

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.И. Платова
(НОВОЧЕРКАССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ)

Г.Я. Пятибратов, Д.В. Барыльник

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

НОВОЧЕРКАССК 2013

УДК 681.51.001.891.573(075.8)

ББК 31.291

П99

Рецензенты: д-р техн. наук П.Г. Колпахчян

П99 Пятибратов Г.Я., Барыльник Д.В.,

Моделирование электромеханических систем: Учеб. пособие /Юж.-Рос. гос. политехн. ун-т.– Новочеркасск: ЮРГПУ, 2013.– 103 с.

Рассмотрены основные проблемы и методологические подходы к разработке математического описания и получения моделей сложных электромеханических систем, имеющих протяженные передачи с упругими механическими связями. Приведены расчетные схемы, дифференциальные уравнения и структурные схемы механизмов с рядным и разветвленным расположением дискретных масс, а также элементов электроприводов постоянного и переменного тока.

Учебное пособие предназначено для изучения дисциплин «Моделирование электромеханических систем», «Управление электромеханическими системами» и выполнения выпускных работ магистрантами по направлению подготовки «Электроэнергетика и электротехника», а также может быть использовано аспирантами электротехнического направления.

УДК 681.51.001.891.573(075.8)

© Южно-Российский государственный
технический университет, 2013

© Пятибратов Г.Я., Барыльник Д.В., 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	6
1.1. Задачи комплексного исследования электромеханических систем	6
1.2. Подходы и методы получения и исследования математических моделей электромеханических систем	9
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ	13
2.1. Особенности математического описания механизмов рабочих машин.....	13
2.2. Учет распределенности параметров протяженных механических передач	15
2.3. Получение передаточных функций электромеханических систем с распределенными параметрами	22
2.4. Возможности описания механизмов с распределенными параметрами в виде дискретных моделей	25
2.5. Математическое описание механической части системы с использованием уравнений Лагранжа	30
2.6. Расчетные и структурные схемы механизмов при учете упругих связей	34
3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ	38
3.1. Определение силовых взаимодействий в электромеханических системах.....	38
3.2. Линеаризованные математические модели электродвигателей постоянного тока	42
3.3. Математические модели управляемых преобразователей в электроприводах постоянного тока.....	43
3.4. Линеаризация математической модели электродвигателей переменного тока	49
3.5. Математическое описание статических преобразователей электроприводов переменного тока.....	52
3.6. Математическое описание асинхронного электродвигателя при частотном регулировании электромагнитного момента	55

3.7. Математическое описание синхронного электродвигателя с постоянными магнитами при частотном регулировании электромагнитного момента	67
3.8. Математическое описание электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением как обобщённой машины.....	71
3.9. Структурные взаимодействия управляющих и информационных устройств ЭМС.....	75
3.10. Математическое описание статических преобразователей с широтно-импульсной модуляцией	77
3.11. Математическое описание информационно-измерительных устройств ЭМС.....	78
3.12. Математическое описание и определение параметров регуляторов электроприводов постоянного и переменного тока	80
3.13. Структурные схемы электрической части ЭМС.....	83
3.14. Математические модели элементов систем управления электроприводов.....	87
4. ОБОБЩЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ.....	88
4.1. Способы получения обобщенных математических моделей	88
4.2. Структурная схема эквивалентной двухмассовой электромеханической системы.....	90
4.3. Учет и определение эквивалентных параметров электромеханических систем.....	95
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	98
ЛИТЕРАТУРА	101

ВВЕДЕНИЕ

Увеличение производительности технологических машин и агрегатов достигается, главным образом, благодаря росту единичной мощности и интенсивности работы. При этом на качество выпускаемой продукции, надежность и долговечность работы оборудования может отрицательно влиять податливость конструкций и механических передач, увеличивающая колебательность регулируемых координат системы и способствующая возникновению значительных динамических нагрузок, которые ускоряют процесс накопления усталостных напряжений в передачах, вызывают поломки механизмов. Это приводит к возрастанию динамических ошибок регулирования, ухудшению работы исполнительных механизмов и качества управления технологическими процессами, увеличению незапланированных простоев оборудования, стоимости ремонта и, как следствие, к значительному экономическому ущербу.

Широкие возможности и перспективы для решения указанной проблемы открываются при использовании современных быстродействующих электроприводов, так как в некоторых случаях благодаря рациональному выбору параметров неизменяемой части системы и регуляторов или организации дополнительных управляющих воздействий удастся практически без дополнительных экономических затрат уменьшить отрицательное влияние упругих связей на качество регулирования координат электромеханических систем (ЭМС). Исследование ЭМС с учетом упругости их механических передач является сложной проблемой, для решения которой требуется определить рациональные подходы получения математических моделей, выбрать удобную форму их представления, определить эффективные методы комплексного решения задач анализа и синтеза системы управления, оценить влияние основных возмущений на происходящие процессы.

В практике проектирования электроприводов механическая часть электропривода обычно представляется жестким приведенным звеном. Однако детальный анализ кинематических схем сбалансированных манипуляторов, робототехнических комплексов, прокатных станов, подъемных кранов, экскаваторов, грузовых подъемников, лифтов, конвейеров, испытательных стендов механических трансмиссий, крупных радиотелескопов, тренажеров показывает, что их особенностью является повышенная податливость механических передач, которую необходимо учитывать при их проектировании.

Для повышения производительности и качества технологических про-

цессов используются всё более быстродействующие системы электроприводов. При этом значения собственных резонансных частот механической части рабочих машин могут попадать в полосу пропускания электропривода, а возникающие при этом резонансные колебательные процессы приводить к значительным ошибкам регулирования усилий, скорости или перемещения механизмов, повышению нагрузок в механических передачах и более быстрому износу оборудования. Это требует совместного, комплексного исследования таких ЭМС с учетом влияния на их динамические процессы упругих связей.

При современном уровне развития теории ЭМС полное описание и исследование всех особенностей поведения сложных технологических комплексов, их электротехнического оборудования, совместный анализ динамических процессов, происходящих в механических и электрических устройствах, представляет сложную трудоемкую задачу. Поэтому при проектировании и исследовании сложных ЭМС важно принять корректные допущения и оценить адекватность, необходимость и возможность упрощения используемых математических моделей.

1. ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Задачи комплексного исследования электромеханических систем

При решении прикладных проблем создания качественных ЭМС необходимо учитывать информационные возможности, энергетические закономерности и ограничения, проявляющиеся при реализации реальных систем управления. Однако закономерности и ограничения часто возможно сформулировать лишь на содержательном уровне, хотя они играют решающую роль в осуществлении предельных возможностей автоматического управления электроприводами, содержащими протяженные упругие механические передачи. Это определяет дополнительные сложности при исследовании и проектировании электромеханических систем с упругими связями (ЭМС с УС).

Электроприводы реальных технологических машин чаще всего должны обеспечивать управление скоростью, положением или силовыми воздействиями исполнительных механизмов и рабочих органов различных производственных агрегатов. Причем, независимо от вида регулируемых координат ЭМС взаимовлияние элементов и устройств электрической и механической

частей системы наиболее часто осуществляется через силовые взаимодействия, что определяет важность и необходимость постановки задачи комплексного исследования и рационального управления усилиями в элементах механических передач средствами электропривода. В общем случае значительные по величине упругие колебания в ЭМС приводят к увеличению нагрузки в передачах или возрастанию динамических ошибок регулирования скорости и перемещения механизмов, что обуславливает снижение производительности работы оборудования, ухудшает качество выпускаемой продукции. При разработке общих подходов к исследованию и реализации ЭМС с УС, исходя прежде всего из потребностей практики, в зависимости от решаемых задач и имеющихся средств предлагается выделить следующие случаи и возможности уменьшения амплитуды упругих колебаний выходных координат ЭМС с УС с помощью электропривода.

При отсутствии достоверной информации об усилиях в элементах механических передач необходимо решать задачу уменьшения упругих колебаний в ЭМС благодаря эффективному использованию демпфирующей способности существующих систем электропривода. В этом случае задачу необходимо рассматривать как оптимизацию пассивного демпфирования упругих колебаний ЭМС, осуществляемую без ухудшения качества управления выходными координатами системы за счет рационального выбора структуры и параметров её регуляторов. Возможности такого подхода обычно ограничены заданными параметрами и структурой неизменяемой части исследуемой ЭМС. Для комплексного решения поставленной задачи требуется использовать методы параметрического синтеза, способы определения достижимой эффективности и рациональных областей применения этого способа демпфирования выходных координат ЭМС с УС.

При наличии технических средств получения достоверной информации об изменении усилий в элементах механических передач целесообразно применять методы активного демпфирования колебаний выходных координат ЭМС и ограничения динамических нагрузок в механических передачах благодаря организации дополнительных управляющих воздействий электроприводом. Эффективность этого способа определяется энергетическими возможностями электропривода, структурой его системы управления и параметрами механической части системы. В общем случае для комплексного решения этой проблемы необходимо иметь надежные силоизмерительные устройства, методики определения требуемой мощности электропривода, обеспечи-

вающего заданную эффективность ограничения динамических нагрузок механизмов, методы решения задачи синтеза управляющей части системы и уметь определять области целесообразного применения активного демпфирования для улучшения качества работы таких ЭМС.

В рассмотренных способах повышения демпфирующей способности ЭМС с УС на электропривод, кроме обеспечения основных технологических требований, возлагается дополнительная функция уменьшения колебаний усилий.

В последнее время возрастает необходимость управления усилиями в исполнительных элементах различных механизмов. Для этого в систему управления электроприводов дополнительно включают обратную связь по усилию или моменту механизма.

Существенно отличается по целям, способам и методам решения поставленных задач подход к исследованию и проектированию ЭМС, когда основными регулируемыми координатами являются усилия в упругих элементах передач технологических машин. Объект управления в этом случае значительно усложняется, электропривод теряет саморегулирующие свойства, изменяется энергетика процессов, что определяет необходимость поиска специфических методов выбора неизменяемой части системы, идентификации её параметров, анализа и синтеза системы управления.

Особенности рассмотренных подходов к исследованию и способов реализации ЭМС с УС определяются, главным образом, целью, требованиями и задачами проектирования системы и носят условный характер, так как во всех случаях решается общая проблема управления усилиями в упругих элементах (УЭ) механизмов. Поэтому решение всех перечисленных задач целесообразно осуществлять с использованием общей методологической основы, позволяющей выбирать наиболее удобную форму представления математических моделей сложных ЭМС, применять единые подходы и методы исследования, обобщать полученные результаты.

В настоящее время в теории и практике ЭМС с УС можно выделить два основных взаимодополняющих пути решения поставленных задач. Первый ориентирован на широкое применение аналитических методов анализа и синтеза систем управления, имеющих упрощенные математические модели и возможность формализации решаемых задач, что позволяет создавать эффективные алгоритмы и программы автоматизации исследования и проектирования систем управления электроприводов. Второй путь ориентирован на ис-

пользование широко применяемых в инженерной практике графоаналитических частотных методов, что позволяет разрабатывать методики выбора и расчета регуляторов, наладки систем управления. Представляется перспективным объединение этих направлений и создание единой методологии исследования и проектирования ЭМС, сочетающей аналитичность топологических методов, преимущества операционного исчисления, достоинства многокритериальной оптимизации, инженерную направленность частотных методов анализа и синтеза таких систем, эффективность применения вычислительной техники.

1.2. Подходы и методы получения и исследования математических моделей электромеханических систем

Математическое описание и исследование особенностей динамических процессов, происходящих в механических и электрических устройствах, представляют сложную, трудоемкую задачу. Поэтому на начальной стадии исследования таких систем важно оценить правомерность выбора исходных гипотез, определить целесообразность применения тех или иных корректных допущений.

Первые этапы исследования сложных ЭМС направлены на разумное упрощение исходного объекта с целью представления его расчетной схемой, соответствующей наиболее простой физической модели, в которой учтены только наиболее существенные факторы, влияющие на решение рассматриваемой задачи. Степень идеализации реальных ЭМС при получении их динамических моделей зависит от многих факторов, которые определяются, главным образом, свойствами объекта и целью исследований. Например, учитываемое число степеней свободы элементов механической части рабочей машины зависит от её конструктивных особенностей, частотного спектра вынуждающих сил и быстродействия приводных устройств. При выполнении данного этапа исследований важно, чтобы выбор динамической модели ЭМС и её упрощение не вступили в противоречие с возможностями принципиального характера – учетом особенностей колебательных явлений, существенных для решения поставленных задач.

