarrow q)$ Premisa 2. $p \rightarrow r$ Premisa 3. $q \rightarrow s$ Premisa
M. Estamos.	
F. Ahora bien: póngase usted en la primera posibilidad. Supóngase que yo elijo el camino de la revolución. Entonces, puesto que está usted de acuerdo en que ese camino, tomado en serio, conduce a la cárcel, según reza la segunda premisa, es la cárcel lo que me espera. ¿No es así?	4. p 5. r MP 2,4
M. Así es	
F. Bien. Supongamos ahora, por el contrario, que elige usted el espinoso camino de la integración. Se verá usted condenado a sentir esa insatisfacción consigo mismo que llaman 'mala conciencia'. ¿Conviene usted en esto?	6. q 7. s MP 3,6
M. Convengo	
F. Pues entonces, mi querido e incoherente interlocutor, no le quedan a usted más que dos caminos: o el régimen penitenciario, o esa especie de trotskismo aplicado a la conciencia moral: el remordimiento permanente.	8. $\neg(r \leftrightarrow s)$

Pero he aquí que M, hasta ahora obediente y sumiso, es también un lógico, solo que infinitamente más solapado que su compañero de argumentación.

M. Permítame. Ha dicho usted que si acepto sus premisas he de aceptar también necesariamente la conclusión que usted propone. Lo cual es tanto como decir que si son verdaderas sus premisas, entonces también será verdadera su conclusión. Lo cual a su vez quiere decir que el condicional construido con esas premisas como antecedente y esa conclusión como consecuente es lógicamente verdadero, o, lo que es lo mismo, verdadero en todos los casos posibles. ¿De acuerdo?

F. De acuerdo

M. Entonces, con su permiso, voy a construir ese condicional y a hacer su tabla de verdad. Es un poco larga, desde luego. Confío, sin embargo, en que su probada fidelidad a la lógica le ayudará a soportarlo: $[\neg(p\leftrightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s)]\rightarrow\neg(r\leftrightarrow s)$

p	q	r	s	A $\neg(p\leftrightarrow q)$	B $p\rightarrow r$	C $q\rightarrow s$	$A\wedge B\wedge C$	D $\neg(r\leftrightarrow s)$	$(A\wedge B\wedge C)\rightarrow D$
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1

¿¡Qué sorpresa, verdad!? No todos los casos de la tabla arrojan el valor 1. Lo cual quiere decir que la expresión no es lógicamente verdadera. Lo cual —puesto que la expresión es un condicional— quiere decir que las premisas no implican la conclusión. Lo cual quiere decir que aquellas pueden perfectamente ser verdaderas y éstas ser falsas. ¿Cierto?

Cierto— reconoce F con la reconfortante pesadumbre con que todo lógico formal se pliega al inapelable dictamen de su ciencia cuando éste le es adverso.

M. Fíjese usted, sin embargo, en que, si bien de las premisas que usted ha sentado, y que yo hago mías, no se deduce $\neg(r\leftrightarrow s)$ sí se deduce, en cambio, $r\vee s$. Si no lo cree, le invito a que haga la tabla de verdad de la expresión $[\neg(p\leftrightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s)]\rightarrow(r\vee s)$

Mi pericia —de la que acabo de dar una prueba— en la construcción de tablas de verdad me dispensará a sus ojos —espero— de realizar también esta otra. Confíe en mí. Esa expresión es una tautología. Por lo tanto, la siguiente demostración es una demostración correcta:

1. $\neg(p\leftrightarrow q)$ premisa
2. $p\rightarrow r$ premisa
3. $q\rightarrow s$ premisa
4. p suposición
5. r MP 2,4
6. q suposición
7. s MP 3,6
8. $r\vee s$

Así pues —prosigue M—, de sus premisas se sigue una conclusión todavía más pesimista que la prevista por usted; o se va a la cárcel, o se tiene mala conciencia, o ambas cosas a la vez. No quisiera, en verdad, encontrarme en el lugar de un individuo que fuera sujeto a la vez del enunciado r y del enunciado s siendo ambos verdaderos.

¿Cuál es la moraleja —moraleja lógica— de este debate? Son dos, como hemos anticipado.

- La primera de ellas viene a poner de relieve la diferencia entre las conclusiones que se alcanzan axiomáticamente y las obtenidas en una de esas deducciones que hemos dado en llamar «naturales».
- La segunda tiende a resaltar la semejanza de principio entre unas y otras, a mostrar que la diferencia es una diferencia de presentación y a dejar claro que las diferencias de presentación son, en este caso, sumamente importantes.

Vayamos por partes. En primer lugar —y esto es ahora lo más importante a efectos didácticos—, el ejemplo sirve para encarecer la **distinción entre un sistema axiomático y un sistema de reglas de inferencia**.

¿Qué es lo que hemos demostrado en esta derivación efectuada dentro de un sistema de reglas de inferencia? Hemos demostrado que si es verdad que $\neg(p\leftrightarrow q)$, y que $p\rightarrow r$ y que $q\rightarrow s$, entonces es verdad que $r\vee s$. Lo que hemos demostrado, por tanto, no es que $r\vee s$ sea verdadera, sino sólo que lo es si lo son las premisas de que hemos partido para llegar a ella. $r\vee s$ no es una expresión tautológica, verdadera por sí misma, en virtud de su sola forma. Lo que sí es una tautología es la expresión $[\neg(p\leftrightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s)]\rightarrow(r\vee s)$.

La diferencia entre un sistema de axiomas y un cálculo de deducción natural es una diferencia en el valor de verdad de las conclusiones a que en uno y otro podemos llegar. El de las conclusiones obtenidas en las demostraciones hechas dentro del primero es siempre el valor verdad. El de las obtenidas en el segundo puede no serlo. En un sistema axiomático como el expuesto en 2, hubiéramos podido obtener una demostración de $[\neg(p\leftrightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s)]\rightarrow(r\vee s)$ que es una tautología y, por ende un teorema, pero nunca una demostración de $r\vee s$.

Hasta aquí, las diferencias. Señalemos ahora, como anunciábamos, las semejanzas. Porque también podríamos decirle a alguien a quien sólo le hubiera sido presentada la lógica de enunciados en la forma de un sistema de reglas de inferencia:

«Demuéstrenos que es válido un razonamiento que tenga esta forma $[\neg(p\leftrightarrow q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to s)]\to(r\vee s)$ ».

Y ese alguien podría decirnos —y haría bien en hacerlo—:

«Demostrar que la expresión que usted propone es formalmente verdadera es tanto como mostrar que de esas premisas —es decir, de la conjunción de enunciados que constituyen el antecedente del condicional con que usted me desafía— se sigue esa conclusión, esa disyunción no excluyente de enunciados. Lo que usted me pide, por tanto, es que demuestre el enunciado conclusión, $r\vee s$ a partir de esos otros tres. Si muestro que a partir de ellos y aplicando correctamente las reglas de inferencia se sigue esa conclusión habré mostrado que el condicional correspondiente es lógicamente verdadero. Con lo cual habré satisfecho a usted en su demanda».

Volvamos entonces, para que las semejanzas —aun a riesgo de ser tediosos— queden patentes, a la demostración de antes. Puesto que se trataba de una demostración bajo premisas —es decir, una demostración en la que lo enunciado en cada paso sólo es verdadero si son verdaderas las premisas que nos han permitido darlo— indicaremos, en el margen de la izquierda de cada línea y entre paréntesis, el número de la premisa o premisas de cuya verdad depende la del enunciado que figura en esa línea:

(1)	1.	$p\to r$	premisa
(2)	2.	$q\to s$	premisa
(3)	3.	$\neg(p\leftrightarrow q)$	premisa
(3)	4.	p	suposición
(1,3)	5.	r	MP, 1, 4
(3)	6.	q	suposición
(2,3)	7.	s	MP, 2, 6
(1,2,3)	8.	$r\vee s$	

Ahora bien: decir que cuando una expresión es deducible de otra el condicional formado por ésta como antecedente y la primera como consecuente es lógicamente verdadero equivale a decir que al poner como antecedente de una expresión una de las premisas que han servido para deducirla hemos eliminado esa premisa, la hemos convertido en parte de la conclusión. De modo que podríamos dar un paso más y decir:

(1,2) 9. $\neg(p\leftrightarrow q)\to(r\vee s)$

Y seguir diciendo:

(1) 10. $(q\to s)\to[\neg(p\leftrightarrow q)\to(r\vee s)]$

(0) 11. $\{(p\to r)\to(q\to s)\to[\neg(p\leftrightarrow q)\to(r\vee s)]\}$

La expresión que lleva el número 8 sólo es verdadera si lo son las premisas 1, 2 y 3. La número 9 sólo es si los son las premisas 1 y 2. La 10 sólo es contando con que lo sea la premisa 1. Y la 11 lo es de por sí, bajo cero premisas.

Cuando lo que se nos pide es que **demostremos** —en un cálculo de deducción natural, por supuesto— **la expresión**, por ejemplo, $[p\to(q\to r)]\to[(p\wedge q)\to r]$, lo que hemos de hacer es tomar como premisas 1. $p\to(q\to r)$ y 2. $p\wedge q$, demostrar, a continuación, que r se deriva de ellas aplicando correctamente las reglas establecidas, y, finalmente, ir introduciendo como antecedentes de la conclusión obtenida las premisas de que nos hemos servido para obtenerla.

Y hemos dicho que, en cambio, cuando lo que se exige de nosotros es que **demostremos que la expresión** $(p\wedge q)\to r$ **se sigue de la premisa** $p\to(q\to r)$ lo que se espera es que derivemos esa conclusión de esa sola premisa, de tal modo que la línea —final— de la demostración en que hayamos llegado a $(p\wedge q)\rightarrow r$ no dependa más que de la línea en que esa única premisa aparece formulada. Así:

(1)	1.	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	premisa
(2)	2.	$p\wedge q$	premisa auxiliar
(2)	3.	p	Df $\wedge$
(2)	4.	q	Df $\wedge$
(1,2)	5.	$q\rightarrow r$	MP, 1, 3
(1,2)	6.	r	MP, 4, 5
(1)	7.	$(p\wedge q)\rightarrow r$	

La línea 7 de esta demostración, en la que aparece la expresión buscada, no depende más que de la línea 1, es decir, de la premisa que se nos ha dado como único punto de partida.

Pero en nuestra derivación hemos utilizado una premisa más, $(p\wedge q)$, que figura como línea 2. Y hemos eliminado esa premisa más tarde. La deducción, en ese sentido, es correcta. **Podemos introducir cuantas premisas queramos siempre que luego las eliminemos**. A esas premisas que introducimos en el curso de la deducción para luego eliminarlas se les llama «**supuestos**», a diferencia de las «premisas básicas», las que se nos dan al principio y permanecen al final como tales. A éstas últimas pueden añadirse —guiándonos por nuestro sentido táctico al servicio del éxito en la empresa deductiva— otras premisas subsidiarias. Son éstas enunciados que tomamos momentáneamente como dados para derivar de ellos otros enunciados y eliminarlos luego construyendo el condicional correspondiente. He aquí otro ejemplo:

Derívese $p\rightarrow r$ a partir de $(p\rightarrow q)$ y $(q\rightarrow r)$

(1)	1.	$(p\rightarrow q)$	Premisa básica (P)
(2)	2.	$(q\rightarrow r)$	Premisa básica (P)
(3)	3.	$\neg(p\rightarrow r)$	Premisa auxiliar /Suposición (S)
(3)	4.	$p\wedge\neg r$	Df. $\rightarrow$, 3
(3)	5.	p	Df. $\wedge$, 4
(1,3)	6.	q	MP, 1, 5
(3)	7.	$\neg r$	Df. $\wedge$, 4
(2,3)	8.	$\neg q$	MT, 2, 7
(1,2,3)	9.	$q\wedge\neg q$	
(1,2)	10.	$\neg(p\rightarrow q)\rightarrow(q\wedge\neg q)$	
(1,2)	11.	$p\rightarrow r$	RA, 10

Los dos primeros pasos no requieren mayor justificación: son las dos premisas que se nos han dado. El tercer paso ha consistido en tomar momentáneamente como supuesto provisional, la negación de la conclusión que buscamos. Y partiendo de esta premisa subsidiaria hemos llegado a una contradicción: $(q\wedge\neg q)$ en la línea 9. Luego si la suposición de que el enunciado $\neg(p\rightarrow r)$ es verdadero (y que por tanto es verdadera su conjunción con el resto de premisas) nos conduce a una contradicción, hemos de concluir que ese enunciado es falso, y, por ende, que es verdadera su negación: y su negación es $(p\rightarrow r)$ el enunciado cuya derivación buscábamos. Hemos adoptado una premisa auxiliar y, después de un cierto proceso deductivo, la hemos eliminado.

Ese proceso —que en esta derivación va de la línea 3 a la línea 11— es una especie de derivación dentro de la derivación, una especie de digresión que consiste en desviarse por un momento del curso principal de la deducción —siguiendo el curso secundario a que nos conduce esa premisa auxiliar— para luego —eliminando esa premisa— volver al camino real.

Son diversos los recursos tipográficos para señalar la presencia de estas derivaciones auxiliares incrustadas en la derivación principal. J. M. Anderson y H. W. Johnstone lo representarían así (ver tabla a la derecha), donde la raya parte hacia abajo desde la línea en que aparece la premisa auxiliar, flanquea por la izquierda las líneas cuya sucesión compone la deducción secundaria (**subderivación**) y se desvía en perpendicular hacia la derecha para separar de los pasos obtenidos en esa subderivación el curso principal de la derivación que continúa. Esta es la técnica que utilizaremos nosotros a imitación de ellos.

Una vez cerrada la subderivación, ya no se puede utilizar ninguna de las líneas que comprende (4-10) para alcanzar la construcción de la conclusión

1.	$(p \to q)$
2.	$(q \to r)$
3.	$\neg(p \to r)$
4.	$p \wedge \neg r$
5.	p
6.	q
7.	$\neg r$
8.	$\neg q$
9.	$q \wedge \neg q$
10.	$\neg(p \to q) \to (q \wedge \neg q)$
11.	$p \to r$

Aparecerán, por tanto, tres tipos de expresiones:

1. Las **premisas básicas**,: «**premisas**», a secas, referidas como «**P**».
2. Las **premisas auxiliares** o **suposiciones** (**S**).
3. Las expresiones que se siguen de cualesquiera expresiones de los tipos 1 y 2 en virtud de reglas de inferencia. En su **margen derecha se especificará cuál es la regla de inferencia** (o la definición contextual que establecen equivalencias) a que se ha recurrido indicando cuáles son las expresiones que han servido de premisas para dar ese paso.

Método para la convalidación de argumentos: el cálculo de la deducción natural

Se ha discutido si la silogística aristotélica es un sistema de leyes o más bien un sistema de deducción natural. Por respecto a los megárico-estoicos no hay, en cambio, duda alguna: en ellos —y, señaladamente, en Crisipo de Soles, el más importante de los lógicos de esa escuela— la lógica (de enunciados) aparece presentada en la forma de sistema de reglas de inferencia. Así pues, ya incluso en los orígenes de nuestra ciencia se daba esa alternancia entre ambas formas de presentación. Reglas de inferencia eran también las *consequentiae* de los medievales. Por lo que se refiere a la lógica contemporánea, puede decirse que desde Frege hasta 1934, y sin duda como consecuencia del influjo de la matemática, se impuso la presentación axiomática de la lógica: vale decir, la presentación de la lógica como sistema de leyes o tesis. Es en 1934 cuando Gentzen y Jaskowski presentan, por separado, lo que Gentzen llama «un sistema de inferencia natural».

El sistema de Gentzen se basaba, para la lógica de enunciados, en ocho reglas. Recordemos, en efecto, que con la negación, la conjunción, la disyunción y el condicional bastaba —y, en rigor, sobraba— para definir las restantes funciones de enunciados, así monádicas como diádicas. Pues bien: **por cada una de esas cuatro conectivas fundamentales** Gentzen nos ofrece **dos reglas**. La primera de ellas será una regla de **introducción** de la conectiva de que se trate. La segunda, una regla de **eliminación** de ésta. ¿Por qué estos nombres? Porque la regla de introducción de la disyunción, por ejemplo, nos permite pasar de unas premisas en que esa conectiva no aparece a una conclusión construida con esa conectiva. Por otra parte, si hay una regla mediante cuya aplicación podemos derivar una expresión disyuntiva a partir de unas premisas en las que no figura el functor disyunción (al menos a título de conectiva fundamental) diremos que esa regla es una regla de introducción de la disyunción.

Reglas básicas

Regla de Inserción de la negación

(RI $\neg$)

$$\begin{array}{|l|} \hline \quad X \\ \quad Y\wedge\neg Y \\ \hline \quad \neg X \\ \hline \end{array}$$

El modo de construir una fórmula cualquiera cuyo signo lógico principal es la negación es mostrando que, si la fórmula no estuviese negada, se caería en una contradicción. Es decir, cuando de una hipótesis (representada en este caso por X) se siguen consecuencias contradictorias (como las representadas por la expresión $(Y\wedge\neg Y)$, entonces podemos inferir que esa hipótesis es falsa. Se la podría llamar «**Regla de reducción al absurdo**».

Regla de eliminación de la negación

(RE $\neg$)

$$\begin{array}{|l|} \hline \neg\neg X \\ \hline X \\ \hline \end{array}$$

Puesto que la lógica clásica es bivalente, la negación de una negación arroja una afirmación.

Si disponemos de una fórmula del tipo $\neg\neg X$, podemos afirmar X. Esta regla, también llamada de la **doble negación**, autoriza el paso de cualquier expresión doblemente negada a su afirmación. Es lo que ordinariamente se quiere decir al señalar que dos negaciones afirman.

Regla de Inserción de la disyunción

(RI $\vee$)

$$\begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline X\vee Y \\ \hline \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline X\vee Y \\ \hline \end{array}$$

Para construir una fórmula de tipo $X\vee Y$ basta tener construida la fórmula X o la fórmula Y, puesto que una disyunción —no excluyente, como ésta— es verdadera con sólo que lo sea uno de sus miembros.

Regla de Eliminación de la disyunción

(RE $\vee$)

$$\begin{array}{|l|} \hline \quad X\vee Y \\ \quad X \\ \quad Z \\ Z \qquad Y \\ \qquad\quad Z \\ \qquad\quad Z \\ \hline \end{array}$$

Si disponemos de una fórmula de tipo $X\vee Y$, podremos afirma otra fórmula cualquiera Z, si demostramos que puede construirse Z a partir de X y también a partir de Y.

Presentadas dos alternativas, si afirmamos que de la primera se sigue lo expresado por un determinado enunciado, y otro cierto enunciado se sigue de lo expresado por la segunda, podemos inferir la disyunción de esos dos enunciados que se siguen respectivamente de los miembros de la alternativa.

Regla de Inserción de la conjunción

(RI $\wedge$)

$$\begin{array}{|c|} \hline X \\ Y \\ \hline X\wedge Y \\ \hline \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{|c|} \hline Y \\ X \\ \hline X\wedge Y \\ \hline \end{array}$$

Para construir una fórmula de tipo $X\wedge Y$, necesitamos tener construidas tanto X como Y. Puesto que estamos dándolos por verdaderos, su conjunción lo será también.

Del mismo modo que la implicación de una conclusión por un conjunto de premisas puede representarse, descendiendo desde el metalenguaje al lenguaje, mediante un condicional —que será, entonces, formalmente verdadero—, así también, de modo parecido, la enumeración sucesiva de premisas puede traducirse en una conjunción de éstas.

Regla de Eliminación de la conjunción

(RE $\wedge$)

$X \wedge Y$		$X \wedge Y$
------------	o bien	------------
X		Y

Si tenemos $X \wedge Y$, podemos afirmar tanto X como Y .

La aplicación sucesiva e ininterrumpida de esta regla de eliminación de la conjunción y de la introducción de esta misma conectiva permitiría, a los partidarios del pensamiento obsesivo, emprender una deducción infinita, en la que las conclusiones se fueran sucediendo sin aportar ninguna de ellas grandes novedades.

Regla de Eliminación del condicional

RE $\rightarrow$

$X \rightarrow Y$
X

Y

Si disponemos de $X \rightarrow Y$ y de X , podemos afirmar Y (**Modus Ponens**).

Esta otra regla, en cambio, apenas necesita presentación. La hemos conocido como Regla de Separación en el sistema axiomático de MP. La hemos aplicado justificándola intuitivamente. Sabemos que es una versión metalingüística de la ley llamada modus ponendo ponens. Y, por lo demás, con ella no hacemos sino explicitar las propiedades del condicional.

Regla de Inserción del condicional

(RI $\rightarrow$)

X
Y

$X \rightarrow Y$

Para construir una fórmula de tipo $X \rightarrow Y$, hemos de demostrar que, si tuviéramos construida X , podríamos construir Y . Lo que viene a decirnos es que, si de un enunciado se sigue otro, entonces podemos unirlos mediante un condicional. La cosa, sin embargo, tiene mucha más enjundia. Por una parte, en efecto, esta regla desempeña un papel central en la deducción: cada vez que se nos pida que derivemos como conclusión una expresión que tiene la forma de un condicional, nuestra estrategia consistirá en tomar como premisa auxiliar el antecedente de dicho condicional; si al hacerlo así conseguimos (con la ayuda de las premisas básicas, iniciales) derivar el consecuente, podremos unir ambos mediante el condicional y obtener así la expresión buscada.

1.	$(p \rightarrow q)$	P
2.	$(q \rightarrow r)$	P
3.	p	
4.	q	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	r	RE $\rightarrow$ 2,4
6.	$p \rightarrow r$	RI $\rightarrow$ 3,5

Pongamos el que probablemente es el ejemplo más sencillo. Supóngase que se nos pide que derivemos $p \rightarrow r$ a partir de las premisas $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$. Una vez sentadas estas premisas, disponiendo de la regla que estamos comentando podemos tomar como premisa auxiliar el antecedente de la expresión buscada, por ver si asumiendo esa premisa —en unión de las premisas iniciales— podemos llegar a r . Si así fuera, estaríamos autorizados a introducir el condicional entre p y r y habríamos resuelto el problema.

Por lo demás, la RI $\rightarrow$ desempeña un papel decisivo en la lógica. En efecto: en lógica se habla, desde Herbrand, del llamado «**Teorema de Deducción**», el cual nos dice que si en el cálculo existe una demostración del enunciado Y a partir del enunciado X (posiblemente junto con otros enunciados), entonces existe también en él una demostración de la fórmula $X \rightarrow Y$ En menos palabras: si hemos demostrado que de X se sigue Y , podemos dar por demostrado que $X \rightarrow Y$. Utilizando el ejemplo anterior: si hemos demostrado que r se sigue de p junto con las premisas $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow r)$ hemos demostrado que de estas dos premisas se sigue la expresión $p \rightarrow r$,

Es obvia la importancia de esta regla para establecer la conexión entre los sistemas axiomáticos y los sistemas de reglas de inferencia. La existencia de esta regla hace posible afirmar la equivalencia entre un sistema de leyes y el correspondiente sistema de reglas. Así, en el sistema de leyes que nosotros hemos presentado —el sistema axiomático de *Principia Mathematica* para la lógica de enunciados— podíamos derivar como teorema la expresión $[(p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. En nuestro sistema de reglas de inferencia podemos derivar $p \rightarrow r$ a partir de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ y luego, merced a esta Regla de Introducción del Condicional, podemos ir descargando premisas hasta obtener como línea última de la derivación la expresión entera.

Consideraciones sobre los supuestos

Las tres únicas reglas que nos permiten cerrar supuestos (y que solamente se pueden aplicar para cerrar supuestos) son **RI** $\neg$, **RI** $\rightarrow$ y **RE** $\vee$. Si nos fijamos bien en las reglas básicas, veremos que hay líneas de supuestos (apertura y cierre) en esas tres reglas.

Antes de abrir un supuesto en una cadena deductiva, debemos tener muy claro qué tipo de fórmula queremos construir, si estamos buscando una fórmula negada (RI $\neg$) o una fórmula condicional (RI $\rightarrow$) o lo que buscamos sacar algún rendimiento a una fórmula disyuntiva (RE $\vee$) y obtener una fórmula determinada en la cadena. No podemos andar abriendo supuestos al tún-tún. Cuando abrimos un supuesto, sabemos cómo lo vamos a cerrar. Esto es muy importante.

- **RI** $\neg$: Si a partir de un supuesto (X) llegamos a una contradicción ($Y \vee \neg Y$), podemos cerrar ese supuesto (X) con la contradicción y afirmar la negación del supuesto ($\neg X$).
- **RI** $\rightarrow$: Si a partir de un supuesto (X), es decir, en la cadena deductiva, encontramos una fórmula cualquiera (Y) que nos interesa como consecuencia de ese supuesto, podemos cancelar el supuesto y escribir el condicional entre la fórmula supuesta y la que usamos para cerrar el supuesto ($X \rightarrow Y$). Que la fórmula Y se siga del hecho de haber supuesto X o no, no importa.
- **RE** $\vee$: Esta regla es la que más cuesta aprender a aplicar. Si tenemos afirmada como verdadera una fórmula disyuntiva ($X \vee Y$), no sabemos cuál de los componentes es el verdadero o si lo son los dos. Pongamos que os digo que tengo un perro o un gato en mi casa. No sabéis si tengo un perro. No sabéis si tengo un gato. No sabéis si tengo un perro y un gato. Solamente sabéis que tengo un perro o un gato. ¿Cómo podríamos aprovechar esta información? La RE $\vee$ nos dice que si de suponer la verdad de X , se sigue otra fórmula Z y de suponer la verdad de Y , se sigue esa misma fórmula Z , podemos cancelar los dos supuestos y reafirmar Z . En el ejemplo, de suponer que tengo un perro, se sigue que tengo un animal doméstico y de suponer que tengo un gato, también se sigue que tengo un animal doméstico. Podemos prescindir de los dos supuestos y afirmar que tengo en mi casa un animal doméstico, aunque seguimos sin saber exactamente cuál.

Reglas derivadas

Regla de transitividad del condicional (RTr $\rightarrow$)

(RTr $\rightarrow$)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow Z \end{array}$$

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$Y \rightarrow Z$	P
3.	X	S
4.	Y	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	Z	RE $\rightarrow$ 2,4
6.	$X \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$ 3,5

Regla del modus tollens (MT)

(MT)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	X	S
4.	Y	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	$Y \wedge \neg Y$	RI $\wedge$ 2,4
6.	$\neg X$	RI $\neg$ 3-5

Regla de importación (Rimp)

(RImp)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \\ \hline (X \wedge Y) \rightarrow Z \end{array}$$

1.	$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$	P
2.	$X \wedge Y$	S
3.	X	RE $\wedge$ 2
4.	$Y \rightarrow Z$	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	Y	RE $\wedge$ 2
6.	Z	RE $\rightarrow$ 4,5
7.	$(X \wedge Y) \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$ 2-6

Regla de exportación (RExp)

(RExp)

$$\begin{array}{c} (X \wedge Y) \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \end{array}$$

1.	$(X \wedge Y) \rightarrow Z$	P
2.	X	S
3.	Y	S
4.	$X \wedge Y$	RI $\wedge$ 2,3
5.	Z	RE $\rightarrow$ 1,4
6.	$Y \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$ 3,5
7.	$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$	RI $\rightarrow$ 2,6

Regla de contraposición del condicional (RContr $\rightarrow$)

(RContr $\rightarrow$)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \hline \neg Y \rightarrow \neg X \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{c} \neg Y \rightarrow \neg X \\ \hline X \rightarrow Y \end{array}$$

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	S
3.	$\neg X$	MT 1,2
4.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	RI $\neg$ 2,3

Regla de reflexividad (Rfl)

(Rfl)

$$\frac{X}{X}$$

1.	X	P
2.	$\neg X$	S
3.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 1,2
4.	X	RI $\neg$ 2,3

Regla de conmutatividad de conjunción (RConm $\wedge$)

(RConm $\wedge$)

$$\frac{X \wedge Y}{Y \wedge X}$$

1.	$X \wedge Y$	P
2.	Y	RE $\wedge$ 1
3.	X	RE $\wedge$ 1
4.	$Y \wedge X$	RI $\wedge$ 2,3

Carga de premisas (Cpr)

(CPr)

$$\frac{X}{Y \to X}$$

1.	X	P
2.	Y	S
3.	$\neg X$	S
4.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 1,3
5.	$\neg\neg X$	RI $\neg$ 3,4
6.	X	RE $\neg$ 5
7.	$Y \to X$	RI $\to$ 2,6

Ex Contradictione Quodlibet 2 (ECQ2)

(ECQ2)

$$\frac{X}{\neg X \to Y} \quad \text{ó} \quad \frac{\neg X}{X \to Y}$$

De una fórmula cualquiera se sigue un condicional con la fórmula negada en el antecedente

1.	X	P
2.	$\neg X$	S
3.	$\neg Y$	S
4.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 1,2
5.	$\neg\neg Y$	RI $\neg$ 3,4
6.	Y	RE $\neg$ 5
7.	$\neg X \to Y$	RI $\to$ 2,6

Ex Contradictione Quodlibet (ECQ)

(ECQ)

$$\frac{X \quad \neg X}{Y} \quad \text{ó} \quad \frac{X \wedge \neg X}{Y}$$

De una contradicción se sigue cualquier cosa

1.	X	P
2.	$\neg X$	P
3.	$\neg Y$	S
4.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 1,2
5.	$\neg\neg Y$	RI $\neg$ 3,4
6.	Y	RE $\neg$ 5

Principio de no contradicción (PNC)

(PNC)

$\neg(X \wedge \neg X)$

1.	$X \wedge \neg X$	S
2.	X	RE $\wedge$ 1
3.	$\neg X$	RE $\wedge$ 1
4.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 2,3
5.	$\neg(X \wedge \neg X)$	RI $\neg$ 1,4

Principio del Tercero Excluido (PTE)

(PTE)

$X \vee \neg X$

1.	$\neg(X \vee \neg X)$	S
2.	X	S
3.	$X \vee \neg X$	RI $\vee$ 2
4.	$\neg(X \vee \neg X) \wedge (X \wedge \neg X)$	RI $\wedge$ 1,3
5.	$\neg X$	RI $\neg$ 2,4
6.	$X \vee \neg X$	RI $\vee$ 5
7.	$(X \vee \neg X) \wedge \neg(X \vee \neg X)$	RI $\wedge$ 1,6
8.	$\neg\neg(X \vee \neg X)$	RI $\neg$ 1, 7
9.	$(X \vee \neg X)$	RE $\neg$ 8

Inferencia alternativa (IA)

(IA)

$X \vee Y$		$X \vee \neg Y$
$\neg Y$		Y
---------------	ó	---------------
X		X

Ejemplo de aplicación de la regla básica de eliminación de la disyunción, donde han de realizarse dos subderivaciones a partir de dos supuestos auxiliares.

1.	$X \vee Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	X	S
4.	$\neg Y \wedge X$	RI $\wedge$ 2,3
5.	X	RE $\wedge$ 4
6.	Y	S
7.	$\neg X$	S
8.	$Y \wedge \neg Y$	RI $\wedge$ 2,6
9.	$\neg\neg X$	RI $\neg$ 7,8
10.	X	RE $\neg$ 9
11.	X	RE $\vee$ 3,5 y 6,10

Monotonía (Mon)

(Mon)

$X \to Y$

$(X \wedge Z) \to Y$

Si una fórmula cualquiera Y se sigue de otra fórmula cualquiera X, también se sigue de esa misma fórmula X en conjunción con cualquier otra fórmula Z

1.	$X \to Y$	P
2.	$X \wedge Z$	S
3.	X	RE $\wedge$ 2
4.	Y	RE $\to$ 1,3
5.	$(X \wedge Z) \to Y$	RI $\to$ 2,4

Interdefinición de las constantes lógicas y otras equivalencias

$IC\to,\wedge \quad \dfrac{X\to Y}{\neg(X\wedge\neg Y)}$	$IC\wedge,\to \quad \dfrac{X\wedge Y}{\neg(X\to\neg Y)}$	$IC\vee,\to \quad \dfrac{X\vee Y}{\neg X\to Y}$
$IC\to,\vee \quad \dfrac{X\to Y}{\neg X\vee Y}$	$IC\wedge,\vee \quad \dfrac{X\wedge Y}{\neg(\neg X\vee\neg Y)}$	$IC\vee,\wedge \quad \dfrac{X\vee Y}{\neg(\neg X\wedge\neg Y)}$
$IC\leftrightarrow \quad \dfrac{X\leftrightarrow Y}{(X\to Y)\wedge(Y\to X)}$		

Recomendaciones para el manejo de equivalencias

Conviene tener presente la siguientes equivalencias y la chuleta de reglas del examen

- $(X\to Y)\equiv(\neg X\vee Y)$: Del condicional a la disyunción
- $(X\to Y)\equiv(\neg(X\wedge\neg Y))$: Del condicional a la negación de la conjunción
- Leyes de De Morgan (se deducen de las interdefiniciones $I\vee\wedge$ e $I\wedge\vee$:
  - $(X\vee Y)\equiv(\neg(\neg X\wedge\neg Y))$
  - $(X\wedge Y)\equiv(\neg(\neg X\vee\neg Y))$
  - $(\neg(X\wedge Y))\equiv(\neg X\vee\neg Y)$
  - $(\neg(X\vee Y))\equiv(\neg X\wedge\neg Y)$

Reglas Básicas

RI¬ $\begin{array}{l}\sqsubset X\\ \quad Y\wedge\neg Y\\ \hline \neg X\end{array}$	**RI→** $\begin{array}{l}\sqsubset X\\ \quad Y\\ \hline X\to Y\end{array}$	**RI∧** $\dfrac{\begin{array}{c}X\\ Y\end{array}}{X\wedge Y} \quad \dfrac{\begin{array}{c}X\\ Y\end{array}}{Y\wedge X}$	**RE∨** $\begin{array}{l}X\vee Y\\ \sqsubset X\\ \quad Z\\ \sqsubset Y\\ \quad Z\\ \hline Z\end{array}$
RE¬ $\dfrac{\neg\neg X}{X}$	**RE→** $\dfrac{\begin{array}{c}X\to Y\\ X\end{array}}{Y}$	**RE∧** $\dfrac{X\wedge Y}{X} \quad \dfrac{X\wedge Y}{Y}$	
		RI∨ $\dfrac{X}{X\vee Y} \quad \dfrac{X}{Y\vee X}$	

Reglas Derivadas

ECQ $\dfrac{\begin{array}{c}X\\ \neg X\end{array}}{Y}$	**MT** $\dfrac{\begin{array}{c}X\to Y\\ \neg Y\end{array}}{\neg X}$	**Interdef. →, ∧** $\dfrac{X\to Y}{\neg(X\wedge\neg Y)}$	**Interdef. ∧, →** $\dfrac{X\wedge Y}{\neg(X\to\neg Y)}$	**Interdef. ∨,→** $\dfrac{X\vee Y}{\neg X\to Y}$
IA $\dfrac{\begin{array}{c}X\vee Y\\ \neg Y\end{array}}{X}$	**EN₂** $\begin{array}{l}\sqsubset \neg X\\ \quad Y\wedge\neg Y\\ \hline X\end{array}$	**Interdef. →, ∨** $\dfrac{X\to Y}{\neg X\vee Y}$	**Interdef. ∧, ∨** $\dfrac{X\wedge Y}{\neg(\neg X\vee\neg Y)}$	**Interdef. ∨, ∧** $\dfrac{X\vee Y}{\neg(\neg X\wedge\neg Y)}$

Estrategias deductivas: deducciones básicas

A la hora de encontrar un camino deductivo desde las premisas a la conclusión, de manera general deberíamos considerar los siguientes pasos:

1. Examinar la conclusión y localizar su signo lógico principal.
2. Localizar en las premisas la conclusión o alguna de sus fórmulas de la conclusión.
3. Considerar provisionalmente las reglas que permitan extraer dichas fórmulas y la posible necesidad de tener que establecer supuestos auxiliares o no.
4. Estableceremos los supuestos auxiliares que sean necesarios.

Estrategia de reducción al absurdo

La reducción al absurdo se utiliza para obtener cualquier tipo de conclusión: atómica, negación de atómica, $\neg X$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$ o $X \rightarrow Y$. Consiste en suponer la falsedad de la conclusión y analizar este supuesto junto a las premisa hasta obtener la construcción de la contradicción contenida en ese conjunto de fórmulas, lo que nos autoriza a eliminar el supuesto de que la conclusión es falsa y afirmarla como verdadera (RI $\neg$). Si la conclusión de una fórmula negada la suponemos sin negación, en el resto de los casos suponemos la negación de la conclusión y, tras aplicar RI $\neg$, eliminamos la doble negación que nos queda (RE $\neg$).

Estrategia para fórmulas atómicas y negación de fórmula atómicas

Cuando la conclusión es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica sólo podemos extraerla directamente por reducción al absurdo. Se pueden presentar dos situaciones:

- que la conclusión esté contenida en alguna premisa: hay que observar el lugar que ocupa en las premisas y pensar qué necesitamos tener para poder extraerla aplicando reglas.
- que no lo esté: el conjunto de premisas es contradictorio y puede derivarse de él cualquier fórmula, pero hay que analizar las premisas para hallar la contradicción.

EJERCICIO 1: $[r \vee (p \wedge q), p \wedge \neg r] \models q$

Tenemos q en una parte de una disyunción, buscaremos eliminarla (suponer ambos lado de $\vee$)

1.	$r \vee (p \wedge q)$	P	
2.	$p \wedge \neg r$	P	
3.	r	S	Primer caso para sacar la disyunción en 1
4.	$\neg q$	S	Obtener q por reducción al absurdo (subderivar desde r)
5.	$\neg r$	RE $\wedge$ 2	
6.	$r \wedge \neg r$	RI $\wedge$ 3,5	
7.	$\neg\neg q$	RI $\neg$ 4,6	
8.	q	RE $\neg$ 7	Conseguimos llegar a q desde r
9.	$p \wedge q$	S	Segundo cao para sacar la disyunción en 1
10.	q	RE $\wedge$ 9	Conseguimos llegar a q desde $p \wedge q$
11.	q	RE $\vee$ 3-8, 9-10 (hemos demostrado llegar a q por ambas vías de $\vee$	

EJERCICIO 2: $[(p\vee r)\rightarrow\neg(s\wedge t), p, \neg s\rightarrow\neg p, p\rightarrow t]\models q$

Nótese que q no figura en ninguna premisa, buscaremos una contradicción entre las propias premisas para después, desde $\neg q$ llegar a otra contradicción que nos permita afirmar q .