Следующим этапом исследования силовых взаимодействий в ЭМС с УС является представление математической модели в наиболее удобной для данного исследования форме: в виде системы дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, структурных схем или графов. При получении математической модели из-за недостатка знаний об

объекте дополнительно приходится принимать гипотезы и допущения, позволяющие упростить математическое описание ЭМС и её дальнейшее исследование. Разработка математической модели ЭМС базируется на теоретических положениях аналитической механики, электротехники, соответствующих разделах математики при широком использовании экспериментальных зависимостей, подтверждающих адекватность полученных моделей реальным объектам.

Исследование сложных ЭМС выполняется в большинстве случаев с использованием современных ЭВМ и может быть эффективным только при наличии достаточно общих подходов и методов математического описания этих систем. При этом в теории и практике исследования ЭМС наиболее часто используются разные подходы к получению исходных уравнений, описывающих динамические процессы с учетом упругости их механических передач.

Наиболее общий подход к получению математического описания ЭМС основан на использовании вариационных методов. При этом наибольшее распространение получил принцип наименьшего действия Гамильтона, приводящий к получению уравнений Лагранжа [1]. Комплексное системное применение этого подхода позволяет получить формальный метод строгого математического описания процессов в сложных ЭМС в форме уравнений Лагранжа–Максвелла. Основная трудность в использовании метода связана с отсутствием систематизации применяемых допущений и рекомендаций по выбору обобщенных координат [2].

В инженерной практике большое распространение получил метод элементарного описания ЭМС, в основу которого положена идея получения исходных уравнений системы с непосредственным применением законов механики, электротехники и других смежных дисциплин. Этот подход базируется на изучении процессов и явлений, происходящих в отдельных устройствах и элементах систем, и учете их влияния друг на друга с помощью уравнений связи. Однако отсутствие единого формального способа получения уравнений существенно затрудняет применение этого подхода для исследования сложных ЭМС, состоящих из физически разнородных объектов.

Третий подход, привлекающий в настоящее время внимание многих специалистов, основан на использовании теории линейных направленных графов для получения и исследования уравнений состояния сложных ЭМС [3]. Важным преимуществом такого подхода является возможность получе-

ния подграфов механической части системы (МЧС) и электропривода, рассматриваемых изолированно – вне системы, в которую они входят. Эквивалентный граф системы получают на основе принципа однонаправленности ветвей графа путем объединения отдельных подграфов в соответствии с электрическими и кинематическими схемами исследуемой системы. Использование теории направленных графов позволяет разработать общие формальные методы получения уравнений ЭМС с УС, не зависящие от её сложности и физической природы.

Применение того или иного подхода и выбор формы представления математического описания ЭМС осуществляются в зависимости от целей исследования путем сопоставления их достоинств и недостатков, анализа возможности использования тех или иных гипотез и допущений при исследовании конкретной системы.

После получения математического описания системы следующим этапом исследования ЭМС является решение уравнений или анализ структурных и топологических свойств математической модели. При этом используют аналитические методы, позволяющие получать обобщающие результаты, и численные методы, опирающиеся на возможности современной вычислительной техники. Исследование ЭМС, имеющих протяженные механические передачи с упругими свойствами и описываемых в общем случае моделями с распределенными параметрами, связано с рассмотрением сложных многоконтурных взаимосвязанных систем автоматического управления с перекрещивающимися связями. Решение задач анализа и синтеза в таких системах, имеющих колебательные переходные процессы, отличается большой сложностью и трудоемкостью, требует развития и совершенствования методов исследований.

Сложность анализа вынужденных переходных процессов в ЭМС с УС определяется значительной колебательностью их координат, что затрудняет исследование таких систем во временной области. При исследовании силовых взаимодействий в ЭМС с помощью частотных методов колебательные свойства системы зависят от вида частотных характеристик в области резонансных частот. Поэтому при исследовании максимальных усилий ЭМС с УС удобно использовать частотные методы. Однако специфика структуры и свойств ЭМС с УС ограничивает возможность применения асимптотических логарифмических амплитудных частотных характеристик, что определяет необходимость совершенствования частотных методов для исследования та-

ких систем. Развитие частотных методов повысит прикладное значение исследований, придаст им инженерную направленность, расширит возможность использования полученных результатов при проектировании, наладке и эксплуатации ЭМС рассматриваемого класса.

При исследовании силовых взаимодействий в ЭМС с УС значительные трудности возникают с определением структуры и реальных параметров механической части технологических машин, так как попытки их определения аналитическими методами часто приводят к существенным ошибкам. Поэтому при создании систем управления ЭМС важное значение приобретают экспериментальные методы определения их параметров с использованием методов идентификации. Однако сложность взаимовлияния элементов МЧС друг на друга, невозможность их структурного разделения и исследования в виде отдельных звеньев существенно усложняют идентификацию параметров и требуют применения специальных подходов и методов выполнения экспериментов и обработки полученных данных.

Сложность, разнообразие, многовариантность решаемых задач анализа и синтеза ЭМС предопределяют необходимость широкого применения вычислительной техники при их исследовании, моделировании и оптимизации численными методами, автоматизации проектных работ.

Достоверность полученных результатов при исследовании силовых взаимодействий в ЭМС необходимо оценивать по имеющимся экспериментальным данным. Экспериментальные исследования на начальных стадиях проектирования проводятся с целью идентификации параметров ЭМС с УС, проверки принятых гипотез и допущений. Причем, в реальных рабочих машинах в условиях их промышленной эксплуатации зачастую трудно выделить и оценить влияние отдельных факторов на динамику процессов. В этом случае приходится выполнять исследования ЭМС с использованием методов физического моделирования на специальных лабораторных установках и стендах. Поскольку широкое варьирование параметрами и структурой системы связано с большой трудоемкостью и затратами, эксперимент должен быть тщательно спланирован и дополнен теоретическими исследованиями с использованием методов математического моделирования на ЭВМ.