1.	$(p\vee r)\rightarrow\neg(s\wedge t)$	P	
2.	p	P	
3.	$\neg s\rightarrow\neg p$	P	
4.	$p\rightarrow t$	P	
5.	$p\vee r$	RI $\vee$ 2	Puedo suponer cualquier disyunción respecto a p
6.	$\neg(s\wedge t)$	RE $\rightarrow$ 1,5	Si tengo el antecedente, tengo el consecuente
7.	$\neg s$	S	Tenemos p (P), busco llegar a contradicción con $\neg p$
8.	$\neg p$	RE $\rightarrow$ 3,7	
9.	$p\wedge\neg p$	RI $\wedge$ 2,8	Llegamos a contradicción desde nuestro supuesto
10.	$\neg\neg s$	RI $\neg$ 7,9	Supuesto contradictorio, lo negamos
11.	s	RE $\neg$ 10	
12.	t	RE $\rightarrow$ 2,4	
13.	$s\wedge t$	RI $\wedge$ 11,12	Si vemos, 6 y 13 son contradictorios sin que haya (S)
14.	$\neg q$	S	Supongo cualquier cosa, "contradicción espontánea"
15.	$(s\wedge t)\wedge\neg(s\wedge t)$	RI $\wedge$ 6,13	
16.	$\neg\neg q$	RI $\neg$ 14,15	
17.	q	RE $\neg$ 16	QED

EJERCICIO 3: $[((p\rightarrow q)\wedge r)\vee\neg t, t]\models r$

La conclusión figura en la primera premisa. El hecho de que haya una disyunción nos invita a partir tanto desde $(p\rightarrow q)\wedge r$ como de $\neg t$.

1.	$((p\rightarrow q)\wedge r)\vee\neg t$	P	Intentaremos deshacer la disyunción
2.	t	P	
3.	$(p\rightarrow q)\wedge r$	S	Supongo una de las partes de la disyunción (a)
4.	r	RE $\wedge$ 3	(a) » obtengo r
5.	$\neg t$	S	Supongo la otra parte de la disyunción (b)
6.	$\neg r$	S	
7.	$t\wedge\neg t$	RI $\wedge$ 2,5	
8.	$\neg\neg r$	RI $\neg$ 6,7	
9.	r	RE $\neg$ 8	(b) » obtengo r
10.	r	RE $\vee$ 1,3-4,5-9	La eliminación de la disyunción de 1 nos lleva a r

Estrategia RI $\neg$

Cuando la conclusión tiene la forma $\neg X$, si no puede obtenerse de modo directo, debemos reducirla al absurdo (al suponer X). Sabemos que si una fórmula X es consecuencia lógica de un conjunto de fórmula $Y_1,..,Y_n$ (que eventualmente puede ser vacío), la conjunción de esas fórmulas con $\neg X$ da lugar a una contradicción.

EJERCICIO 4: $[p\to q, q\to r, q\to s, s\to(p\wedge\neg r)]\models\neg(s\vee p)$

Suponemos $(s\vee p)$ con el objetivo de encontrar una contradicción y así afirmar $\neg(s\vee p)$ (RI $\neg$). Si tanto a partir de s como a partir de p logramos construir una contradicción, podremos negar el supuesto $s\vee p$.

1.	$p\to q$	P	
2.	$q\to r$	P	
3.	$q\to s$	P	
4.	$s\to(p\wedge\neg r)$	P	
5.	$s\vee p$	S	Objetivo: contradicción para negar 5
6.	s	S	Primer caso de 5
7.	$p\wedge\neg r$	RE $\to$ 4,5	
8.	p	RE $\wedge$ 7	
9.	q	RE $\to$ 1,8	
10.	r	RE $\to$ 2,9	
11.	$\neg r$	RE $\wedge$ 7	
12.	$r\wedge\neg r$	RI $\wedge$ 10,11	
13.	p	S	Segundo caso de 5
14.	q	RE $\to$ 1,13	
15.	r	RE $\to$ 2,14	
16.	s	RE $\to$ 2,14	
17.	$p\wedge\neg r$	RE $\to$ 4,16	
18.	$\neg r$	RE $\wedge$ 17	
19.	$r\wedge\neg r$	RI $\wedge$ 10,11	
20.	$r\wedge\neg r$	RE $\vee$ 5,6-12,13-19	La disyunción nos trae aquí por ambos caminos
21.	$\neg(s\vee p)$	RI $\neg$ 5,20	

Estrategia RI $\wedge$

Si conclusión de tipo $X \wedge Y$, buscamos X e Y por separado para poder combinarlas con RI $\wedge$

EJERCICIO: $[p \to (q \wedge r), (q \wedge r) \to (s \vee t), (s \vee t) \to w, p] \models p \wedge w$

1.	$p \to (q \wedge r)$	P
2.	$(q \wedge r) \to (s \vee t)$	P
3.	$(s \vee t) \to w$	P
4.	p	P
5.	$q \wedge r$	RE $\to$ 1,4
6.	$s \vee t$	RE $\to$ 2,5
7.	w	RE $\to$ 3,6
8.	$p \wedge w$	RI $\wedge$ 4,7

EJERCICIO 5: $[\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg q \wedge r] \models (p \wedge r) \wedge (\neg q \wedge (q \to r))$

Hemos de construir $(p \wedge r)$ y $(\neg q \wedge (q \to r))$. Ambas fórmulas vuelven a tener como signo principal la conjunción, por lo que hemos de construir respectivamente p, r, $\neg q$ y $q \to r$.

1.	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	P	
2.	$\neg q \wedge r$	P	
3.	$\neg p$	S	Buscamos lo contrario. Reducción al absurdo
4.	$\neg q$	RE $\wedge$ 2	
5.	$\neg p \wedge \neg q$	RI $\wedge$ 3,4	
6.	$\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$	RI $\wedge$ 1,5	Desde $\neg p$ llego a absurdo de A y $\neg A$
7.	$\neg\neg p$	RI $\neg$ 3,6	
8.	p	RE $\neg$ 7	» lo buscábamos
9.	$\neg q$	RE $\wedge$ 2	» lo buscábamos
10.	r	RE $\wedge$ 2	» lo buscábamos
11.	q	S	Buscamos la implicación desde q hasta r
12.	$q \wedge r$	RI $\wedge$ 10,11	
13.	r	RE $\wedge$ 12	
14.	$q \to r$	RI $\to$ 11,13	» lo buscábamos
15.	$p \wedge r$	RI $\wedge$ 8,10	
16.	$\neg q \wedge (q \to r)$	RI $\wedge$ 9,14	
17.	$(p \wedge r) \wedge (\neg q \wedge (q \to r))$	RI $\wedge$ 15,16	Hago conjunción de ambas partes

Estrategia RI $\vee$

Si la conclusión es de tipo $X \vee Y$, tenemos un caso parecido al anterior, con la ventaja de que ahora nos basta construir una de las formas: X o Y, siendo la estrategia dependiendo de la forma lógica que tengan dichas X o Y.

EJERCICIO 6: $[\neg p \rightarrow (q \wedge \neg s), p \vee \neg q] \models p \vee \neg r$

1.	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg s)$	P	
2.	$p \vee \neg q$	P	Buscamos eliminar disyuntor para quedarnos p
3.	p	S	Primera parte del disyuntor en 2
4.	$p \wedge (p \vee \neg q)$	RI $\wedge$ 2,3	
5.	p	RE $\wedge$ 4	
6.	$\neg q$	S	Segunda parte del disyuntor en 2
7.	$\neg p$	S	Suponemos antecedente de la 1ª premisa($\rightarrow$)
8.	$q \wedge \neg s$	RE $\rightarrow$ 1,7	
9.	q	RE $\wedge$ 8	
10.	$q \wedge \neg q$	RI $\wedge$ 7,9	El suponer $\neg p$ me lleva a esta contradicción
11.	$\neg\neg p$	RI $\neg$ 6-10	
12.	p	RE $\neg$ 11	Desde el supuesto $\neg q$ llegamos a p
13.	p	RE $\vee$ 2,3-5,6-12	Ambas vías de $\vee$ nos llevan a p
14.	$p \vee \neg r$	RI $\vee$ 13	Como tengo p, tengo p o cualquier otra cosa

Estrategia RI $\rightarrow$

Para construir una conclusión de tipo $X \rightarrow Y$, suponemos X (el antecedente), y buscamos Y.

EJERCICIO 7: $[p \rightarrow q, p] \models (q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)$

1.	$p \rightarrow q$	P	
2.	p	P	
3.	$q \rightarrow s$	S	Supongo el antecedente del primer condicional
4.	p	S	Supongo el antecedente del segundo condicional
5.	q	RE $\rightarrow$ 1,4	
6.	s	RE $\rightarrow$ 3,5	
7.	$p \rightarrow s$	RI $\rightarrow$ 4,6	Construyo el segundo condicional desde S(4)
8.	$(q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)$	RI $\rightarrow$ 3,7	Construyo el condicional objetivo desde S(3)

EJERCICIO 8: $[p\rightarrow(q\wedge r),(s\wedge\neg t)\rightarrow u,(r\wedge u)\rightarrow p]\models((r\wedge s)\wedge\neg t)\rightarrow q$

1.	$p\rightarrow(q\wedge r)$	P	
2.	$(s\wedge\neg t)\rightarrow u$	P	
3.	$(r\wedge u)\rightarrow p$	P	
4.	$(r\wedge s)\wedge\neg t$	S	Supongo el antecedente del condicional (hemos de llegar hasta q para demostrar el ejercicio
5.	$r\wedge s$	RE $\wedge$ 4	
6.	$\neg t$	RE $\wedge$ 4	
7.	s	RE $\wedge$ 5	
8.	$s\wedge\neg t$	RI $\wedge$ 7,6	
9,	u	RE $\rightarrow$ 2,8	
10.	r	RE $\wedge$ 5	
11.	$r\wedge u$	RI $\wedge$ 10,9	
12.	p	RE $\rightarrow$ 3,11	
13.	$q\wedge r$	RE $\rightarrow$ 1,12	
14.	q	RE $\wedge$ 13	
15.	$((r\wedge s)\wedge\neg t)\rightarrow q$	RI $\rightarrow$ 4,14	QED

EJERCICIO 9: $[t\rightarrow\neg r]\models p\rightarrow((r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s))$

Tenemos una serie de condicionales anidados de devienen en s. El planteamiento inicial ha de llevarnos a algo como lo siguiente, donde la última conclusión sea, en efecto, llegar a s desde el último supuesto y después ir deshilvanando las implicaciones acorde a nuestra conclusión objetivo:

1.	$t\rightarrow\neg r$	P	
2.	p	S	Objetivo: $(r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s)$
3.	$r\vee s$	S	Objetivo: $(\neg p\vee t)\rightarrow s$
4.	$\neg p\vee t$	S	Objetivo: s
	....		
	s		
	$(\neg p\vee t)\rightarrow s$	RI $\rightarrow$ 4,...	
	$(r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s)$	RI $\rightarrow$ 3,...	
	$p\rightarrow((r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s))$	RI $\rightarrow$ 2,...	

El problema principal, por tanto, consiste en obtener s . Al tener una disyunción, buscaremos eliminarla derivando de ambas partes de la disyunción nuestro objetivo, s :

1.	$t\rightarrow\neg r$	P	
2.	p	S	Objetivo: $(r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s)$
3.	$r\vee s$	S	Objetivo: $(\neg p\vee t)\rightarrow s$
4.	$\neg p\vee t$	S	Objetivo: s
5.	r	S	Primer caso de $r\vee s$
6.	$\neg s$	S	Busco contrad. para llegar a s
7.	$\neg p$	S	Primer caso de $\neg p\vee t$
8.	$p\wedge\neg p$	RI $\wedge$ 2,7	
9.	t	S	Segundo caso de $\neg p\vee t$
10.	$\neg r$	RE $\rightarrow$ 1,9	
11.	$\neg(p\wedge\neg p)$	S	Buscamos contradicción para tener $p\wedge\neg p$ y así llegar al mismo lugar por ambas vías de la disyunción
12.	$r\wedge\neg r$	RI $\wedge$ 5,10	
13.	$\neg\neg(p\wedge\neg p)$	RI $\neg$ 11,12	
14.	$p\wedge\neg p$	RE $\neg$ 13	
15.	$p\wedge\neg p$	RE $\vee$ 4,7-8,9-14	Conclusión (contrad.) de $\vee$
16.	$\neg\neg s$	RI $\neg$	Suponiendo $\neg s$ (6) desencadeno una doblen contradicción al analizar cada lado de la disyunción $\neg p\vee t$
17.	s	RE $\neg$ 16	
18.	s	S	Primer caso de $r\vee s$
19.	$p\wedge s$	RI $\wedge$ 2,18	
20.	s	RE $\wedge$ 19	
21.	s	RE $\vee$ 3,5-17,18-20	
22.	$(\neg p\vee t)\rightarrow s$	RI $\rightarrow$ 4,21	
23.	$(r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s)$	RI $\rightarrow$ 3,22	
24.	$p\rightarrow((r\vee s)\rightarrow((\neg p\vee t)\rightarrow s)$	RI $\rightarrow$ 2,23	

Estrategias deductivas y aplicación de reglas derivadas

De manera adicional a las estrategias ya comentadas, consideramos, para cada una de la premisas y para la conclusión, fórmulas equivalentes (interdefinición de los operadores). Si hacemos esto, podemos reducir la mayor parte de los casos posibles a sólo dos estrategias interesantes: la introducción del condicional y la introducción de la negación. Por ejemplo, las fórmulas de tipo $X \vee Y$ son equivalentes a $\neg X \rightarrow Y$. Suponiendo $\neg X$ es casi seguro que vamos a poder obtener o bien Y (aplicamos RI $\rightarrow$ y eliminamos el supuesto) o bien X (construimos una contradicción y eliminamos el supuesto), alcanzando primero X y después $X \vee Y$.

EJERCICIO 10: $[\neg(p \vee q) \rightarrow \neg r, r \wedge (q \rightarrow p)] \models s \rightarrow p$ (solución alternativa a la de Formas Lógicas)

1.	$\neg(p \vee q) \rightarrow \neg r$	P
2.	$r \wedge (q \rightarrow p)$	P
3.	s	S
4.	r	RE $\wedge$ 2
5.	$q \rightarrow p$	RE $\wedge$ 2
6.	$p \vee q$	MT 1,4
7.	p	S
8.	p	Rfl 7
9.	q	S
10.	p	RE $\rightarrow$ 5,9
11.	p	RE $\vee$ 6,7-8,9-10
12.	$s \rightarrow p$	RI $\rightarrow$ 3-11

EJERCICIO 11: $[t \rightarrow \neg r] \models p \rightarrow [(r \vee s) \rightarrow ((\neg p \vee t) \rightarrow s)]$

1.	$t \rightarrow \neg r$	P
2.	p	S
3.	$r \vee s$	S
4.	$\neg p \vee t$	S
5.	t	MT 2,4
6.	$\neg r$	RE $\rightarrow$ 1,5
7.	s	IA 3,6
8.	$(\neg p \vee t) \rightarrow s$	RI $\rightarrow$ 4,7
9.	$(r \vee s) \rightarrow (\neg p \vee t) \rightarrow s$	RI $\rightarrow$ 3,8
10.	$p \rightarrow [(r \vee s) \rightarrow (\neg p \vee t) \rightarrow s]$	RI $\rightarrow$ 2,9

EJERCICIO 12: $[(p \to q) \to q] \models (q \to p) \to p$

1.	$(p \to q) \to q$	P
2.	$q \to p$	S
3.	$\neg p$	S
4.	$\neg q$	MT 2,3
5.	$\neg(p \to q)$	MT 1,4
6.	$p \wedge \neg q$	I $\to \wedge$ 5
7.	p	RE $\wedge$ 6
8.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$ 3,8
9.	p	EN2 3,8
10.	$(q \to p) \to p$	RI $\to$ 2,9

EJERCICIO 13: $[\neg(p \to (s \wedge t)) \vee ((s \to \neg p) \wedge (t \to p))] \models s \to \neg t$

La clave para este ejercicio es darse cuenta de que lo que buscamos, $s \to \neg t$ es equivalente a $\neg(s \wedge t)$, que lo tenemos dentro de nuestra premisa.

1.	$\neg(p \to (s \wedge t)) \vee ((s \to \neg p) \wedge (t \to p))$	P
2.	$\neg(p \to (s \wedge t))$	S
3.	$p \wedge \neg(s \wedge t)$	I $\to \wedge$ 2
4.	$\neg(s \wedge t)$	RE $\wedge$ 3
5.	$s \to \neg t$	I $\wedge \to$ 4
6.	$(s \to \neg p) \wedge (t \to p)$	S
7.	$s \to \neg p$	RE $\wedge$ 6
8.	$t \to p$	RE $\wedge$ 6
9.	$\neg p \to \neg t$	Contr. 8 (contraposición del condicional)
10.	$s \to \neg t$	Tr. %implica 7,9 (transitividad del condicional)
11	$s \to \neg t$	RE $\vee$ 1, 2-5, 6-10

Método para invalidar argumentos: árboles semánticos

La deducción natural nos permite determinar la validez de los argumentos mediante la construcción de una deducción correcta desde las premisas hasta la conclusión, pero no nos sirve para determinar su invalidez. Cuando en el examen de un argumento no logramos derivar la conclusión a partir de la premisas, no podemos afirmar que el argumento no es correcto. En estos casos necesitamos acudir a otros métodos. El método de árboles semánticos vale tanto para validar como para invalidar argumentos, pero, dado que consisten en una búsqueda sistemática de contraejemplos para el argumento, el objetivo directo de este método es la invalidación del argumento que estamos examinando.

Sabemos que si una fórmula cualquiera X es una fórmula válida, $\neg X$ es una fórmula contradictoria. También sabemos que si una fórmula cualquiera X es consistente, no tenemos información suficiente para decidir si $\neg X$ o es o no contradictoria, pues en ese caso, X podría ser válida o meramente consistente. Pero de los argumentos no decimos que pueden ser válidos o contradictorios o meramente consistentes, los argumentos sólo pueden ser válidos o inválidos. El método del árbol semántico nos permite decidir ambas cosas:

1. Si una fórmula dada es válida (tautológica), contradictoria o meramente consistente.
2. Si un argumento es válido o inválido.

El método consiste en la descomposición de una fórmula o conjunto de fórmula hasta alcanzar fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas, en un intento de encontrar un contraejemplo para la fórmula o el argumento sometido a examen, o bien una contradicción en todas la ramas del árbol. Las reglas del cálculo, por tanto, son reglas de eliminación de operadores y las podríamos reducir a dos reglas básicas: la eliminación de la conjunción y la eliminación de la disyunción (pues por interdefinición podemos trasladar cualquier fórmula a éstas), más una regla para eliminar la doble negación.

Reglas básicas

α	$X \wedge Y$ ———————— X Y	El desarrollo de una conjunción se debe escribir en la misma rama. Para la verdad de $X \wedge Y$ es necesaria la verdad de X y la verdad de Y
	$\neg\neg X$ ———————— X	El desarrollo de una fórmula doblemente negada se debe escribir en la misma rama: para la verdad de $\neg\neg X$ es necesaria la verdad de X
β	$X \vee Y$ ———————— $X \quad Y$	El desarrollo de una fórmula disyuntiva obliga a abrir dos ramas en el árbol. Para la verdad de $X \vee Y$ basta la verdad de X o la verdad de Y. se abren dos interpretaciones posibles y bastará que una de ellas satisfaga la fórmula de partida para que podamos afirmar su consistencia.

Reglas derivadas

α	$\neg(X \vee Y)$ ------- $\neg X$ $\neg Y$	$\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$
β	$\neg(X \wedge Y)$ ------- $\neg X \quad \neg Y$	$\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$
β	$X \rightarrow Y$ ------- $\neg X \quad Y$	$X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$
α	$\neg(X \rightarrow Y)$ ------- X $\neg Y$	$\neg(X \rightarrow Y) \equiv X \wedge \neg Y$
	$X \leftrightarrow Y$ ------- $X \quad \neg X$ $Y \quad \neg Y$	$X \leftrightarrow Y \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)$ La verdad del bicondicional requiere, o bien la verdad de X e Y, o bien su falsedad, $\neg X$ y $\neg Y$
	$\neg(X \leftrightarrow Y)$ ------- $X \quad \neg X$ $\neg Y \quad Y$	$\neg(X \leftrightarrow Y) \equiv \neg((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X))$ $\neg((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)) \equiv \neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X)$ $\neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X) \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X)$ La verdad del bicondicional negado requiere, o bien $\neg X$ e Y, o bien X y $\neg Y$

Estructura del árbol semántico

Un árbol semántico tiene la forma de un árbol invertido: comienza con una única rama en la que figura la fórmula o conjunto de fórmulas que vamos a examinar.

Si queremos examinar la validez de:

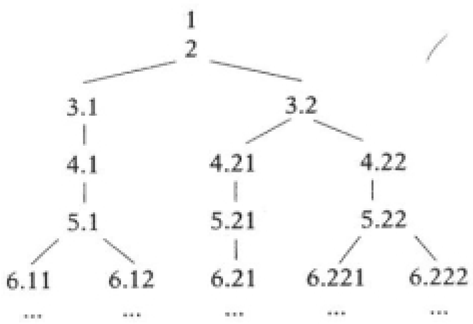
- una fórmula X, comenzaremos el árbol con la fórmula $\neg X$
- un argumento, comenzaremos con la afirmación de la premisas y la negación de la conclusión.

Las líneas siguientes se irán obteniendo mediante la aplicación de la reglas. Cada fórmula que se escriba irá acompañada del número de línea en la que se escribe, el número de la rama a la que pertenece y la justificación para escribirla (qué regla hemos aplicado), excepto la fórmula de partida, que sólo llevarán el número de línea. Añadiremos también el símbolo $\surd$ a la izquierda del número de línea para indicar que la fórmula de dicha línea ya ha sido desarrollada.

Todas las ramas del árbol comienzan siempre con la fórmula escrita en la primera línea, por ejemplo 1 – 2 – 3.2 – 4.22 – 5.22 – 6.222 es una de la ramas de este árbol

(a la izquierda mi modo de representarlo con tablas, a la derecha, Amparo en el Formas Lógica)

		1		
		2		
3.1		3.2		
4.1		4.21	4.22	
5.1		5.21	5.22	
6.11	6.12	6.21	6.221	6.222
…	…	…	…	…



Si queremos aplicar una regla sobre la fórmula escrita en el punto 4.22, hemos de escribir sus consecuencias tanto debajo del punto 6.221 como del punto 6.222 porque 4.22 pertenece a ambas ramas.

Conceptos

- Rama cerrada: una rama está cerrada cuando contiene una fórmula atómica y su negación (la rama contiene contradicción), en caso contrario decimos que la rama está **abierta**.
- Rama completa: una rama del árbol está completa cuando todas la fórmula que figuran en ella han sido desarrolladas o cuando en la rama aparece una fórmula atómica y su negación.
- Árbol terminado: el árbol está terminado cuando todas sus ramas están completas. Una vez terminado pueden darse tres casos:
  1. Todas las ramas contienen contradicción: todas la ramas están cerradas.
     - Es el único caso que nos otorga información semántica completa:
       - o bien nos dice que la fórmula en el origen del árbol es una fórmula contradictoria, y por tanto su negación (que es la que examinamos indirectamente) es una **fórmula válida**.
       - O bien, si lo que estamos examinando es un argumento, el árbol con todas sus ramas cerradas nos dice que es un **argumento correcto** y no existen contraejemplos para él.
  2. Ninguna rama contiene contradicción: todas las ramas están abiertas
  3. Algunas ramas contienen contradicción y otras no.

Tras realizar el árbol para $\neg X$;

- si **cierra** podemos concluir que X es válida, y $\neg X$ es contradictoria.
- Si **no cierra** entonces X es no válida y $\neg X$ consistente
  - Si queremos averiguar entonces si se trata de una contradicción o es una fórmula consistente, debemos continuar haciendo un árbol para X .
    - Si el **árbol cierra**, $\neg X$ es una fórmula válida (X es contradictoria)
    - Si el **árbol no cierra,** tanto X como $\neg X$ son meramente consistentes.

Árbol para $\neg X$

Cierra	No cierra	
$\neg X$ contradictoria X válida	$\neg X$ consistente X no válida	
	Árbol para X	
	Cierra	**No cierra**
	$\neg X$ válida X contradictoria	$\neg X$ meramente consistente X meramente consistente

EJERCICIO : $[(p \to q), q] \models p$

$\surd$ 1 $p \to q$

2 q

3 $\neg p$

4.1 $\neg p$ $(\beta 1)$	4.2 q $(\beta 1)$

Las dos ramas del árbol está completas y abiertas, por tanto el argumento es inválido, no hay relación de consecuencia lógica entre $(p \to q) \wedge q$ y p.

Cada rama abierta nos ofrece un contraejemplo del argumento: el cao de que q sea un enunciado verdadero y p un enunciado falso.

Por ejemplo, el siguiente argumento tiene la forma lógica que hemos examinado y sus premisa son verdaderas mientras que la conclusión es falsa (su forma lógica no es válida):

Si $2+1=4$, entonces $3+2=5$	*Premisa verdadera con antecedente falso*
$3+2=5$	*Premisa verdadera*
Por tanto, $2+1=4$	*Conclusión falsa*

Estrategias analíticas y ejemplos comentados

Este es un método mecánico que nos dará, en un tiempo finito, una repuesta sobre la validez de la fórmula o el argumento que examinamos, pero el árbol puede ser más o menos complejo dependiendo del orden en el que desarrollemos las fórmulas, por lo que conviene tener presentes la siguientes tres estrategias:

1. Desarrollar en primer lugar, siempre que sea posible, la fórmulas de tipo α, así evitaremos la apertura de ramas en el árbol antes de que sea estrictamente necesario.
2. Puesto que el árbol está terminado cuando la ramas están cerradas, nos interesa encontrar una contradicción en cada rama y no continuar aplicando reglas sobre una rama que ya contiene una fórmula atómica y su negación
3. Si alguna de la ramas está casi completa y vemos que las fórmulas que quedan por desarrollar en ella no van a cerrar la rama, basta completar dicha rama sin necesidad de terminar el árbol.
   - Para la evaluación de la fórmula o el argumento nos basta una rama del árbol completa y abierta.

EJERCICIO : Determinar si el siguiente conjunto de fórmula es satisfacible:

$[p\to((q\vee r)\to(r\to\neg p)),((p\to q)\to(q\to p))\to(p\to q)]$

Examinamos directamente el conjunto, pues queremos saber si no es contradictorio. No hay necesidad de termina el árbol, si conseguimos cerrar una rama sin contradicción podremos confirmar la satisfacibilidad del conjunto de fórmulas.

√ 1. $p\to((q\vee r)\to(r\to\neg p))$

√ 2. $((p\to q)\to(q\to p))\to(p\to q)$

3.1 $\neg((p\to q)\to(q\to p))$ $(\beta 2)$	3.2 $(p\to q)$ $(\beta 2)$	
	4.21 $\neg p$ $(\beta 3.2)$	4.22 q $(\beta 3.2)$
	5.211 $\neg p$ $(\beta 1)$ 5.212 $(q\vee r)\to(\to\neg p)$ $(\beta 1)$	

Como la rama 1 – 2 – 3.2 – 4.2.1 – 5.211 está completa sin contradicciones, entonces el conjunto es satisfacible.

EJERCICIO : Comprobar que el siguiente argumento es válido: $[p\to q]\models p\to(q\vee r)$

√ 1. $p\to q$.	(notas)
√ 2. $\neg(p\to(q\vee r))$	$\neg(p\to(q\vee r))\equiv p\wedge\neg(q\vee r)$
3. p $(\alpha 2)$.	
√ 4. $\neg(q\vee r)$ $(\alpha 2)$	$\neg(q\vee r)\equiv\neg q\wedge\neg r$
5. $\neg q$ $(\alpha 4)$	
6. $\neg r$ $(\alpha 4)$	

6.1 $\neg p$ $(\beta 1)$	6.2 q $(\beta 1)$
$p\wedge\neg p$ (2 y 6.1)	$q\wedge\neg q$ (5 y 6.2)
contradicción	contradicción

Como en ambas ramas hemos llegado a contradicción, el árbol queda cerrado demostrando la invalidez del argumento con $\neg(p\to(q\vee r))$ como conclusión, luego nuestro argumento original en estudio, $[p\to q]\models p\to(q\vee r)$, es válido, quedando así demostrada la consecuencia lógica entre sus premisas y la conclusión.

EJERCICIO : Comprobar que el siguiente argumento es inválido: $[(p \to q), \neg q] \models p$

√ 1. $p \to q$.

2. $\neg q$

3. $\neg p$

4.1 $\neg p$ $(\beta 1)$	4.2 q $(\beta 1)$
Rama completa y abierta	Rama completa y cerrada

Al no tener todas sus ramas cerradas, el argumento es inválido

EJERCICIO : ¿De $p \to q$ se siguen lógicamente $(q \to p)$ o $\neg(q \to p)$?

Hemos de plantear dos árboles, uno para la negación de cada posible conclusión:

1) ¿ $(p \to q) \models (q \to p)$?

√ 1. $p \to q$

√ 2. $\neg(q \to p)$

3. q $(\alpha 2)$

4. $\neg p$ $(\alpha 2)$

5.1 $\neg p$ $(\beta 1)$	5.2 q $(\beta 1)$
Completa y abierta	Completa y abierta

Por lo tanto, no hay consecuencia lógica para este planteamiento del enunciado.

2) ¿ $(p \to q) \models \neg(q \to p)$?

√ 1. $p \to q$

√ 2. $q \to p$

3.1 $\neg p$ $(\beta 1)$		3.2 q $(\beta 1)$	
4.11 $\neg q$ $(\beta 2)$	4.12 p $(\beta 2)$	4.21 $\neg q$ $(\beta 2)$	4.22 p $(\beta 2)$
Completa y abierta	Cierra con 3.1	Cierra con 3.2	Completa y abierta

Por lo tanto, no hay consecuencia lógica para este planteamiento del enunciado.

Es decir, ninguna de las dos opciones planteadas son consecuencias lógicas para la premisa dada.

Conceptos básicos del cálculo axiomático: axiomas, teoremas y reglas de transformación

Simbolización y formalización

Hasta ahora se ha comentado que la lógica se presenta en forma de cálculo, que la lógica es la presentación formalizada de los principios del análisis del razonamiento desde el punto de vista de su estructura.

Pero si bien es cierto que lo hemos dicho, lo cierto es que no lo hemos mostrado. Porque a lo que hasta ahora hemos hecho no se le puede dar el nombre de 'formalización'. No hemos presentado en forma de cálculo la lógica de proposiciones: nos hemos limitado a representar por medio de símbolos las nociones pertenecientes a ese apartado, el más elemental, de la lógica. Y formalizar un lenguaje es mucho más que simbolizarlo.

- Simbolizar un lenguaje: (la parte del lenguaje natural que se usa para formular inferencias de enunciados sin analizar a partir de otros enunciados que tampoco se analizan) consiste simplemente en sustituir cada signo (relevante) de ese lenguaje por un símbolo.
    - Podemos simbolizar la partícula (o partículas) que en el lenguaje ordinario sirven para expresar una **relación condicional** entre enunciados por $\rightarrow$
    - Podemos simbolizar las **conjunciones copulativas** por $\wedge$
    - Podemos simbolizar los doce nombres de los miembros del conjunto de los profetas menores sustituyendo cada uno de los nombres por un símbolo distinto, con lo cual, en lugar del conjunto {Oseas, Joel, Amos, Abdías, Joás, Miqueas, Nahum, Habacuc, Sofonías, Ageo, Zacarías, Malaquías} tendríamos $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$

Naturalmente, esta simbolización que nosotros acabamos de llevar a cabo sirve para bien poco. Sirve, a lo sumo, como ejemplo. Hay casos, sin embargo, en los que de la simbolización se derivan notables ventajas, como puede ser la evitación de la sinonimia y la homonimia. Sabido es, en efecto, que en los lenguajes naturales se dan a menudo casos en que términos diversos sirven para designar un mismo objeto —y en ese caso decimos que los términos son sinónimos—, así como casos en los que un mismo término designa varios objetos diferentes —fenómeno al que denominamos 'homonimia'. En este sentido, y puesto que, por ejemplo, no todas las veces en que empleamos la partícula 'si' lo hacemos para indicar la existencia de una relación condicional, ni tampoco echamos mano de esa partícula siempre que queremos expresar la existencia de esa relación (sino que muchas veces lo hacemos mediante expresiones como 'cuando', 'con tal que', etc.), la simbolización de la relación condicional —de todas y sólo las relaciones condicionales— mediante el trazo de una flecha que apunta a lo condicionado evita ambigüedades y favorece la precisión. La simbolización, entonces, es útil a veces para eliminar algunas fuentes lingüísticas de confusión, en la medida en que gracias a ella podríamos conseguir que el conjunto de los nombres y el conjunto de los objetos nombrados fueran equivalentes, de tal modo que a cada objeto correspondiera uno y un solo nombre, y viceversa.

Conseguir esto, sin embargo, no es conseguir mucho: tan sólo una mejora en el vocabulario. Y sabemos que, mucho más importante que el vocabulario es, desde el punto de vista lógico, la sintaxis.

- Formalizar un lenguaje no es tan sólo en dotarlo de un vocabulario artificial, sino también, y sobre todo, en reconstruir su sintaxis: en hacer que las reglas de sus sintaxis, en lugar de implícitas y vagas, como las de los lenguajes naturales, sean explícitas y precisas.
  - Un lenguaje está formalizado cuando su sintaxis no tiene secretos.

De cara a formalizar la lógica de enunciados toca presentar el lenguaje de la lógica proposicional en forma de cálculo, de especificar las reglas que nos permiten construir y demostrar enunciados esquemáticos que expresan otras tantas formas válidas de inferencia. Tres son los elementos básicos de un cálculo:

1. Los símbolos primitivos: variables preposicionales, y conectivas o functores de enunciado
2. Las reglas de formación: permiten combinar esos símbolos para construir expresiones bien formadas
3. Las reglas de transformación.

Si bien hemos hecho referencia a cierto tipo de expresiones formalmente verdaderas —expresiones de esquemas válidos de inferencia—, e incluso hemos enumerado algunas, sin embargo, nos hemos limitado a mostrar —mediante el método de las tablas de verdad, por ejemplo— que efectivamente se trataba de expresiones verdaderas, sin llegar a demostrarlo: en otras palabras, no hemos ni siquiera aludido a las reglas de transformación—.

- Demostrar un enunciado: (es decir, demostrar como verdadero) consiste en hacer ver que se sigue válidamente de otros enunciados verdaderos, en presentar ese enunciado como el resultado de una transformación válida —es decir, conforme a las reglas— de otros enunciados ya demostrados o que, como veremos, no se demuestran.

La lógica de enunciados como sistema axiomático

La forma clásica de la formalización —pero no la única, ni tampoco a veces la preferible— es la forma axiomática. Los lenguajes formalizados toman a menudo —y hasta hace poco habían tomado prácticamente siempre— la forma de sistemas axiomáticos.

Presentaremos a continuación la lógica de enunciados en forma de sistema axiomático. ¿En qué consiste la axiomatización de una teoría (en este caso, la teoría de la validez formal de los razonamientos que permiten deducir unos enunciados a partir de otros sin necesidad de realizar un análisis interno de éstos)?

- Una teoría es un conjunto de enunciados verdaderos —o que por tales se tienen— relativos a un determinado campo de problemas.
- Axiomatizar una teoría es organizar ese conjunto de enunciados de tal forma que, partiendo de algunos de sus miembros —los llamados «**axiomas**»—, y mediante la aplicación de una serie de **reglas de transformación**, se puedan derivar los restantes enunciados de la teoría —a los que llamaremos «**teoremas**»—.
  - Axiomas y teoremas son expresiones del cálculo, fórmulas redactadas en el lenguaje del cálculo.
  - Las reglas de transformación, no: en cuanto reglas para inferir unas expresiones de otras, han de hacer mención de esas expresiones, y sabemos que sólo en un metalenguaje se pueden mencionar los signos de un lenguaje. Pertenecen, pues, esas reglas al metalenguaje del cálculo.

Demostrar un enunciado en un sistema axiomático —demostrar, con otras palabras, que el enunciado en cuestión es un teorema del sistema— consiste en derivarlo válidamente —es decir, utilizando en la derivación sólo, y de manera correcta, los recursos explícitamente admitidos a tal efecto dentro del cálculo— a partir de los axiomas, en fundamentar su verdad en la de otros enunciados cuya verdad consta.

Mediante métodos como el de las tablas de verdad sólo llegábamos a saber que unos determinados enunciados eran verdaderos. Mediante su demostración en un sistema axiomático podemos alcanzar a averiguar cómo y por qué lo son: hemos de ver que las tautologías derivadas como teoremas no son otra cosa que transformaciones válidamente efectuadas de las tautologías elegidas como axiomas.

Pasemos, entonces, a presentar un sistema axiomático para la lógica de enunciados. Se trata del sistema que A. N. Whitehead y B. Russell dieron a conocer en sus *Principia Mathematica* (1910-13), el llamado **Sistema PM de la lógica de enunciados.**

El sistema PM

- Símbolos primitivos:
  - Variables proposicionales: $p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, .., p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$.
  - Conectivas o functores del enunciado: $\neg, \vee$
  - Signos de puntuación: $(), [], \{\}$
- Símbolos definidos:
  - ($\wedge$) : $X \wedge Y \equiv_{Df} \neg(\neg X \vee \neg Y)$
  - ($\rightarrow$) : $X \rightarrow Y \equiv_{Df} \neg X \vee Y$
  - ($\leftrightarrow$) : $X \leftrightarrow Y \equiv_{Df} \neg[\neg(\neg X \vee Y) \wedge \neg(\neg Y \vee X)]$
- Reglas de formación:
  - RF1: Una variable proposicional sola es una expresión bien formada del cálculo (ebf.)
  - RF2: Si X es una ebf., entonces $\neg X$ también lo es.
  - RF3: Si X e Y son ebfs., entonces $X \vee Y$ también lo es.
  - RF4: Estas son todas las reglas de formación del cálculo.
- Axiomas:
  - A_1 : $(p \vee p) \rightarrow p$
  - A_2 : $q \rightarrow (p \vee q)$
  - A_3 : $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
  - A_4 : $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
  - A_5 : $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$
- Reglas de transformación:
  - RT1: Dada una tesis del cálculo, en la que aparecen variables de enunciado, el resultado de sustituir una, algunas o todas esas variables por fórmulas bien formadas del cálculo sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto será también una tesis del cálculo. Y ello con una única restricción, si bien importante: cada variable ha de ser sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto

- **Regla de sustitución**: si X es una tesis del sistema en la que aparecen distintas variables $p_1, p_2, .. p_n$, e $Y_1, Y_2, .., Y_n$ son expresiones bien formadas del cálculo, la expresión resultante de sustituir en X p_1 por Y_1, p_2 por Y_2,... p_n por Y_n será asimismo una tesis del sistema.