Многоплановость, сложность и специфика задач, решаемых при осуществлении средствами электропривода демпфирования упругих колебаний, ограничения динамических нагрузок и регулирования усилий в механических передачах, обладающих упругими свойствами, требуют использования

единой методологии их проектирования и исследования. Комплексное решение проблемы возможно при использовании рациональных подходов, способов и методов получения математических моделей ЭМС с УС, определения их параметров, решения задач идентификации, анализа и синтеза системы управления, обобщения полученных результатов и определения рекомендаций по построению и реализации систем электроприводов, способных осуществлять эффективное управление исполнительными механизмами различных технологических машин.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ

2.1. Особенности математического описания механизмов рабочих машин

Функционирование современных технологических машин сопровождается преобразованием различных видов энергии и форм движений при силовых и кинематических взаимодействиях их составных элементов. При исследовании и проектировании ЭМС возникает задача разработки единых подходов к анализу процессов различной физической природы в механической, электрической частях и в системе в целом. Достоверность получаемых при исследовании результатов зависит от степени детализации и полноты отображения используемых математических моделей, от обоснованности упрощающих их допущений, закладываемых при разработке моделей.

Выбор корректных допущений, определение условий их применимости, правильное использование математического аппарата, формы и вида его представления для получения наиболее простых моделей, адекватно описывающие процессы, происходящие в реальных технологических машинах являются важнейшими задачами математического описания и моделирования исследуемых ЭМС.

При получении обобщенной математической модели ЭМС с учетом упругих связей наибольшие сложности возникают при описании МЧС, так как в общем случае приходится учитывать распределенность параметров протяженных механических передач, различные виды нелинейностей, возможность изменения параметров и характеристик системы в функции координат и времени.

Динамические модели МЧС условно можно разделить на три вида: модели с распределенными параметрами, модели с сосредоточенными парамет-

рами и комбинированные модели, состоящие из подсистем первых двух видов.

В моделях с распределенными параметрами наиболее полно отражаются свойства реальных механизмов, которые при учете упругих и инерционных свойств имеют бесконечное число степеней свободы. Такие модели описываются чаще всего системами дифференциальных уравнений в частных производных и, ввиду сложности их решения, на практике используются только для достаточно простых элементов в виде валов, балок, стержней, пластин. Исследование усилий в приводах реальных машин с использованием таких моделей – сложная задача, однако при составлении математического описания МЧС всегда необходимо четко представлять последствия не учета распределённости их параметров. Это определяет необходимость вначале рассматривать наиболее протяженные элементы механических передач с учетом распределенности параметров и только после оценки возможности и условий их корректного упрощения и аппроксимации характеристик представлять в виде комбинированных или дискретных динамических моделей.

В практике исследования и проектирования ЭМС с УС наибольшее распространение получили дискретные динамические модели МЧС с сосредоточенными параметрами, в которых число рассматриваемых звеньев ограничено. При построении таких моделей считают, что инерционные свойства системы учитываются массами или моментами инерции, которые сосредоточены в отдельных звеньях, и эти звенья соединены безынерционными упругодиссипативными геометрическими или кинематическими связями [2]. В этом случае, чем больше учитывается дискретных масс, тем меньшую погрешность можно получить при решении задачи. Однако это справедливо лишь в том случае, если уровень достоверности исходных данных, на базе которых получена динамическая модель, высок, что требует выполнения широких экспериментальных исследований для проверки правильности используемых допущений, определения структуры динамической модели и идентификации её параметров. Практически использование такого подхода приводит к тому, что в механизме и его приводе выделяют наиболее массивные элементы и податливые участки кинематической цепи, а инерционные, упругие и диссипативные свойства остальных элементов учитываются с помощью приведенных эквивалентных значений соответствующих параметров.

2.2. Учет распределенности параметров протяженных механических передач

Все механические колебательные системы, рассматриваемые с учетом упругих связей, состоят из элементов с непрерывно распределенными параметрами (ЭНРП) – массой и податливостью – и имеют, поэтому бесконечно большое число собственных частот. Большинство частот этих колебаний существенно выше частот, влияющих на движение МЧС как целого объекта. Это позволяет предположить, что на низких частотах ЭМС с УС будет вести себя примерно так, как если бы она состояла из идеальных, не имеющих пространственной протяженности точечных масс и не обладающих массой упругих элементов. Такое допущение дает возможность представлять их в виде более простых дискретных моделей с сосредоточенными параметрами. Однако при выборе вида и структуры моделей таких ЭМС необходимо оценивать их адекватность, определять корректность принимаемых допущений и устанавливать области применимости полученных моделей. Для комплексного решения этих задач применяют различные способы математического описания ЭНРП, методы их исследования и особенности протекающих процессов.

В общем случае колебания упругой системы с распределенными массой и упругостью можно описать дифференциальными уравнениями вида [4]:

$$m \frac{d^2}{dt^2} q(x, y, z, t) + cH \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) q(x, y, z, t) = f(x, t),$$

где m – масса, отнесенная к единице площади или объема;

$q(x, y, z, t)$ – смещение;

c – коэффициент комплексной жесткости;

$f(x, t)$ – внешняя сила, отнесенная к единице площади или объема;

H – линейный дифференциальный оператор, который характеризует упругую деформацию материала.

Первый член этого уравнения характеризует инерцию системы, а второй – упругую восстанавливающую силу.

Решение уравнений, описывающих процессы в объемных или плоскостных ЭНРП, сопровождается большими трудностями. В то же время реально в большинстве ЭМС наиболее часто встречаются ЭНРП в виде длинных канатов, валов или стержней. Такие механические системы по числу учета координат распространения упругих деформаций можно отнести к пространственно одномерным объектам и описывать их однотипными дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа [4].

Причем, если инерционные характеристики (массы, моменты инерции) двигательного устройства и объекта управления малы по сравнению с инерционной характеристикой элемента с распределенными параметрами, то можно использовать при его описании однородные граничные условия. В противном случае ЭНРП удовлетворяет неоднородным граничным условиям [5].