○ RT2: Si X es una tesis del sistema, y lo es también la expresión $X \rightarrow Y$, entonces Y es una tesis del sistema.

- **Regla de separación**: Es fácil ver que esta regla no es otra cosa que una traducción metalingüística de la ley lógica que hemos llamado '**modus ponendo ponens**' $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ (~RD=Regla de Detachment)

Deducción de teoremas

Partiendo de esta base es posible demostrar como teoremas todas las expresiones formalmente verdaderas construibles en el lenguaje del cálculo. Puesto que esas expresiones son infinitas en número, es obvio que no podemos demostrarlas todas, una a una. Nos limitaremos a mostrar, mediante unos cuantos ejemplos, la posibilidad de hacerlo.

Teorema 1: $p \rightarrow (p \vee q)$

1.	$q \rightarrow (p \vee q)$	A2 (axioma)
2.	$p \rightarrow (p \vee q)$	RS (q/p) 1

La expresión $p \rightarrow (p \vee q)$ se obtiene a partir del Axioma 2 mediante una aplicación —correcta— de la Regla de Sustitución. Es, pues, un teorema.

Teorema 2: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$

1.	$[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$	A4
2.	$[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \rightarrow [\neg q \vee (\neg p \vee r)]$	RS ($p/\neg p$, $q/\neg q$) 1
3.	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$	Df $\rightarrow$ 2

Puesto que la interdefinición del disyuntor y el condicional nos dice $X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$

Teorema 3: $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

1.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$	A5
2.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r)]$	RS ($p/\neg p$) 1
3.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	Df $\rightarrow$ 2

Teorema 4: $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

1.	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$	T2
2.	$\{(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]\} \rightarrow \{(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]\}$	RS $[p/(q \rightarrow r), q/(p \rightarrow q), r/(p \rightarrow r)]$ 1
3.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	T3
4.	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	RD 2,3

<u>Teorema 5</u>: $p \to p$

1. $p \to (p \vee p)$ T1
2. $(p \vee p) \to p$ A1
3. $p \to p$?? (Tr $\to$ 1,2)

El paso de 2 a 3 parece intuitivamente claro. En efecto: si algo es condición (suficiente) de otra cosa, y esa otra cosa es condición de una tercera, parece razonable concluir que la primera ha de ser condición de la tercera. Y así, parece haber una «justificación» intuitiva de la transición de 2 a 3 en la demostración del Teorema 5. Si, como nos muestra el Teorema 1, p es condición de $p \vee p$, y si, como el Axioma 1 hace patente, $p \vee p$ es condición de p, resultaría extraño no llegar a la conclusión de que p es condición de p ($p \to p$).

En lógica, con la intuición no basta. En lógica sobra la intuición. La historia de la lógica contemporánea es la historia del destierro de la intuición del reino de la lógica. En lugar de la intuición, la formalización. Y la formalización supone la explicitación de todo el desarrollo deductivo, la programación del curso entero de la demostración: del punto de partida, del término de la demostración y de los pasos intermedios.

Y, sin embargo, está el Teorema 4. Y ese teorema muestra que, si lo enunciado por una proposición es condición de lo enunciado por otra, entonces, en el caso de que lo enunciado por esta segunda proposición sea a su vez condición de lo enunciado por una tercera, necesariamente lo enunciado por la primera será condición —a través de una proposición interpuesta— de lo enunciado por la tercera.

Extraigamos la moraleja deductiva de este teorema. Traduzcamos este teorema al metalenguaje del cálculo, igual que, por ejemplo, podríamos traducir la conducta real de una persona en regla moral de nuestra propia conducta. La traducción metalingüística de esa tautología rezaría, por ejemplo, como sigue: «Si $X \to Y$ es una tesis del sistema, entonces,

si $Y \to Z$ es una tesis del sistema, es también una tesis del sistema $X \to Y$ ». O dicho de otro modo: «Si $X \to Y$ e $Y \to Z$ son tesis del sistema, entonces $Y \to Z$ es una tesis del sistema». Y esta regla sí que permite dar el paso de 2 a 3 como nosotros hemos hecho.

Ahora bien: lo que hemos hecho no es otra cosa que enunciar una nueva regla de transformación. Se trata de una **regla derivada**.

Derivada con respecto a las otras dos, las fundamentales. Basta sustituir p por X , q por Y y r por Z en la demostración del Teorema 4 para obtener una derivación de esta regla. Si las reglas de transformación pertenecen al metalenguaje del cálculo, la demostración de una regla nueva a partir de otras reglas de inferencia tendrá que estar enunciada —por cuanto en ella se mencionan expresiones metalingüísticas— en el meta-metalenguaje del cálculo.

Es evidente que la posibilidad que acabamos de desarrollar —la posibilidad de traducir una cierta tesis del sistema a regla de inferencia que nos permita transformar unas expresiones en otras dentro del mismo— puede hacerse extensiva a cualquier otra tautología, sea ésta un axioma o un teorema. Puesto que la tautología a la que estamos aludiendo refleja la propiedad transitiva del condicional, nos referiremos a ella, en aquellos casos en que la empleemos, mediante la abreviatura Tr.

Cuando quiera que, en lo que resta de este apartado, utilicemos como reglas de inferencia trasuntos metalingüísticos de tesis del sistema, lo haremos constar en nota, especificando además la abreviatura correspondiente.

Teorema 6: $\neg p \vee p$

1	$p \rightarrow p$	T5
2.	$\neg p \vee p$	Df $\rightarrow$ 1

Teorema 7: $p \vee \neg p$

1.	$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$	A3
2.	$(\neg p \vee p) \rightarrow (p \vee \neg p)$	RS $(p/\neg p, q/p)$ 1
3.	$\neg p \vee p$	T6
4.	$p \vee \neg p$	RD 2,3

Teorema 8: $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

1.	$(p \vee p) \rightarrow p$	A1
2.	$(\neg p \vee \neg p) \rightarrow \neg p$	RS $(p/\neg p)$ 1
3.	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$	Df $\rightarrow$ 2

Teorema 9: $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

1.	$(p \vee p) \rightarrow p$	A1
2.	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$	Df $\vee$ 1

Teorema 10: $p \rightarrow \neg\neg p$

1.	$p \vee \neg p$	T7
2.	$\neg p \vee \neg\neg p$	RS $(p/\neg p)$ 1
3.	$p \rightarrow \neg\neg p$	Df $\rightarrow$ 2

Teorema 11: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

1.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	T3
2.	$(q \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)]$	RS $(r/\neg\neg q)$ 1
3.	$(p \rightarrow \neg\neg p)$	T10
4.	$(q \rightarrow \neg\neg q)$	RS (p/q) 3
5.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg q)$	RD 2,4
6.	$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$	A3
7.	$(\neg p \vee \neg\neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	RS $(p/\neg p, q/\neg\neg q)$ 6
8.	$(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Df $\rightarrow$ 7
9.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Tr $\rightarrow$ 5,8

Teorema 12: $p \rightarrow (p \vee q)$

1.	$q \rightarrow (p \vee q)$	A2
2.	$p \rightarrow (q \vee p)$	RS $(q/p, p/q)$ 1
3.	$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$	A3
4.	$(q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$	RS $(p/q, q/p)$ 3
5.	$p \rightarrow (p \vee q)$	Tr $\rightarrow$ 2,4

Teorema 13: $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$

1.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
2.	$(\neg p \vee \neg q) \to (\neg q o \neg p)$	RS $(p/\neg p, q/\neg q)$ 1
3.	$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$	Df $\to$ 2

Teorema 14: $[p \vee (q \vee r)] \to [(p \vee q) \vee r]$

1.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
2.	$(q \vee r) \to (r \vee q)$	RS $(p/q, q/r)$ 1
3.	$(q \to r) \to [(p \vee q) \to (p \vee r)]$	A5
4.	$[(q \vee r) \to (r \vee q)] \to \{[p \vee (q \vee r)] \to [p \vee (r \vee q)]\}$	RS $[q/(q \vee r), r/(r \vee q)]$ 3
5.	$[p \vee (q \vee r)] \to [p \vee (r \vee q)]$	RD 2,4
6.	$[p \vee (q \vee r)] \to [q \vee (p o r)]$	A4
7.	$[p \vee (r \vee q)] \to [r \vee (p \vee q)]$	RS $(q/r, r/q)$ 6
8.	$[p \vee (q \vee r)] \to [r \vee (p \vee q)]$	Tr $\to$ 5,7
9.	$[r \vee (p \vee q)] \to [(p \vee q) \vee r]$	RS $[p/r, q/(p \vee q)]$ 1
10.	$[p \vee (q \vee r)] \to [(p \vee q) \vee r]$	Tr $\to$ 8,9

Teorema 15:

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Teorema 15:

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

Teorema 16:

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

Teorema 17:

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.

Como podrá observarse, este Teorema 17 es idéntico al Axioma 4. Significa que hemos conseguido demostrar como teorema un axioma. Lo cual, a su vez, quiere decir que ese axioma no es independiente de los restantes, que puede ser demostrado a partir de ellos. Por tanto, todo lo que se puede demostrar a partir de este axioma puede demostrarse también a partir sólo de los otros cuatro.

Y habida cuenta de que, como hemos indicado ya alguna vez, en la presentación de un cálculo se tiende siempre al ahorro de elementos primitivos, nada tiene de extraño que —a partir de la demostración, por Bernays, en 1926, de la posibilidad de derivar este «axioma» de los otros cuatro— la expresión $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ haya sido eliminada de la lista de axiomas» y reducidos éstos a los cuatro restantes.

Y aún a tres. En efecto: Lukasiewicz mostró que tomando como funciones primitivas la negación y el condicional —que es lo que ya había hecho Frege—, los cuatro axiomas de Principia Mathematica podrían ser sustituidos por estos otros tres:

1. A1: $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. A2: $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
3. A3: $p \rightarrow (\neg p \vee q)$

Pero aún hay más. Los axiomas podrían reducirse a uno. En este sentido Jean Nicod —que fue quien mostró esta posibilidad— no hizo sino, como alguien ha dicho, extraer las consecuencias-axiomáticas de los resultados de Sheffer relativos a la reducción de todas las funciones monádicas y diádicas a una: la incompatibilidad, por ejemplo. Tomando esta función como la única primitiva, es posible —mediante la utilización de dos reglas de inferencia, la regla de sustitución y una regla de separación distinta de la que emplearon Whitehead y Russell— proceder a una axiomatización completa de la lógica de enunciados.

Completa, pero no cómoda. He aquí, en efecto, ese axioma omnipotente, que más tarde Lukasiewicz y Sobocinski conseguirían acortar, y Wajsberg —en un alarde digno de ser cantado por Borges— deducir de otro de la misma longitud:

$$[p|(q|r)]|\{[t|(t|t)]|\langle(s|q)|[(p|s)|(p|s)]\rangle\}$$

Así pues, cuando hablamos de 'el cálculo de enunciados' lo hacemos por abreviar. Porque hay distintos cálculos de enunciados, distintas posibilidades de presentar axiomáticamente la teoría de las relaciones de inferencia entre proposiciones sin analizar.

Lógica pura y lógica aplicada

Lo que nosotros acabamos de hacer es mostrar la posibilidad de formalizar una teoría lógica, la lógica de enunciados. A lo largo de la historia de la lógica lo normal fue presentar las leyes de la lógica de enunciados aisladas las unas de las otras y formuladas bien simplemente en el lenguaje natural, bien en un lenguaje natural enriquecido con algunos símbolos. Sólo recientemente —a partir de Boole, y, sobre todo, de Frege— se ha llegado a presentar la lógica de enunciados en la forma de un cálculo.

Lo que nosotros hemos hecho es presentar a la vez el cálculo y su interpretación como cálculo de la lógica de enunciados. Ya sabemos que podríamos no haberlo hecho así, que podríamos haber presentado el cálculo solo, y que si hemos hecho lo que hemos hecho es porque la lógica es, para nosotros, eminentemente, investigación de los principios de la validez formal del razonamiento presentada en forma de cálculo, y no simplemente la teoría de la construcción de cálculos.

No simplemente, pero también. Y así, la lógica sería la teoría de la construcción de cálculos, y a la vez el resultado de interpretar con nociones lógicas algunos de esos cálculos por ella misma construidos. Con otras palabras: si la lógica se presenta ella misma como un lenguaje formalizado, la lógica puede emplearse también como instrumento para formalizar otros lenguajes. En el ejemplo que hemos estudiado todo quedaba dentro del reino de la pura lógica: las nociones fundamentales del sistema eran nociones lógicas (enunciado, negación, disyunción); de carácter lógico (es decir, lógicamente verdaderos) eran también los enunciados de partida del sistema, los axiomas; y los teoremas eran tautologías, verdades lógicas, formulaciones de esquemas válidos de inferencia.

Pero muy bien pudiera ocurrir que la teoría a formalizar no fuera una teoría lógica. Que ni sus nociones fueran nociones lógicas, ni sus enunciados —básicos o derivados— leyes lógicas, sino, por ejemplo, enunciados de la mecánica celeste, o de la genética, o de la teoría del aprendizaje. No se trataría, en estos casos, de una formalización de la lógica, sino de la formalización de una cierta teoría por medio de la lógica. Al desbordar el ámbito de la lógica pura y aplicar el cálculo a una materia extralógica, nos encontraremos con que los enunciados de partida del cálculo no serán ya verdades lógicas, sino, para decirlo de modo simplista, verdades materiales de la teoría en cuestión. Verdades materiales serán también los teoremas. Y la lógica no estaría, por lo tanto, ni en el punto de partida ni en el punto de llegada, sino a lo largo del camino: en la regulación de los procesos de deducción entre esos enunciados que no le pertenecen.

Límites de la lógica de enunciados (Epílogo Deaño)

Acabamos de iniciarnos en la lógica de enunciados. Primero, de una manera poco menos que intuitiva. Más tarde, exponiéndola en la forma de cálculo axiomático. Finalmente, presentándola a modo de sistema de reglas de inferencia. Que estas dos formas de presentación son equivalentes es algo que, por explicado y repetido, no necesita ya ahora más que una breve evocación. Se exponga como sistema axiomático o como cálculo de deducción natural, la lógica de enunciados es la misma. Al decir que es la misma queremos significar que en ambos casos tiene el mismo rendimiento. Y al decir que en ambos casos tiene el mismo rendimiento venimos a señalar que, sea cual fuere la forma que se le dé, su poder de análisis formal de la validez de las inferencias entre enunciados sin analizar tendrá siempre el mismo alcance. Ese poder no es otro que el de **identificar como formalmente válidos aquellos razonamientos en los que la conclusión se siga necesariamente de las premisas y el de detectar como no válidos aquellos otros en los que esto no ocurra**.

Así pues, presentar la lógica de enunciados como sistema axiomático supone encontrar un conjunto de axiomas lo suficientemente fértil como para dar de sí todos y sólo los enunciados verdaderos construibles combinando los símbolos primitivos del cálculo mediante las reglas de formación. Y si de presentarla como cálculo de deducción natural se trata, hemos de procurarnos un repertorio de reglas de inferencia que permitan obtener todas y sólo las consecuencias que válidamente se siguen de las premisas de que se trate.

Todas, y sólo. Hemos tocado fondo. La exigencia de que en un cálculo sólo puedan ser obtenidos por derivación los enunciados verdaderos construibles con sus símbolos es la exigencia de que ese cálculo sea consistente. La exigencia de que en él sea posible deducir todos los enunciados verdaderos relativos a la teoría que con ese cálculo se pretende formalizar (la exigencia de que no haya ningún enunciado expresable en el cálculo del que se sepa que es verdadero, pero cuya verdad no pueda ser establecida demostrativamente) es la exigencia de que ese cálculo sea completo. Estas son exigencias que se hacen al cálculo como un todo desde fuera de él, desde un metalenguaje. Cuando estudiamos un cálculo por ver si cumple estos requisitos estamos haciendo la metateoría de ese cálculo.

Ahora bien: aunque, en abstracto, no haya diferencia entre presentar una teoría lógica como sistema axiomático y darle la forma de sistema de reglas de inferencia, cuando optamos por una u otra modalidad lo hacemos obedeciendo a motivaciones muy concretas. La presentación de la lógica en forma de sistema de reglas de inferencia favorece, como hemos visto, su aplicación al razonamiento natural. Pero, por otra parte, su presentación como sistema axiomático hace más cómodas las consideraciones metateóricas. Y son metateóricas las consideraciones que ahora estamos bosquejando. Por eso desde ahora las referencias las haremos a la lógica de enunciados entendida como sistema axiomático, a sabiendas de que todo cuanto digamos puede hacerse extensivo a cualquier presentación de la lógica de enunciados como cálculo de deducción natural.

De sobra sabemos que cuando un enunciado es verdadero su negación es falsa, y viceversa. Cabe decir, entonces, que un determinado sistema es consistente cuando en él es imposible demostrar a la vez un enunciado y su negación. Dicho de otro modo: un sistema es consistente cuando, si X es una tesis del sistema, $\neg X$ no lo es. Si en un sistema fuera posible demostrar a la vez un enunciado y su negación, entonces en ese sistema sería demostrable todo enunciado.

En efecto, Puesto que un condicional con antecedente falso es siempre verdadero, cualquier expresión de la forma $X \to (\neg X \to Y)$ será una tautología. Tomemos esa expresión como premisa, y supongamos ahora que han sido demostrados en el sistema dos expresiones de la forma X y $\neg X$ (puesto que estamos operando sobre la base de que se trata de un sistema inconsistente).

1.	$X \to (\neg X \to Y)$	P
2.	X	P
3.	$\neg X$	P
4.	$\neg X \to Y$	RE $\to$ 1,2
5.	Y	RE $\to$ 3,4

Puesto que Y puede ser sustituida por cualquier expresión del cálculo, es evidente que si en éste hubiera dos tesis que tuvieran respectivamente la forma X y $\neg X$, cualquier expresión construible con los símbolos del cálculo sería una tesis de éste. Quiere ello decir, entonces, que **si un sistema es inconsistente son demostrables en él todas las expresiones bien formadas en él construibles**. Lo cual a su vez quiere decir —utilizando de pasada la **Regla de Contraposición del Condicional** $(X \to Y) \models (\neg Y \to X)$ — que si no todas las fórmulas bien formadas de un sistema son demostrables —es decir, si hay al menos una que no lo es—, entonces es que el sistema es consistente.

Por otra parte, para que un cálculo constituya la formalización adecuada de una teoría ha de contar con unos axiomas lo suficientemente fecundos y unas reglas de transformación lo suficientemente fertilizantes como para poder demostrar todos los enunciados verdaderos de la teoría en cuestión. Se dice entonces que **el sistema es completo**.

Dos son las definiciones que fundamentalmente se dan de la **noción de compleción**:

1. La primera —mediante la que se expresa el **sentido «débil»** de este concepto— establece que un sistema es completo si **toda expresión verdadera construible con sus símbolos es una tesis del sistema**. En una teoría formalizada de manera completa dentro de un determinado cálculo no hay, por tanto, verdades «libres»: están todas controladas, en el sentido de que pueden ser establecidas a partir de la verdad de los axiomas transmitida por las reglas de inferencia.
2. La segunda ofrece una caracterización de la **noción de compleción por respecto a la de consistencia**. Un sistema es completo en **sentido fuerte** cuando, si se amplía su base axiomática, se vuelve inconsistente. **Consistencia y compleción son**, entonces —cuando empleamos este último término en este sentido— dos **nociones en tensión**: diríamos, si se nos permite el desenfado, que un cálculo puede resultar inconsistente por «pasarse de» completo, y resultar incompleto por «pasarse de» consistente.

Para tranquilidad del lector digamos que **el cálculo de la lógica de enunciados es un cálculo consistente y completo**. O, por mejor decir, que a la lógica de enunciados se le puede dar la forma de un cálculo que reúna los requisitos de consistencia y compleción. Los dos que nosotros hemos presentado, por ejemplo, son cálculos acreditados que las reúnen.

Así, la teoría lógica más elemental es un cálculo acabado, terminante. Sobre cualquier inferencia que sometamos a su consideración emitirá un dictamen inapelable. ¿Sobre cualquier inferencia? Tomemos una:

No hay judíos en la cocina

Ningún gentil dice «sphoonj»

Todos mis sirvientes están en la cocina

Mis sirvientes no dicen nunca «sphoonj»

Si ahora, utilizando los instrumentos de formalización de que hasta el instante disponemos, intentáramos representar la forma de este razonamiento con el fin de llegar a una estimación de su validez, nos encontraríamos con lo siguiente:

p
q
r
--
s

Y es evidente que, visto así, no se trata de un razonamiento válido. Es evidente —dicho de otro modo— que $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$ no es una tautología.

Y, sin embargo, «tenemos la sensación» de que se trata de un razonamiento correcto en su forma, de que si sus premisas son verdaderas, la conclusión cae por su propio peso. Da la impresión de que el dictamen de la lógica de enunciados no es aquí inapelable, de que podemos apelar a una instancia lógica superior, a un cálculo lógico de mayor capacidad analítica.

Así es. Se trata de un razonamiento formalmente válido. Lo que ocurre es que no hemos sido capaces de mostrar su forma lógica. Porque su forma lógica en ésta:

$\neg \vee x(Jx \wedge Cx)$
$\wedge x(\neg Jx \rightarrow \neg Dx)$
$\wedge x(Sx \rightarrow Cx)$

$\wedge x(Sx \rightarrow \neg Dx)$

1.	$\neg \vee x(Jx \wedge Cx)$	P
2.	$\wedge x(\neg Jx \rightarrow \neg Dx)$	P
3.	$\wedge x(Sx \rightarrow Cx)$	P
4.	$\wedge x \neg(Jx \wedge Cx)$	Df $\vee$ 1
5.	$\wedge x(\neg Jx \vee \neg Cx)$	Df $\wedge$ 4
6.	$\wedge x(Jx \vee \neg Cx)$	Df $\vee$ 5
7.	$Ja \rightarrow \neg Ca$	RE $\wedge$ 6
8.	$\neg Ja \rightarrow \neg Da$	RE $\wedge$ 2
9.	$Sa \rightarrow Ca$	RE $\wedge$ 3
10.	$Ca \rightarrow \neg Ja$	RContr $\rightarrow$ 7
11.	$Sa \rightarrow \neg Ja$	RTr $\rightarrow$ 9,10
12.	$Sa \rightarrow \neg Da$	RTr $\rightarrow$ 11,8
13.	$\wedge x(Sx \rightarrow \neg Dx)$	RI $\wedge$ 12

Se trata de un razonamiento formalmente válido, pero cuya validez no puede ser establecida mediante el solo cálculo de enunciados. Y es que hay otras muchas formas válidas de razonar, además de aquellas que la lógica de enunciados es capaz de reconocer. Hay razonamientos cuya validez depende de algo más que de las puras relaciones entre enunciados que no se analizan. En lógica, con la lógica de enunciados no hemos hecho más que empezar.

Resumen esquemático

Lenguaje natural y lenguaje formal. Verdad y validez

Lenguaje y metalenguaje

A veces utilizamos el lenguaje para hacer referencia dentro de él al propio lenguaje:

- **Lenguaje:** conjunto de recursos expresivos que empleamos para hablar de cierto ámbito de la realidad. Cuando hablamos del propio lenguaje, este lenguaje del que hablamos recibe el nombre de **lenguaje-objeto**
    - Para evitar confusiones (sobre todo si el lenguaje objeto es el mimo que el lenguaje principal), estas palabras aparecen entrecomilladas en el texto.

        La expresión 'democracia popular' es una redundancia
- **Metalenguaje:** es el lenguaje que empleamos para hablar del lenguaje-objeto. Igual que en el lenguaje, ha de tener palabras para nombrar las entidades que constituyen el lenguaje objeto que no son sino expresiones lingüísticas.

Semiótica: sintaxis, semántica y pragmática

Semiótica: ciencia que se ocupa de los signos, o de los lenguajes en cuanto sistemas de signos.

- Semántica: disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello que éstos designan, entre los signos y aquello de lo cual hablamos por medio de ellos:

    Abstracción del hablante limitándonos a la relación entre los signos que componen un lenguaje y aquellas entidades a las que esos signos apuntan: una palabra designará un tipo de fenómeno atmosférico, un sentimiento, una nombrar a un famoso asesino
- Pragmática: tipo de indagación semiótica en la que entra en juego la consideración de las relaciones entre los elementos de un lenguaje y los sujetos —individuos o comunidades lingüísticas— que emplean ese lenguaje como medio de comunicación.

    Nos interesamos por el lenguaje en cuanto forma de conducta, en cuanto actividad de un sujeto o de un grupo de sujetos
- Sintaxis: puro estudio de las relaciones de los signos entre sí, la teoría de la construcción e identificación de las secuencias de signos bien formadas:

    Abstracción de todo aquello que no sea la pura materialidad de los signos para poder estudiar las nudas relaciones entre ellos: prescindimos del sujeto hablante, prescindimos de la referencia de las expresiones a algo ajeno a ellas; nos limitamos a considerar aisladamente la estructura de las cadenas de signos.

Cálculos

Un cálculo es una **pura estructura**, un **sistema de relaciones** que se compone de lo siguiente:

1. Un conjunto de **elementos primitivos**, llamados a menudo «**símbolos elementales**».
   - Constituyen las piezas a manejar dentro del sistema.
   - Debe definirse de manera efectiva
2. Un conjunto de **reglas de formación**
   - Establecen las combinaciones correctas posibles de esos símbolos elementales.
   - El conjunto de las reglas de formación que hace que sea posible, ante cualquier combinación de símbolos, decidir si es o no una fórmula bien construida.
3. Un conjunto de **reglas de transformación**.
   - Permiten transformar una combinación bien construida de símbolos en otra combinación que resultará igualmente bien construida.
   - Ha de ser posible en todos los casos dictaminar si una transformación ha sido efectuada correctamente.

El dejar de manejar formalmente el puro cálculo y pasar a interpretar sus símbolos se convierte a éste en un lenguaje. No se trata de un lenguaje natural, sino de un **lenguaje formalizado**, un lenguaje con estructura de cálculo, un lenguaje en el que no sólo es artificial el vocabulario, sino también la sintaxis.

Entenderemos la **lógica como un conjunto de lenguajes formalizados**, es decir, como un conjunto de cálculos a los que se da una interpretación en el campo de investigación que, por lo menos desde Aristóteles, constituye el objeto de la lógica.

La idea de lógica formal

> la lógica es la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia.

Inferencia / argumento

- **Inferencia o argumento:** conjunto de enunciados pertenecientes a un lenguaje previamente especificado en el que la verdad de uno de ellos (la **conclusión**) se puede justificar en la verdad de los otros (las **premisas**).

Enunciados

- **Enunciado:** clase de oraciones de las que siempre cabe preguntar, con buen sentido, si son verdaderas o falsas.

Aristóteles *(en"De Interpretatione")* llama a estas oraciones **apofánticas** (de 'απόφασις', declaración, enunciación). Podemos referirnos a ellas como **oraciones declarativas**. El uso del lenguaje para hacer oraciones verdaderas o falsas, se llama **uso apofántico**. .

> *«Todo discurso ('λόγος') es significativo (...). Pero no todo discurso es apofántico, sino sólo aquel en el que se da el ser, verdadero o falso. No se da esto en todos, pues, por ejemplo, un ruego no es ni verdadero ni falso».*

Una mera consecución de enunciados no es una inferencia.

Verdad (enunciados) y validez (inferencias): validez formal

Dado el objetivo de la lógica formal, cabe dividir los razonamientos en **válidos** e **inválidos**.

la validez de un razonamiento es independiente de la verdad de sus premisas y su conclusión

No es lo mismo la verdad de los enunciados que componen una inferencia (sus premisas y su conclusión) que la validez de dicho argumento, aunque si presentan relación:

- No hay razonamientos válidos que tengan premisas verdaderas y conclusión falsa.
- De manera general, decimos que un argumento es válido cuando:
  - Si sus **premisas** son **verdaderas**, su **conclusión** tiene que ser **forzosamente verdadera**.
  - **No es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa**.

La lógica no se ocupa de verdades materiales, sino de las relaciones formales entre ellas.

- Si las premisas son todas verdaderas y la inferencia es válida, la conclusión es verdadera
- Si la inferencia es válida y la conclusión es falsa, al menos una de las premisas es falsa
- Si las premisas son todas verdaderas y la conclusión es falsa, la inferencia es inválida

La validez de un argumento no apoya por sí sola la verdad de la conclusión, requiere también que las premisas sean verdaderas. La validez no es la única propiedad deseable de una inferencia, pero es la única de la que se ocupa la lógica. El cometido del lógico es determinar si las premisas constituyen una buena razón para la conclusión, o si la conclusión se sigue de las premisas.

Inferencias inválidas con premisas verdaderas

Determinadas inferencias presentan una serie de aspectos particulares, que si bien a priori son buenas formas de argumentar; no sirven para establecer la verdad de la conclusión

- Premisas entimenas: La mayoría de inferencias del discurso cotidiano son entimenas: inferencias en las que se deja me mencionar o están elípticas una o más premisas.
- Petición de principio: Si en una inferencia se invoca una premisa tácita o se usa una premisa que dice lo mismo que la conclusión, se incurre en la **falacia de petición de principio** *(petitio principii),* tesis ya establecida por Aristóteles de que no se puede postular o afirmar aquello mismo que es preciso demostrar. Se comete una petición de principio cuando se da por probado lo que se quiere probar.
- Razonamiento circular: Aquel en que premisa y conclusión se respaldan recíprocamente
- Conclusión y premisas sin relación: Cuando sea lógicamente imposible que la conclusión derive de las premisas no cabe la posibilidad de que la premisa sea verdadera y la conclusión falsa, al no ser relevantes para la conclusión.

La petición de principio y el razonamiento circular pueden ser inferencias perfectamente válidas desde el punto de vista lógico, pero no son útiles, ya que la premisa no tiene relevancia alguna para la conclusión.

Formas lógicas y constantes lógicas. Formalizar e interpretar

Todo razonamiento tiene una forma y un contenido; una estructura, y un asunto de que trata. **A la lógica le importa únicamente la forma de los razonamiento**s. La lógica es lógica formal, ciencia de las formas o **esquemas válidos de razonamiento**:

- Lo esencial en todo razonamiento formalmente válido es la **relación de necesidad que se establece entre premisas y conclusión**, de tal modo que la verdad de las primeras acarrea inevitablemente la verdad de la segunda.
- Existe una conexión profunda entre la validez y la forma de los argumentos:
  - **la validez de una inferencia depende de la forma o estructura lógica de la misma.**

Para poder evaluar la validez de las inferencias del lenguaje natural es preciso especificar previamente la forma lógica de las mismas (traducción a un esquema de los lenguajes formales existentes).

Formalizar un lenguaje es trazar en el correspondiente metalenguaje su estructura, su sintaxis.

- Es necesario en lógica "endurecer" las reglas —sintácticas— de formación, en aras de evitar que en los sistemas lógicos puedan crearse enunciados sin sentido, buscando que la sintaxis y la semántica coincidan en lo posible;
- La lógica desearía que todos los enunciados bien formados (sintácticamente correctos) tuvieran sentido (fueran semánticamente buenos), y que la inversa fuera verdadera.
- El ideal de coincidencia de sintaxis y semántica es inalcanzable incluso en lógica.

> La lógica es un saber formalizado acerca de los principios formales del razonamiento

Formalizar: traducir un enunciado o un conjunto de enunciados, escritos en lenguaje natural, al lenguaje formal o lenguaje-fórmula.

- **Variables lógicas**: símbolos que representan un enunciado (o conjunto de enunciados)
- **Constantes lógicas**: expresiones como "y", "no", "si .. entonces", que no se pueden sustituir por otras expresiones lógicas sin correr el riesgo de que la validez del esquema se vea afectada. En torno a estas partículas se articula la llamada *lógica de enunciados o proposicional* cuyo cometido es estudiar la validez de aquellos argumentos que dependen exclusivamente de las conexiones entre los enunciados componentes.

Lo primero que se hace es presentar un **diccionario**, en el que asociamos cada enunciado atómico con una letra enunciativa (p , q , r ,...). A continuación, componemos las letras enunciativas con los operadores lógicos pertinentes para escribir la fórmula que recoge la forma del enunciado.

"La educación no alcanzará buenos resultados a menos que se reduzca el nº de alumnos/ clase"

p : La educación alcanzará buenos resultados q : Se reduce el número de alumnos por clase	Fórmula: $p \rightarrow q$ (o bien: $\neg q \rightarrow \neg p$)

Interpretar una fórmula o un esquema inferencial es recorrer el camino inverso: pasar del lenguaje formal al natural.

Fórmula: $\neg p \wedge (p \rightarrow q)$	p : Los peces cantan q : Las manzanas vuelan

Interpretación: *Los peces no cantan y, si cantan, las manzanas vuelan.*

Operadores lógicos proposicionales. Reglas de formación de fórmulas. Formalización del lenguaje natural

El lenguaje de la lógica de enunciados

El apartado más elemental de la lógica formal es la lógica de enunciados o de proposiciones, lógica que nos llega hoy en forma de cálculo (o sistema de cálculos). El cálculo base, el cálculo en el que se apoya y sobre el cual se construye el edificio de la lógica es el cálculo de enunciados.

La tarea de la lógica es el análisis, formal de los razonamientos. Y el lugar de ese análisis es el lenguaje. Sólo en el lenguaje, sólo en la medida en que están formulados en un lenguaje se ofrecen los razonamientos a la posibilidad del análisis. **El análisis del razonamiento supone**, por tanto, **un análisis del lenguaje**. Un **análisis lógico del lenguaje**.

Elementos del lenguaje de la lógica de enunciados:

- **Variables enunciativas**: usadas para representar enunciados simples del lenguaje natural.[3]
- **Conectivas**: sean *negación* ($\neg$) , *conjunción* ($\wedge$) , *disyunción* ($\vee$) , *condicional* ($\rightarrow$) y *bicondicional* ($\leftrightarrow$) . Todas contribuyen a fijar con precisión cómo el valor de verdad de la fórmula en que figuran depende de los valores de verdad de los componentes.
  - La negación es una conectiva **monádica**, ya que es la única que puede afectar a una sola proposición ($\neg p$), o a una proposición compuesta ($\neg(p\wedge q)$).
  - El resto de conectivas son **diádicas**, ya que siempre han de referirse a dos proposiciones $p\wedge q$, $q\rightarrow(p\vee s)$, y nunca a una sola: $q\wedge$, $\vee p$, $r\leftrightarrow$ no son posibles,
- Los paréntesis y demás **símbolos de puntuación** sirven para señalar el *alcance* de conectivas de modo que no existan ambigüedades sintácticas.

Negación

Negación ($\neg X$) de una fórmula verdadera es falsa, y de una falsa es verdadera.

- De dos enunciados, uno de los cuales es la negación del otro, se dice que son contradictorios entre sí.
- La aparición de la partícula "no" en lenguaje natural no siempre corresponde con una negación del enunciado (ni puede dar lugar por ello a una contradicción

p	$\neg p$
1	0
0	1

Conjunción

Conjunción ($X\wedge Y$) de dos fórmulas es verdadera si ambas son verdaderas, y falsa con que al menos una de ellas lo sea.

- No existe correlación total entre la partícula "y" y la conjunción lógica
- Conmutatividad: $p\wedge q\equiv q\wedge p$ contradicción

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

---

3 Cuando las variables aparecen como p,q,r son equivalentes a enunciados independientes, cuando se expresan X,Y,Z hacen referencia de modo genérico tanto a enunciados como conjunto de enunciados.

Disyunción

<u>Disyunción</u> ($X \vee Y$) de dos fórmulas es verdadera cuando al menos una de ellas lo es, y falsa cuando ambas son falsas.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- $X \vee Y$ corresponde con el **sentido no-excluyente** de la disyunción en el lenguaje ordinario
- $X \vee \vee Y$ **sentido excluyente de la disyunción**
  - $p \vee \vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$
- Conmutatividad: $p \wedge q \equiv q \wedge p$ contradicción

La definición explícita de la disyunción nos permite ver cómo funciona esta conectiva en una inferencia. Dado que la disyunción es verdadera cuando alguno de sus componentes lo es, siempre podremos inferir de una disyunción y de la negación de uno de sus componentes la afirmación del otro (regla de **inferencia de la alternativa**, también llamado silogismo disyuntivo). En cambio, por esta misma razón, no será lícito derivar la negación de uno de los componentes de una disyunción a partir de ésta y de la afirmación del otro.

Condicional

<u>Condicional</u> ($X \rightarrow Y$) es falsa cuando la fórmula antecedente es verdadera y la consecuente falsa, y es verdadera en los demás casos.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Es la conectiva de la lógica proposicional cuyo significado se aparta más del de las expresiones correspondientes del lenguaje natural.
- A los esquemas compuestos mediante esta conectiva, $p \rightarrow q$, se los denomina condicionales, llamándose **antecedente** al componente que ocupa la posición p y **consecuente** al que ocupa la posición q . el condicional es, al igual que la conjunción y la disyunción, un enunciado compuesto que admite, como un todo global, un valor de verdad.

  Un condicional sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, siendo verdadero en todos los demás casos.
- **Contraposición del condicional:** las siguientes expresiones son equivalentes:
  - $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Características de suficiencia y necesariedad en el condicional

El condicional puede ayudarnos a analizar y a comprender mejor dos nociones empleadas con mucha frecuencia en nuestro lenguaje común: las de **condición suficiente y necesaria**:

- A <u>es **condición suficiente** de</u> B en caso de que B sea verdadero si A es verdadero. Así pues, el antecedente de un enunciado condicional establece la condición suficiente para su consecuente.
- B <u>es **condición necesaria** de</u> A en caso de que A sea verdadero sólo si B es verdadero. Así, el consecuente de un condicional establece una condición necesaria para su antecedente.

Si A entonces B / Sólo si A entonces B / A si y sólo si B

- Si A, entonces B (B si A): $A \to B$
  - Lo que va detrás de "**si**" es un antecedente.
  - *El hecho de que ocurra* A*, es suficiente para que ocurra* B
- Sólo si A, entonces B (B sólo si A): $B \to A$
  - Lo que va detrás de un "**sólo si**" es un consecuente.
  - *El que se haya dado* B *es necesario para que haya ocurrido* A
- Si y sólo si A, entonces B (A si y sólo si B / B si y sólo si A): $A \leftrightarrow B$
  - Lo que va detrás de un "**si y sólo si**" es antecedente y consecuente, es un bicondicional.
  - A *y* B *son respectivamente condición el uno del otro*

No A a menos que B

No aprobaré, a menos que estudie = Si no estudio, no aprobaré = Para aprobar es necesario estudiar:

- No A a menos que B
  - A: Apruebo
  - B: Estudio
- $\neg B \to \neg A$
- $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ **ley de contraposición del condicional**
  - B es condición necesaria para A

No A a menos que B y C

No aprobaré, a menos que estudie y lleve un boli al examen = Si no ocurre que estudio y llevo un boli al examen, no aprobaré = Para aprobar es necesario que estudie y que lleve un boli al examen

- No A a menos que B y C
  - A: Apruebo
  - B: Estudio
  - C: Llevo un boli al examen
- $\neg(B \wedge C) \to \neg A$
- $A \to (B \wedge C)$

A a menos que B

Aprobaré, a menos que se acabe el mundo = Si no se acaba el mundo, aprobaré = Para no aprobar es necesario que se acabe el mundo

- A a menos que B
  - A: Apruebo
  - B: Se acaba el mundo
  - $\neg B \to A$
  - $\neg A \to B$

A a menos que no B

Aprobaré a menos que no lleve un boli al examen = Si llevo un boli al examen, aprobaré = Si no apruebo es que no llevaba un boli al examen

- A a menos que no B
  - A : Apruebo
  - B : Llevo un boli al examen
  - $B \rightarrow A$ que según la ley de contraposición del condicional equivale a $\neg A \rightarrow \neg B$

Condicional ≠ implicación lógica

No hay que confundir el condicional (mal llamado a veces implicación material) con la **implicación lógica,** por más que sean nociones relacionada entre sí.

- La **implicación** es una de las conectivas que sirve para construir fórmulas de un lenguaje a partir de otras fórmula de dicho lenguaje.
- La **implicación lógica** es una expresión que se coloca entre nombres de fórmulas de dicho lenguaje.

Cuando decimos '*si* p *, entonces* q ' decimos que si se da el hecho enunciado por el antecedente, entonces se dará el hecho enunciado por el consecuente (el antecedente es **condición suficiente**).

Cuando decimos '"p" *implica* "q"' estamos diciendo que **la verdad del antecedente implica la verdad del consecuente**. Y de sobra sabemos que '*verdad*' y '*falsedad*' son **predicados metalingüísticos** por respecto a aquello de lo que se predican.

- Cuando decimos que un esquema implica otro, estamos diciendo que, suponiendo que el primer es verdadero, la estructura de los dos garantiza que el segundo también lo es.

Condicional e implicación son, por tanto, nociones situadas en niveles distintos de lenguaje.

De este modo, al enunciado

Spinoza era descendiente de marranos, luego Spinoza era descendiente de marranos o su familia procedía de España

le corresponde la fórmula condicional $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Cuando una inferencia es válida, como en este caso, la fórmula condicional correspondiente es siempre verdadera bajo todas las interpretaciones posibles de sus variables.

A toda inferencia le corresponde un enunciado hipotético cuyo antecedente es la conjunción de la premisas y cuyo consecuente es la conclusión

En este caso decimos que el esquema p implica lógicamente el esquema $p \vee q$. En general, cuando un condicional es **tautológico** (o verdadero para todas las interpretaciones de sus componentes) podemos decir que el antecedente del mismo implica su consecuente.

Esta conexión ha llevado a adoptar la palabra '**implica**' como lectura del condicional, pero para evitar el riesgo de confundir dicha conectiva con la implicación lógica, es preferible denominar '**condicional'** a dicha conectiva y leerla como *'si… entonces'* y reservar el nombre '**implicación**' para la segunda noción, para el que también tenemos el término de '**consecuencia lógica**' en la que del primero "se sigue" el que el segundo sea consecuencia de éste.

Bicondicional

p	q	$p\leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

<u>Bicondicional</u> ($X\leftrightarrow Y$) es verdadera cuando ambas son verdaderas o ambas son falsas.

- p es condición necesaria y suficiente para q
  - $p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$

Bicondicional ≠ equivalencia

p	q	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

Si no hay que confundir la implicación con el condicional, tampoco hay que hacerlo entre equivalencia y bicondicional. Se dice que dos esquemas son equivalentes si cada uno de ellos implica el otro, esto es, si el primero implica el segundo y el segundo implica al primero.

$\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$ Son equivalentes porque la primera implica la segunda y ésta a su vez la primera.

Del mismo modo que una implicación no es sino un condicional válido, una equivalencia no es sino un bicondicional válido o verdadero para todas sus interpretaciones posibles.

'*si y sólo si* p *, entonces* q ' no significa lo mismo que ' p *es equivalente a* q '.

- Cuando decimos '*si y sólo si* p *, entonces* q ' estamos usando el lenguaje para decir que lo enunciado por p es **condición suficiente y necesaria** de lo enunciado por q .
- Al decir ' p *es equivalente a* q ' usamos el metalenguaje para expresar una relación entre nombres de enunciados —reducidos a sus valores de verdad—, y no entre los enunciados mismos. En este sentido, lo correcto estrictamente sería '" p " es equivalente a " q "'.

Cuando decimos '*si y sólo si* p *, entonces* q ' estamos diciendo que sólo en el caso de que se dé lo enunciado por el antecedente se dará lo enunciado por el consecuente. Cuando decimos '" p " *es equivalente a* " q "' estamos diciendo que los valores de verdad del antecedente son en todos los casos los mismos que los del consecuente.

Interdefinibilidad de la conectivas

$IC\rightarrow,\wedge \quad \dfrac{X\rightarrow Y}{\neg(X\wedge\neg Y)}$	$IC\wedge,\rightarrow \quad \dfrac{X\wedge Y}{\neg(X\rightarrow\neg Y)}$	$IC\vee,\rightarrow \quad \dfrac{X\vee Y}{\neg X\rightarrow Y}$	$IC\leftrightarrow \quad \dfrac{X\leftrightarrow Y}{(X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow X)}$
$IC\rightarrow,\vee \quad \dfrac{X\rightarrow Y}{\neg X\vee Y}$	$IC\wedge,\vee \quad \dfrac{X\wedge Y}{\neg(\neg X\vee\neg Y)}$	$IC\vee,\wedge \quad \dfrac{X\vee Y}{\neg(\neg X\wedge\neg Y)}$	

- $(X\rightarrow Y)\equiv(\neg X\vee Y)$: Del condicional a la disyunción
- $(X\rightarrow Y)\equiv(\neg(X\wedge\neg Y))$: Del condicional a la negación de la conjunción

- Leyes de De Morgan
  - $(X\vee Y)\equiv(\neg(\neg X\wedge\neg Y))$
  - $(X\wedge Y)\equiv(\neg(\neg X\vee\neg Y))$
  - $(\neg(X\wedge Y))\equiv(\neg X\vee\neg Y)$
  - $(\neg(X\vee Y))\equiv(\neg X\wedge\neg Y)$

Reglas de formación de fórmulas

A partir de los elementos del vocabulario se pueden construir **fórmulas** en un lenguaje formal y que son equivalente de la oraciones de un lenguaje natural. Mientras que no existen leyes precisas para delimitar con total precisión la secuencia de palabras que constituye una oración en un lenguaje natural, sí existen para la secuencia de símbolos que constituyen las fórmula en el lenguaje proposicional.

Nos servimos para ello de las letras X, Y, Z , letras **metalingüísticas, metavariables**: símbolo del lenguaje desde el que hablamos del lenguaje proposicional, con los que definimos la clase de las fórmulas de la lógica enunciativa del siguiente modo:

1. Toda variable enunciativa es una fórmula.
2. Si X es una fórmula, también lo es $\neg X$.
3. Si X e Y son fórmulas, también lo son $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$, $(X \leftrightarrow Y)$.
4. Sólo son fórmulas las secuencias que satisfacen alguna de las cláusulas 1-3.

En la lógica enunciativa clásica se contemplan sólo dos valores veritativas posibles para las fórmula: V y F ; de las que en consecuencia han de cumplirse los siguientes principios:

- Principio de identidad: $A = A$. En lógica no hay problemas de identidad como sí ocurren en el mundo, donde $Yo_{hoy} \neq Yo_{ayer}$.
- Principio de bivalencia: Requisito para la utilización de la lógica de enunciados en la evaluación de inferencias del lenguaje natural, y que establece que **un enunciado sólo puede ser verdadero o falso**.
- Principio del tercio excluso (PTE): **e**stablece que la disyunción de un enunciado con su negación es una verdad lógica. $(p \vee \neg p) \quad V$
    - Algunos lógicos ven en este requisito una gran limitación y ven la conveniencia de desarrollar lógicas en la que se admitan más de dos valores de verdad. Estas lógicas que no asumen el principio de bivalencia se conocen como lógicas **polivalentes**, o más acertadamente, **multivaluadas.**
- Principio de no contradicción: No puede ser que $\neg(A \wedge \neg A)$ sea falso

Otro requisito para que esta utilización sea posible es que consideremos que las conectivas elegidas representan adecuadamente expresiones del lenguaje ordinario como *'no'*, *''*, *'si ... entonces'*.

Formalización del lenguaje natural

El lenguaje de la lógica es un lenguaje artificial y como tal es un lenguaje restringido, con un radio de expresión corto. Son lenguajes diseñados especialmente para formular sólo determinadas cosas. Si bien su capacidad expresiva es menor, es mayor su precisión que la de cualquier lengua.

- Los lenguajes naturales sirven para todo.
- Los lenguajes artificiales sirven a un objetivo concreto. Y esa misión específica la cumplen con mayor exactitud que el lenguaje ordinario —cuya ambigüedad es, por lo demás, algo a celebrar en muchos casos.

Ya que la lógica tiene por objeto el estudio de la validez formal de las inferencias, que aparecen inevitablemente formulados en el lenguaje, entonces:

- **El análisis lógico del razonamiento acarrea, pues, el análisis lógico del lenguaje**, del que resulta el lenguaje artificial, de la lógica.
- El análisis del lenguaje que la lógica lleva a efecto es, pues, análisis que busca en el lenguaje aquellos y sólo aquellos **elementos que sean relevantes para la validez formal de los razonamientos**. La lógica analizará simplemente los rasgos lógico-formales del lenguaje ordinario.
- El lenguaje lógico retiene del lenguaje natural aquello que interesa a la lógica, y prescinde de todo lo demás. En él sólo quedan recogidos y reorganizados aquellos elementos del lenguaje que se utilizan para urdir razonamientos.

Hacer lógica consiste, pues, en analizar formalmente las inferencias y en traducir luego los resultados de ese análisis a un lenguaje construido precisamente con el propósito de que en él resplandezca la forma de las inferencias.

¿Cómo formalizar?

Al afrontar la tarea de formalizar enunciados compuestos moleculares, lo primero que hay que tener en cuenta es que es preciso hacer explícitos todos y cada uno de los enunciados incluidos en la expresión del enunciado compuesto, teniendo en cuenta la posible aparición sincopada.

Es importante parafrasear adecuadamente un enunciado compuesto con el fin de detectar todos los enunciados simples que lo componen, agrupándolos adecuadamente a fin de detectar la conectiva dominante que prima sobre las demás.

Una vez detectadas las conectivas hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Alcance: la expresión más breve en la que aparece.
- La conectiva que tiene **mayor alcance** en un enunciado es la conectiva principal:
  - $p \vee q \wedge r$ es ambigua, ya que podría interpretarse como $p \vee (q \wedge r)$ como $(p \vee q) \wedge r$, cuyos significados son distintos. Los **paréntesis** resultan por tanto de máxima utilidad, ya que **definen el alcance de las diversas** conectivas.

Dado que el objetivo perseguido con la formalización es la justificación y crítica de la inferencia, la tarea de formalizar no consiste en simbolizar enunciados aislados unos de otros, sino teniendo en cuenta el contexto de la inferencia que deseamos evaluar. La tarea de parafrasear lógicamente el lenguaje común supone no sólo traducir conectivas de este lenguaje a conectivas lógicas, sino también reformular las cláusulas componentes en la medida en que sea necesario para asegurarlas frente a los cambios de significación que puedan producirse en el seno de las inferencias.

En general, la adecuación del análisis de una inferencia depende de que respetemos el principio de no dar a una misma expresión interpretaciones diferentes, cosa que, en el caso de la formalización en el ámbito de la lógica de enunciados, se traduce en la necesidad de emplear una variable enunciativa distinta para cada enunciado diferente. En la inferencia común algunas veces se produce una violación de este principio. En tal caso se incurre en lo que se llama **falacia de equivocación**.

A la hora de formalizar es importante estar atentos a los cambios de significación que puedan producirse dentro de los límites del argumento propuesto, así como ser capaces de detectar un mismo enunciado detrás de la diferencias estilística o de expresión de las distintas formulaciones en que aparezca en el seno de este.

Evaluación de formas lógicas

Toda ciencia es un sistema de enunciado que se refieren, de un modo más o menos lejano, a los objetos de los que esa ciencia se ocupa. Puesto que la lógica se ocupa del razonamiento desde el punto de vista de su forma, lo que sus enunciados enunciarán serán formas de razonar. Y puesto que la lógica es la ciencia de la inferencia formalmente válida, a la lógica le ha de interesar distinguir aquellas formas de inferencia que son válidas de aquellas otras que no lo son.

- En la perspectiva **semántica,** decir que un argumento es válido equivale a decir que la conclusión del mismo es una **consecuencia lógica** de las premisa.
  - encaminado a construir la conclusión a partir de las premisas, aplicando reglas deductivas que validan así el argumento. (≈ deducción natural)
- En la perspectiva **sintáctica**, decir que un argumento es válido es decir que la conclusión se sigue o se deduce de la premisas
  - encaminado a analizar las premisas y la negación de la conclusión para alcanzar fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas para encontrar, o bien una contradicción (lo cual prueba que las premisas implican la conclusión) o bien un contraejemplo que invalida, así, la conclusión. (≈ árboles semánticos)

- Los **enunciados** (castellano) son verdaderos o falsos.
- Las **fórmulas** (formas de los enunciados) son tautológicas (válidas), contradictorias o contingentes (meramente satisfacibles).
- Los **conjuntos de fórmulas** son contradictorios o satisfacibles.
- Los **argumentos** (castellano) tienen forma válida o inválida.
- Los **esquemas inferenciales** (formas de los argumentos) son válidos o inválidos.

Verdad o falsedad de un enunciado

Un enunciado puede ser verdadero (*"La Tierra es esférica"*) o falso (*"La Tierra es plana"*).

Fórmulas tautológicas (válidas), contradictorias o contingentes (meramente satisfacibles)

Tautologías: una fórmula bien formada que resulta verdadera para cualquier interpretación (cualquier asignación de valores de verdad que se haga a sus fórmulas atómicas).

- Son esquemas válidos. Las tautologías son, pues, enunciados formalmente verdaderos de la lógica de proposiciones que representan otras tantas formas válidas de razonar
- La doctrina de que *"los enunciado de la lógica son tautologías y, en consecuencia, no son informativos"* fue formulada por Wittgenstein (*Tractatus). Q*ue los enunciados tautológicos sean verdaderos bajo cualquier circunstancias hace que no dicen anda en absoluto.

Expresiones contingentes: no son formalmente verdaderos, pero tampoco falsos formalmente.

Contradicciones: Aquellas otras expresiones que son falsas en todos los casos posibles,

Tablas de verdad

Mediante las tablas de verdad podemos evaluar el tipo de fórmula.

- **Tautología**: Su tabla de verdad da el valor verdad (1) en todos los casos.
- **Contingentes**: Su tabla de verdad da en ocasiones el valor 1 y en ocasiones el valor 0
- **Contradicciones**: Su tabla de verdad da siempre como resultado el valor falsedad (0).

Árboles semánticos

Árbol para $\neg X$

Cierra	No cierra
$\neg X$ contradictoria	$\neg X$ consistente
X válida	X no válida

Árbol para X

Cierra	No cierra
$\neg X$ válida	$\neg X$ meramente consistente
X contradictoria	X meramente consistente

Conjuntos de fórmulas contradictorios o satisfacibles

La consistencia es una noción conectada con la de validez.

> Un conjunto de enunciados es consistente si es posible que sean verdaderos a la vez

Cuando se habla de conjuntos de fórmulas, es preferible hablar de **satisfacibilidad** mejor que de consistencia.

> Un conjunto de fórmulas es satisfacible si y sólo si (*syss*) hay al menos una interpretación que las hace verdaderas a la vez y se dice que es insatisfacible en caso contrario.

consistentes satisfacibles		$\neg(p \wedge \neg p)$ ...	válidas tautológicas
	contingentes	p ...	inválidas
inconsistentes insatisfacibles contradictorias		$p \wedge \neg p$,,	

- **Enunciados contradictorios**: Si dos en enunciados son contradictorios es lógicamente imposible que sean verdaderos a la vez y que sean falsos a la vez.
- **Enunciados inconsistentes**: dos enunciados para los que es lógicamente imposible que sean verdaderos a la vez.
  - todos los enunciados contradictorios son inconsistentes, pero el recíproco no es cierto: hay inconsistencias que no son contradictorias

Argumentos (castellano) tienen forma válida o inválida

Esquemas inferenciales (formas de argumentos) válidos o inválidos

¿Qué quiere decir que una forma de razonar es válida? Quiere decir que, para cualquier razonamiento que podamos hacer con esa forma, si las premisas son verdaderas, entonces lo es también necesariamente la conclusión. A su vez quiere decir que, cuando un razonamiento es formalmente válido, resulta contradictorio afirmar sus premisas y negar su conclusión.

Consecuencia lógica y verdad lógica

El que un argumento sea válido supone que sea imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Esto equivale a decir que un argumento válido es aquel en el que la conclusión es una consecuencia lógica de la premisas. Estamos ya en condiciones de dar una definición precisa de este concepto de **consecuencia** ($\models$)

$$[X_1,..,X_n] \models Y \text{ syss } \forall I / I(X_1)=I(X_2)=..=I(X_n)=1 \text{, entonces } I(Y)=1$$

Y es **consecuencia lógica** del conjunto de fórmulas X_i si y sólo si toda interpretación que hace verdaderas a la X_i hace también verdadera a Y .

Es en estos casos cuando se puede decir que el antecedente (la conjunción de las premisas) **implica** el consecuente (la conclusión).

Relacionada con ésta de consecuencia o implicación lógica es la de verdad lógica o tautología.

Una fórmula es una **verdad lógica (o tautología)** si es verdadera para todas las interpretaciones posibles de sus componentes, esto es, si es verdadera en virtud de su forma lógica.

Dicho de un modo preciso: $\models X \text{ syss } \forall I / I(X)=1$

Determinar que **un argumento es formalmente válido** consiste en ver que *la conclusión es una consecuencia lógica del conjunto de la premisas*

- Es decir, que no haya ninguna interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión).

Lo más frecuente es que ni en las premisas ni en la conclusión tengamos verdades lógicas. La mayor parte de la veces utilizamos argumentaciones válidas para alcanzar conclusiones cuyo valor de verdad dependerá del valor de verdad de las premisas. No que demostramos la verdad de la conclusión, sólo que la verdad de las premisas implica la verdad de la conclusión, demostramos la verdad de un condicional.

Cuando decimos que un argumento es válido, no afirmamos ni la verdad de las premisas ni la verdad de la conclusión, solo decimos que *en caso de que las premisas sean verdaderas, la conclusión tendrá que ser verdadera*, siguiéndose con necesidad lógica de la verdad de las premisas.

$Arg \approx [(P_1 \wedge P_2 \wedge .. P_n) \rightarrow C]$ Se demuestra una fórmula de tipo condicional, cuyo antecedente es la conjunción de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión

Cuando la conclusión de un argumento correcto es una verdad lógica, podemos hablar de demostración en dos sentidos:

1. demostración de la validez de la fórmula correspondiente a la conclusión
2. demostración de que las premisas implican la conclusión (pues una fórmula válida es implicada por cualquier fórmula o conjunto de fórmulas, incluido el conjunto vacío). Es decir, demostración de la validez de la relación condicional entre premisas y conclusión.

Se dice que **un argumento es demostrativo cuando es válido y todas sus premisas son verdaderas**, pues la corrección lógica nos asegura que la conclusión es, en ese caso, verdadera. Pero cuando no es la lógica la que sanciona la verdad de las premisas, no podemos decir que la deducción lógica es una demostración de la verdad de la conclusión.

Tablas de verdad y tautología

Existe una importante conexión entre el concepto de tautología y el concepto de validez.

A todo esquema de inferencia corresponde un condicional que tiene por antecedente el conjunto de las premisas y por consecuente la conclusión $(P_1 \wedge P_2 \wedge .. \wedge P_n) \rightarrow C$

Con las tablas de verdad podemos detectar la validez de un esquema de inferencia. Para decidir si una forma de razonar es válida o no, basta con hacer su tabla de verdad. Si encontramos que todas las combinaciones posibles de los valores de verdad dan como resultado el valor verdad (tautología), entonces diremos que se trata de una forma válida de inferencia.

Contraejemplos

Si pudiéramos hallar un ejemplo de argumento con la estructura en estudio en el que a partir de premisas verdaderas pudiéramos inferir una conclusión falsa, habríamos mostrado que semejante forma de inferencia no es válida ni, por tanto, ninguno de los argumentos con dicha forma.

Se trata de un argumento en el que la premisas son verdaderas y la conclusión, en cambio, falsa. Esto quiere decir que el esquema en cuestión no es válido, dado que admite ejemplos como éste, que por ello recibe el nombre de **contraejemplos.**

- El **contraejemplo de una fórmula** es un enunciado (castellano) falso con la forma de la fórmula;
  - la validez, aplicada a fórmulas, significa tautología
- El **contraejemplo de un esquema inferencial** es un argumento (castellano) con premisas verdaderas y conclusión falsa y con la forma del esquema inferencial.
  - la validez, aplicada a esquemas inferenciales, significa que hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión

En ambos casos, la presentación de un contraejemplo es suficiente para mostrar la invalidez de la forma lógica examinada.

Poner un contraejemplo no es negar la conclusión. Aunque sí hay métodos para la búsqueda de contraejemplos que parten del supuesto de la conclusión negada (árbol semántico).

Buscar un contraejemplo de un esquema argumentativo consiste en poner un ejemplo de argumento con la forma del esquema, tal que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Conviene aclarar el valor de verdad de cada enunciado que se escribe.

Deducción natural

Puesto que el razonamiento natural opera, desde un punto de vista lógico, a base de reglas de inferencia, y puesto que la lógica pretende constituir el análisis sistemático del razonamiento desde el punto de vista de su forma, parecería razonable hacer el intento de presentar la lógica como sistema de reglas de inferencia.

A cada ley corresponde una regla y a cada regla corresponde una ley. El conjunto de las leyes y el conjunto de las reglas son equivalentes. Una ley y una regla son lo mismo, sólo que dicho de dos maneras distintas. Una ley es un enunciado de la lógica. Una regla, también.

- Una **ley es el enunciado de un esquema válido de inferencia**, mientras que
- Una **regla es el enunciado de una instrucción para realizar una inferencia válida**.

Podemos presentar los modos válidos de razonar indiferentemente en la forma de leyes o en la forma de reglas. Se trata, sin embargo, de una indiferencia tan sólo en la teoría.

Cuando de lo que se trata es de buscar una aplicación más ajustada de la lógica al análisis del razonamiento común —tanto en la vida cotidiana como en la ciencia—, de dar cuenta formalmente de los procedimientos naturales de deducción, es preferible la presentación de la lógica en forma de reglas de inferencia.

Convalidación de argumentos mediante deducción natural

En 1934 Gentzen y Jaskowski presentan lo que Gentzen llama «un sistema de inferencia natural» El sistema de Gentzen se basaba, para la lógica de enunciados, en ocho reglas: **por cada una de las cuatro conectivas fundamentales** Gentzen nos ofrece **dos reglas,** una regla de **introducción** de la conectiva de que se trate, y otra de **eliminación** de ésta. ¿Por qué estos nombres?

Reglas básicas

Regla de Inserción de la negación

(RI ¬)

$$\begin{array}{l} X \\ Y \wedge \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

El modo de construir una fórmula cualquiera cuyo signo lógico principal es la negación es mostrando que, si la fórmula no estuviese negada, se caería en una contradicción. Es decir, cuando de una hipótesis (representada en este caso por X) se siguen consecuencias contradictorias (como las representadas por la expresión $(Y \wedge \neg Y)$, entonces podemos inferir que esa hipótesis es falsa. Se la podría llamar «**Regla de reducción al absurdo**».

Regla de eliminación de la negación

(RE ¬)

$$\begin{array}{l} \neg\neg X \\ \hline X \end{array}$$

Puesto que la lógica clásica es bivalente, la negación de una negación arroja una afirmación.

Si disponemos de una fórmula del tipo $\neg\neg X$, podemos afirmar X. Esta regla, también llamada de la **doble negación**, autoriza el paso de cualquier expresión doblemente negada a su afirmación. Es lo que ordinariamente se quiere decir al señalar que dos negaciones afirman.

Regla de Inserción de la disyunción

(RI $\vee$)

X		Y
-----------	o bien	------------
$X \vee Y$		$X \vee Y$

Para construir una fórmula de tipo $X \vee Y$ basta tener construida la fórmula X o la fórmula Y, puesto que una disyunción —no excluyente, como ésta— es verdadera con sólo que lo sea uno de sus miembros.

Regla de Eliminación de la disyunción

(RE $\vee$)

$X \vee Y$

X

Z

Z $\quad Y$

Z

Z

Si disponemos de una fórmula de tipo $X \vee Y$, podremos afirma otra fórmula cualquiera Z, si demostramos que puede construirse Z a partir de X y también a partir de Y.

Presentadas dos alternativas, si afirmamos que de la primera se sigue lo expresado por un determinado enunciado, y otro cierto enunciado se sigue de lo expresado por la segunda, podemos inferir la disyunción de esos dos enunciados que se siguen respectivamente de los miembros de la alternativa.

Regla de Inserción de la conjunción

(RI $\wedge$)

X		Y
Y		X
-----------	o bien	------------
$X \wedge Y$		$X \wedge Y$

Para construir una fórmula de tipo $X \wedge Y$, necesitamos tener construidas tanto X como Y. Puesto que estamos dándolos por verdaderos, su conjunción lo será también.

Del mismo modo que la implicación de una conclusión por un conjunto de premisas puede representarse, descendiendo desde el metalenguaje al lenguaje, mediante un condicional —que será, entonces, formalmente verdadero—, así también, de modo parecido, la enumeración sucesiva de premisas puede traducirse en una conjunción de éstas.

Regla de Eliminación de la conjunción

(RE $\wedge$)

$X \wedge Y$		$X \wedge Y$
----------- -	o bien	------------
X		Y

Si tenemos $X \wedge Y$, podemos afirmar tanto X como Y.

La aplicación sucesiva e ininterrumpida de esta regla de eliminación de la conjunción y de la introducción de esta misma conectiva permitiría, a los partidarios del pensamiento obsesivo, emprender una deducción infinita, en la que las conclusiones se fueran sucediendo sin aportar ninguna de ellas grandes novedades.

Regla de Eliminación del condicional

RE $\rightarrow$

$X \rightarrow Y$

X

Y

Si disponemos de $X \rightarrow Y$ y de X, podemos afirmar Y (**Modus Ponens**).

Esta otra regla, en cambio, apenas necesita presentación. La hemos conocido como Regla de Separación en el sistema axiomático de MP. La hemos aplicado justificándola intuitivamente. Sabemos que es una versión metalingüística de la ley llamada modus ponendo ponens. Y, por lo demás, con ella no hacemos sino explicitar las propiedades del condicional.

Regla de Inserción del condicional

(RI $\rightarrow$)

X

Y

$X \rightarrow Y$

Para construir una fórmula de tipo $X \rightarrow Y$, hemos de demostrar que, si tuviéramos construida X, podríamos construir Y. Lo que viene a decirnos es que, si de un enunciado se sigue otro, entonces podemos unirlos mediante un condicional. La cosa, sin embargo, tiene mucha más enjundia. Por una parte, en efecto, esta regla desempeña un papel central en la deducción: cada vez que se nos pida que derivemos como conclusión una expresión que tiene la forma de un condicional, nuestra estrategia consistirá en tomar como premisa auxiliar el antecedente de dicho condicional; si al hacerlo así conseguimos (con la ayuda de las premisas básicas, iniciales) derivar el consecuente, podremos unir ambos mediante el condicional y obtener así la expresión buscada.

Reglas derivadas

Regla de transitividad del condicional (RTr $\rightarrow$)

(RTr $\rightarrow$)

$X \rightarrow Y$

$Y \rightarrow Z$

$X \rightarrow Z$

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$Y \rightarrow Z$	P
3.	X	S
4.	Y	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	Z	RE $\rightarrow$ 2,4
6.	$X \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$ 3,5

Regla del modus tollens (MT)

(MT)

$X \rightarrow Y$

$\neg Y$

$\neg X$

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	X	S
4.	Y	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	$Y \wedge \neg Y$	RI $\wedge$ 2,4
6.	$\neg X$	RI $\neg$ 3-5

Regla de importación (Rimp)

(RImp)

$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$

$(X \wedge Y) \rightarrow Z$

1.	$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$	P
2.	$X \wedge Y$	S
3.	X	RE $\wedge$ 2
4.	$Y \rightarrow Z$	RE $\rightarrow$ 1,3
5.	Y	RE $\wedge$ 2
6.	Z	RE $\rightarrow$ 4,5
7.	$(X \wedge Y) \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$ 2-6

Regla de exportación (RExp)

(RExp)

$$\frac{(X\wedge Y)\rightarrow Z}{X\rightarrow(Y\rightarrow Z)}$$

1.	$(X\wedge Y)\rightarrow Z$	P
2.	X	S
3.	Y	S
4.	$X\wedge Y$	RI $\wedge$ 2,3
5.	Z	RE $\rightarrow$ 1,4
6.	$Y\rightarrow Z$	RI $\rightarrow$ 3,5
7.	$X\rightarrow(Y\rightarrow Z)$	RI $\rightarrow$ 2,6

Regla de contraposición del condicional (RContr $\rightarrow$)

(RContr $\rightarrow$)

$$\frac{X\rightarrow Y}{\neg Y\rightarrow\neg X} \quad \text{ó} \quad \frac{\neg Y\rightarrow\neg X}{X\rightarrow Y}$$

1.	$X\rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	S
3.	$\neg X$	MT 1,2
4.	$\neg Y\rightarrow\neg X$	RI $\neg$ 2,3

Regla de reflexividad (Rfl)

(Rfl)

$$\frac{X}{X}$$

1.	X	P
2.	$\neg X$	S
3.	$X\wedge\neg X$	RI $\wedge$ 1,2
4.	X	RI $\neg$ 2,3

Ex Contradictione Quodlibet 2 (ECQ2)

(ECQ2)

$$\frac{X}{\neg X\rightarrow Y} \quad \text{ó} \quad \frac{\neg X}{X\rightarrow Y}$$

De una fórmula cualquiera se sigue un condicional con la fórmula negada en el antecedente

1.	X	P
2.	$\neg X$	S
3.	$\neg Y$	S
4.	$X\wedge\neg X$	RI $\wedge$ 1,2
5.	$\neg\neg Y$	RI $\neg$ 3,4
6.	Y	RE $\neg$ 5
7.	$\neg X\rightarrow Y$	RI $\rightarrow$ 2,6

Ex Contradictione Quodlibet (ECQ)

(ECQ)

$$\frac{X \quad \neg X}{Y} \quad \text{ó} \quad \frac{X\wedge\neg X}{Y}$$

De una contradicción se sigue cualquier cosa

1.	X	P
2.	$\neg X$	P
3.	$\neg Y$	S
4.	$X\wedge\neg X$	RI $\wedge$ 1,2
5.	$\neg\neg Y$	RI $\neg$ 3,4
6.	Y	RE $\neg$ 5

Carga de premisas (Cpr)

(CPr)

$$\frac{X}{Y \rightarrow X}$$

1.	X	P
2.	Y	S
3.	$\neg X$	S
4.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 1,3
5.	$\neg\neg X$	RI $\neg$ 3,4
6.	X	RE $\neg$ 5
7.	$Y \rightarrow X$	RI $\rightarrow$ 2,6

Principio de no contradicción (PNC)

(PNC)

$$\frac{}{\neg(X \wedge \neg X)}$$

1.	$X \wedge \neg X$	S
2.	X	RE $\wedge$ 1
3.	$\neg X$	RE $\wedge$ 1
4.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$ 2,3
5.	$\neg(X \wedge \neg X)$	RI $\neg$ 1,4

Principio del Tercero Excluido (PTE)

(PTE)

$$\frac{}{X \vee \neg X}$$

1.	$\neg(X \vee \neg X)$	S
2.	X	S
3.	$X \vee \neg X$	RI $\vee$ 2
4.	$\neg(X \vee \neg X) \wedge (X \wedge \neg X)$	RI $\wedge$ 1,3
5.	$\neg X$	RI $\neg$ 2,4
6.	$X \vee \neg X$	RI $\vee$ 5
7.	$(X \vee \neg X) \wedge \neg(X \vee \neg X)$	RI $\wedge$ 1,6
8.	$\neg\neg(X \vee \neg X)$	RI $\neg$ 1, 7
9.	$(X \vee \neg X)$	RE $\neg$ 8

Inferencia alternativa (IA)

(IA)

$$\frac{X \vee Y \quad \neg Y}{X} \quad \text{ó} \quad \frac{X \vee \neg Y \quad Y}{X}$$

1.	$X \vee Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	X	S
4.	$\neg Y \wedge X$	RI $\wedge$ 2,3
5.	X	RE $\wedge$ 4
6.	Y	S
7.	$\neg X$	S
8.	$Y \wedge \neg Y$	RI $\wedge$ 2,6
9.	$\neg\neg X$	RI $\neg$ 7,8
10.	X	RE $\neg$ 9
11.	X	RE $\vee$ 3,5 y 6,10

Ejemplo de aplicación de la regla básica de eliminación de la disyunción, donde han de realizarse dos subderivaciones a partir de dos supuestos auxiliares.

Monotonía (Mon)

(Mon)

$$\frac{X \to Y}{(X \wedge Z) \to Y}$$

Si una fórmula cualquiera Y se sigue de otra fórmula cualquiera X, también se sigue de esa misma fórmula X en conjunción con cualquier otra fórmula Z

1.	$X \to Y$	P
2.	$X \wedge Z$	S
3.	X	RE $\wedge$ 2
4.	Y	RE $\to$ 1,3
5.	$(X \wedge Z) \to Y$	RI $\to$ 2,4

Consideraciones sobre los supuestos

Las tres únicas reglas que nos permiten cerrar supuestos (y que solamente se pueden aplicar para cerrar supuestos) son RI $\neg$, RI $\to$ y RE $\vee$.

- RI $\neg$: Si a partir de un supuesto (X) llegamos a una contradicción ($Y \vee \neg Y$), podemos cerrar ese supuesto (X) con la contradicción y afirmar la negación del supuesto ($\neg X$).
- RI $\to$: Si a partir de un supuesto (X), es decir, en la cadena deductiva, encontramos una fórmula cualquiera (Y) que nos interesa como consecuencia de ese supuesto, podemos cancelar el supuesto y escribir el condicional entre la fórmula supuesta y la que usamos para cerrar el supuesto ($X \to Y$). Que la fórmula Y se siga del hecho de haber supuesto X o no, no importa.
- RE $\vee$: Esta regla es la que más cuesta aprender a aplicar. Si tenemos afirmada como verdadera una fórmula disyuntiva ($X \vee Y$), no sabemos cuál de los componentes es el verdadero o si lo son los dos. Pongamos que os digo que tengo un perro o un gato en mi casa. No sabéis si tengo un perro. No sabéis si tengo un gato. No sabéis si tengo un perro y un gato. Solamente sabéis que tengo un perro o un gato. ¿Cómo podríamos aprovechar esta información? La RE $\vee$ nos dice que si de suponer la verdad de X, se sigue otra fórmula Z y de suponer la verdad de Y, se sigue esa misma fórmula Z, podemos cancelar los dos supuestos y reafirmar Z. En el ejemplo, de suponer que tengo un perro, se sigue que tengo un animal doméstico y de suponer que tengo un gato, también se sigue que tengo un animal doméstico. Podemos prescindir de los dos supuestos y afirmar que tengo en mi casa un animal doméstico, aunque seguimos sin saber exactamente cuál.

Estrategias deductivas

- <u>Reducción al absurdo RI</u> $\neg$: se utiliza para obtener cualquier tipo de conclusión: atómica, negación de atómica, $\neg X$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$ o $X \to Y$. Consiste en suponer la falsedad de la conclusión y analizar este supuesto junto a las premisa hasta obtener la construcción de la contradicción contenida en ese conjunto de fórmulas, lo que nos autoriza a eliminar el supuesto de que la conclusión es falsa y afirmarla como verdadera (RI $\neg$)
- <u>Fórmulas atómicas y negación de fórmulas atómicas</u>: Cuando la conclusión es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica sólo podemos extraerla directamente por reducción al absurdo. Se pueden presentar dos situaciones:

   - que la conclusión esté contenida en alguna premisa: hay que observar el lugar que ocupa en las premisas y pensar qué necesitamos tener para poder extraerla aplicando reglas.
   - que no lo esté: el conjunto de premisas es contradictorio y puede derivarse de él cualquier fórmula, pero hay que analizar las premisas para hallar la contradicción
- <u>Estrategia RI</u> $\vee$: Si la conclusión es de tipo $X \vee Y$, tenemos un caso parecido al anterior, con la ventaja de que ahora nos basta construir una de las formas: X o Y , siendo la estrategia dependiendo de la forma lógica que tengan dichas X o Y .
- <u>Estrategia RI</u> $\rightarrow$: Para construir una conclusión de tipo $X \rightarrow Y$, suponemos X (el antecedente), y buscamos Y .

Leyes de la lógica de enunciados

Los enunciados de esquemas válidos de inferencia constituirán **leyes de la lógica**. He aquí algunas de las leyes de la lógica de enunciados, seleccionadas, ya sea por la regularidad con que se dan —es decir, por la frecuencia con que los sujetos construyen razonamientos de esa forma—, ya por su importancia en el razonamiento científico o en la argumentación ordinaria.