Сопоставление различных подходов и методов аналитического исследования ЭНРП показало, что наиболее эффективным математическим приемом является использование описания таких систем в виде волновых уравнений с комплексными коэффициентами, позволяющими легко учитывать их демпфирующие свойства и получать решение в виде стоячих волн или сумм собственных колебаний [4]. В этом случае анализ колебаний объекта длиной l можно осуществить, решая неоднородное дифференциальное уравнение

$$m \left[\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \right] = f(x, t), \quad (2.1)$$

где m – масса исследуемого объекта, приходящаяся на единицу длины;

q – смещение элементов;

x – текущее значение координаты смещения (деформации);

$V^2 = f/m$ – квадрат скорости распространения бегущих волн;

$f(x, t)$ – вынуждающая сила, действующая на единицу длины.

Решение волнового уравнения, соответствующего исходному (2.1), можно представить в виде суммы двух бегущих волн $q(x, t) = f_1(Vt - x) + f_2(Vt + x)$. При этом точки, в которых функция $f_1(Vt - x)$ принимает одно и то же значение (т.е. точки с одинаковым прогибом), перемещаются в положительном направлении вдоль оси x со скоростью V , а функция $f_2(Vt + x)$ представляет волну, распространяющуюся в отрицательном направлении. В случае исследования периодических колебаний решение уравнения будет иметь вид

$$q(x, t) = f_1[(V/\omega)(\omega t - kx)] + f_2[(V/\omega)(\omega t + kx)],$$

где ω – круговая частота колебаний;

$k = \omega/V = 2\pi/\lambda$ – волновое число;

$\lambda = 2\pi V/\omega$ – длина волны, т.е. расстояние, проходимое волной упругой деформации за период колебания.

Решение для периодической бегущей волны примет вид

$$q(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx) = \left(A e^{-jkx} + B e^{jkx} \right) e^{j\omega t}.$$

Размеры ЭНРП в реальных ЭМС соизмеримы с длиной волны, поэтому волны в них могут многократно отражаться в течение каждого периода, что не позволяет различать бегущие волны. Поэтому более удобно использовать решение исходного уравнения в виде стоячих волн:

$$q(x, t) = X(x) T(t) = A \cos(kx + \varphi_x) + B \cos(\omega t + \varphi_t), \quad (2.2)$$

где $X(x)$ – множитель, характеризующий пространственное распределение амплитуды, он одинаков в любой момент времени;

$T(t)$ – множитель, характеризующий точки,двигающиеся синхронно, не распространяясь в пространстве, таким образом, что деформации точек различных сечений достигают своих максимальных или минимальных значений одновременно.

Решение, получаемое в виде (2.2), называют стоячей волной или собственным колебанием:

$$q_V(x, t) = A_V \cos(k_V x + \varphi_{Vt}) + B_V \cos(k_V Vt + \varphi_{Vt}),$$

где $k_V V = \omega_V$ – круговая частота собственного V - го колебания $q_V(x, t)$.

Общее решение в этом случае можно представить в виде суммы собственных колебаний с соответствующими амплитудами A_V :

$$q(x, t) = \sum_{v=1}^n q_V(x) \cos(\omega_V t + \varphi_V) = \sum_{v=1}^n A_V \sin \frac{v\pi x}{l} \cos(\omega_V t + \varphi_V),$$

$$v = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{где } q_V = A_l \sin(v\pi x/l); \quad \omega_V = v\omega_l = v2\pi V/(2l); \quad T_V = T_l/v = 2l/(vV).$$

Вследствие текучести материала, упругого запаздывания и других аналогичных явлений упругие свойства и рассеяние энергии механической колебательной системой зависят от предыстории её движения. При использовании частотных методов исследования ЭМС, имеющих протяженные механические передачи, рассеяние энергии в них удобно учитывать, вводя комплексную упругую постоянную

$$\dot{c} = c_0 (1 + j\eta),$$

где c_0 – коэффициент жесткости системы, характеризующий упругие свойства объекта;

η – коэффициент потерь, характеризующий диссипативные свойства.

Комплексный модуль упругости для рассматриваемого материала можно найти, определив жесткость c_0 на резонансной частоте ω_p , а коэффициент

потерь $\eta = \omega_B / \omega_p$ – по ширине полосы резонансной кривой системы ω_B на уровне амплитудных значений, в $\sqrt{2}$ раз меньших максимума частотной характеристики.

Демпфирующие свойства ЭНРП удобно характеризовать внутренними потерями в материале независимо от вызывающей их причины фазовым сдвигом $\varphi(\eta)$ между напряжением и деформацией [4]. Этот сдвиг фаз учитывается в дифференциальном уравнении, если заменить силу упругой деформации комплексной упругой силой:

$$\dot{F}(x) = F_0(x)(1 + j\eta) \quad \text{или} \quad \dot{V}^2 = \dot{F}/m = V_0^2(1 + j\eta),$$

где $V_0^2 = F_0/m$.

Волновое дифференциальное уравнение в этом случае примет вид

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = V_0^2(1 + j\eta) \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} = \dot{V}^2 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2},$$

а его полное решение можно получить в виде ряда

$$q(x, t) = \sum_{v=1}^n A_v \cos(k_v x + \varphi_v) \cos(\omega_v t + \varphi_v) e^{-(\omega_v \eta l/2) + j\sqrt{\omega_v^2 - \alpha^2} t},$$

где $\alpha = (l/2) \omega_v \eta$ – коэффициент затухания.

Для анализа вынужденных колебаний исследуемого объекта, в случае если на единицу его длины действует гармоническая возмущающая сила $f(x, t) = F(x) \times \cos(\omega t + \varphi_F)$, необходимо исследовать неоднородное дифференциальное уравнение

$$m \left[\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \right] = F(x) \cos(\omega t + \varphi_F).$$

Его решение для вынужденных колебаний будет иметь вид

$$q(x, t) = \sum_{v=1}^n \frac{\kappa_v F_0 \sin(v\pi x/l)}{m_v (\omega_v^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \varphi_F), \quad (2.3)$$

где $\kappa_v = (l/F_0) \int_0^l F(x) \sin(v\pi x/l) dx$ – коэффициент, определяющий долю возмущающей силы, приходящейся на возбуждение частной формы колебаний $q_v(x)$;

$F_0 = \int_0^l F(x) dx$ – множитель, определяющий амплитуду распределения силы, его можно интерпретировать как модуль полной силы, действующей на ЭНРП;

$m_v = 0,5m = 0,5ml$ – половинная масса ЭНРП, её можно интерпретиро-

вать как эквивалентную массу для ν -й формы собственных колебаний.