1. $\neg\neg p \rightarrow p$: **Ley de Doble Negación**
2. $(p \wedge q) \rightarrow p$ (intersección de dos conjuntos cuyo contenido pertenece al primero $A \cap B \subset A$)
   - 2b. $(p \wedge q) \rightarrow q$
3. $p \rightarrow (p \vee q)$ (junto con la ley 2 se conocen como **Leyes de simplificación**)
   - 3b. $q \rightarrow (p \vee q)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$: **Ley de contraposición (del condicional)**
5. $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$: **Ley de conmutatividad de la conjunción**
6. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$: **Ley de conmutatividad de la disyunción**
7. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$: **Ley de conmutatividad del bicondicional**
8. $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$: **Ley de asociatividad de la conjunción**
9. $[(p \vee q) \vee r] \rightarrow [p \vee (q \vee r)]$: **Ley de asociatividad de la disyunción**
10. $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$: **Ley de asociatividad del bicondicional**
11. $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$: **Ley distribuitividad de la conjunción por la disyunción**
12. $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$: **Ley de distribuitividad de la disyunción por la conjunción**
13. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$: **Ley de distribuitividad del condicional por la conjunción**
14. $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$: **Ley de distribuitividad del condicional por la disyunción**
15. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow r)]$: **Ley de transitividad del condicional**
16. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow [(p \leftrightarrow r)]$: **Ley de transitividad del bicondicional**
17. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$: **Ley de exportación**
   - 17b. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$: **Ley de importación**

18. $[(p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow r$: **Ley del dilema constructivo**[4]
19. $[(p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s)]\rightarrow(r\vee s)$: **Segunda ley del dilema constructivo**
20. $[(\neg p\vee\neg q)\wedge(r\rightarrow p)\wedge(s\rightarrow q)]\rightarrow(\neg r\vee\neg s)$: **Ley del dilema destructivo**
21. $(\neg p\rightarrow p)\rightarrow p$: **Ley de Clavius (*consequentia mirabilis)***
22. $\neg(p\wedge q)\rightarrow(\neg p\vee\neg q)$: **Primera ley de De Morgan**
23. $\neg(p\vee q)\rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$: **Segunda ley de De Morgan**
24. $[(p\vee q)\wedge\neg p]\rightarrow q$: **Primera ley de inferencia de la alternativa**
25. $[(p\vee q)\wedge\neg q]\rightarrow p$: **Segunda ley de inferencia de la alternativa**
26. $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$: **Modus ponendo ponens** (al ser p condición suficiente de q)
27. $[(p\rightarrow q)\wedge\neg q]\rightarrow\neg p$: **Modus tollendo tollens** (al ser q condición necesaria de p)

Método para invalidar argumentos: árboles semánticos

La deducción natural permite determinar la validez de los argumentos mediante una deducción correcta desde las premisas hasta la conclusión, pero no sirve para determinar su invalidez. Si en el examen de un argumento no logramos derivar la conclusión a partir de la premisas, no podemos afirmar que el argumento no es correcto. En estos casos necesitamos acudir a otros métodos. El método de árboles semánticos vale tanto para validar como para invalidar argumentos, pero, dado que consisten en una búsqueda sistemática de contraejemplos para el argumento, el objetivo directo de este método es la invalidación del argumento que estamos examinando.

El método del árbol semántico nos permite decidir ambas cosas:

1. Si una fórmula dada es válida, contradictoria o meramente consistente.
2. Si un argumento es válido o inválido.

El método consiste en la descomposición de una fórmula o conjunto de fórmula hasta alcanzar fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas, en un intento de encontrar un contraejemplo para la fórmula o el argumento sometido a examen, o bien una contradicción en todas la ramas del árbol. Las reglas del cálculo, por tanto, son reglas de eliminación de operadores y las podríamos reducir a dos reglas básicas: la eliminación de la conjunción y la eliminación de la disyunción (pues por interdefinición podemos trasladar cualquier fórmula a éstas), más una regla para eliminar la doble negación.

---

4 *«O debemos filosofar o no debemos hacerlo. Si debemos hacerlo, entonces debemos hacerlo. Si no debemos hacerlo, entonces también debemos hacerlo [para explicar por qué no debemos hacerlo]. Luego en cualquier caso debemos filosofar.»* (Aristóteles, en el Protréptico)

La forma estructurada es: $[(p\vee\neg p)\wedge(p\rightarrow p)\wedge(\neg p\rightarrow p)]\rightarrow p$

Reglas básicas

α	$X \wedge Y$ -------- X Y	El desarrollo de una conjunción se debe escribir en la misma rama. Para la verdad de $X \wedge Y$ es necesaria la verdad de X y la verdad de Y
	$\neg\neg X$ -------- X	El desarrollo de una fórmula doblemente negada se debe escribir en la misma rama: para la verdad de $\neg\neg X$ es necesaria la verdad de X
β	$X \vee Y$ -------- $X \quad Y$	El desarrollo de una fórmula disyuntiva obliga a abrir dos ramas en el árbol. Para la verdad de $X \vee Y$ basta la verdad de X o la verdad de Y . se abren dos interpretaciones posibles y bastará que una de ellas satisfaga la fórmula de partida para que podamos afirmar su consistencia.

Reglas derivadas

α	$\neg(X \vee Y)$ ------- $\neg X$ $\neg Y$	$\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$
β	$\neg(X \wedge Y)$ ------- $\neg X \quad \neg Y$	$\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$
β	$X \to Y$ ------- $\neg X \quad Y$	$X \to Y \equiv \neg X \vee Y$
α	$\neg(X \to Y)$ ------- X $\neg Y$	$\neg(X \to Y) \equiv X \wedge \neg Y$
	$X \leftrightarrow Y$ ------- $X \quad \neg X$ $Y \quad \neg Y$	$X \leftrightarrow Y \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X)$ $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)$ La verdad del bicondicional requiere, o bien la verdad de X e Y , o bien su falsedad, $\neg X$ y $\neg Y$
	$\neg(X \leftrightarrow Y)$ ------- $X \quad \neg X$ $\neg Y \quad Y$	$\neg(X \leftrightarrow Y) \equiv \neg((X \to Y) \wedge (Y \to X))$ $\neg((X \to Y) \wedge (Y \to X)) \equiv \neg(X \to Y) \vee \neg(Y \to X)$ $\neg(X \to Y) \vee \neg(Y \to X) \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X)$ La verdad del bicondicional negado requiere, o bien $\neg X$ e Y , o bien X y $\neg Y$

Estructura del árbol semántico

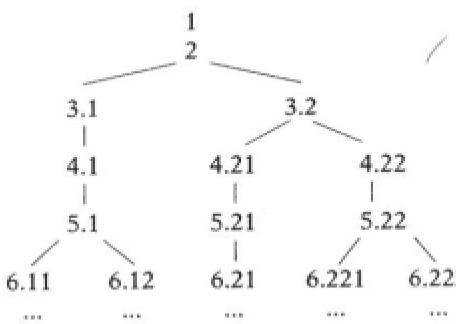
Un árbol semántico tiene forma de árbol invertido: comienza con una única rama en la que figura la fórmula o conjunto de fórmulas que vamos a examinar. Si queremos examinar la validez de:

- una fórmula X , comenzaremos el árbol con la fórmula $\neg X$
- un argumento, comenzaremos con afirmación de la premisas y negación de la conclusión.

Las líneas siguientes se irán obteniendo mediante la aplicación de la reglas. Cada fórmula que se escriba irá acompañada del número de línea en la que se escribe, el número de la rama a la que pertenece y la justificación para escribirla (qué regla hemos aplicado), excepto la fórmula de partida, que sólo llevarán el número de línea. Añadiremos también el símbolo $\surd$ a la izquierda del número de línea para indicar que la fórmula de dicha línea ya ha sido desarrollada.

Todas las ramas del árbol comienzan siempre con la fórmula escrita en la primera línea, por ejemplo 1 – 2 – 3.2 – 4.22 – 5.22 – 6.222 es una de la ramas de este árbol

		1		
		2		
3.1		3.2		
4.1		4.21	4.22	
5.1		5.21	5.22	
6.11	6.12	6.21	6.221	6.222
…	…	…	…	…



Conceptos

- <u>Rama cerrada</u>: una rama está cerrada cuando contiene una fórmula atómica y su negación (la rama contiene contradicción), en caso contrario decimos que la rama está **abierta**.
- <u>Rama completa</u>: una rama del árbol está completa cuando todas la fórmula que figuran en ella han sido desarrolladas o cuando en la rama aparece una fórmula atómica y su negación.
- <u>Árbol terminado</u>: el árbol está terminado cuando todas sus ramas están completas. Una vez terminado pueden darse tres casos:
  1. Todas las ramas contienen contradicción: <u>**todas la ramas están cerradas**</u>.
     - Es el único caso que nos otorga información semántica completa:
       - o bien nos dice que la fórmula en el origen del árbol es una fórmula contradictoria, y por tanto su negación (que es la que examinamos indirectamente) es una **fórmula válida**.
       - O bien, si lo que estamos examinando es un argumento, el árbol con todas sus ramas cerradas nos dice que es un **argumento correcto** y no existen contraejemplos para él.
  2. Ninguna rama contiene contradicción: todas las ramas están abiertas
  3. Algunas ramas contienen contradicción y otras no.

Tras realizar el árbol para $\neg X$;

- si **cierra** podemos concluir que X es válida, y $\neg X$ es contradictoria.
- Si **no cierra** entonces X es no válida y $\neg X$ consistente
  - Si queremos averiguar entonces si se trata de una contradicción o es una fórmula consistente, debemos continuar haciendo un árbol para X .
    - Si el **árbol cierra**, $\neg X$ es una fórmula válida (X es contradictoria)
    - Si el **árbol no cierra,** tanto X como $\neg X$ son meramente consistentes.

Árbol para $\neg X$

Cierra	No cierra
$\neg X$ contradictoria	$\neg X$ consistente
X válida	X no válida

Árbol para X

Cierra	No cierra
$\neg X$ válida	$\neg X$ meramente consistente
X contradictoria	X meramente consistente

Conceptos básicos del cálculo axiomático: axiomas, teoremas y reglas de transformación

Simbolización y formalización

La lógica se presenta en forma de cálculo, siendo la presentación formalizada de los principios del análisis del razonamiento desde el punto de vista de su estructura.

- Simbolizar un lenguaje: (la parte del lenguaje natural que se usa para formular inferencias de enunciados sin analizar a partir de otros enunciados que tampoco se analizan) consiste simplemente en sustituir cada signo (relevante) de ese lenguaje por un símbolo. Podemos:
  - simbolizar la partícula(s) que expresa **relación condicional** entre enunciados por $\rightarrow$
  - simbolizar las **conjunciones copulativas** por $\wedge$
  - simbolizar los doce nombres de los profetas menores sustituyendo cada uno de los nombres por un símbolo distinto $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$
- Formalizar un lenguaje no es tan sólo en dotarlo de un vocabulario artificial, sino también, y sobre todo, en reconstruir su sintaxis: en hacer que las reglas de sus sintaxis, en lugar de implícitas y vagas, como las de los lenguajes naturales, sean explícitas y precisas.
  - Un lenguaje está formalizado cuando su sintaxis no tiene secretos.

Para formalizar la lógica de enunciados toca presentar el lenguaje de la lógica proposicional en forma de cálculo, especificar las reglas que nos permiten construir y demostrar enunciados esquemáticos que expresan otras tantas formas válidas de inferencia. Elementos básicos de un cálculo:

1. **Símbolos primitivos**: variables preposicionales, y conectivas o functores de enunciado
2. **Reglas de formación**: combinar esos símbolos para construir expresiones bien formadas

3. **Reglas de transformación**.

- <u>**Demostrar un enunciado**</u>: (es decir, demostrar como verdadero) consiste en hacer ver que se sigue válidamente de otros enunciados verdaderos, en presentar ese enunciado como el resultado de una transformación válida —es decir, conforme a las reglas— de otros enunciados ya demostrados o que, como veremos, no se demuestran.

La lógica de enunciados como sistema axiomático

La forma clásica de la formalización es la forma axiomática.

¿En qué consiste la axiomatización de una teoría (en este caso, la teoría de la validez formal de los razonamientos que permiten deducir unos enunciados a partir de otros sin necesidad de realizar un análisis interno de éstos)?

- Una <u>**teoría**</u> es un conjunto de enunciados verdaderos —o que por tales se tienen— relativos a un determinado campo de problemas.
- <u>**Axiomatizar una teoría**</u> es organizar ese conjunto de enunciados de tal forma que, partiendo de algunos de sus miembros —los llamados «**axiomas**»—, y mediante la aplicación de una serie de **reglas de transformación**, se puedan derivar los restantes enunciados de la teoría —a los que llamaremos «**teoremas**»—.
  - Axiomas y teoremas son expresiones del cálculo, fórmulas redactadas en el lenguaje del cálculo.
  - Las reglas de transformación, no: en cuanto reglas para inferir unas expresiones de otras, han de hacer mención de esas expresiones, y sabemos que sólo en un metalenguaje se pueden mencionar los signos de un lenguaje. Pertenecen, pues, esas reglas al metalenguaje del cálculo.

<u>**Demostrar un enunciado**</u> en un sistema axiomático (demostrar que el enunciado es un teorema del sistema) consiste en derivarlo válidamente (utilizando en la derivación sólo, y de manera correcta), los recursos explícitamente admitidos a tal efecto dentro del cálculo— a partir de los axiomas, en fundamentar su verdad en la de otros enunciados cuya verdad consta.

Mediante métodos como el de las tablas de verdad sólo llegábamos a saber que unos determinados enunciados eran verdaderos. Mediante su demostración en un sistema axiomático podemos alcanzar a averiguar cómo y por qué lo son: hemos de ver que las tautologías derivadas como teoremas no son otra cosa que transformaciones válidamente efectuadas de las tautologías elegidas como axiomas.

Pasemos, entonces, a presentar un sistema axiomático para la lógica de enunciados. Se trata del sistema que A. N. Whitehead y B. Russell dieron a conocer en sus *Principia Mathematica* (1910-13), el llamado **Sistema PM de la lógica de enunciados.**

El sistema PM

- <u>**Símbolos primitivos**</u>:
  - Variables proposicionales: $p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, .., p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$.
  - Conectivas o functores del enunciado: $\neg, \vee$
  - Signos de puntuación: $(), [], \{\}$

- Símbolos definidos:
  - ($\wedge$) : $X \wedge Y \equiv_{Df} \neg(\neg X \vee \neg Y)$
  - ($\rightarrow$) : $X \rightarrow Y \equiv_{Df} \neg X \vee Y$
  - ($\leftrightarrow$) : $X \leftrightarrow Y \equiv_{Df} \neg[\neg(\neg X \vee Y) \wedge \neg(\neg Y \vee X)]$
- Reglas de formación:
  - RF1: Una variable proposicional sola es una expresión bien formada del cálculo (ebf.)
  - RF2: Si X es una ebf., entonces $\neg X$ también lo es.
  - RF3: Si X e Y son ebfs., entonces $X \vee Y$ también lo es.
  - RF4: Estas son todas las reglas de formación del cálculo.
- Axiomas:
  - A_1 : $(p \vee p) \rightarrow p$
  - A_2 : $q \rightarrow (p \vee q)$
  - A_3 : $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
  - A_4 : $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
  - A_5 : $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$
- Reglas de transformación:
  - RT1: Dada una tesis del cálculo, en la que aparecen variables de enunciado, el resultado de sustituir una, algunas o todas esas variables por fórmulas bien formadas del cálculo sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto será también una tesis del cálculo. Y ello con una única restricción, si bien importante: cada variable ha de ser sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto
    - Regla de sustitución: si X es una tesis del sistema en la que aparecen distintas variables $p_1, p_2, .. p_n$, e $Y_1, Y_2, .., Y_n$ son expresiones bien formadas del cálculo, la expresión resultante de sustituir en X p_1 por Y_1 , p_2 por Y_2 ,... p_n por Y_n será asimismo una tesis del sistema.
  - RT2: Si X es una tesis del sistema, y lo es también la expresión $X \rightarrow Y$, entonces Y es una tesis del sistema.
    - Regla de separación: Es fácil ver que esta regla no es otra cosa que una traducción metalingüística de la ley lógica que hemos llamado 'modus ponendo ponens' $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ (~RD=Regla de Detachment)

Demostración de teoremas: Partiendo de esta base es posible demostrar como teoremas todas las expresiones formalmente verdaderas construibles en el lenguaje del cálculo.

Resumen reglas básica y derivadas (chuletario examen Lógica I)

Reglas Básicas

RI¬ $\dfrac{\begin{array}{c}X\\ Y\land\neg Y\end{array}}{\neg X}$	**RI→** $\dfrac{\begin{array}{c}X\\ Y\end{array}}{X\to Y}$	**RI∧** $\dfrac{\begin{array}{c}X\\ Y\end{array}}{X\land Y}$ $\quad\dfrac{\begin{array}{c}X\\ Y\end{array}}{Y\land X}$	**RE∨** $\dfrac{\begin{array}{c}X\lor Y\\ X\\ Z\\ Y\\ Z\end{array}}{Z}$
RE¬ $\dfrac{\neg\neg X}{X}$	**RE→** $\dfrac{\begin{array}{c}X\to Y\\ X\end{array}}{Y}$	**RE∧** $\dfrac{X\land Y}{X}$ $\quad\dfrac{X\land Y}{Y}$	
		RI∨ $\dfrac{X}{X\lor Y}$ $\quad\dfrac{X}{Y\lor X}$	

Reglas Derivadas

ECQ $\dfrac{\begin{array}{c}X\\ \neg X\end{array}}{Y}$	**MT** $\dfrac{\begin{array}{c}X\to Y\\ \neg Y\end{array}}{\neg X}$	**Interdef. →, ∧** $\dfrac{X\to Y}{\neg(X\land\neg Y)}$	**Interdef. ∧, →** $\dfrac{X\land Y}{\neg(X\to\neg Y)}$	**Interdef. ∨,→** $\dfrac{X\lor Y}{\neg X\to Y}$
IA $\dfrac{\begin{array}{c}X\lor Y\\ \neg Y\end{array}}{X}$	**EN$_2$** $\dfrac{\begin{array}{c}\neg X\\ Y\land\neg Y\end{array}}{X}$	**Interdef. →, ∨** $\dfrac{X\to Y}{\neg X\lor Y}$	**Interdef. ∧, ∨** $\dfrac{X\land Y}{\neg(\neg X\lor\neg Y)}$	**Interdef. ∨, ∧** $\dfrac{X\lor Y}{\neg(\neg X\land\neg Y)}$

Ejercicios adicionales y ejercicios de examen

Cuestiones teóricas

CUESTIÓN: *Para que un argumento con premisas verdaderas sea válido, es condición necesaria pero no suficiente que su conclusión sea verdadera.*

Verdadero: Si el argumento tiene forma válida y premisas verdaderas, forzosamente ha de tener conclusión verdadera. Un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa no puede tener forma válida, pues la validez asegura que no se pase de lo verdadero a lo falso.

Pero no es condición suficiente tener premisas verdaderas y conclusión verdadera para tener un argumento con forma válida. Por ejemplo: *"2 más 2 son 4. Por tanto, Madrid es la capital de España"* es un argumento con premisa y conclusión verdaderas, pero con forma lógica inválida:

$$\frac{p}{q}$$

Esta forma, inválida, sí permite pasar de lo verdadero a lo falso. Una interpretación de esta forma lógica que tiene premisa verdadera y conclusión falsa:

"2 más 2 son 4. Por tanto, el río Ebro pasa por Sevilla".

CUESTIÓN: *Para que un argumento sea válido basta que sean verdaderas sus premisas y la conclusión.*

Falso: Un argumento con premisas y conclusión verdaderas puede tener una forma inválida.

La clave para entender esto es la palabra “basta”, que hace referencia a la suficiencia de lo expuesto. Un contraejemplo de esta afirmación sería:

“Madrid es capital de España. Por tanto, dos y dos son cuatro”

$$\frac{p}{q}$$

CUESTIÓN: *Para que un argumento sea válido no es condición necesaria que sus premisas sean verdaderas.*

Verdadero: Una forma válida admite todo tipo de combinaciones en los valores de verdad de las premisas y la conclusión, excepto el caso de premisas verdaderas y conclusión falsa.

Las premisas pueden ser falsas y el argumento ser válido lógicamente. Lo único que garantiza un argumento válido es que, si las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es, pero eso no implica que las premisas tengan que ser verdaderas para que la conclusión sea válida. De modo que hay argumentos válidos con premisas falsas.

CUESTIÓN: *Un argumento con conclusión falsa no puede ser válido.*

Falso: Si en el conjunto de las premisas también hay falsedad, su forma argumentativa puede ser válida. La validez sería imposible si teniendo conclusión falsa, todas las premisas fueran verdaderas.

CUESTIÓN: *Si un argumento es válido, su conclusión es verdadera.*

Falso: La validez del argumento sigue los criterios de la implicación lógica. En un argumento válido decimos que el conjunto de las premisas implica la conclusión. Esto significa que si las premisas fueran todas ellas verdaderas, necesariamente la conclusión también lo sería. La relación de implicación, la validez del argumento, hace imposible que lo falso se siga de lo verdadero.

Ahora bien, si ponemos falsedad en las premisas, podemos tener validez en la forma y falsedad en la conclusión.

CUESTIÓN: *Un argumento lógicamente inválido tiene todas sus premisas verdaderas y la conclusión falsa.*

Falso: Un argumento inválido puede tener cualquier forma y cualquier valor de verdad tanto en las premisas como en la conclusión. Es inválido porque su forma permite que se pueda dar el caso de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, pero no son imposibles el resto de los casos. Por ejemplo, sea el argumento de la forma $(p \wedge q) \rightarrow r$

- "*Madrid es capital de España y Lisboa es capital de Portugal. Por tanto, París es capital de Francia.*

Este argumento es inválido, aunque tanto premisas como conclusión son verdaderas, porque su forma permite la existencia de contraejemplos: argumentos con la misma forma que tienen premisas verdaderas y conclusión falsa, como:

- *"Madrid es capital de España y Lisboa es capital de Portugal, Por tanto, Roma es capital de Francia."*

CUESTIÓN: *Los argumentos inválidos siempre tienen la conclusión falsa.*

Falso: Un argumento con forma inválida es aquél en el que las premisas no implican lógicamente la conclusión, ya sea verdadera o falsa. La validez y la invalidez se dicen de la forma lógica del argumento. Por ejemplo, *"Londres es una ciudad pequeña. Por tanto, Londres es una ciudad española"* es un argumento inválido con conclusión falsa y forma lógica: $p \rightarrow q$

Otro argumento con esa misma forma inválida, pero conclusión verdadera es: *"Londres es una ciudad pequeña. Por tanto, Londres es una ciudad inglesa"*

CUESTIÓN: *Si un argumento es inválido, la conjunción de las premisas y la conclusión es una contingencia.*

Falso: En un argumento con forma inválida podemos encontrar distintas combinaciones de enunciados. Por ejemplo, podemos tener una premisa contingente y una conclusión contradictoria, cuya conjunción sería también una contradicción. Lo que no podemos tener es premisas en contradicción, pues entonces la forma inferencial sería válida, ya que a partir de la contradicción podemos concluir cualquier cosa, ni podemos tener una conjunción entre las premisas y la conclusión que sea una tautología, pues para ello sería necesario que la conclusión fuera tautológica, pero entonces la forma inferencial sería válida.

La conjunción entre las premisas y la conclusión de un argumento inválido será o una contingencia o una contradicción.

CUESTIÓN: *Un esquema de argumento es verdadero o es falso.*

Falso: Un esquema de argumento es válido o inválido. La verdad y la falsedad son propiedades de los enunciados.

CUESTIÓN: *La conclusión de un argumento válido no puede ser falsa.*

Falso: Lo que no puede ocurrir en un argumento válido es que la conclusión sea falsa cuando las premisas son verdaderas, pero puede haber argumentos válidos con premisas (al menos una) falsas y conclusión falsa. La validez es de la forma del argumento. Una forma válida impide el paso de lo verdadero a lo falso.

CUESTIÓN: *Un argumento que contiene contradicción en el conjunto de las premisas es un argumento inválido.*

Falso: De la contradicción se sigue cualquier cosa. De modo que todos los argumentos que tienen contradicción en las premisas son argumentos con forma lógica válida.

CUESTIÓN: *Si un argumento tiene premisas verdaderas y conclusión falsa, no puede tener una forma lógica válida.*

Verdadero: Una forma inferencial válida impide el caso de argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa. De lo verdadero no se sigue válidamente lo falso. Ese argumento serviría como contraejemplo que prueba la invalidez de su forma inferencial.

CUESTIÓN: *El antecedente de una afirmación condicional es la premisa de dicha afirmación.*

Falso: Un condicional es una fórmula $(A \rightarrow B)$. Y las fórmulas no tienen premisas ni conclusión.

CUESTIÓN: *Una proposición verdadera sólo implica proposiciones verdaderas.*

Verdadero: Hablamos de implicación entre dos proposiciones cuando sus formas lógicas (sus fórmulas respectivas) hacen imposible que lo falso se siga de lo verdadero. Todas las proposiciones que tengan esas mismas formas tendrán la composición V-V, F-F o bien F-V, pero nunca V-F. Es la forma de la proposición la que imposibilita este último caso.

CUESTIÓN: *Toda fórmula bien formada es una tautología.*

Falso: Una fórmula bien formada es la que cumple con las reglas de formación de fórmulas. Una vez obtenida una fórmula, podemos evaluarla semánticamente y determinar si se trata de una tautología, una contradicción o bien una contingencia. Hay fórmulas bien formadas de los tres tipos.

CUESTIÓN: Si X es una fórmula contingente, $Y \rightarrow (X \vee \neg X)$ también lo es.

Falso: Dado que el consecuente tiene forma tautológica, el condicional no puede tener ningún caso en el que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, único caso en el que el condicional sería falso. De modo que este condicional es una tautología, una fórmula válida.

CUESTIÓN: *Cualquier fórmula válida es implicada por una contradicción.*

Verdadero: En primer lugar porque una tautología es implicada por cualquier fórmula (carga de premisas). En segundo lugar, porque de una contradicción se sigue lógicamente cualquier cosa, es decir, una fórmula contradictoria implica cualquier fórmula.

CUESTIÓN: *Un argumento sólo puede ser verdadero o falso.*

Falso: Los argumentos solamente tienen forma válida o inválida. "Verdadero" y "falso" se aplican únicamente a los enunciados.

CUESTIÓN: *El antecedente de una afirmación condicional es verdadero sólo si su consecuente no es falso.*

Falso: El antecedente de un condicional puede ser verdadero o falso independientemente de cómo sea su consecuente. Dependiendo de cómo sean lo valores de antecedente y consecuente, resultará un valor u otro del condicional.

CUESTIÓN: *Cualquier fórmula es implicada por una contradicción.*

Verdadero: La contradicción implica cualquier fórmula, de la contradicción se sigue válidamente cualquier fórmula: Ex Contradictione Quodlibet.

Un condicional que no puede tener verdad en su antecedente, no tendrá ningún caso de falsedad, pues el condicional solamente resulta falso cuando tiene verdad en el antecedente y falsedad en el consecuente. Un condicional con contradicción en el antecedente es un condicional tautológico, una implicación lógica.

CUESTIÓN: *Si X es una fórmula válida, $Y \rightarrow X$ también lo es.*

Verdadero: Si el consecuente de ese condicional es una tautología, es imposible encontrar un caso que haga falsa la fórmula, es decir, un caso en el que Y fuera verdadero y X falso.

CUESTIÓN: *Si X es una fórmula válida, $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ es una fórmula contingente.*

Falso: Una fórmula condicional con consecuente válido no puede tener ningún caso de falsedad, no hay ninguna interpretación que haga verdadero el antecedente y falso el consecuente. Se trata de una tautología.

CUESTIÓN: *Si X es una fórmula contradictoria, $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ es una fórmula contingente.*

Falsa: Es una tautología, una fórmula válida, porque el antecedente de ese condicional también es una contradicción.

CUESTIÓN: *Si X es una fórmula contradictoria, $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ es una fórmula válida.*

Verdadero: El antecedente de ese condicional es una contradicción y una contradicción $(Y \wedge \neg Y)$ implica cualquier fórmula. Una implicación es un condicional válido, una tautología.

CUESTIÓN: *Si* X *es una fórmula contradictoria,* $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ *es una fórmula contradictoria.*

Falso: El antecedente de ese condicional es una contradicción, por lo que el condicional nunca podrá alcanzar el valor F, pues nunca podrá darse el caso $V \rightarrow F$. De modo que no sólo no es una contradicción, sino que cualquier fórmula con la forma $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ resultará siempre una tautología.

CUESTIÓN: *Una fórmula satisfacible es implicada por cualquier fórmula insatisfacible*

Verdadero: Una fórmula insatisfacible es una contradicción, de la cual se puede concluir cualquier cosa, entre ellas, una fórmula satisfacible

---

CUESTIÓN: *Una fórmula válida sólo es implicada por fórmulas válidas*

Falso: Una fórmula válida (tautología) puede ser implicada tanto por fórmulas verdaderas como por fórmulas falsas

---

CUESTIÓN: *Una fórmula satisfacible sólo implica fórmulas satisfacibles*

Falso: podría darse el caso de que una fórmula satisfacible (contingente) implique fórmulas válidas (tautológicas)

CUESTIÓN: *Una fórmula válida sólo implica fórmulas válidas*

Verdadero: El hecho de que se de la implicación (que no pueda darse el caso de que ante premisas verdaderas, tengamos conclusión falsa), el hecho de que la fórmula antecedente sea tautológica (todo verdadero) exige a la fuerza que las conclusiones que implica sean también verdaderas

---

CUESTIÓN: *Si* X *e* Y *son fórmulas lógicamente incompatibles, entonces* $(X \wedge Y) \rightarrow Z$

Verdadero: Que sean lógicamente incompatibles quiere decir que son contradictorias, y ya que de una contradicción se sigue cualquier cosa, en efecto se puede confirmar que se de la fórmula que se nos plantea.

CUESTIÓN: *Si* $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ *, entonces* $(X \wedge \neg Z) \rightarrow \neg Y$

Verdadero: lo podemos comprobar con el árbol semántico

√ 1. $(X \wedge Y) \rightarrow Z$

√ 2. $\neg[(X \wedge \neg Z) \rightarrow \neg Y]$

√ 3. $X \wedge \neg Z \quad (\alpha 2)$

4. $Y \quad (\alpha 2)$

5. $X \quad (\alpha 3)$

6. $\neg Z \quad (\alpha 2)$

$\surd$ 7.1 $\neg(X \wedge Y)$ $(\beta 1)$		7.2 Z $(\beta 1)$
8.11 $\neg X$ $(\beta 7.1)$	8.12 $\neg Y$ $(\beta 7.1)$	Cierra con 6
Cierra con 5	Cierra con 4	

Como el árbol semántico cierra, el argumento entre ambas premisas es válido, por lo que podemos afirmar que se da una implicación lógica entre ambas expresiones.

CUESTIÓN: *Si* $[X, Y, Z] \models W$ *es una deducción correcta, entonces* $[X, Y] \models Z \rightarrow W$ *también lo es*

<u>Verdadero</u>*:*

$\surd$ 1. $(X \wedge Y \wedge Z) \rightarrow W$

$\surd$ 2. $\neg[(X \wedge Y) \rightarrow (Z \rightarrow W)]$

$\surd$ 3. $X \wedge Y$ $(\alpha 2)$

$\surd$ 4. $\neg(Z \rightarrow W)$ $(\alpha 2)$

5. X $(\alpha 3)$

6. Y $(\alpha 3)$

7. Z $(\alpha 4)$

8. $\neg W$ $(\alpha 4)$

$\surd$ 9.1 $\neg(X \wedge (Y \wedge Z))$ $(\beta 1)$			9.2 W $(\beta 1)$
10.11 $\neg X$ $(\beta 9.1)$	$\surd$ 10.12 $\neg(Y \wedge z)$ $(\beta 9.1)$		Cierra con 8
Cierra con 5	10.121 $\neg Y$ $(\beta 10.12)$	10.122 $\neg Z$ $(\beta 9.1)$	
	Cierra con 6	Cierra con 7	

CUESTIÓN: *Si* $[X, Y] \models Z$ *es una deducción correcta, entonces* $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ *es una fórmula válida*

<u>Verdadero</u>: Corresponde con la ley de importación, pero lo vemos mejor con el árbol semántico:

$\surd$ 1. $(X \wedge Y) \rightarrow Z$

$\surd$ 2. $\neg[X \rightarrow (Y \rightarrow Z)]$

3. X $(\alpha 2)$

$\surd$ 4. $\neg(Y \rightarrow Z)$ $(\alpha 2)$

5. Y $(\alpha 4)$

6. $\neg Z \quad (\alpha 4)$

$\surd$ 7.1 $\neg(X \wedge Y) \quad (\beta 1)$		7.2 $Z \quad (\beta 1)$
8.11 $\neg X \quad (\beta 7.1)$	8.12 $\neg Y \quad (\beta 7.1)$	Cierra en 6
Cierra en 3	Cierra en 5	

CUESTIÓN: *Si* $[X, Y] \models Z$ *es una deducción correcta, entonces* $[X, \neg Z] \models \neg Y$ *también es una deducción correcta*

CUESTIÓN: *Si* X *implica* Y *entonces es una verdad lógica*

Falso:

CUESTIÓN: $(\neg s \wedge t) \rightarrow p \wedge (\neg s \wedge t) \rightarrow r$ *es una fórmula bien formada.*

Falso: Se necesitan más paréntesis para desambiguar la fórmula:

- $(\neg s \wedge t) \rightarrow [p \wedge (\neg s \wedge t) \rightarrow r]$
- $[(\neg s \wedge t) \rightarrow p \wedge (\neg s \wedge t)] \rightarrow r$
- $[(\neg s \wedge t) \rightarrow p] \wedge [(\neg s \wedge t) \rightarrow r]$
- $\{[(\neg s \wedge t) \rightarrow p] \wedge (\neg s \wedge t)\} \rightarrow r$

CUESTIÓN: *De la verdad de* $p \vee q$ *se sigue la verdad de* $(\neg p \wedge r) \rightarrow q$ *.*

Verdadero: Para que la disyunción sea verdadera, al menos $I(p)=1$ o $I(q)=1$ (o ambos):

- Si $I(p)=0$, $I(p \vee q)=1$ sólo si $I(q)=1$. En el condicional tendríamos entonces que el consecuente es verdadero, luego el condicional será verdadero sea cual sea el valor de verdad del antecedente.
- Si $I(q)=0$, $I(p \vee q)=1$ sólo si $I(p)=1$. En este caso el antecedente sería siempre falso, ya que la conjunción sería falsa al ser uno de los miembros la negación de p , que sería falsa. Es decir, tendríamos un antecedente falso que siempre nos dará un condicional verdadero independientemente del valor de verdad de la conclusión (que además en este caso ya sabríamos que es falsa)

Por otro lado, tenemos que:

- $\{(\neg p \wedge r) \rightarrow q\} \equiv_{\{conm \wedge\}} \{(r \wedge \neg p) \rightarrow q\}$
- $\{(r \wedge \neg p) \rightarrow q\} \equiv_{\{\exp\}} \{r \rightarrow (\neg p \rightarrow q)\}$
- $\{r \rightarrow (\neg p \rightarrow q)\} \equiv_{\{r \rightarrow \vee\}} \{r \rightarrow (p \vee q)\}$
- $\{r \rightarrow (p \vee q)\} \equiv_{\{I \rightarrow \vee\}} \{\neg r \vee (p \vee q)\}$

Es decir, si tenemos $p \vee q$, por la $RI \vee$ podemos construir $\neg r \vee (p \vee q)$ que acabamos de demostrar que es equivalente a $(\neg p \vee r) \rightarrow r$

CUESTIÓN: *Dada una fórmula X, si el árbol para X queda abierto y el árbol para $\neg X$ también queda abierto, podemos decir que la fórmula X no es ni válida (tautológica) ni contradictoria.*

Verdadero: Si el árbol para X queda abierto, X no es contradictoria, tiene alguna interpretación en la que resulta V. Cuando X es V, $\neg X$ es F. Si el árbol para $\neg X$ queda abierto, $\neg X$ no es contradictoria, tiene alguna interpretación en la que resulta V. Estos son casos en los que $\neg X$ es F. Es decir, $\neg X$ tiene casos V y casos F, por lo que es una contingencia (ni válida ni contradictoria).

CUESTIÓN: *Si un argumento es inválido, la conjunción de las premisas y la conclusión es una contradicción*

Falso: podemos tener argumento con p V y c V y que aún así presente a una forma inválida, sin que supongan así una contradicción la relación entre sus premisas y conclusión

---

CUESTIÓN: *Si X es una fórmula contradictoria, $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ es una fórmula válida*

Verdadero: de una contradicción se sigue cualquier cosa. El antecedente siempre será verdadero y por tanto la fórmula será siempre tautológica, independientemente de que se trate de una fórmula contradictoria.

CUESTIÓN: *La negación de una tautología es una fórmula insatisfacible*

Verdadero: la negación de una tautología es una contradicción, que es a su vez una fórmula insatisfacible, es decir, que es falsa en todas sus interpretaciones.(insatisfacibilidad=contradictoriedad)

CUESTIÓN: *Un árbol semántico con todas sus ramas cerradas indica que no existe ninguna interpretación bajo la cual las premisas del argumento pudieran ser verdaderas y la conclusión falsa.*

Verdadero: El árbol semántico examina si hay o no contradicción en suponer premisas verdaderas y conclusión falsa. Si se encuentra contradicción en todas las ramas (están cerradas por ello) podemos concluir que es imposible el caso de premisas verdaderas y conclusión falsa.

CUESTIÓN: *Un árbol semántico abierto indica que en el conjunto de fórmulas examinado hay contradicción.*

Falso: La rama abierta indica todo lo contrario: que el conjunto de fórmulas examinado es consistente. Es posible encontrar una interpretación del conjunto en la que todos los enunciados son verdaderos.

CUESTIÓN: *Un árbol semántico abierto indica que el argumento analizado es válido.*

Falso: Un árbol abierto indica que podemos encontrar un ejemplo de argumento, con la forma examinada, en el que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa; es decir, que podemos encontrar un contraejemplo. Por tanto, la forma inferencial examinada en ese árbol es una forma inválida.

CUESTIÓN: *Un árbol semántico cerrado indica que son falsas tanto premisas como conclusión.*

Falso: Un árbol cerrado indica que todas sus ramas contienen contradicción. Esto significa que no es posible encontrar ningún caso de premisas verdaderas y conclusión falsa. El conjunto formado por las premisas y la negación de la conclusión es inconsistente. El esquema inferencial examinado es válido.

CUESTIÓN: *Un árbol semántico con una rama abierta indica que existe exactamente una interpretación bajo la cual las premisas del argumento son verdaderas y la conclusión falsa.*

Falso: Una rama abierta indica que el esquema examinado es inválido, que existen argumentos con esa forma tales que las premisas resultan verdaderas y la conclusión falsa, es decir, que tiene contraejemplos. ¿Cuántos? Siempre infinitos, dada la recursividad del lenguaje natural.

CUESTIÓN: *Un árbol semántico con cuatro ramas cerradas y una abierta indica que existen exactamente cuatro contraejemplos del esquema de inferencia examinado*

Falso: La rama abierta indica que el esquema de argumento examinado no es válido, pues no hay contradicción entre premisas verdaderas y conclusión falsa. El esquema tiene contraejemplos (dada la recursividad del lenguaje, podemos decir que cuenta con infinitos contraejemplos)

CUESTIÓN: *Un árbol semántico con una rama abierta indica que existe una interpretación bajo la cual las premisas del argumento son verdaderas y la conclusión falsa.*

Verdadero: Existe al menos una interpretación que hace verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión. Sería falso, si con "una" se quiere decir "exactamente una". Una rama abierta indica que el argumento es inválido y que, por tanto, tiene contraejemplos. De hecho, siempre que hay contraejemplos, hay infinitos contraejemplos (por la recursividad del lenguaje natural).

CUESTIÓN: *Un árbol semántico con dos ramas cerradas y dos abiertas indica que existen exactamente dos casos de validez y dos de invalidez.*

Falso: Los argumentos no tienen casos de validez, sino forma válida o inválida. Un árbol abierto (no importa cuántas ramas estén abiertas) indica que hay contraejemplos, por lo que la forma examinada es inválida

---

CUESTIÓN: *El antecedente de una afirmación condicional es la premisa de dicha afirmación.*

Falso: Un argumento y un enunciado tienen estructuras diferentes. La forma de un enunciado se recoge en la fórmula; la del argumento en el esquema inferencial. Se puede transformar un argumento en un enunciado de tipo condicional, pero se mantiene la diferencia entre argumentar y enunciar y, paralelamente, entre premisa de un argumento y antecedente de una afirmación.

CUESTIÓN: *Un contraejemplo es un ejemplo de contradicción.*

Falso: Un contraejemplo es una interpretación que muestra la invalidez de un esquema inferencial o la de una fórmula. Por ejemplo: *"Madrid es la capital de Navarra"* es un contraejemplo de p. Es una afirmación falsa que muestra que p no es una fórmula válida.

CUESTIÓN: *Algunos condicionales con consecuente contradictorios son tautologías.*

Verdadero: Cuando el antecedente también es una contradicción, la fórmula resultante es una tautología, ya que de ella $I(X \wedge \neg X)=0$, será siempre válido el condicional sea cual sea el valor del consecuente $I(Y)=0$ o $I(Y)=1$.

Cuando ambos (antecedente y consecuente) son contradicciones, no existen interpretaciones con antecedente verdadero y consecuente falso, sino que todas las interpretaciones dan como resultado lo verdadero

Un condicional con antecedente contradictorio y consecuente contradictorio es una implicación, una fórmula tautológica. Se puede mostrar un caso con una tabla de verdad.

CUESTIÓN: *Una implicación es un condicional verdadero.*

Falso: Una relación de implicación entre dos fórmulas A y B se da cuando es imposible encontrar una interpretación que haga verdadera a la primera y falsa a la segunda. Este es exactamente el caso del condicional tautológico, el condicional no es simplemente verdadero, sino lógicamente verdadero. Un condicional como *"Si Madrid es capital de España, entonces París lo es de Francia"*, aunque es verdadero, no es una implicación, sino un condicional contingente

---

CUESTIÓN: *Una ley es una forma lógica que no tiene contraejemplos.*

Verdadero: Se puede demostrar a partir de un conjunto vacío de premisas. Si hacemos un árbol semántico para su negación, todas las ramas cerrarán. Si hacemos una tabla de verdad, veremos que se trata de una tautología, por lo que no es posible encontrar un enunciado (una interpretación) con dicha forma lógica que sea falso, es decir, no tiene contraejemplos.

Por ejemplo: $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ **Ley de contraposición (del condicional)**

p	q	$(p \to q)$	$(\neg q \to \neg p)$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

√ 1. $(p \to q)$

√ 2. $\neg(\neg q \to \neg p)$

3.1 $\neg p$ β 1	3.2 q β 1
4.1 $\neg q$ α 2	4.2 $\neg q$ α 2
5.1 p α 2	5.2 p α 2
Cierra con 3.1 y 5.1	Cierra con 3.2 4.2

CUESTIÓN: *Los teoremas son las reglas deductivas del cálculo axiomático.*

Falso: El cálculo axiomático no tiene reglas deductivas propiamente, sino reglas de transformación. Los teoremas son fórmulas válidas obtenidas a partir de los axiomas, mediante las reglas de transformación.

CUESTIÓN*: En el cálculo axiomático solamente se utilizan fórmulas tautológicas o válidas.*

Verdadero: En el cálculo axiomático se parte de axiomas, que son verdades lógicas (tautologías, fórmulas válidas) por estipulación. Mediante reglas, se van demostrando los teoremas que conservan la validez de los axiomas.

Otra Explicación:

Verdadero: El cálculo axiomático parte de fórmulas que se aceptan como válidas o tautológicas no demostrables en el sistema y, mediante reglas de transformación, demuestra la validez de otras de modo que en la cadena demostrativa se escriben únicamente fórmulas válidas. Dicho de otro modo, las reglas de transformación del cálculo axiomático no solamente conservan la verdad de las premisas, si la hay, sino también la validez de su forma.

CUESTIÓN: *Presente la forma proposicional de los siguientes enunciados y diga si son tautológicos, contradictorios o contingentes*

1. Si no pago la factura del restaurante, voy al cine; pero no voy al cine, si tomo helado de postre o no pago la factura del restaurante.

- p : pago la factura del restaurante
- q : voy al cine
- r : tomo helado de postre

$$(\neg p \to q) \wedge [(r \vee \neg p) \to \neg q]$$

Al ser una conjunción, con que cualquiera de ambos miembros del condicional sea falso, sería falso por tanto la conjunción

Vemos que para $I(p)=0$ y $I(q)=0$, tenemos que $(\neg p \to q) \equiv (1 \to 0)$, por lo tanto ya tenemos un caso falso, por lo que no es una tautología.

Por otro lado, para $I(p)=1$, $I(q)=0$ hacen la parte izquierda del condicional verdadera. Para la derecha, como el consecuente $I(\neg q)=1$, el valor que adquiera $I(r)$ es igual que sea I $(r)=1$ o $I(r)=0$, ya que en todo caso sería verdadero el condicional.

Al tener una interpretación falsa y otra verdadera, el enunciado es contingente.

2. Madrid está al norte de Toledo, Asturias está al norte de Madrid, León está al norte de Asturias

- p : Madrid está al norte de Toledo
- q : Asturias está al norte de Madrid
- r : León está al norte de Asturias

$$p \wedge q \wedge r$$

Se trata de una conjunción. Será verdadera siempre y cuando lo sean todas y cada una de sus variables $I(p)=I(q)=I(r)=1$, y falsa con que al menos una de ellas no lo sea, $I(m)=0$.

- Ejemplo de validez: $(2+2=4) \wedge (1+1=2) \wedge (3+3=6)$
- Ejemplo de falsedad: $(2+2=5) \wedge (1+1=2) \wedge (3+3=6)$

Esto hace que el enunciado sea contingente.

CUESTIÓN: *Considere el siguiente argumento:*

"En un juicio, el fiscal (de quien sabemos que dice siempre la verdad o bien miente siempre) afirma:

1. *o X o Y es culpable*
2. *X no es culpable*

Si el fiscal miente, entonces ocurriría que (1) X e Y son ambos inocentes y (2) X es culpable. Esto es una contradicción. Por tanto, el fiscal dice siempre la verdad, X es inocente e Y es culpable."

¿Es un argumento correcto?. Si no lo es, ¿por qué?

Planteamos el posible diccionario del argumento

- p : el fiscal dice la verdad ($\neg p$: el fiscal miente)
- q : X es inocente
- r : Y es inocente

Y la formalización del argumento sería:

$p \vee \neg p$
$\neg q \vee \neg r$
q
$\neg p \rightarrow ((q \wedge r) \wedge \neg q)$
––––––––––
$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$

En el argumento se está confundiendo una disyunción exclusiva ($\vee\vee$) con una inclusiva ($\vee$). La conclusión se sigue de $\neg q \vee \neg r$ y r , pero no se sigue de $\neg q \vee\vee \neg r$ y r

1. $(\neg q \vee \neg r) \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r)$ *uno de los dos es culpable, pero no los dos*
2. q *X no es culpable*

Si el fiscal miente, los dos son culpables y no hay contradicción; si dice la verdad, X es inocente e Y es culpable y tampoco hay contradicción.

CUESTIÓN:

CUESTIÓN:

CUESTIÓN:

CUESTIÓN:

CUESTIÓN:

CUESTIÓN:

CUESTIÓN:

Formalización, interpretación y contraejemplos

EJERCICIO: *Formalice los siguientes enunciados y diga si sus formas son contingentes, tautológicas o contradictorias:*

- *Si los presos del pabellón A se ponen en huelga de hambre, el funcionario de prisiones será expedientado, y los presos del pabellón B se amotinarán o el director de la prisión pedirá ayuda a las fuerzas especiales a menos que los presos del pabellón A abandonen su protesta*
  - p : los presos del pabellón A se ponen en huelga de hambre
  - q : el funcionario será expedientado
  - r : los presos del pabellón B se amotinarán
  - s : el director de la prisión pedirá ayuda a las fuerzas especiales
  - t : los presos de A siguen en su propuesta
    - $(p \rightarrow q) \wedge (r \vee (\neg t \rightarrow s))$
    - Es una contingencia, ya que:
      - $I(q)=0$ hace falsa a la fórmula
      - $I(p)=I(q)=I(r)=I(s)=I(t)=1$ hace verdadera a la fórmula
- *Si estudio desde Octubre y participo en los foros de Alf, me presentaré al examen en Enero o en Febrero y aprobaré*
  - Se me ocurren dos alternativas, ya que podría entenderse el hecho de presentarse en Enero o Febrero como la misma cosa (ya que el hecho de presentarse en primera convocatoria incluye ambas opciones, pero sólo una de ellas), o bien dos opciones distintas. Esto lo reflejo con la posibilidad de distinguir r_1 y r_2 para el primer caso, y r para el segundo.
  - p : estudio desde octubre
  - q : participo en los foros de Alf
  - r : me presentaré al examen en Enero o en Febrero
  - r_1 : me presentaré al examen en Enero
  - r_2 : me presentaré al examen en Febrero
  - s : aprobaré
    - *opción 1:* $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$
    - *opción 2:* $(p \wedge q) \rightarrow [(r_1 \vee r_2) \wedge s]$
      - En ambos caso se trata de una contingencia. De hecho, si no atendemos a las variables de la convocatoria tenemos que:
        - Si $I(p)=I(q)=I(s)=0$, la frase es falsa. Es decir, si no estudio y no participo, da igual cuándo me presente ya que no voy a aprobar
        - Si $I(p)=I(q)=I(s)=1$ quiere decir que, siempre que nos presentemos al examen (si no, sería imposible), aprobaremos, siendo la fórmula verdadera.

EJERCICIO: *Presente (en castellano) una interpretación verdadera y otra falsa de cada una de las siguientes fórmulas:*

1. p
   - V: Madrid es la capital de España
   - F: Madrid no es la capital de España
2. $p \wedge q$
   - V: Madrid es la capital de España y París de Francia
   - F: Madrid es la capital de España y París de Mozambique
3. $\neg p \vee q$
   - V: O Madrid no es la capital de España o París lo es de Francia
   - F: O 2+2=5 o 2+2=6
4. $p \rightarrow \neg q$
   - V: Si 2+2=4, entonces no es verdad que 2+3=6
   - F: Si 2+2=4, entonces no es verdad que 2+3=5
5. $\neg q \rightarrow \neg p$
   - V: si no se da que 2+2=4 entonces no se da 3+3=6
   - F: si no se da que 2+2=5 entonces no se da 3+3=6
6. $(p \rightarrow q) \wedge \neg (r \rightarrow \neg p)$
   - V: si 2+2=4 entonces 2 es primo, y además, no es cierto que si el Tajo pasa por Madrid, entonces 2+2 es distinto que 4
   - F: si 2+2=4 entonces 2 es primo, y además, no es cierto que si el Tajo no pasa por Madrid, entonces 2+2 es distinto que 4
7. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge s)$
   - V: 2+2=4 y no es cierto que 2+3=5, o bien, no es cierto que 2+2=4 y la Tierra gira en torno al Sol
   - F: 2+2=4 y es cierto que 2+3=5, o bien, no es cierto que 2+2=4 y la Tierra gira en torno al Sol
8. $\neg p \vee (r \wedge s)$
   - V: No es cierto que 2+2=5 o bien (3+3=6 y 4+4=8)
   - F: No es cierto que 2+2=4 o bien (3+3=6 y 4+4=8)
9. $p \vee \neg (s \rightarrow \neg r)$
   - V: Madrid es la capital de España o no es cierto que si llueve entonces no hay nubes
   - F: Madrid es la capital de Francia o no es cierto que si llueve entonces no hay nubes
10. $(\neg p \wedge (r \vee \neg s))$
    - V: Madrid no es la capital de Francia y, o 2+2=4 o no existen gatos de nueve patas
    - F: Madrid no es la capital de España y, o 2+2=4 o no existen gatos de nueve patas

EJERCICIO: *Aristóteles nació en Estagira y fue tutor de Alejandro Magno. Pero si nació en Estagira fue de nacionalidad macedónica. Por tanto, Aristóteles fue de nacionalidad macedónica.*

- p : Aristóteles nació en Estagira
- q : Aristóteles fue tutor de Alejandro Magno
- r : Aristóteles es de nacionalidad macedónica

$p \wedge q$
$p \rightarrow r$
-----
r

EJERCICIO: *Una cosa no puede ser enseñada si no hay profesores capaces de enseñarla. Pero no hay profesores capaces de enseñar la virtud. Por tanto, la virtud no puede ser enseñada.*

- p : una cosa puede ser enseñada
- q : hay profesores capaces de explica una cosa
- r : hay profesores capaces de enseñar la virtud
- s : la virtud puede enseñarse

$\neg q \rightarrow \neg p$
$\neg r$
$\neg r \rightarrow \neg s$

$\neg s$

EJERCICIO: *Si continúa la investigación, surgirán nuevas evidencias. Si surgen nuevas evidencias, entonces varios dirigentes se verán implicados. Si varios dirigentes están implicados, los periódicos dejarán de hablar del caso. Si la continuación de la investigación implica que los periódicos dejen de hablar del caso, entonces el surgimiento de nuevas evidencias implica que la investigación continúa. La investigación no continúa. Por tanto, no surgirán nuevas evidencias.*

- p : Continúa la investigación
- q : Surgen nuevas evidencias
- r : Se ven implicados varios dirigentes
- s : Los periódicos hablan del caso

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
$r \rightarrow \neg s$
$(p \rightarrow \neg s) \rightarrow (q \rightarrow p)$
$\neg p$

$\neg q$

EJERCICIO: *Sócrates no cometería una mala acción. Si devuelve mal por mal, estará cometiendo una mala acción. Si rompe un acuerdo con el Estado porque ha sido injustamente condenado, está devolviendo mal por mal. Por tanto, si el huir de la prisión* ***significa*** *romper un acuerdo por haber sido injustamente castigado, Sócrates no huirá de la prisión.*

- p : Sócrates cometería una mala acción
- q : Sócrates devuelve mal por mal
- r : Sócrates rompe un acuerdo con el Estado por haber sido injustamente condenado.
- s : Sócrates huye de la prisión

$\neg p$
$q \rightarrow p$
$r \rightarrow q$

$(s \leftrightarrow r) \rightarrow \neg s$

EJERCICIO: *Si el número n es positivo, entonces n² es positivo. Si n es negativo, entonces n² es positivo. n es positivo o negativo. En consecuencia, n² es positivo.*

- p : n es positivo
- q : n² es positivo

$p \rightarrow q$
$\neg p \rightarrow q$
$p \vee \neg p$
------
q

EJERCICIO: *Si la pena de muerte antepone la defensa de la sociedad a la conservación de la persona, entonces, si supone la destrucción total de la persona, imposibilita la corrección del penado. Imposibilita la corrección del penado sólo si es condenable éticamente. La pena de muerte antepone la defensa de la sociedad a la conservación de la persona. Por tanto, si la pena de muerte supone la destrucción total de la persona e imposibilita la corrección del penado, es condenable éticamente.*

- p : La pena de muerte antepone la defensa de la sociedad a la conservación de la persona
- q : La pena de muerte supone la destrucción total de la persona
- r : La pena de muerte imposibilita la corrección del penado
- s : La pena de muerte es condenable éticamente

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
$r \rightarrow s$
p
——————
$(q \wedge r) \rightarrow s$

EJERCICIO: *O los libros de la Biblioteca de Alejandría contienen las enseñanzas del Corán o no las contienen. Si contienen las enseñanzas del Corán son superfluos, y si son superfluos deben ser quemados. Si no contienen las enseñanzas del Corán son nocivos, y si son nocivos deben ser quemados. Por consiguiente, los libros de la Biblioteca de Alejandría deben ser quemados.*

- p : los libros de la Biblioteca de Alejandría contienen la enseñanzas del Corán
- q : los libros de la Biblioteca de Alejandría son superfluos
- r : los libros de la Biblioteca de Alejandría deben ser quemados
- s : los libros de la Biblioteca de Alejandría son nocivos

$p \vee \neg p$
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
$(\neg p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r)$
——————
r

EJERCICIO: *Cuando los tipos de interés están muy bajos, es el momento de comprar un piso; pero cuando el suelo está muy caro, no es el momento de comprar un piso. Los tipos de interés están muy bajos y el suelo muy caro. Por tanto, los papas que prohibieron leer la biblia eran muy sabios.*

- p : Los tipos de interés están muy bajos
- q : Es el momento de comprar un piso
- r : El suelo está muy caro
- s : Los papas que prohibieron leer la biblia eran muy sabios

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$
$p \wedge r$
——————
s

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $(p \wedge q) \vee (\neg p \rightarrow r)$

Una interpretación para la que la fórmula anterior no es verdadera es aquella en que $p=0, q=0, r=0$, y para el que un posible contraejemplo sería

- p : 2 + 2 = 5
- q : se puede dividir por 0
- r : la identidad de Euler es $e^{i\pi}=0$

"2 + 2 = 5 y se puede dividir por cero, o no es cierto que 2 + 2 = 5 sólo si la identidad de Euler es $e^{i\pi}=0$ *"*

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge \neg t$

Una interpretación para la que la fórmula anterior no es verdadera es aquella en que todas sus variables son verdaderas, $p=q=r=t=1$

- p : Madrid es la capital de España
- q : *París* es la capital de Francia
- r : Roma es la capital de Italia
- s : Washington es la capital de USA

"Si Madrid es la capital de España, entonces se da que si París es la capital de Francia, Roma lo es de Italia; pero Washington no es la capital de USA"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $(p \rightarrow \neg s) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

Contraejemplo para $p=q=1, s=0$

- p : Madrid es la capital de España
- q : *París* es la capital de Francia
- s : Milán es la capital de Italia

"Si Madrid es la capital de España, Milán no es la capital de Italia; lo que es suficiente para afirmar que si París es la capital de Francia entonces Madrid no es la capital de España"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $(s \leftrightarrow r) \rightarrow \neg s$

Contraejemplo para $s=r=1$

- r : 2 + 2 = 4
- s : 2 es un número par

"2+2=4 sí y sólo sí 2 es un número por, por lo tanto, 2 no es un número par"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $((p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)) \wedge \neg s$

Contraejemplo para $p=q=r=s=1$

- p : Madrid es la capital de España
- q : París es la capital de Francia
- r : Roma es la capital de Italia
- s : Washington es la capital de USA

"Si Madrid es la capital de España, París lo es de Francia, y si París no es la capital de Francia, Roma lo es de Italia; además, Washington no es la capital de los USA"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $\neg p \vee (p \rightarrow q)$

Contraejemplo para $p=q=1$

- p : Madrid es la capital de España
- q : París es la capital de Francia

"o Madrid no es la capital de España, o, si lo es, entonces París lo es de Francia"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $(p \wedge q) \wedge (r \rightarrow p)$

Contraejemplo para $p=0, q=r=1$

- p : Madrid es la capital de Alemania
- q : París es la capital de Francia
- r : Roma es la capital de Italia

"Madrid es la capital de Alemania y París de Francia; al igual que si Roma es la capital de Italia, entonces Madrid es capital de Alemania"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo de la siguiente fórmula:* $r \to (s \to t)$

Contraejemplo para r = s = 1, t=0

- r : La Luna orbita a la Tierra
- s : La Tierra orbita al Sol
- t : La Tierra es plana

"Si la Luna orbita a la tierra, entonces, si la Tierra orbita al Sol se puede afirmar que la Tierra es plana"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo del siguiente esquema inferencial:*

$p \to (q \to r)$
$r \to s$
p
———————
$(q \wedge r) \to \neg s$

Para $q = r = s = 1$ tenemos que la conclusión es falsa, si además $p = 1$, todas las premisas serán verdaderas, lo que nos da un caso en que $\sum P_i \to 0$, es decir, argumento inválido

- p : Madrid es la capital de España
- q : París es la capital de Francia
- r : Londres es la capital de RU
- s : Lisboa es la capital de Portugal

"Si Madrid es la capital de España, entonces si París es la capital de Francia, Londres lo es de RU. Londres es la capital de RU, por lo que Lisboa es la capital de Portugal. Madrid es la capital de España. Por lo tanto, si París es la capital de Francia y Londres la de RU, entonces Lisboa no es la capital de Portugal."

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo del siguiente esquema inferencial:*

$p \to q$
$\neg p \to q$
$p \vee \neg p$
———————
$\neg q$

Para $p = q = 1$ tenemos que la conclusión es falsa, y la conjunción de las premisas es verdadera, es decir, argumento inválido

- p : Madrid es la capital de España
- q : París es la capital de Francia

"Si Madrid es la capital de España, entonces París es la capital de Francia. Si Madrid no es la capital de España, entonces París es la capital de España. Madrid es, o no es, la capital de España. En consecuencia, París no es la capital de Francia"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo del siguiente esquema inferencial:*

$p \vee q$
$p \to (r \wedge \neg s)$
$q \to (\neg r \wedge s)$
$\neg(\neg r \wedge s)$
———————
$r \to s$

Tendremos conclusión falsa para $r = 1$ y $s = 0$. Buscamos si para dichos valores puede darse algún caso en que la conjunción de las premisas sea verdadera. Lo tendremos si $p = 1$ y $q = 0$. En consecuencia

- p : Madrid es la capital de España
- q : París no es la capital de Francia
- r : Londres es la capital de RU
- s : Lisboa no es la capital de Portugal

"Madrid es la capital de España o París no es la capital de Francia. Si España es la capital de España, entonces Londres lo es de Reino Unido y Lisboa lo es de Portugal. Si París no es la capital de Francia, entonces Madrid no es la capital de España y Lisboa no es la capital de Portugal. No es cierto que Londres no sea la capital de Reino Unido y que Lisboa no sea la capital de Portugal. Por lo tanto, si Londres es la capital de Reino Unido, Lisboa no lo es de Portugal."

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo del siguiente esquema inferencial:*

$p \vee \neg p$
$(p \to q) \wedge (q \to r)$
$(\neg p \to \neg s) \wedge (s \to r)$
———————
$\neg r$

La conclusión es falsa para $r=1$. Para que se cumpla la verdad de la conjunción de las premisas (y por lo tanto tengamos así el contraejemplo para el argumento no válido) necesitamos que $q=s=p=1$

- p : Madrid es la capital de España
- q : París es la capital de Francia
- r : Londres es la capital de RU
- s : Lisboa es la capital de Portugal

"O Madrid es la capital de España o no lo es. Si Madrid es la capital de España entonces París lo es de Francia; en cuyo caso además tenemos que si Lisboa es la capital de Portugal, entonces Londres lo es del Reino Unido. Si Madrid no es la capital de España, entonces Lisboa tampoco lo sería de Portugal; pero es que si Lisboa fuese capital de Portugal, entonces Londres lo sería del Reino Unido. Como consecuencia, Londres no es la capital del Reino Unido"

EJERCICIO: *Presente un contraejemplo del siguiente esquema inferencial:*

$p \to (q \to r)$
$r \to s$
p
———————
$\neg(q \to s)$

Como la conclusión es la negación de un condicional (tenemos más opciones de conseguir el caso falso) vamos a estudiar primero los casos de verdad para las premisas. Forzosamente, $p=1$, lo que en la primera premisa nos fuerza a que $q \to r$ sea 1. Atendiendo a la conclusión, el único caso que no nos valdría sería el de $q=1$ y $s=0$. Si tomamos $q=s=1$, y además también $r=1$ podemos comprobar que en efecto todas las premisas serían verdaderas. Es decir, para $p=q=s=r=1$, y sean:

- p : Madrid es la capital de España
- q : París es la capital de Francia
- r : Londres es la capital de RU
- s : Lisboa es la capital de Portugal

Nuestro contraejemplo sería:

"Si Madrid es la capital de España, entonces, si París lo es de Francia, se da que Londres lo es del Reino Unido. Si Londres es capital del Reino Unido, entonces lo es Lisboa de Portugal. España tiene como capital a Madrid. Así por tanto, no es cierto que si París es la capital de Francia, Lisboa lo sea de Portugal"

EJERCICIO: *Presente interpretación del siguiente esquema inferencial con alguna premisa falsa*

$p \wedge q$
$p \to r$
———————
r

La forma argumental es válida, pero buscamos una interpretación en que, aún siendo verdadera la conclusión, alguna de las premisas sea falsa. Daremos la interpretación para $p=0, q=r=1$, que hace falsa la primera premisa

- p : Madrid es la capital de Francia
- q : París es la capital de Francia
- r : Londres es la capital de RU

"Madrid es la capital de Francia y París también. Si Madrid es la capital de Francia entonces Londres lo es de Reino Unido. Así pues, Londres es capital de Reino Unido".

EJERCICIO: *Dado el siguiente enunciado, decir cuáles de las opciones siguientes se siguen lógicamente de él como conclusión y pruébelo mediante Árboles Semánticos.*

"Wittgenstein es el autor de Las Investigaciones filosóficas o no es el autor del Tractatus"

- p : Platón es el autor de la Ética a Nicómaco
- q : Platón es el autor de La República

$p \vee \neg q$

1. *Si Wittgenstein es el autor de Las Investigaciones filosóficas, también lo es del Tractatus*
   - $p \rightarrow q$ no se sigue

√ 1. $p \vee \neg q$

√ 2. $\neg(p \rightarrow q)$

3. p $(\alpha 2)$

4. $\neg q$ $(\alpha 2)$

5.1 p $(\beta 1)$	5.2 $\neg q$ $(\alpha 2)$
No cierra	No cierra

Al no cerrar el árbol no se sigue un enunciado del otro

2. *Si Wittgenstein no es el autor de Las Investigaciones filosóficas, entonces no es el autor del Tractatus.*
   - $\neg p \rightarrow \neg q$ se sigue

√ 1. $p \vee \neg q$

√ 2. $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

3. $\neg p$ $(\alpha 2)$

4. q $(\alpha 2)$

5.1 p $(\beta 1)$	5.2 $\neg q$ $(\alpha 2)$
Cierra con 3	Cierra con 4

Al cerrar el árbol se sigue un enunciado del otro

3. *Wittgenstein no es el autor del Tractatus a menos que también lo sea de Las Investigaciones Filosóficas.*
   - $\neg p \rightarrow \neg q$ se sigue
   - Mismo árbol que en el punto 2

EJERCICIO*: Dado el siguiente enunciado, decir cuáles de las opciones siguientes se siguen lógicamente de él como conclusión y pruébelo.*

"Platón no es el autor de la Ética a Nicómaco a menos que también lo sea de La República"

- p : Platón es el autor de la Ética a Nicómaco
- q : Platón es el autor de La República

$\neg q \rightarrow \neg p$

1. *Si Platón es el autor de La República, también lo es de la Ética a Nicómaco*
   - $q \rightarrow p$ no se sigue

$\surd$ 1. $\neg q \rightarrow \neg p$

$\surd$ 2. $\neg(q \rightarrow p)$

3. q $(\alpha 2)$

4. $\neg p$ $(\alpha 2)$

5.1 $\neg p$ $(\beta 1)$	5.2 q $(\beta 1)$
No cierra	Cierra con 3

Al no cerrar el árbol no se sigue un enunciado del otro

2. *Si platón no es el autor de La República, entonces no es el autor de la Ética a Nicómaco*
   - $\neg q \rightarrow \neg p$ se sigue
   - La formalización es la misma, por lo que se sigue una de otra $X \rightarrow X$
3. *Platón es el autor de La República o no es el autor de la Ética a Nicómaco*
   - $q \vee \neg p$ se sigue
   - Por interdefinición $\rightarrow \vee$ vemos que antecedente y consecuente son equivalente, por lo que se sigue un enunciado del otro

Deducción natural y árboles semánticos

EJERCICIO: Demuestre $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$ utilizando sólo regla básicas

1.	p	S
2.	q	S
3.	$\neg p$	S
4.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$ 1,3
5.	$\neg\neg p$	RI $\neg$ 3-4
6.	p	RE $\neg$ 5
7.	$q \rightarrow p$	RI $\rightarrow$ 2-6
8.	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	RI $\rightarrow$ 1-7

EJERCICIO: Demuestre $\models (p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$ utilizando sólo regla básicas

1.	$p\to(q\to r)$	S
2.	$p\to q$	S
3.	p	S
4.	q	RE $\to$ 2,3
5.	$q\to r$	RE $\to$ 1,3
6.	r	RE $\to$ 4,5
7.	$p\to r$	RI $\to$ 3-6
8.	$(p\to q)\to(p\to r)$	RI $\to$ 3-6
9.	$(p\to(q\to p))\to(p\to q)\to(p\to r)$	RI $\to$ 3-6

EJERCICIO: Demuestre $\models p\to\neg\neg p$ utilizando sólo regla básicas

1.	p	S
2.	$\neg p$	S
3.	$p\wedge\neg p$	RI $\wedge$ 1,2
4.	$\neg\neg p$	RI $\neg$ 2-3
5.	$p\to\neg\neg p$	RI $\to$ 1-4

EJERCICIO: Demuestre $\models(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$ utilizando sólo regla básicas

1.	$\neg p\to\neg q$	S
2.	q	S
3.	$\neg p$	S
4.	$\neg q$	RE $\to$ 1,3
5.	$q\wedge\neg q$	RI $\wedge$ 2,4
6.	$\neg\neg p$	RI $\neg$ 3-5
7.	p	RE $\neg$ 6
8.	$q\to p$	RI $\to$ 2-7
9.	$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$	RI $\to$ 1-8

EJERCICIO: Demuestre $\models \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ utilizando sólo regla básicas

1.	$\neg p$	S
2.	p	S
3.	$\neg q$	S
4.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$ 1,2
5.	$\neg\neg q$	RI $\neg$ 3-4
6.	q	RE $\neg$ 5
7.	$p \rightarrow q$	RI $\rightarrow$ 2-6
8.	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	RI $\rightarrow$ 1-7

EJERCICIO: Demuestre $\models (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ utilizando sólo regla básicas

1.	$p \rightarrow q$	S
2.	$\neg q$	S
3.	p	S
4.	q	RE $\rightarrow$ 1-3
5.	$q \wedge \neg q$	RI $\wedge$ 2,4
6.	$\neg p$	RI $\neg$ 2-8
7.	$\neg q \rightarrow \neg p$	RI $\rightarrow$ 2-6
8.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	RI $\rightarrow$ 1-7

EJERCICIO: Demuestre $[(p \vee q), (\neg p)] \models q$ utilizando sólo regla básicas

1.	$p \vee q$	P
2.	$\neg p$	P
3.	p	S
4.	$\neg q$	S
5.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$ 2,3
6.	$\neg\neg q$	RI $\neg$ 3-5
7.	q	RE $\neg$ 6
8.	q	S
9.	$\neg p \wedge q$	RI $\wedge$ 2,8
10.	q	RE $\wedge$ 9
11.	q	RE $\vee$ 1, 3-7, 8-10

EJERCICIO: Demuestre $\models (p \wedge \neg p) \rightarrow q$ utilizando sólo regla básicas

1.	$p \wedge \neg p$	S
2.	$\neg q$	S
3.	p	RE $\wedge$ 1
4.	$\neg p$	RE $\wedge$ 1
5.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$ 3,4
6.	$\neg\neg q$	RI $\neg$ 2-5
7.	q	RE $\neg$ 7
8.	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$	RI $\rightarrow$ 1-7

EJERCICIO: $[(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg s), q] \models (p \rightarrow \neg(s \wedge t))$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$	P
2.	q	P
3.	p	S
4.	$p \wedge q$	RI $\wedge$ 2,3
5.	$r \wedge \neg s$	RE $\rightarrow$ 1,4
6.	$\neg s$	RE $\wedge$ 5
7.	$\neg s \vee \neg t$	RI $\vee$ 7
8.	$\neg(s \wedge t)$	Interdef $\vee \wedge$ 7
9.	$p \rightarrow \neg(s \wedge t)$	RI $\rightarrow$ 3-8

EJERCICIO: Demuestre $\models q \rightarrow (p \vee \neg p)$ utilizando sólo regla básicas

1.	q	S
2.	$\neg(p \vee \neg p)$	S
3.	p	S
4.	$p \vee \neg p$	RI $\vee$ 3
5.	$\neg(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p)$	RI $\wedge$ 2,4
6.	$\neg p$	RI $\neg$ 3-5
7.	$p \vee \neg p$	RI $\vee$ 6
8.	$\neg(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p)$	RI $\wedge$ 2,7
9.	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	RI $\neg$ 2-8
10.	$p \vee \neg p$	RE $\neg$ 9
11.	$q \rightarrow (p \vee \neg p)$	RI $\rightarrow$ 1-10

EJERCICIO: $[(p \to q),(q \to r)] \models ((p \to \neg r) \to \neg p)$

1.	$p \to q$	P
2.	$q \to r$	P
3.	$p \to \neg r$	S
4.	$\neg p \vee \neg r$	Interdef $\to\vee$ 3
5.	$p \to r$	Trans $\to$ 1,2
6.	$\neg p$	S
7.	$\neg p$	Refl. 6
8.	$\neg r$	S
9.	$\neg p$	MT 5,8
10.	$\neg p$	RE $\vee$ 4, 6-7, 8-9
11.	$(p \to \neg r) \to \neg p$	RI $\to$ 3-10

EJERCICIO: $[(r \vee (p \wedge q)),(p \wedge \neg r)] \models q$

1.	$r \vee (p \wedge q)$	P
2.	$p \wedge \neg r$	P
3.	$\neg r$	RE $\wedge$ 2
4.	$p \wedge q$	IA 1,3
5.	q	RE $\wedge$ 4

EJERCICIO: $[(p \to q),(\neg r \to \neg q),(r \to \neg s)] \models (\neg s \vee \neg p)$

1.	$p \to q$	P
2.	$\neg r \to \neg q$	P
3.	$r \to \neg s$	P
4.	s	S
5.	$\neg r$	MT 3,4
6.	$\neg q$	RE $\to$ 2,5
7.	$\neg p$	MT 1,6
8.	$s \to \neg p$	RI $\to$ 4-7
9.	$\neg s \vee \neg p$	Interdef $\to\vee$ 8

EJERCICIO: $[(\neg p\to q),(\neg(p\wedge\neg r)\wedge\neg(q\wedge\neg r))]\models r$

1.	$\neg p\to q$	P
2.	$\neg(p\wedge\neg r)\wedge\neg(q\wedge\neg r)$	P
3.	$p\vee q$	Interdef $\to\vee$ 1
4.	$\neg(p\wedge\neg r)$	RE $\wedge$ 2
5.	$\neg(q\wedge\neg r)$	RE $\wedge$ 2
6.	$p\to r$	Interdef $\wedge\to$ 4
7.	$q\to r$	Interdef $\wedge\to$ 5
8.	p	S
9.	r	RE $\to$ 6,8
10.	q	S
11.	r	RE $\to$ 7,10
12.	r	RE $\vee$ 3, 8-9, 10-11

EJERCICIO: $[(p\vee\neg p),(p\to q)\wedge(q\to r),(\neg p\to s)\wedge(s\to r)]\models r$

1.	$p\vee\neg p$	P
2.	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	P
3.	$(\neg p\to s)\wedge(s\to r)$	P
4.	$p\to q$	RE $\wedge$ 2
5.	$q\to r$	RE $\wedge$ 2
6.	$\neg p\to s$	RE $\wedge$ 3
7.	$s\to r$	RE $\wedge$ 3
8.	$p\to r$	Trans $\to$ 4,5
9.	$\neg p\to r$	Trans $\to$ 6,7
10.	p	S
11.	r	RE $\to$ 8,10
12.	$\neg p$	S
13.	r	RE $\to$ 9,10
14.	r	RE $\vee$ 1, 10-11, 12-13

EJERCICIO: $[(p\vee q),(p\rightarrow r),(\neg s\rightarrow\neg q)]\models(r\vee s)$

1.	$p\vee q$	P
2.	$p\rightarrow r$	P
3.	$\neg s\rightarrow\neg q$	P
4.	$\neg r$	S
5.	$\neg p$	MT 2,4
6.	q	IA 1,5
7.	s	MT 3,6
8.	$\neg r\rightarrow s$	RI $\rightarrow$ 4-7
9.	$r\vee s$	Interdef $\rightarrow\vee$ 8

EJERCICIO: $[(p\vee(q\vee r)),(\neg(p\wedge\neg q)\vee\neg r),((p\wedge r)\vee(\neg p\wedge(\neg q\wedge\neg r)))]\models(p\wedge q\wedge r)$

1.	$p\vee(q\vee r)$	P
2.	$\neg(p\wedge\neg q)\vee\neg r$	P
3.	$(p\wedge r)\vee(\neg p\wedge(\neg q\wedge\neg r))$	P
4.	$p\wedge r$	S
5.	p	RE $\wedge$ 4
6.	r	RE $\wedge$ 4
7.	$\neg(p\wedge\neg q)$	IA 6,2
8.	$p\rightarrow q$	Interdef $\wedge\rightarrow$ 7
9.	q	RE $\rightarrow$ 5,8
10.	$p\wedge q$	RI $\wedge$ 5,9
11.	$p\wedge q\wedge r$	RI $\wedge$ 6,10
12.	$\neg p\wedge(\neg q\wedge\neg r)$	S
13.	$\neg p$	RE $\wedge$ 12
14.	$\neg q$	RE $\wedge$ 12
15.	$\neg r$	RE $\wedge$ 12
16.	$q\vee r$	IA 1,13
17.	r	IA 14,16
18.	$p\wedge q\wedge r$	ECQ 15,17
19.	$p\wedge q\wedge r$	RE $\vee$ 3,4-11,12-18

EJERCICIO: $[(p\rightarrow(q\rightarrow\neg r)),(s\rightarrow\neg(r\rightarrow\neg q))]\models((r\wedge s)\rightarrow\neg p)$