Анализ показывает, что решение (2.3) состоит из бесчисленного множества членов ряда, каждый из которых зависит от точек наблюдения x и приложения внешней силы x_F , и формально имеет такой же вид, что и для системы с сосредоточенными массой и упругостью. Каждый член ряда соответствует одной форме собственных колебаний, а собственная частота этой формы колебаний (если не учитывать затухание) соответствует собственной частоте системы с сосредоточенными массой и упругостью. Эту аналогию удобно использовать для определения возможности и оценки погрешности аппроксимации ЭНРП моделью с сосредоточенными массой и упругостью.

Изменение скорости ЭНРП можно найти по выражению

$$\dot{V} = \frac{dq(x, t)}{dt} = j\omega q(x, t) = -j \frac{F e^{j(\omega t + \varphi_F)} \cos \dot{k}(l-x)}{\dot{z}_C \sin \dot{k}l}, \quad (2.4)$$

где $\dot{k} = \omega/\dot{V} = \omega/[V_0 \sqrt{1+j\eta}]$ – волновое число с учетом потерь;

$\dot{z}_C = \dot{V}m$ – характеристический импеданс стержня такой длины, что отражениями от свободного конца стержня можно пренебречь.

В точке приложения силы при $x=0$ скорость определяется соотношением

$$\dot{V}(x, t)|_{x=0} = -j \frac{F e^{j(\omega t + \varphi_F)}}{\dot{z}_C} \operatorname{ctg} \dot{k}l.$$

Если осуществить разложение функции $(-j \operatorname{ctg} \dot{k}l)$ в ряд Тейлора, то изменение скорости в точке возбуждения можно определить в виде суммы падающей волны и бесконечного количества отраженных волн, распространяющихся в однородном стержне:

$$\dot{V}(x, t)|_{x=0} = \frac{\dot{F}(x, t)}{j\dot{z}_C} \operatorname{ctg} \dot{k}l \approx \frac{\dot{F}(x, t)}{\dot{z}_C} \left(1 + 2e^{-j2\dot{k}l} + 2e^{-j4\dot{k}l} + \dots \right).$$

Отношение $\dot{F}/\dot{V} = j\dot{z}_C \operatorname{tg} \dot{k}l = z_B$ – полный импеданс стержня в точке возбуждения, а обратная величина $\dot{V}/\dot{F} = (\operatorname{ctg} \dot{k}l)/(j\dot{z}_C) = -j \operatorname{ctg} \dot{k}l/\dot{z}_C$ – полная проводимость в этой точке. На очень низких частотах $\operatorname{ctg} \dot{k}l \approx 1/\dot{k}l$. В этом случае полная проводимость в точке возбуждения определяется величиной

$$\frac{\dot{V}(x, t)}{\dot{F}(x, t)} = \frac{1}{j\dot{z}_C \dot{k}l} = \frac{1}{j m \dot{V} \dot{k}l} = \frac{1}{j\omega m l} = \frac{1}{j\omega m},$$

где $m = m l$ – полная масса стержня.

Из полученного выражения видно, что на низких частотах скорость движения центра масс стержня под действием внешней силы определяется как для абсолютно жесткого тела. При увеличении частоты становится существенным влияние упругости стержня, и в реакции скорости точки возбуждения возникает ряд максимумов (резонансов) и минимумов (антирезонансов). Причем максимальные и минимальные значения определяются предельными значениями сомножителя $j \operatorname{ctg} kl$. Влияние затухания на распространение волн в длинном стержне можно определить при следующем приближении:

$$\dot{k} = \frac{\omega}{\dot{V}} = \frac{\omega}{V_0 \sqrt{1 + j\eta}} = \frac{\omega}{V_0} \left(1 - \frac{j\eta}{2} + \dots \right) \approx k \left(1 - \frac{j\eta}{2} \right).$$

При таком допущении исследуемое выражение можно представить в виде [6]

$$j \operatorname{ctg} kl = \frac{e^{jkl} + e^{-jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} = \frac{e^{jkl} e^{\eta kl/2} + e^{-jkl} e^{-\eta kl/2}}{e^{jkl} e^{\eta kl/2} - e^{-jkl} e^{-\eta kl/2}},$$

а с учетом соотношений $\sin(\alpha - j\beta) = \sin \alpha \operatorname{ch} \beta - j \cos \alpha \operatorname{sh} \beta$,

$\cos(\alpha - j\beta) = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta + j \sin \alpha \operatorname{sh} \beta$ окончательно получим

$$j \operatorname{ctg} kl \approx \frac{\cos kl \operatorname{ch}(\eta kl/2) + j \sin kl \operatorname{sh}(\eta kl/2)}{\sin kl \operatorname{ch}(\eta kl/2) - j \cos kl \operatorname{sh}(\eta kl/2)}.$$

Если демпфирование мало, то частоты максимумов соответствуют собственным частотам и могут быть определены из условия $\operatorname{ctg} kl \approx \infty$ соотношениями $kl = \nu\pi$, где $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Частоты нулей (антирезонансные частоты) определяются из условия $\operatorname{ctg} kl = 0$ соотношениями $kl = \pi(2\nu \pm 1)/2$.

Значения скорости, соответствующие резонансным частотам, легко определить, подставив в соответствующее выражение значение $kl = \nu\pi$:

$$\dot{V}_{\max} = \frac{\dot{F}(x, t)}{j \dot{z}_c} \operatorname{cth} \frac{\eta \dot{k} l}{2} \approx \pm \frac{\dot{F}}{mV(\eta \dot{k} l/2)} = \pm \frac{\dot{F}}{(ml/2)(\omega/\dot{V})\eta} = \pm \frac{\dot{F}}{m_V \omega_\eta} = \pm \frac{\dot{F}}{R_V},$$

где $R_V = \eta \omega m_V$ – механическое сопротивление, характеризующее потери в исследуемой системе.