1.	$p\rightarrow(q\rightarrow\neg r)$	P
2.	$s\rightarrow\neg(r\rightarrow\neg q)$	P
3.	$r\wedge s$	S
4.	s	RE $\wedge$ 3
5.	$\neg(r\rightarrow\neg q)$	RE $\rightarrow$ 2,4
6.	$r\wedge q$	Interdef $\rightarrow\wedge$ 5
7.	$q\wedge r$	Simetría $\wedge$ 6
8.	$\neg(q\rightarrow\neg r)$	Interdef $\wedge\rightarrow$ 7
9.	$\neg p$	MT 1,8
10.	$(r\wedge s)\rightarrow\neg p$	RI $\neg$ 3-9

EJERCICIO: $[(p\rightarrow q),(\neg(q\wedge\neg r)),(t\wedge\neg(\neg p\wedge\neg s)),((r\wedge t)\rightarrow s)]\models s$

1.	$p\rightarrow q$	P
2.	$\neg(q\wedge\neg r)$	P
3.	$t\wedge\neg(\neg p\wedge\neg s)$	P
4.	$(r\wedge t)\rightarrow s$	P
5.	$\neg s$	S
6.	t	RE $\wedge$ 3
7.	$\neg(\neg p\wedge\neg s)$	RE $\wedge$ 3
8.	$\neg(r\wedge t)$	MT 4,5
9.	$r\rightarrow\neg t$	Interdef $\wedge\rightarrow$ 8
10.	$\neg r$	MT 6,9
11.	$\neg p\rightarrow s$	Interdef $\wedge\rightarrow$ 7
12.	p	MT 5,11
13.	$q\rightarrow r$	Interdef $\wedge\rightarrow$ 3
14.	$p\rightarrow r$	Trans $\rightarrow$ 1,13
15.	r	RE $\rightarrow$ 12,14
16.	$r\wedge\neg r$	RI $\wedge$ 10,15
17.	$\neg\neg s$	RI $\neg$ 5-16
18.	s	RE $\neg$ 17

EJERCICIO: $[(p\to((q\to r)\to s)),(r\wedge(s\to t))]\models(p\to t)$

1.	$p\to((q\to r)\to s)$	P
2.	$r\wedge(s\to t)$	P
3.	p	S
4.	r	RE $\wedge$ 2
5.	$s\to t$	RE $\wedge$ 2
6.	$(q\to r)\to s$	RE $\to$ 1,3
7.	$\neg s$	S
8.	$\neg(q\to r)$	IA 6,7
9.	$q\wedge\neg r$	Interdef $\to\wedge$ 8
10.	$\neg r$	RE $\wedge$ 9
11.	$r\wedge\neg r$	RI $\wedge$ 4,10
12.	$\neg\neg s$	RI $\neg$ 7-11
13.	s	RE $\neg$ 12
14.	t	RE $\to$ 5,13
15.	$p\to t$	RI $\to$ 3-14

EJERCICIO: $[((p\wedge q)\to\neg(\neg r\to\neg s)),(r\vee t),(\neg t\vee\neg s)]\models(\neg(p\wedge q))$

1.	$(p\wedge q)\to\neg(\neg r\to\neg s)$	P
2.	$r\vee t$	P
3.	$\neg t\vee\neg s$	P
4.	$p\wedge q$	S
5.	$\neg(\neg r\to\neg s)$	RE $\to$ 1,4
6.	$\neg r\wedge s$	Interdef $\to\wedge$ 5
7.	$\neg r$	RE $\wedge$ 6
8.	s	RE $\wedge$ 6
9.	t	IA 2,7
10.	$\neg t$	IA 3,8
11.	$t\wedge\neg t$	
12.	$\neg(p\wedge q)$	RI $\neg$ 7-11

EJERCICIO: $[(p\vee q),(p\rightarrow(r\wedge\neg s)),(q\rightarrow(\neg r\wedge s)),(\neg(\neg r\wedge s))]\models(\neg(r\rightarrow s))$

1.	$p\vee q$	P
2.	$p\rightarrow(r\wedge\neg s)$	P
3.	$q\rightarrow(\neg r\wedge s)$	P
4.	$\neg(\neg r\wedge s)$	P
5.	$\neg q$	MT 3,4
6.	p	IA 1,5
7.	$r\wedge\neg s$	RE $\rightarrow$ 2,6
8.	$\neg(r\rightarrow s)$	Interdef $\wedge\rightarrow$ 7

EJERCICIO: $[((s\rightarrow t)\wedge(p\vee q)),(q\rightarrow(r\vee s)),((p\rightarrow s)\wedge(r\rightarrow p))]\models t$

1.	$(s\rightarrow t)\wedge(p\vee q)$	P
2.	$q\rightarrow(r\vee s)$	P
3.	$(p\rightarrow s)\wedge(r\rightarrow p)$	P
4.	$s\rightarrow t$	RE $\wedge$ 1
5.	$p\vee q$	RE $\wedge$ 1
6.	$p\rightarrow s$	RE $\wedge$ 3
7.	$r\rightarrow p$	RE $\wedge$ 3
8.	$\neg t$	S
9.	$\neg s$	MT 4,8
10.	$\neg p$	MT 6,9
11.	$\neg r$	MT 7,10
12.	q	IA 5,10
13.	$r\vee s$	RE $\rightarrow$ 2,12
14.	r	IA 9,13
15.	$r\wedge\neg r$	RI $\wedge$ 11,14
16.	$\neg\neg t$	RI $\neg$ 8-15
17.	t	RE $\neg$ 16

EJERCICIO: $[(p\to\neg q),(\neg(r\wedge\neg p))]\models(q\to\neg r)$

1.	$p\to\neg q$	P
2.	$\neg(r\wedge\neg p)$	P
3.	q	S
4.	$r\to p$	Interdef $\wedge\to$ 2
5.	$\neg p$	MT 1,3
6.	$\neg r$	MT 4,5
7.	$q\to\neg r$	RI $\to$ 3-6

EJERCICIO: *Formalice el siguiente argumento y demuestre su validez mediante Deducción Natural:*

"Cuando la Bolsa sube, suben también los beneficios de los accionistas o bien bajan los Bonos del Tesoro. Los beneficios de los accionistas suben sólo cuando hay inversión empresarial. Los Bonos del Tesoro bajan sólo cuando hay deflación. Si los beneficios de los accionistas no suben, no hay deflación. Por tanto, debe haber inversión empresarial para que la Bolsa suba.

- p : la Bolsa sube
- q : suben los beneficios de los accionistas
- r : los bono del tesoro Bajan
- s : hay inversión empresarial
- t : hay deflación

$p\to(q\vee r)$
$q\to s$
$r\to t$
$\neg q\to\neg t$
―――――――――
$p\to s$

1.	$p\to(q\vee r)$	P
2.	$q\to s$	P
3.	$r\to t$	P
4.	$\neg q\to\neg t$	P
5.	p	S
6.	$q\vee r$	MP 1,5
7.	q	S
8.	s	MP 2,7
9.	r	S
10.	t	MP 3,9
11.	q	MT 4,10
12.	s	MP 2,11
13.	s	RE $\vee$ 6,7-8,9-12
14.	$p\to s$	RI $\to$ 5-13

EJERCICIO: Demostrar la validez de $[(p\to(q\to r)),(p\to q),(p)]\models r$

$\surd$ 1. $p\to(q\to r)$

$\surd$ 2. $p\to q$

3. p

4. $\neg r$

5.1 $\neg p$ $(\beta 2)$	5.2 $\neg q$ $(\beta 2)$		
Cierra con 3	6.21 $\neg p$ $(\beta 1)$	$\surd$ 6.22 $q\to r$ $(\beta 1)$	
	Cierra con 3	7.221 $\neg q$ $(\beta 6.22)$	7.222 r $(\beta 6.22)$
		Cierra con 5.2	Cierra con 4

Cierran todas las ramas, luego el argumento es válido

EJERCICIO: Determinar por el método de las tablas semánticas si la siguiente fórmula es tautológica, contradictoria o meramente consistente: $(p\to q)\wedge\neg(\neg p\vee q)$

$\surd$ 1. $\neg((p\to q)\wedge\neg(\neg p\vee q))$

2.1 $\neg(p\to q)$ $(\beta 1)$	2.2 $\neg p\vee q$ $(\beta 1)$	
3.1 p $(\alpha 2.1)$	3.21 $\neg p$ $(\beta 2.2)$	3.22 q $(\beta 2.2)$
4.1 $\neg q$ $(\alpha 2.1)$	Rama abierta	Rama abierta
Rama abierta		

Al no tener contradicción en todas las ramas para la fórmula negada, podemos afirmar que no se trata de una tautología. Se plantea ahora el árbol semántico para la fórmula sin negar para comprobar si se trata de contradicción o si es satisfacible (meramente consistente)

$\surd$ 1. $(p\to q)\wedge\neg(\neg p\vee q)$

$\surd$ 2. $(p\to q)$ $(\alpha 1)$

$\surd$ 3. $\neg(\neg p\vee q)$ $(\alpha 1)$

4. p $(\alpha 3)$

5. $\neg q$ $(\alpha 3)$

6.1 $\neg p$ $(\beta 2)$	6.2 q $(\beta 2)$
Cierra con 4	Cierra con 5

Como el árbol cierra para la fórmula sin negar, se trata por tanto de una fórmula contradictoria.

EJERCICIO: Estudiar la validez de $[(p\to q),(\neg q\vee\neg s),((p\to\neg s)\to(q\to p)),(\neg p)]\models(\neg q)$

1. $p\to q$

√ 2. $\neg q\vee\neg s$

√ 3. $(p\to\neg s)\to(q\to p)$

4. $\neg p$

5. q

<table>
<tr><td>6.1 $\neg q$ $(\beta 2)$</td><td colspan="3">6.2 $\neg s$ $(\beta 2)$</td></tr>
<tr><td>Cierra en 5</td><td>√ 7.21 $\neg(p\to\neg s)$ $(\beta 3)$</td><td colspan="2">7.22 $q\to p$ $(\beta 3)$</td></tr>
<tr><td></td><td>8.21 p $(\alpha 7.21)$</td><td>8.221 $\neg q$ $(\beta 7.22)$</td><td>8.222 p $(\beta 7.22)$</td></tr>
<tr><td></td><td>Cierra con 4</td><td>Cierra con 5</td><td>Cierra con 4</td></tr>
</table>

Todas las ramas cierran, luego el argumento es válido.

---

p ∧ q
p → r
r

1.	$p\wedge q$	premisa
2.	$p\to r$	premisa
3.	p	RE ∧ 1
4.	r	RE → 2,3

p → (q → r)
(r → s)
p
(q → s)

1.	$p\to(q\to r)$	premisa
2.	$r\to s$	premisa
3.	p	premisa
4.	$q\to r$	MP 1,3
5.	$q\to s$	transitiva 2,4

---

p → q
¬p → q
p ∨ ¬p
q

1.	$p\to q$	premisa
2.	$\neg p\to q$	premisa
3.	$p\vee\neg p$	premisa
4.	p	supuesto
5.	q	MP 1,4
6.	$\neg p$	supuesto
7.	q	MP 2,6
8.	q	RE∨ 3, 4-5, 6-7

(p → q) ∧ (r → ¬ q)
p ∧ r
s

1.	$(p\to q)\wedge(r\to\neg q)$	premisa
2.	$p\wedge r$	premisa
3.	$p\to q$	RE ∧ 1
4.	$r\to\neg q$	RE ∧ 1
5.	p	RE ∧ 2
6.	r	RE ∧ 2
7.	q	MP 3,5
8.	$\neg q$	MP 4,6
9.	s	ECQ 7,8

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \\ r \rightarrow (s \rightarrow t) \\ \neg t \\ \hline \neg (q \wedge s) \end{array}$$

Deducción por reducción al absurdo:

1 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2 p	premisa
3 $r \rightarrow (s \rightarrow t)$	premisa
4 $\neg t$	premisa
5 $q \wedge s$	supuesto (RA)
6 q	RE $\wedge$ 5
7 s	RE $\wedge$ 5
8 $q \rightarrow r$	MP 1,2
9 r	MP 6,8
10 $s \rightarrow t$	MP 3,9
11 t	MP 7,10
12 $t \wedge \neg t$	RI $\wedge$ 4,11
13 $\neg (q \wedge s)$	RI $\neg$ 5, 12

Deducción directa y explicación de la aplicación de la RE$\vee$:

1 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2 p	premisa
3 $r \rightarrow (s \rightarrow t)$	premisa
4 $\neg t$	premisa
5 $q \rightarrow r$	MP 1,2
6 $\neg q \vee r$	Interdef $\rightarrow,\vee$ 5
7 $\neg q$	Supuesto (primer caso de 6)
8 $\neg q \vee \neg s$	RI$\vee$ 7
9 r	Supuesto (segundo caso de 6)
10 $s \rightarrow t$	MP 3,9
11 $\neg s \vee t$	Interdef. $\rightarrow,\vee$ 10
12 $\neg s$	IA 4,11
13 $\neg q \vee \neg s$	RI$\vee$ 12

En este momento deductivo tenemos dos supuestos **abiertos**. Los vamos a cerrar cuando apliquemos la regla RE$\vee$ en 14. 7 cerrará con 8 no gracias a la regla aplicada en 8, sino gracias a la regla que vamos a aplicar en 14. Igualmente con 9. Las reglas aplicadas en 8 y en 13 no cierran los supuestos 7 y 9, sino que son las reglas que nos han servido para obtener $\neg q \vee \neg s$, que es la fórmula común obtenida tras examinar los dos casos de la disyunción presente en 6. Ahora que hemos llegado a **la misma** fórmula a partir de los dos supuestos, podemos aplicar RE$\vee$ y afirmar dicha fórmula ya libre de supuestos:

1 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2 p	premisa
3 $r \rightarrow (s \rightarrow t)$	premisa
4 $\neg t$	premisa
5 $q \rightarrow r$	MP 1,2
6 $\neg q \vee r$	Interdef $\rightarrow,\vee$ 5
7 $\neg q$	Supuesto (primer caso de 6)
8 $\neg q \vee \neg s$	RI$\vee$ 7
9 r	Supuesto (segundo caso de 6)
10 $s \rightarrow t$	MP 3,9
11 $\neg s \vee t$	Interdef. $\rightarrow,\vee$ 10
12 $\neg s$	IA 4,11
13 $\neg q \vee \neg s$	RI$\vee$ 12
14 $\neg q \vee \neg s$	RE$\vee$ 6, 7-8, 9-13
15 $\neg (q \wedge s)$	Interdef $\vee,\wedge$ 14

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{q \rightarrow r} \\ \mathbf{r \rightarrow \neg s} \\ \mathbf{(p \rightarrow \neg s) \rightarrow (q \rightarrow p)} \\ \mathbf{\neg p} \\ \hline \mathbf{\neg q} \end{array}$$

Deducción directa:

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	$r \rightarrow \neg s$	premisa
4.	$(p \rightarrow \neg s) \rightarrow (q \rightarrow p)$	premisa
5.	$\neg p$	premisa
6.	$p \rightarrow r$	transitiva 1,2
7	$p \rightarrow \neg s$	transitiva 3,6
8.	$q \rightarrow p$	MP 4,7
9.	$\neg q$	MT 5,8

Deducción por reducción al absurdo:

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	$r \rightarrow \neg s$	premisa
4.	$(p \rightarrow \neg s) \rightarrow (q \rightarrow p)$	premisa
5.	$\neg p$	premisa
6.	q	supuesto (objetivo: RI¬)
7.	r	MP 2,6
8.	$\neg s$	MP 3,7
9.	$p \rightarrow \neg s$	Carga de premisas 8
10.	$q \rightarrow p$	MP 4,9
11.	p	MP 6,10
12.	$p \wedge \neg p$	RI ∧ 5,11
13.	$\neg q$	RI¬ 6, 12

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \rightarrow (q \rightarrow r)} \\ \mathbf{r \rightarrow s} \\ \mathbf{p} \\ \hline \mathbf{(q \wedge r) \rightarrow s} \end{array}$$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2.	$r \rightarrow s$	premisa
3.	p	premisa
4.	$q \wedge r$	supuesto
5.	$q \rightarrow r$	MP
6.	$q \rightarrow s$	Transitiva 2,5
7.	q	RE∧ 4
8.	s	MP 6,7
9.	$(q \wedge r) \rightarrow s$	RI→ 4,8

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \vee q} \\ \mathbf{p \rightarrow (r \wedge \neg s)} \\ \mathbf{q \rightarrow (\neg r \wedge s)} \\ \mathbf{\neg (\neg r \wedge s)} \\ \hline \mathbf{\neg (r \rightarrow s)} \end{array}$$

1.	$p \vee q$	premisa
2.	$p \rightarrow (r \wedge \neg s)$	premisa
3.	$q \rightarrow (\neg r \wedge s)$	premisa
4.	$\neg (\neg r \wedge s)$	premisa
5.	$\neg q$	MT 3,4
6.	p	IA 1,5
9.	$r \wedge \neg s$	MP 2,6
8.	$\neg (r \rightarrow s)$	Interdef ∧,→ 9

$$\begin{array}{c} \mathbf{\neg p} \\ \mathbf{q \rightarrow p} \\ \mathbf{r \rightarrow q} \\ \hline \mathbf{(s \leftrightarrow r) \rightarrow \neg s} \end{array}$$

1.	$\neg p$	premisa
2.	$q \rightarrow p$	premisa
3.	$r \rightarrow q$	premisa
4.	$s \leftrightarrow r$	supuesto
5.	$(s \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)$	Interdef ↔,∧ 4
6.	$\neg q$	MT 1,2
7.	$\neg r$	MT3,6
8.	$s \rightarrow r$	RE∧ 5
9.	$\neg s$	MT 7,8
10.	$(s \leftrightarrow r) \rightarrow \neg s$	RI→ 4,9

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \vee (r \vee s) \\ \neg (q \vee s) \\ t \rightarrow (\neg p \wedge \neg r) \\ \hline \neg t \end{array}$$

1 $(p \vee q) \vee (r \vee s)$	premisa
2 $\neg (q \vee s)$	premisa
3 $t \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)$	premisa
4 $(p \vee r) \vee (q \vee s)$	Asociativa 1
5 $p \vee r$	IA 2,4
6 $\neg (\neg p \wedge \neg r)$	Interdef. ∨,∧ 5
7 $\neg t$	MT 3,6

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \\ t \rightarrow p \\ u \rightarrow q \\ \neg r \\ \hline t \rightarrow \neg u \end{array}$$

1	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$	premisa
2	$t \rightarrow p$	premisa
3	$u \rightarrow q$	premisa
4	$\neg r$	premisa
5	$\neg r \vee \neg s$	RI$\vee$ 4
6	$\neg (r \wedge s)$	Interdef. $\vee$,$\wedge$ 5
7	$\neg (p \wedge q)$	MT 1,6
8	$p \rightarrow \neg q$	Interdef. $\wedge$,$\rightarrow$ 7
9	$t \rightarrow \neg q$	transitiva 2,8
10	$\neg q \rightarrow \neg u$	Contr. 3
11	$t \rightarrow \neg u$	transitiva 9,10

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg s) \\ r \vee t \\ \neg t \vee s \\ \hline \neg (p \wedge q) \end{array}$$

1	$(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$	premisa
2	$r \vee t$	premisa
3	$\neg t \vee s$	premisa
4	r	S (primer caso de 2)
5	$r \vee s$	RI$\vee$ 4
6	t	S (segundo caso de 2)
7	s	IA 3,6
8	$r \vee s$	RI$\vee$ 7
9	$r \vee s$	RE$\vee$ 2, 4-5, 6-8
10	$\neg (\neg r \wedge \neg s)$	Interdef. $\vee$,$\wedge$ 9
11	$\neg (p \wedge q)$	MT 1,10

$$\begin{array}{c} p \vee \neg q \\ t \rightarrow (r \vee \neg p) \\ r \rightarrow \neg q \\ \neg (q \rightarrow s) \\ \hline \neg t \end{array}$$

1	$p \vee \neg q$	premisa
2	$t \rightarrow (r \vee \neg p)$	premisa
3	$r \rightarrow \neg q$	premisa
4	$\neg (q \rightarrow s)$	premisa
5	$q \wedge \neg s$	Interdef. $\rightarrow$,$\wedge$ 4
6	q	RE$\wedge$ 5
7	$\neg s$	RE$\wedge$ 5
8	p	IA 1,6
9	$\neg r$	MT 3,6
10	$\neg r \wedge p$	RI$\wedge$ 8,9
11	$\neg (r \vee \neg p)$	Interdef. $\wedge$,$\vee$ 10
12	$\neg t$	MT 2,11

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \\ t \rightarrow r \\ p \\ \hline \neg (q \rightarrow s) \rightarrow \neg t \end{array}$$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$	premisa
2	$t \rightarrow r$	permisa
3	p	premisa
4	$\neg (q \rightarrow s)$	S
5	$(q \rightarrow (r \rightarrow s))$	MP 1,3
6	$q \wedge \neg s$	Interdef. $\rightarrow$,$\wedge$ 5
7	q	RE$\wedge$ 6
8	$\neg s$	RE$\wedge$ 6
9	$r \rightarrow s$	MP 5,7
10	$\neg r$	MT 8,9
11	$\neg t$	MT 2,10
12	$\neg (q \rightarrow s) \rightarrow \neg t$	RI$\rightarrow$ 4,11

$$\begin{array}{c} p \vee \neg p \\ (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \\ (\neg p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r) \\ \hline r \end{array}$$

1.	$p \vee \neg p$	premisa
2.	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	premisa
3.	$(\neg p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r)$	premisa
4.	$p \rightarrow q$	RE$\wedge$ 2
5.	$q \rightarrow r$	RE$\wedge$ 2
6.	$\neg p \rightarrow s$	RE$\wedge$ 3
7.	$s \rightarrow r$	RE$\wedge$ 3
8.	p	supuesto (primer caso de 1. Objetivo: r)
9.	q	MP4,8
10.	r	MP 5,9
11.	$\neg p$	supuesto (segundo caso de 1. Objetivo: r)
12.	s	MP 6,11
13.	r	MP 7,12
14.	r	RE$\vee$ 1, 8-10, 11-13

Al aplicar RE$\vee$ debemos indicar el número de la línea donde está la disyunción (1) y los números donde empieza y termina cada subderivación (8-10 y 11-13). La regla aplicada en 10 (MP) no autoriza a cerrar 8; ni la aplicada en 13 (MP) autoriza a cerrar 11. Es la regla aplicada en 14 (RE$\vee$) la que nos autoriza a cerrar los dos supuestos 8 y 11 a la vez.

EXÁMENES

2013

2) Demuestre la validez del siguiente esquema de inferencia, mediante Deducción Natural.

$$\begin{array}{c} r \rightarrow \neg (p \wedge \neg q) \\ p \vee (q \vee r) \\ \neg ((p \vee q) \vee r) \vee (p \wedge r) \\ \hline q \wedge (p \wedge r) \end{array}$$

1.- $r \rightarrow \neg (p \wedge \neg q)$	P
2.- $p \vee (q \vee r)$	P
3.- $\neg ((p \vee q) \vee r) \vee (p \wedge r)$	P
4.- $p \wedge r$	IA 2, 3
5.- r	RE $\wedge$ 4
6.- p	RE $\wedge$ 4
7.- $\neg (p \wedge \neg q)$	MP 1, 5
8.- $\neg p \vee q$	Interdef. $\wedge$, $\vee$ 7
9.- q	IA 6, 8
10.- $p \wedge r$	RI $\wedge$ 5, 6
11.- $q \wedge (p \wedge r)$	RI $\wedge$ 9, 10

2013

3) Desarrolle el Árbol Semántico del esquema argumentativo de la pregunta anterior.

1.- $r \rightarrow \neg (p \wedge \neg q)$ P
2.- $p \vee (q \vee r)$ P
3.- $\neg ((p \vee q) \vee r) \vee (p \wedge r)$ P
4.- $\neg (q \wedge (p \wedge r))$ Negación de la conclusión

5.1 $\neg r$ ($\beta 1$)

6.11 $\neg ((p \vee q) \vee r)$ ($\beta 3$)
7.11 $\neg p$ (α 6.11)
8.11 $\neg q$ (α 6.11)
9.11 $\neg r$ (α 6.11)

10.111 p ($\beta 2$)
*cierra 7.11

10.112 q ($\beta 2$)
*cierra 8.11

10.113 r ($\beta 2$)
*cierra 9.11

6.12 $p \wedge r$ ($\beta 3$)
7.12 r (α 6.12)
*cierra 5.1

5.2 $\neg (p \wedge \neg q)$ ($\beta 1$)

6.21 $\neg ((p \vee q) \vee r)$ ($\beta 3$)
7.21 $\neg p$ (α 6.21)
8.21 $\neg q$ (α 6.21)
9.21 $\neg r$ (α 6.21)

9.211 p ($\beta 2$)
*cierra 7.21

9.212 q ($\beta 2$)
*cierra 8.21

9.213 r ($\beta 2$)
*cierra 9.21

6.22 $p \wedge r$ ($\beta 3$)
7.22 p (α 6.22)
8.22 r (α 6.22)

9.221 $\neg p$ (β5.2)
*cierra 7.22

9.222 q (β5.2)

10.2221 $\neg q$ ($\beta 4$)
*cierra 9.222

10.2222 $\neg p$ ($\beta 4$)
*cierra 7.22

10.2223 $\neg r$ (β 4)
*cierra 8.22

2013

4) Formalice los siguientes enunciados:

a) A menos que tenga visita en casa, nos veremos en el cine esta tarde.
b) Aprobarás la asignatura sólo si resuelves correctamente los ejercicios.

a)
p: tengo visita en casa $\neg p \rightarrow q$
q: nos veremos en el cine esta tarde

b)
p: aprobarás la asignatura $p \rightarrow q$
q: resuelves correctamente los ejercicios.

2013

1) Formalice el enunciado "Si pudiéramos seleccionar las moléculas en movimiento según su velocidad, podríamos romper el segundo principio de la termodinámica" e indique justificadamente cuáles de los siguientes enunciados se siguen lógicamente de él y cuáles no.
p: podemos seleccionar las moléculas en movimiento según su velocidad
q: podemos romper el segundo principio de la termodinámica

$$p \to q$$

a) Podemos romper el segundo principio de la termodinámica o bien seleccionar las moléculas en movimiento según su velocidad.

$$p \vee q$$

Este enunciado no se sigue de $p \to q$
$p \to q$ puede ser verdadero $(0 \to 0)$ y, a la vez, ser falso $p \vee q$ $(0 \vee 0)$, lo que permite la existencia de contraejemplos. Es decir, la inferencia de $p \to q$ a $p \vee q$ es inválida.

b) Si no podemos romper el segundo principio de la termodinámica, no podemos seleccionar las moléculas en movimiento según su velocidad o bien entre dos cuerpos con distinta temperatura se puede transferir calor del cuerpo frío al caliente.

s: entre dos cuerpos con distinta temperatura se puede transferir calor del cuerpo frío al caliente

$$\neg q \to (\neg p \vee s)$$

Sí se sigue. Lo podemos demostrar:

1.- $p \to q$	P
2.- $\neg q$	S
3.- $\neg p$	MT 1, 2
4.- $\neg p \vee s$	RI $\vee$ 3
5.- $\neg q \to (\neg p \vee s)$	RI $\to$ 2, 4

c) No es verdad que podamos seleccionar las moléculas en movimiento según su velocidad y no podamos romper el segundo principio de la termodinámica.

$$\neg (p \wedge \neg q)$$

Sí se sigue:

1.- $p \to q$	P
2.- $p \wedge \neg q$	S
3.- p	RE$\wedge$ 2
4.- $\neg q$	RE $\wedge$ 2
5.- $\neg p$	MT 1, 4
6.- $p \wedge \neg p$	RI $\wedge$ 3, 5
7.- $\neg (p \wedge \neg q)$	RI $\neg$ 2, 6

d) O bien podemos seleccionar las moléculas en movimiento según su velocidad sólo si somos dioses, o bien si somos diablos podemos romper el segundo principio de la termodinámica. (Entendida como una disyunción inclusiva).

t: somos dioses
r: somos diablos

$$(p \rightarrow t) \vee (r \rightarrow q)$$

Sí se sigue:

1.- $p \rightarrow q$	P
2.- $\neg p \vee q$	Interdef. $\rightarrow, \vee$ 1
3.- $(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee t)$	RI $\vee$ 2
4.- $(\neg p \vee t) \vee (\neg r \vee q)$	Asociat. 3
5.- $(p \rightarrow t) \vee (r \rightarrow q)$	Interdef. 4

2016

1) Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Después justifique su respuesta.

a) La forma de los argumentos nos dice si son verdaderos o falsos.
Falsa.
Los argumentos no son ni verdaderos ni falsos. Solamente los enunciados lo son. Las formas argumentativas son válidas o inválidas.

b) Las fórmulas contingentes no tienen contraejemplos.
Falsa.
Al ser contingente, tendrá interpretaciones verdaderas e interpretaciones falsas. Una interpretación (un enunciado con esa forma) falsa es un contraejemplo.

c) Toda fórmula válida es implicada por fórmulas contradictorias.
Verdadera.
Al ser válida, estando en el lugar de una conclusión, es imposible tener un caso de premisas verdaderas y conclusión falsa. Las fórmulas válidas son implicadas por todas las fórmulas, también por las contradictorias. De hecho, de la contradicción se deriva cualquier fórmula. En este caso, todas las interpretaciones serían un caso de paso de lo falso a lo verdadero. No hay ninguna posibilidad de encontrar un caso con premisas verdaderas y conclusión falsa. Si nos referimos a la implicación no como consecuencia lógica entre unas premisas y una conclusión, sino como condicional válido, podemos decir que cuando un condicional tiene una fórmula válida en el consecuente, es imposible encontrar un caso con antecedente verdadero y consecuente falso. Esto significa que hay implicación haya lo que haya en el antecedente: una fórmula válida, una contingente o una contradictoria. Toda fórmula válida es implicada por cualquier fórmula.

d) La negación de una tautología es una fórmula insatisfacible.
Verdadera.
La negación de una tautología es una contradicción, una fórmula que no tiene ningún caso de verdad, es decir, insatisfacible..

2016

2) Demuestre la validez del siguiente esquema de inferencia, mediante Deducción Natural, y proporcione una interpretación con alguna premisa falsa.

$(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (s \wedge t)$
$r \rightarrow \neg p$
$(\neg r \wedge u) \rightarrow (q \vee r)$
u

$s \wedge t$

1	$(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (s \wedge t)$	
2	$r \rightarrow \neg p$	
3	$(\neg r \wedge u) \rightarrow (q \vee r)$	
4	u	
5	$\neg r \vee \neg p$	Interdef.$\rightarrow$,$\vee$ 2
6	$\neg r$	S (caso de 5)
7	$\neg r \wedge u$	RI$\wedge$ 4,6
8	$q \vee r$	MP 3,7
9	$p \rightarrow (q \vee r)$	Carga premisas 8
10	$s \wedge t$	MP 1,9
11	$\neg p$	S (caso de 5)
12	$\neg p \vee (q \vee r)$	RI$\vee$ 11
13	$p \rightarrow (q \vee r)$	Interdef.$\vee$,$\rightarrow$ 12
14	$s \wedge t$	MP 1,13
15	$s \wedge t$	RE$\vee$ 5, 6-10, 11-14

Para encontrar una premisa falsa, nos fijamos en la cuarta, que es la más simple. Nos comprometemos con u: F. El resto de las variables pueden tener cualquier valor.

Diccionario:
p: Helsinki es capital de Finlandia (V)
q: París es capital de Francia (V)
r: Roma es capital de Italia (V)
s: Oslo es capital de Noruega (V)
t: Estocolmo es capital de Suecia (V)
u: Madrid es capital de Portugal (F)

Para presentar un castellano mejor, vamos a transformar la primera premisa así: $(\neg p \vee (q \vee r)) \rightarrow (s \wedge t)$. El respeto a la forma exacta daría algo como: "Cuando si ..., entonces, entonces ...)

Si Helsinki no es capital de Finlandia o París es capital de Francia o Roma es capital de Italia, entonces Oslo es capital de Noruega y Estocolmo es capital de Suecia.

Si Roma es capital de Italia, entonces París no es capital de Francia.

Si Roma no es capital de Italia y Madrid es capital de Portugal, entonces París es capital de Francia o Roma es capital de Italia.

Madrid es capital de Portugal

Por tanto, Oslo es capital de Noruega y Estocolmo es capital de Suecia.

Son falsas las premisas 2 y 4.

2016

3) Presente el Árbol Semántico de la siguiente forma argumentativa e interprete su resultado:

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$
$s \rightarrow \neg p$
t
$(\neg s \wedge t) \rightarrow q$
$\overline{\quad r \quad}$

1 $(\neg p \vee q) \rightarrow r$ premisa
2 $s \rightarrow \neg p$ premisa
3 t premisa
4 $(\neg s \wedge t) \rightarrow q$ premisa
5 $\neg r$ conclusión negada

6.1 $\neg(\neg p \vee q)$ 6.2 r β 1
7.1 p α 6.1 *cierra 5
8.1 $\neg q$ α 6.1

9.11 $\neg s$ 9.12 $\neg p$ β 2
*cierra 7.1

10.111 $\neg(\neg s \wedge t)$ 10.112 q β 4
*cierra 8.1

11.1111 s 11.1112 $\neg t$ β 10.111
*cierra 9.11 *cierra 3

Todas las ramas del árbol están cerradas. Eso significa que hay contradicción en suponer la verdad de las premisas junto a la verdad de la negación de la conclusión. Es decir, no cabe la posibilidad de que haya una interpretación de esa forma argumentativa tal que sus premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.
La forma argumentativa examinada es válida.

2016

4) Formalice el siguiente enunciado:

Perseverando en el estudio y no cediendo al desaliento frente a los obstáculos, comprobarás cómo el éxito te sonríe.

p: se persevera en el estudio
q: se cede al desaliento frente a los obstáculos
r: se comprueba cómo el éxito sonríe.

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r.$

2017a

1) Diga cuáles de las siguientes fórmulas son tautológicas, cuáles contingentes y cuáles contradictorias. Justifique su respuesta:

a.- $\neg q \wedge \neg (p \wedge \neg p)$
Contingente.
$p \wedge \neg p$ es una contradicción, siempre falsa, tenga el valor que tenga p.
$\neg (p \wedge \neg p)$ es, por tanto, una tautología, siempre verdadera.
El valor de $\neg q \wedge \neg (p \wedge \neg p)$ dependerá del valor de q. Puesto que puede ser verdadero o falso, la fórmula tendrá interpretaciones verdaderas e interpretaciones falsas
caso q-V: $\neg V \wedge V$ (F)
caso q-F: $\neg F \wedge V$ (V)

b.- $(p \rightarrow (\neg q \vee (\neg r \wedge p))) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p)))$
Tautológica.
El consecuente equivale a $\neg q \vee (\neg p \vee (\neg q \vee p))$, que equivale a $\neg q \vee \neg p \vee p$.
Puesto que $\neg p \vee p$ es una tautología, el consecuente de la fórmula b es siempre verdadero. Un condicional con consecuente siempre verdadero es un condicional tautológico. El único caso en el que el condicional puede resultar falso es aquel en el que el antecedente es verdadero y el consecuente falso, caso que aquí no se puede dar.

c.- $(q \rightarrow (\neg r \vee \neg p)) \rightarrow ((r \wedge p) \vee q)$
Contingente.
Tratamos de hacer falsa la fórmula. El antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso. Para que el consecuente sea falso, ha de ser falso q y o bien r o bien p. Con q falso, el antecedente de la fórmula es verdadero, sean como sean r y p. Por tanto, cabe la posibilidad de que la fórmula tenga un caso F:
$(F \rightarrow (\neg F \vee \neg F)) \rightarrow ((F \wedge F) \vee F)$
$(F \rightarrow (V \vee V)) \rightarrow (F \vee F)$
$(F \rightarrow V) \rightarrow F$
$V \rightarrow F$

Buscamos un caso de verdad. Si encontramos una interpretación falsa del antecedente, ya tenemos un caso de verdad para la fórmula entera, sin necesidad de examinar el consecuente. Para que sea falso el antecedente, necesitamos que q sea V y $(\neg r \vee \neg p)$ F.

$(V \rightarrow (\neg V \vee \neg V)) \rightarrow ((V \wedge V) \vee V)$
$(V \rightarrow (F \vee F)) \rightarrow (V \vee V)$
$(V \rightarrow F) \rightarrow V$
$F \rightarrow V$

d.- $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow (q \wedge \neg p)$
Contingente.
Caso V: $(V \rightarrow \neg V) \rightarrow (V \wedge \neg V)$ / $(V \rightarrow F) \rightarrow (V \wedge F)$ / $F \rightarrow F$
Caso F: $(F \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \wedge \neg F)$ / $(F \rightarrow V) \rightarrow F$ / $V \rightarrow F$

2017a

2) Demuestre, mediante Deducción Natural, la validez del siguiente esquema de argumento:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ r \rightarrow s \\ p \\ \hline (q \wedge r) \rightarrow s \end{array}$$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2.	$r \rightarrow s$	premisa
3.	p	premisa
4.	$q \rightarrow r$	MP 1,3
5.	$q \wedge r$	supuesto (antecedente de la conclusión)
6.	q	RE$\wedge$ 5
7.	r	MP 4,6
8.	s	MP 2,7
9.	$(q \wedge r) \rightarrow s$	RI$\rightarrow$ 5,8

2017a

3) Ponga un ejemplo de argumento válido, una de cuyas premisas sea de tipo condicional y falsa, y otro ejemplo de argumento con forma inválida, que tenga una premisa de tipo condicional válida y la conclusión verdadera.

Un argumento válido sencillo con premisa condicional es el MP:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Diccionario:
p: 2+2 son 4
q: 3+3 son 7

Si 2+2 son 4 entonces 3+3 son 7 (falso). 2+2 son 4. Por tanto, 3+3 son 7.

El segundo caso se reduce a buscar una conclusión cualquiera, q, verdadera, que no tenga nada que ver con la premisa. Para la premisa necesitamos una tautología con forma condicional. Por ejemplo: $p \rightarrow p$.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow p \\ \hline q \end{array}$$

Nos sirve el diccionario anterior.
Si 2+2 son 4, entonces 2+2 son 4. Por tanto, 3+3 son 7.

2017a

4) Dada la premisa

Ángela no entrará en la fiesta a menos que lleve corbata

diga cuáles de los siguientes enunciados son equivalentes a ella y por qué:

a.- *Si Ángela no entra en la fiesta, entonces no lleva corbata*
b.- *Si Ángela no lleva corbata, entonces no entra en la fiesta*
c.- *Ángela sólo entrará en la fiesta si lleva corbata*
d.- *Ángela entrará en la fiesta si y sólo si lleva corbata*

Diccionario:
p: Ángela entrará en la fiesta
q: Ángela lleva corbata

Premisa: $\neg q \to \neg p$

a.- $\neg p \to \neg q$ No es equivalente a la premisa. Puede ser verdadera la premisa ($\neg V \to \neg F$) y falsa esta fórmula ($\neg F \to \neg V$), con p-F y q-V.

b.- $\neg q \to \neg p$ Es equivalente, pues es la misma fórmula.

c.- $p \to q$ Es equivalente, por la regla de contraposición. Ambas equivalen a $q \vee \neg p$.

d.- $p \leftrightarrow q$ No es equivalente a la premisa, pues esta fórmula equivale a $(p \to q) \wedge (q \to p)$ y, aunque $(p \to q)$ equivale a la premisa, su conjunción con $(q \to p)$ ya no. Lo podemos probar con un árbol o con una interpretación en la que la premisa tenga un valor y esta fórmula otro. Por ejemplo:

$\neg q \to \neg p$	$p \leftrightarrow q$
F(V) V(F)	F V
V	F

con q-V y p-F, la premisa es verdadera y la fórmula d es falsa.

2017b

1) Responda, en primer lugar y claramente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Después justifique su respuesta.

a.- Si X es una fórmula contradictoria, $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ es una fórmula contradictoria.
Falso. El antecedente de ese condicional es una contradicción, por lo que el condicional nunca podrá alcanzar el valor F, pues nunca podrá darse el caso V→F. De modo que no sólo no es una contradicción, sino que cualquier fórmula con la forma $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ resultará siempre una tautología.

b.- Un árbol semántico con una rama abierta indica que existe una interpretación bajo la cual las premisas del argumento son verdaderas y la conclusión falsa.
Verdadero. Existe al menos una interpretación que hace verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión. Sería **falso**, si con "una" se quiere decir "exactamente una". Una rama abierta indica que el argumento es inválido y que, por tanto tiene contraejemplos. De hecho, siempre que hay contraejemplos, hay infinitos contraejemplos (por la recursividad del lenguaje natural).

c.- Dada una fórmula X, si el árbol para X queda abierto y el árbol para ¬X también queda abierto, podemos decir que la fórmula X no es ni válida ni contradictoria.
Verdadero. Si el árbol que comienza con X queda abierto, X no es contradictoria, tiene alguna interpretación en la que resulta V. Cuando X es V, ¬X es F. Si el árbol que comienza con ¬X queda abierto, ¬X no es contradictoria, tiene alguna interpretación en la que resulta V. Estos son casos en los que X es F. Es decir, X tiene casos V y casos F, por lo que es una contingencia (ni válida ni contradictoria).

d.- Algunos condicionales con consecuente contradictorios son tautologías.
Verdadero. Es el caso explicado en la primera respuesta. Cuando el antecedente también es una contradicción, la fórmula resultante es una tautología.

2017b

2) Demuestre, mediante Deducción Natural, la validez del siguiente esquema de argumento:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg p \rightarrow q \\ p \vee \neg p \\ \hline q \end{array}$$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$\neg p \rightarrow q$	premisa
3.	$p \vee \neg p$	premisa
┌4.	p	supuesto (primer caso de 3)
└5.	q	MP 1,4
┌6.	$\neg p$	supuesto (segundo caso de 3)
└7.	q	MP 2,6
8.	q	RE∨ 3, 4-5, 6-7

2017b

3) Formalice los siguientes enunciados y diga si sus formas son contingentes, tautológicas o contradictorias:

a.- Si el objetivo de la guerra es controlar o apoderarse de las fuentes de energía, entonces habrá guerra si y sólo si se produce una acción violenta y se rompen las relaciones diplomáticas.

p: el objetivo de la guerra es controlar las fuentes de energía
q: el objetivo de la guerra es apoderarse de las fuentes de energía
r: habrá guerra
s: se produce una acción violenta
t: se rompen las relaciones diplomáticas

$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (s \wedge t))$

Es una fórmula contingente, tiene casos V y casos F. Por ejemplo:

Caso V: $(V \vee V) \rightarrow (V \leftrightarrow (V \wedge V))$ (con p, q, r, s y t V)

Caso F: $(V \vee V) \rightarrow (V \leftrightarrow (V \wedge F))$ (con p V, q V, r V, s V y t F)

$V \rightarrow ((V \rightarrow (V \wedge F)) \wedge ((V \wedge F) \rightarrow V))$
$V \rightarrow ((V \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow V))$
$V \rightarrow (F \wedge V)$
$V \rightarrow F$
F

b.- Si estudio desde Octubre y participo en los foros en Alf, me presentaré al examen en Enero o en Febrero y aprobaré.

p: estudio desde Octubre
q: participo en los foros en Alf
r: me presentaré al examen en Enero
s: me presentaré al examen en Febrero
t: aprobaré

$(p \wedge q) \rightarrow ((r \vee s) \wedge t)$

Es otra fórmula contingente.
Caso V: $(V \wedge V) \rightarrow ((V \vee V) \wedge V)$ (con p, q, r, s y t V)

Caso F: $(V \wedge V) \rightarrow ((V \vee V) \wedge F)$ (con p V, q V, r V, s V y t F)
$V \rightarrow (V \wedge F)$
$V \rightarrow F$
F

2017b

4) Presente el Árbol Semántico del siguiente esquema de argumento e interprete su resultado:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \vee (r \vee s) \\ \neg (q \vee s) \\ t \rightarrow (\neg p \wedge \neg r) \\ \hline \neg t \end{array}$$

1.	$(p \vee q) \vee (r \vee s)$		premisa
2.	$\neg (q \vee s)$		premisa
3.	$t \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)$		premisa
4.	t		negación de la conclusión
5.	$\neg q$	$\alpha 2$	
6.	$\neg s$	$\alpha 2$	

7.1 $\neg t$ $\beta 3$
cierra con 4

7.2 $\neg p \wedge \neg r$ $\beta 3$
8.2 $\neg p$ $\alpha 7.2$
9.2 $\neg r$ $\alpha 7.2$

10.21 $p \vee q$ $\beta 1$

10.22 $r \vee s$ $\beta 1$

11.211 p
cierra con 8.2

11.212 q $\beta 10.21$
cierra con 5

11.221 r
cierra con 9.2

11.222 s $\beta 10.22$
cierra con 6

Las cinco ramas del árbol contienen contradicción, por lo que cierran. El esquema examinado es válido.

2018c

1) Responda, en primer lugar y claramente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Después justifique su respuesta.

a.- Para que un argumento sea válido no es condición necesaria que su conclusión sea verdadera.
Verdadera. La condición para la validez es que no pueda darse el caso de premisas verdaderas y conclusión falsa. Sí cabe el caso de falsedad en alguna premisa y en la conclusión.

b.- Ningún condicional con consecuente contradictorio puede ser una tautología.
Falsa. Un condicional con antecedente y consecuente contradictorios es una tautología.

c.- Si un argumento es inválido, la conjunción de las premisas y la conclusión es una contradicción.
Falsa. Si el argumento es inválido, esa conjunción puede ser contradictoria o una contingencia o una tautología. Caben todas las posibilidades.

d.- Si una fórmula no es válida, su negación sí lo es.
Falsa. Si no es válida (tautología), puede ser porque es una contradicción o porque es una contingencia. Si es una contradicción, su negación es una tautología (fórmula válida), pero si es una contingencia, su negación es otra contingencia.

2018c

2) Demuestre, mediante Deducción Natural, la validez del siguiente esquema de argumento:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow (s \vee p) \\ (u \vee r) \rightarrow r \\ \neg q \\ \hline s \vee \neg u \end{array}$$

Directa:

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$r \rightarrow (s \vee p)$	premisa
3.	$(u \vee r) \rightarrow r$	premisa
4.	$\neg q$	premisa
5.	$\neg p$	MT 1,4
6.	$(u \vee r) \rightarrow (s \vee p)$	Transitiva 2,3
7.	$\neg (u \vee r) \vee (s \vee p)$	Interdef. $\rightarrow,\vee$ 6
8.	$\neg (u \vee r)$	supuesto (caso de 7)
9.	$\neg u \wedge \neg r$	Interdef. $\vee,\wedge$ 8
10.	$\neg u$	RE$\wedge$ 9
11.	$s \vee \neg u$	RI$\vee$ 10
12.	$s \vee p$	supuesto (caso de 7)
13.	s	IA 5,12
14.	$s \vee \neg u$	RI$\vee$ 13
15.	$s \vee \neg u$	RE$\vee$ 7, 8-11, 12-14

Reducción al absurdo:

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$r \rightarrow (s \vee p)$	premisa
3.	$(u \vee r) \rightarrow r$	premisa
4.	$\neg q$	premisa
5.	$\neg (s \vee \neg u)$	supuesto
6.	$\neg s \wedge u$	Interdef. $\vee,\wedge$ 5
7.	$\neg p$	MT 1,4
8.	$\neg s$	RE$\wedge$ 6
9.	$\neg s \wedge \neg p$	RI$\wedge$ 7,8
10.	$\neg (s \vee p)$	Interdef. $\wedge,\vee$ 9
11.	$\neg r$	MT 2,10
12.	$\neg (u \vee r)$	MT 3,11
13.	$\neg u \wedge \neg r$	Interdef. $\vee,\wedge$ 12
14.	u	RE$\wedge$ 6
15.	$\neg u$	RE$\wedge$ 13
16.	$u \wedge \neg u$	RI$\wedge$ 14,15
17.	$\neg\neg (s \vee \neg u)$	RI$\neg$ 5,16
18.	$s \vee \neg u$	RE$\neg$ 17

(En el examen se ha de presentar solamente una deducción. En caso de que se escriban dos, se corregirá únicamente la primera de ellas).

2018c

3) Desarrolle el Árbol Semántico del siguiente esquema inferencial y comente el resultado:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow (r \rightarrow s) \\ \hline (r \wedge \neg s) \rightarrow \neg p \end{array}$$

1	$p \rightarrow q$	premisa
2	$q \rightarrow (r \rightarrow s)$	premisa
3	$\neg ((r \wedge \neg s) \rightarrow \neg p)$	negación conclusión
4	$r \wedge \neg s$	α3
5	p	α3
6	r	α4
7	$\neg s$	α4

8.1 $\neg p$ — cierra con 5 | 8.2 q — β1

9.21 $\neg q$ — cierra con 8.2 | 9.22 $r \rightarrow s$ — β2

10.221 $\neg r$ — cierra con 6 | 10.222 s — cierra con 7 — β9.22

El árbol tiene cuatro ramas, todas ellas cerradas, de modo que el esquema examinado es válido.

2018c

4) Dada la premisa

Andrés tendrá derecho a examen sólo si está matriculado

diga cuáles de los siguientes enunciados son equivalentes a ella y por qué:

a.- *Si Andrés está matriculado, entonces tendrá derecho a examen*
b.- *Si Andrés no tiene derecho a examen, no está matriculado*
c.- *Andrés no tiene derecho a examen a menos que esté matriculado*
d.- *Andrés no está matriculado o no tiene derecho a examen*

Diccionario:

p: Andrés tiene derecho a examen
q: Andrés está matriculado

Premisa: $p \rightarrow q$

a.- $q \rightarrow p$. No es equivalente. (Cuando q es V y p es F, la premisa es verdadera y este enunciado falso)
b.- $\neg p \rightarrow \neg q$. No es equivalente. Equivale a la fórmula $q \rightarrow p$, por la regla de contraposición.
c.- $\neg q \rightarrow \neg p$. Sí es equivalente. Equivale a $q \vee \neg p$, que equivale a $p \rightarrow q$, que es la premisa.
d.- $\neg q \vee \neg p$. No es equivalente. Esta fórmula equivale a $p \rightarrow \neg q$. Cuando p y q son ambos verdaderos, la premisa es verdadera y este enunciado falso.

2020a

2) Formalice el siguiente argumento y demuestre su validez mediante una Deducción Natural:

Si los analíticos estructuralistas tienen razón, entonces si todos los términos son teóricos, no hay términos observacionales puros. Si los realistas ingenuos están en lo cierto, entonces de que haya términos observacionales puros no se sigue que no haya términos teóricos. Por tanto, si hay términos observacionales puros y los realistas ingenuos tienen razón, los analíticos estructuralistas no la tienen.

p: Los analíticos estructuralistas tienen razón
q: Todos los términos son teóricos
r: Hay términos observacionales puros
s: Los realistas ingenuos están en lo cierto

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow \neg r) \\ s \rightarrow \neg (r \rightarrow \neg q) \\ \hline (r \wedge s) \rightarrow \neg p \end{array}$$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$	premisa
2	$s \rightarrow \neg (r \rightarrow \neg q)$	premisa
3	$r \wedge s$	supuesto
4	s	RE$\wedge$ 3
5	$\neg (r \rightarrow \neg q)$	MP 2,4
6	$r \wedge q$	Interdef. $\rightarrow$,$\wedge$ 5
7	$q \wedge r$	Simetría $\wedge$ 6
8	$\neg (q \rightarrow \neg r)$	Interdef. $\wedge$,$\rightarrow$ 7
9	$\neg p$	MT 1,8
10	$(r \wedge s) \rightarrow \neg p$	RI$\rightarrow$ 3,9

2020a

1) Responda, en primer lugar y claramente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Después justifique su respuesta.

a.- Si un argumento tiene premisas verdaderas y conclusión falsa, no puede tener una forma lógica válida.

Verdadero. Una forma inferencial válida impide el caso de argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa. De lo verdadero no se sigue válidamente lo falso. Ese argumento serviría como contraejemplo que prueba la invalidez de su forma inferencial.

b.- Si X es una fórmula válida, $Y \rightarrow X$ también lo es.

Verdadero. Si el consecuente de ese condicional es una tautología, es imposible encontrar un caso que haga falsa la fórmula, es decir, un caso en el que Y fuera verdadero y X falso.

c.- Un árbol semántico con una rama abierta indica que existe exactamente una interpretación bajo la cual las premisas del argumento son verdaderas y la conclusión falsa.

Falso. Una rama abierta indica que el esquema examinado es inválido, que existen argumentos con esa forma tales que las premisas resultan verdaderas y la conclusión falsa, es decir, que tiene contraejemplos. ¿Cuántos? Siempre infinitos, dada la recursividad del lenguaje natural.

d.- Cualquier fórmula es implicada por una contradicción.

Verdadero. La contradicción implica cualquier fórmula, de la contradicción se sigue válidamente cualquier fórmula: Ex Contradictione Quodlibet. Un condicional que no puede tener verdad en su antecedente, no tendrá ningún caso de falsedad, pues el condicional solamente resulta falso cuando tiene verdad en el antecedente y falsedad en el consecuente. Un condicional con contradicción en el antecedente es un condicional tautológico, una implicación.

2020a

3) Dado el enunciado

Platón no es el autor de la *Ética a Nicómaco* a menos que también lo sea de *La República*.

Decir cuál o cuáles de los siguientes enunciados se siguen lógicamente de él como conclusión y pruébelo:

a. Si Platón es el autor de *La República* , también lo es de la *Ética a Nicómaco*.

p: Platón es el autor de la *Ética a Nicómaco*
q: Platón es el autor de *La República*

Premisa: $p \rightarrow q$

a. $q \rightarrow p$
No se sigue.
Árbol que lo prueba:

1 $p \rightarrow q$ premisa
2 $\neg(q \rightarrow p)$ conclusión negada
3 q alfa 2
4 $\neg p$ alfa 2

5.1 $\neg p$	5.2 q beta 1
rama abierta	rama abierta

El árbol está terminado y sus dos ramas abiertas, lo que indica que no hay consecuencia lógica.

b. Si Platón no es el autor de *La República* , entonces no es el autor de la *Etica a Nicómaco*.

b. $\neg q \to \neg p$

Sí se sigue. Prueba:

1	$p \to q$	premisa
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	MT 1,2
4	$\neg q \to \neg p$	RI $\to$ 2,3

c. Platón es el autor de *La República* o no es el autor de la *Etica a Nicómaco*.

c. $q \vee \neg p$

Sí se sigue. Esta fórmula se obtiene aplicando la regla de interdefinición $\to,\vee$ sobre la premisa: $\neg p \vee q$, más la simetría de la disyunción.

2020a

4) Presente un contraejemplo del siguiente esquema inferencial:

$$\frac{(p \wedge q) \to r}{\neg (p \wedge q) \to \neg r}$$

Si Dios existe y los marcianos también, entonces 2 y 2 son 4
Por tanto, si es falso que existan Dios y los marcianos, entonces 2 y 2 no son 4.

2020b

4) Desarrolle el Árbol Semántico del siguiente esquema inferencial y comente el resultado:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ (q \to r) \to s \end{array}}{(r \wedge \neg s) \to \neg p}$$

1	$p \to q$	premisa
2	$(q \to r) \to s$	premisa
3	$\neg ((r \wedge \neg s) \to \neg p)$	conclusión negada
4	$r \wedge \neg s$	alfa 3
5	p	alfa 3
6	r	alfa 4
7	$\neg s$	alfa 4

8.1 $\neg p$ — 8.2 q — beta 1
cierra 5

9.21 $\neg (q \to r)$ — 9.22 s beta 2
cierra 7

10.21 q beta 9.21
11.21 $\neg r$ beta 9.21
cierra 6

El árbol presenta tres ramas, todas ellas cerradas, por contener contradicción, por lo que es un árbol terminado, que muestra la validez del esquema inferencial examinado.

2020b

1) Responda, en primer lugar y claramente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Después justifique su respuesta.

a.- Para que un argumento con premisas verdaderas sea válido, es condición necesaria pero no suficiente que su conclusión sea verdadera.

Verdadero. Si el argumento tiene forma válida y premisas verdaderas, forzosamente ha de tener conclusión verdadera. Un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa no puede tener forma válida, pues la validez asegura que no se pase de lo verdadero a lo falso. Pero no es condición suficiente tener premisas verdaderas y conclusión verdadera para tener un argumento con forma válida. Por ejemplo: "2 más 2 son 4. Por tanto Madrid es la capital de España" es un argumento con premisa y conclusión verdaderas, pero con forma lógica inválida:

$$\frac{p}{q}$$

Esta forma, inválida, sí permite pasar de lo verdadero a lo falso. Una interpretación de esta forma lógica que tiene premisa verdadera y conclusión falsa: "2 más 2 son 4. Por tanto, el río Ebro pasa por Sevilla".

b.- Si X es una fórmula contingente, $Y \rightarrow (X \vee \neg X)$ también lo es.

Falso. Dado que el consecuente tiene forma tautológica, el condicional no puede tener ningún caso en el que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, único caso en el que el condicional sería falso. De modo que este condicional es una tautología, una fórmula válida.

c.- Un árbol semántico con todas sus ramas cerradas indica que no existe ninguna interpretación bajo la cual las premisas del argumento pudieran ser verdaderas y la conclusión falsa.

Verdadero. El árbol semántico examina si hay o no contradicción en suponer premisas verdaderas y conclusión falsa. Si se encuentra contradicción en todas las ramas (están cerradas por ello) podemos concluir que es imposible el caso de premisas verdaderas y conclusión falsa.

c.- Cualquier fórmula válida es implicada por una contradicción.

Verdadero. En primer lugar porque una tautología es implicada por cualquier fórmula. En segundo lugar, porque de una contradicción se sigue lógicamente cualquier cosa, es decir, una fórmula contradictoria implica cualquier fórmula.

2020b

3) Dado el enunciado

> Wittgenstein es el autor de *Las Investigaciones filosóficas* o no es el autor del *Tractatus*.

Decir cuál o cuáles de los siguientes enunciados se siguen lógicamente de él como conclusión y pruébelo mediante Árboles Semánticos.

Premisa: $p \lor \neg q$

a. Si Wittgenstein es el autor de *Las Investigaciones filosóficas*, también lo es del *Tractatus*.

p: Wittgenstein es el autor de *Las Investigaciones filosóficas*
q: Wittgenstein es el autor del *Tractatus*

a: $p \to q$
No se sigue.

1	$p \lor \neg q$	premisa
2	$\neg (p \to q)$	*c* negada
3	p	alfa 2
4	$\neg q$	alfa 2
5.1 / 5.2	p (abierta) / $\neg q$ (abierta)	beta 1

b. Si Wittgenstein no es el autor de *Las Investigaciones filosóficas*, entonces no es el autor del *Tractatus*.

b: $\neg p \to \neg q$
Sí se sigue.

1	$p \lor \neg q$	premisa
2	$\neg (\neg p \to \neg q)$	*b* negada
3	$\neg p$	alfa 2
4	q	alfa 2
5.1 / 5.2	p (cierra 3) / $\neg q$ (cierra 4)	beta 1

Árbol terminado y cerrado, que prueba que *b* sí se sigue de la premisa.

c. Wittgenstein no es el autor del *Tractatus* a menos que también lo sea de *Las Investigaciones filosóficas*.

c: $q \to p$
Sí se sigue.

1	$p \lor \neg q$	premisa
2	$\neg (q \to p)$	*c* negada
3	q	alfa 2
4	$\neg p$	alfa 2
5.1 / 5.2	p (cierra 4) / $\neg q$ (cierra 3)	beta 1

Árbol terminado y cerrado, que prueba que *c* sí se sigue de la premisa.

2020b

2) Formalice el siguiente argumento y demuestre su validez mediante Deducción Natural:

Cuando la Bolsa sube, suben también los beneficios de los accionistas o bien bajan los Bonos del Tesoro. Los beneficios de los accionistas suben sólo cuando hay inversión empresarial. Los Bonos del Tesoro bajan sólo cuando hay deflación. Si los beneficios de los accionistas no suben, no deflación. Por tanto, debe haber inversión empresarial para que la Bolsa suba.

p: la Bolsa sube
q: los beneficios de los accionistas suben
r: los Bonos del Tesoro bajan
s: hay inversión empresarial
t: hay deflación

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \vee r) \\ q \rightarrow s \\ r \rightarrow t \\ \neg q \rightarrow \neg t \\ \hline p \rightarrow s \end{array}$$

1	$p \rightarrow (q \vee r)$	premisa
2	$q \rightarrow s$	premisa
3	$r \rightarrow t$	premisa
4	$\neg q \rightarrow \neg t$	premisa
5	p	supuesto
6	$q \vee r$	MP 1,5
7	q	supuesto (caso de 6)
8	s	MP 2,7
9	r	supuesto (caso de 6)
10	t	MP 3,9
11	q	MT 4,10
12	s	MP 2,11
13	s	RE$\vee$ 6, 7-8, 9-12
14	$p \rightarrow s$	RI$\rightarrow$ 5,13

2021c

2) Formalice el siguiente argumento y pruebe su validez mediante D.N. o bien su invalidez mediante Árbol Semántico:

Si el toro tuviera inteligencia suficiente y sentido del humor, se sentaría en medio de la plaza y dormiría una plácida siesta. Si el toro se sentase en medio de la plaza, entonces los espectadores se marcharían decepcionados o el torero se sentiría ridículo. Ni el torero se siente ridículo, ni los espectadores se marchan decepcionados. Por tanto, el toro no tiene inteligencia suficiente o no tiene sentido del humor.

p: el toro tiene inteligencia suficiente
q: el toro tiene sentido del humor
r: el toro se sienta en medio de la plaza
s: el toro duerme una plácida siesta
t: los espectadores se marchan decepcionados
u: el torero se siente ridículo

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \\ r \rightarrow (t \vee u) \\ \neg u \wedge \neg t \\ \hline \neg p \vee \neg q \end{array}$$

1	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$	premisa
2	$r \rightarrow (t \vee u)$	premisa
3	$\neg u \wedge \neg t$	premisa
4	$p \wedge q$	supuesto
5	$r \wedge s$	MP 1,4
6	r	RE$\wedge$ 5
7	$t \vee u$	MP 2,6
8	$\neg t$	RE$\wedge$ 3
9	u	IA 7,8
10	$\neg u$	RE$\wedge$ 3
11	$u \wedge \neg u$	RI$\wedge$ 9,10
12	$\neg (p \wedge q)$	RI$\neg$ 4,11
13	$\neg p \vee \neg q$	Interdef. $\wedge$,$\vee$ 12

2021c

1) Ponga un ejemplo de argumento válido, una de cuyas premisas sea falsa y con forma lógica condicional, y otro ejemplo de argumento con forma inválida, que tenga premisas y conclusión verdaderas.

Argumento válido con una premisa condicional falsa:

Si los españoles son europeos, entonces son andaluces. (premisa condicional falsa)
Los españoles son europeos.
Por tanto, los españoles son andaluces.

Forma Lógica:

p: los españoles son europeos
q: los españoles son andaluces

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

La conclusión se sigue de las premisas directamente, mediante la regla Modus Ponens.

Argumento inválido con premisas y conclusión verdaderas:

Si los andaluces son europeos, entonces son españoles.
Los andaluces son españoles.
Por tanto, los andaluces son europeos.

Tanto las premisas como la conclusión son afirmaciones verdaderas, pero la conclusión no se sigue de las premisas.

Forma Lógica:

p: los andaluces son europeos
q: los andaluces son españoles

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \end{array}}{p}$$

Mediante un árbol semántico podemos probar que su forma es inválida:

	1 $p \rightarrow q$	premisa
	2 q	premisa
	3 $\neg p$	conclusión negada
4.1 $\neg p$	4.2 q	beta 1

Árbol completamente desarrollado con dos ramas y las dos abiertas, lo que indica que esa forma argumentativa tiene contraejemplos y es, por tanto, inválida.

2021c

4) Diga cuáles de los siguientes enunciados con equivales a

Cuando llueve, te mojas si no llevas paraguas

Diccionario:
p: llueve
q: llevas paraguas
r: te mojas

Forma de la premisa: $p \to (\neg q \to r)$

Forma de las afirmaciones a, b, c y d:

a.- *Si no llevas paraguas y llueve, te mojas* a) $(\neg q \wedge p) \to r$
b.- *Si te mojas, entonces llueve si no llevas paraguas* b) $r \to (\neg q \to p)$
c.- *Llueve y no llevas paraguas, sólo si te mojas* c) $(p \wedge \neg q) \to r$
d.- *No te mojas a menos que llueva y no lleves paraguas* d) $r \to (p \wedge \neg q)$

a) es equivalente, pues aplicando las interdefiniciones de los operadores (también sobre subfórmulas), la podemos transformar en $p \to (\neg q \to r)$

$(\neg q \wedge p) \to r$
$\neg (\neg q \wedge p) \vee r$ Interdef. $\to,\vee$
$(\neg p \vee q) \vee r$ Interdef. $\wedge,\vee$,
$\neg p \vee (q \vee r)$ Asociativa
$\neg p \vee (\neg q \to r)$ Interdef. $\vee,\to$
$p \to (\neg q \to r)$ Interdef. $\vee,\to$

b) no es equivalente. Los siguientes valores hacen b) falsa y verdadera la premisa:

r: V, p: F, q: F

$r \to (\neg q \to p)$: $V \to (\neg F \to F)$; $V \to (V \to F)$; $V \to F$; F

$p \to (\neg q \to r)$: $F \to (\neg F \to V)$; $F \to (V \to V)$; $F \to V$; V

c) es equivalente, pues la subfórmula de c): $(p \wedge \neg q)$ equivale a la subfórmula de a): $(\neg q \wedge p)$, por la conmutación de la conjunción.

d) no es equivalente. Los siguientes valores hacen d) falsa y verdadera la premisa:

r: V, p: F, q: F

$r \to (p \wedge \neg q)$: $V \to (F \wedge \neg F)$; $V \to (F \wedge V)$; $V \to F$; F

$p \to (\neg q \to r)$: $F \to (\neg F \to V)$; $F \to (V \to V)$; $F \to V$; V

2021c

3) Desarrolle el Árbol Semántico del siguiente esquema inferencial y comente el resultado:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow (r \rightarrow s) \end{array}}{(r \wedge \neg s) \rightarrow p}$$

1	$p \rightarrow q$	premisa
2	$q \rightarrow (r \rightarrow s)$	premisa
3	$\neg ((r \wedge \neg s) \rightarrow p)$	conclusión negada
4	$r \wedge \neg s$	alfa 3
5	$\neg p$	alfa 3
6	r	alfa 4
7	$\neg s$	alfa 4

8.1 $\neg p$ 8.2 q beta 1

9.11 $\neg q$ abierta 9.12 $r \rightarrow s$ 9.21 $\neg q$ cierra 8.2 9.22 $r \rightarrow s$ beta 2

10.121 $\neg r$ cierra 6 10.122 s cierra 7 beta 9.12 10.221 $\neg r$ cierra 6 10.222 s cierra 7 beta 9.22

El árbol tiene 6 ramas, una abierta y cinco cerradas. La rama abierta indica que no hay contradicción al poner premisas verdaderas junto a conclusión falsa (negación de conclusión verdadera), es decir, que esta forma inferencial tiene contraejemplos y es, por tanto, una forma argumentativa inválida.

Ejemplos de modelo de examen para 2024

Diga cuáles de las siguientes fórmulas son tautológicas, cuáles contingentes y cuáles contradictorias:

T1) $q \rightarrow ((\neg p \vee r) \rightarrow q))$
Es una **TAUTOLOGÍA**. Su estructura es $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$.

T2) $(p \rightarrow (\neg q \vee p)) \rightarrow (\neg p \vee (q \rightarrow p))$
Es una **TAUTOLOGÍA**. Puesto que $\neg X \vee Y$ equivale a $X \rightarrow Y$, la fórmula es equivalente a $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))$.

T3) $(p \vee \neg p) \rightarrow (q \vee \neg q)$
Es una **TAUTOLOGÍA**. El consecuente de este condicional es una fórmula tautológica. Todas las fórmulas condicionales con consecuente tautológico son tautologías, pues no hay modo de encontrar una interpretación que haga la fórmula completa falsa.

T4) $\neg(p \rightarrow \neg p)$
Es **CONTINGENTE**. Podemos notar que la tabla de verdad de $\neg(p \rightarrow \neg p)$ es la misma que la tabla de p.

T5) $\neg(q \rightarrow ((\neg p \vee r) \rightarrow q)))$
Es **CONTRADICTORIA**, puesto que es la negación de la tautología en T1.

D1) Demuestre, mediante Deducción Natural y sin hacer uso de la reducción al absurdo, la validez del siguiente esquema de argumento:

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg s) \\ r \vee t \\ \neg t \vee s \\ \hline \neg (p \wedge q) \end{array}$$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$	Premisa
2.	$r \vee t$	Premisa
3.	$\neg t \vee s$	Premisa
4.	$\neg r \rightarrow t$	Interdef. $\vee, \rightarrow$ 2
5.	$t \rightarrow s$	Interdef. $\vee, \rightarrow$ 3
6.	$\neg r \rightarrow s$	Transitiva 4,5
7.	$\neg (\neg r \wedge \neg s)$	Interdef. $\rightarrow, \wedge$ 6
8.	$\neg (p \wedge q)$	MT 1,7

D2) Desarrolle (completamente) e interprete el árbol semántico del siguiente esquema de argumento:

$$\begin{array}{c} \neg (p \rightarrow \neg q) \\ \neg q \vee \neg s \\ (\neg p \vee \neg s) \vee (q \rightarrow \neg p) \\ \hline \neg p \end{array}$$

1	$\neg (p \rightarrow \neg q)$	Premisa
2	$\neg q \vee \neg s$	Premisa
3	$(\neg p \vee \neg s) \vee (q \rightarrow \neg p)$	Premisa
4	p	Negación de conclusión
5	p	$\alpha 1$
6	q	$\alpha 1$

7.1 $\neg q$ — *cierra 6
7.2 $\neg s$ — $\beta 2$

8.21 $\neg p \vee \neg s$
8.22 $q \rightarrow \neg p$ — $\beta 3$

$\beta 8.21$: 9.211 $\neg p$ *cierra 4; 9.212 $\neg s$ **abierta**

9.221 $\neg q$ *cierra 6; 9.222 $\neg p$ *cierra 4 — $\beta 8.22$

Hay una rama abierta, por lo que el esquema examinado tiene contra-ejemplos. Es una forma inferencial inválida.

Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

T1) Para que un argumento sea válido es condición necesaria que sus premisas sean verdaderas.

Falso. Un argumento es válido cuando las premisas implican la conclusión. Puede darse cualquier combinación de valores de verdad, excepto que haya verdad en todas las premisas y falsedad en la conclusión, pues lo verdadero nunca puede implicar lo falso.

T2) Un contraejemplo es un ejemplo de contradicción.

Falso. Un contraejemplo es una interpretación que muestra la invalidez de un esquema inferencial o la de una fórmula. Por ejemplo: "Madrid es la capital de Navarra" es un contraejemplo de p. Es una afirmación falsa que muestra que p no es una fórmula válida.

T3) Un esquema de argumento es verdadero o es falso.

Falso. Un esquema de argumento es válido o inválido. La verdad y la falsedad son propiedades de los enunciados.

T4) Los argumentos inválidos siempre tienen la conclusión falsa.

Falso. Un argumento con forma inválida es aquél en el que las premisas no implican la conclusión, ya sea verdadera o falsa. La validez y la invalidez se dicen de la forma lógica del argumento. Por ejemplo, "Londres es una ciudad pequeña. Por tanto, Londres es una ciudad española" es un argumento inválido con conclusión falsa y forma lógica:

$$\frac{p}{q}$$

Otro argumento con esa misma forma inválida, pero conclusión verdadera es: ""Londres es una ciudad pequeña. Por tanto, Londres es una ciudad inglesa"

T5) Si X es una fórmula contingente, $(Y \wedge \neg Y) \rightarrow X$ es una fórmula válida.

Verdadero.

(El antecedente de ese condicional es una contradicción y una contradicción $(Y \wedge \neg Y)$ implica cualquier fórmula.)

D1) Formalice el siguiente argumento y pruebe su validez mediante D.N. o bien su invalidez mediante Árbol Semántico:

Si existieran seres extraterrestres y tuviesen inteligencia, nos habrían enviado algún mensaje o habrían venido a visitarnos. Si nos hubiesen visitado, se habrían dejado ver por los humanos. Si se hubiesen dejado ver por los humanos, los humanos los describirían de modo similar. No es cierto que los humanos describan a los seres extraterrestres de modo similar. Además, los seres extraterrestres no nos han enviado mensaje. Por lo tanto, si existieran seres extraterrestres, no tendrían inteligencia.

p: existen seres extraterrestres
q: los seres extraterrestres tienen inteligencia
r: los seres extraterrestres nos han enviado algún mensaje
s: los seres extraterrestres han venido a visitarnos
t: los seres extraterrestres se han dejado ver por los humanos

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s) \\ s \rightarrow t \\ t \rightarrow u \\ \neg u \\ \neg r \\ \hline p \rightarrow \neg q \end{array}$$

1	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	premisa
2	$s \rightarrow t$	premisa
3	$t \rightarrow u$	premisa
4	$\neg u$	premisa
5	$\neg r$	premisa
6	$\neg t$	MT 3,4
7	$\neg s$	MT 2,6
8	$\neg r \wedge \neg s$	RI$\wedge$ 5,7
9	$\neg (r \vee s)$	Interdef. $\wedge,\vee$ 8
10	$\neg (p \wedge q)$	MT 1,9
11	$p \rightarrow \neg q$	Interdef. $\wedge,\rightarrow$ 10

D2) Dado el enunciado Frege no es el autor de la *Los Fundamentos de la Aritmética* a menos que también lo sea de *Las Leyes Básicas de la Aritmética*.

p: Frege es el autor de la *Los Fundamentos de la Aritmética*
q: Frege es el autor de *Las Leyes Básicas de la Aritmética*.

Premisa: $\neg q \rightarrow \neg p$

Decir cuál o cuáles de los siguientes enunciados se siguen lógicamente de él como conclusión y pruébelo mediante Árboles Semánticos:

a. Si Frege es el autor de *Las Leyes Básicas de la Aritmética*, también lo es de la *Los Fundamentos de la Aritmética.*
b. Si Frege no es el autor de *Las Leyes Básicas de la Aritmética*, entonces no es el autor de la *Los Fundamentos de la Aritmética*.
c. Frege es el autor de *Las Leyes Básicas de la Aritmética* o no es el autor de la *Los Fundamentos de la Aritmética.*

a: $q \rightarrow p$ (no se sigue. Ver árbol más abajo)
b: $\neg q \rightarrow \neg p$ (sí se sigue. Ver árbol más abajo)
c: $q \vee \neg p$ (sí se sigue. Ver árbol más abajo)

Árbol abierto de a:

1 $\neg q \rightarrow \neg p$ premisa
2 $\neg (q \rightarrow p)$ negación de la conclusión
3 q α 2
4 $\neg p$ α 2

5.1 q 5.2 $\neg p$ β 1

Terminado y con dos ramas abiertas.

Árbol cerrado de b:

1 $\neg q \rightarrow \neg p$ premisa
2 $\neg (\neg q \rightarrow \neg p)$ negación de la conclusión
3 $\neg q$ α 2
4 p α 2

5.1 q 5.2 $\neg p$ β 1
cierra 3 cierra 4

Terminado y con todas sus ramas cerradas.

Árbol cerrado de c:

1 $\neg q \rightarrow \neg p$ premisa
2 $\neg (q \vee \neg p)$ negación de la conclusión
3 $\neg q$ α 2
4 p α 2

5.1 q 5.2 $\neg p$ β 1
cierra 3 cierra 4

Terminado y con todas sus ramas cerradas.

Referencias bibliográficas

DEAÑO, Alfredo:

- (1974) *"Introducción a la Lógica Formal"* *(Sexta reimpresión - 2009)*

DÍEZ Martínez, Amparo; **CASTRILLO** Criado, Pilar:

- (2008) *"Formas lógicas. Guía para el estudio de la lógica"* (Segunda edición)

Relación de temas de las asignaturas (UNED) con los capítulos de la bibliografía

- [1] – Verdad y validez. Lenguaje natural y lenguaje formal. 2 semanas
  - Deaño: "Primeros conceptos"
  - Formas lógicas: capítulo 1
- [2] – Operadores lógicos proposicionales. Reglas de formación de fórmulas. Formalización del lenguaje natural. 2 semanas
  - Deaño: capítulo 2.1
  - Formas lógicas: capítulo 2
- [3] – Métodos de evaluación semántica: Tablas de Verdad y Árboles Semánticos. 3 semanas
  - Deaño: capítulo 2.3
  - Formas lógicas: capítulo 3 y 4
- [4] – Métodos de evaluación sintáctica: Deducción Natural. Reglas básicas y derivadas. 5 semanas
  - Deaño: capítulo 2.3
  - Formas lógicas: capítulo 3 y 4
- [5] – Conceptos básicos del cálculo axiomático: axiomas, teoremas y reglas de transformación. 1 semana
  - Deaño: capítulo 2.2