Антирезонансные значения скорости можно найти, подставив в выражение для скорости $kl = (2\nu \pm 1)\pi/2$:

$$\dot{V}_{\min} = \pm \frac{\dot{F}(x, t)}{j \dot{z}_c} \operatorname{th} \frac{\eta kl}{2} \approx \pm \dot{F} \frac{\eta (\omega/V) l}{2mV} = \pm \dot{F} \frac{\eta \omega m_V}{m^2 V^2} = \pm \dot{F} \frac{R_V}{\dot{z}_c^2}.$$

Максимальные и минимальные значения модуля скорости:

$$V_{v \max} = \pm \frac{2F}{ml\eta\omega_v}; \quad V_{v \min} = \frac{F\eta l\omega_v}{2mV}.$$

Анализ полученных выражений показывает, что на резонансной частоте мнимая составляющая становится равной нулю, и амплитуда скорости зависит только от значения внешнего силового воздействия и механического сопротивления системы.

Значение экстремумов в функции $j \operatorname{ctg}(\eta \dot{k}l/2)$ уменьшается с повышением частоты. На высоких частотах ширина отдельных резонансов $\omega_B \approx \eta \omega_v$, характеризующих потери, становится намного больше разности частот между соседними формами колебаний $(\omega_v - \omega_{v-l}) = V\pi/l$, равных основной частоте ω_l , т.е.

$$\frac{\eta kl}{2} = \eta \frac{\omega_v}{V} \frac{l}{2} = \eta \frac{\pi \omega_v}{2\pi V/l} = \pi \eta \frac{\omega_v}{2\omega_l} \gg 1.$$

Это приводит к тому, что члены e^{-jkl} и $e^{-\eta kl/2}$ в выражении $j \operatorname{ctg} \dot{k}l$ становятся пренебрежимо малыми, и котангенс стремится к единице, а зависимость скорости от усилия принимает вид

$$\dot{V}(x, t)|_{x=0} = \frac{\dot{F}}{\dot{z}_c} j \operatorname{ctg} \dot{k}l = j \frac{m}{\dot{V}} F e^{j(\omega t + \varphi_F)}.$$

Если приемник расположен на свободном конце стержня в точке $x=l$, противоположной точке возбуждения, то скорость этого конца можно определить из выражения (2.4) в виде

$$\dot{V}(x, t)|_{x=l} = \frac{m/\dot{V}}{j \sin \dot{k}l} \dot{F} e^{j(\omega t + \varphi_F)}.$$

Выполненный анализ показывает, что до первого резонанса это решение практически совпадает с предыдущим случаем, но минимумы скорости теперь получаются пологие и определяются соотношением $\sin \dot{k}l \approx \pm 1$. До тех пор, пока демпфирование мало, высота максимумов и минимумов скорости приблизительно одинакова вдоль всего стержня. Но с увеличением частоты, когда демпфирование становится значительным, среднее значение скорости уменьшается по мере увеличения расстояния между точкой возбуждения и точкой наблюдения.

Зависимости изменения скорости продольных колебаний стержня длиной l , имеющего коэффициент затухания $\eta = 0,1$ в различных точках наблю-

дения, рассчитанных в [4], показаны на рис. 2.1. Частотные характеристики

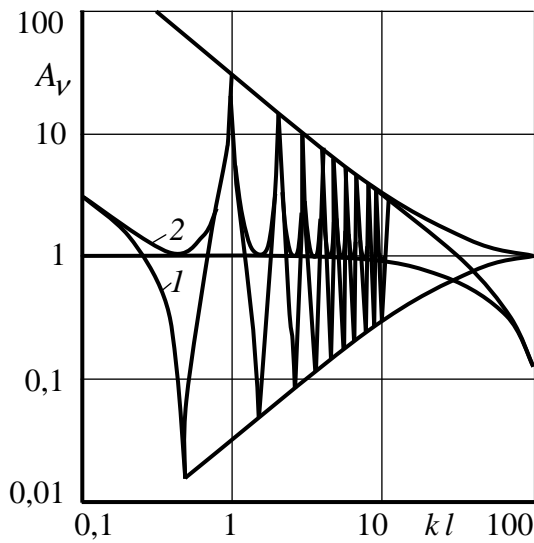


Рис. 2.1. Частотные характеристики изменения скорости продольных колебаний стержня с распределенными параметрами

$A_v = \text{mod}(\dot{z}_c \dot{V} / \dot{F}) = f(kl)$ приведены в логарифмическом масштабе и позволяют определить условия учета распределенности параметров механических элементов передач ЭМС с УС. На рис. 2.1 показаны зависимости амплитуд колебаний скорости свободного конца стержня ($x = l$), когда возбудитель и точка наблюдения расположены на одном конце стержня (кривая 1) или на разных концах стержня (кривая 2).

Анализ приведенных зависимостей показывает, что первые антирезонансы и резонансы зависимости 1 по виду совпадают с видом частотной характеристики изменения скорости двигателя в многомассовой дискретной модели. Начальный вид характеристики (кривая 2) похож на частотную характеристику изменения скорости масс, удаленных от двигателя, при гармоническом изменении его скорости в дискретных моделях с сосредоточенными массами.

2.3. Получение передаточных функций электромеханических систем с распределенными параметрами

В теории управления ЭМС в настоящее время наибольшее распространение получили структурные методы исследования, основанные на применении передаточных функций и частотных характеристик. Поэтому практический интерес представляет сопоставление различных методов получения математических моделей ЭМС с распределенными параметрами в виде передаточных функций.

Большое разнообразие объектов с распределенными параметрами (РП), различие типов их структур, граничных и начальных условий при исследовании в составе ЭМС обуславливают множество методов исследования РП-объектов и заставляют для каждой из структур искать наиболее рациональный способ определения передаточной функции системы. В теории и практике расчета и моделирования ЭМС с распределенными параметрами применяются два основных метода их исследования. Первый базируется на мате-

матическом аппарате и использует дискретное преобразование Лапласа. Вторым связан с применением непрерывного интегрального преобразования Лапласа (операторный метод).

В общем случае способы определения передаточных функций ЭМС с РП-объектами отличаются от способов, используемых в теории систем с сосредоточенными параметрами, так как РП-объекты описываются дифференциальными уравнениями в частных производных и для полной характеристики их свойств необходима двухточечная передаточная функция с бесконечным числом параметров:

$$W(x_2, x_1; S) = \frac{Y(x_2, S)}{F(x_1, S)}, \quad x_1 \in P, \quad x_2 \in Q,$$

где P – множество точек приложения входного воздействия F ;

Q – множество точек, в которых наблюдается выходной сигнал Y ;

$Y(x_2, S)$ и $F(x_1, S)$ – преобразования Лапласа от выходной координаты системы и входного воздействия.

В зависимости от типа структуры РП-объектов применяют следующие методы определения их передаточных функций: прямой, интегральный, метод функциональных преобразований, матричный и другие, подробно рассмотренные в монографии [5].

Прямой метод получения передаточных функций РП-объектов наиболее удобен при описании их свойств волновыми уравнениями вида (2.1), так как при определении передаточных функций элементов, испытывающих деформации изгиба, необходимо решать изображающее уравнение четвертого и более высоких порядков.

Интегральный метод применяют, когда необходимо найти передаточные функции объекта от входа к разным точкам выхода. В этом случае достаточно определить функцию Грина [6] для исследуемого объекта и затем, подставляя конкретные значения выходной координаты, получить требуемые передаточные функции от входных точек к точкам выхода.

Получение передаточных функций РП-объектов с помощью метода функциональных преобразований наиболее целесообразно применять при описании свойств ЭМС с использованием дискретного преобразования Фурье.

Матричный метод определения передаточных функций наиболее удобен при рассмотрении сложных разветвленных РП-систем при наличии в них механических элементов, испытывающих деформации кручения, а также про-

дольный или поперечный изгиб. Метод достаточно прост и доступен для инженерных расчетов, так как матричная форма записи передаточных функций РП-объектов удобна для программирования и выполнения расчетов на ЭВМ по стандартным алгоритмам.

Расчетная схема для крутильных колебаний вала с сосредоточенной массой на неприводном конце такого РП-объекта приведена на рис. 2.2.

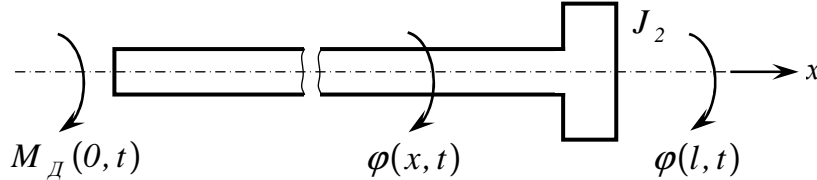


Рис. 2.2. Расчетная схема длинного вала с сосредоточенной массой на конце

Уравнение колебаний такого вала имеет вид

$$I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} G J_p \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = M_d(0, t), \\ G J_p \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -J_2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l}, \end{cases}$$

где $G J_p (\partial \varphi / \partial x)$ – закручивающий момент в сечении x ;

$\varphi(x, t)$ – угол поворота сечения x ;

M_d – момент приводного устройства;

J_2 – момент инерции объекта регулирования.

Введем относительные единицы, обозначив:

$$x = \xi l, \quad a = \sqrt{G J_p / I}, \quad T_{PI} = l / a, \quad \tau = t / T_{PI}, \quad M(x, t) = \mu(\xi, \tau) G J_p / l.$$

Функция Грина $\Gamma(\xi, \xi_0, \tau)$ для исходной системы уравнений РП-объекта в сечении ξ с входным сигналом $\mu(\xi_0, \tau)$, приложенным в точке $\xi_0 = 0$, определяется уравнением [6]

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} = \delta(\xi - \xi_0) \delta(\tau)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = -\frac{J_2}{J_0} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \tau^2} \Big|_{\xi=1}, \quad \Gamma|_{\tau=0} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

где $\delta(\xi - \xi_0)$ и $\delta(\tau)$ – дельта-функции.

Передаточная функция рассматриваемого РП-объекта может быть определена как изображение по Лапласу функции Грина:

$$W(\xi, \xi_0; S) = \frac{1}{(1 + J_2/J_{PI}) S^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n \xi) \cos(\lambda_n \xi_0)}{(S^2 + \lambda_n^2) [1 + (J_2/J_{PI}) \cos^2 \lambda_n]},$$

где J_{PI} – момент инерции РП-объекта;

λ_n – собственные значения обобщенной задачи Штурма–Лиувилля, которые являются неотрицательными корнями уравнения

$$\sin \lambda + (J_2/J_{PI}) \lambda \cos \lambda = 0.$$

Так как в рассматриваемой ЭМС входное силовое воздействие $\mu(\xi, \tau)$ подается на конец РП-объекта ($\xi_0 = 0$), а выходной координатой является конец $\xi = 1$, то для определения передаточной функции $W(1, 0; S)$ необходимо передаточную функцию $W(\xi, \xi_0; S)$ умножить на соответствующие δ -функции:

$$W(S) = \frac{\varphi(l, S)}{\mu(0, S)} = W(1, 0; S) = W(\xi, \xi_0; S) \delta(\xi - 1) \delta(\xi - 0).$$

В результате получим

$$W(S) = \frac{\varphi(l, S)}{\mu(0, S)} = \frac{1}{[1 + (J_2/J_{PI})] S^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n}{(S^2 + \lambda_n^2) [1 + (J_2/J_{PI}) \cos^2 \lambda_n]}.$$

Суммируя ряд в последнем выражении, передаточную функцию исследуемого звена можно представить в замкнутой форме:

$$W(S) = \frac{\varphi(l, S)}{\mu(0, S)} = \frac{1}{S [shS + (J_2/J_P) S chS]}.$$

Аналогично можно получить передаточные функции РП-объектов, имеющих другие структуры и конфигурацию.

2.4. Возможности описания механизмов с распределенными параметрами в виде дискретных моделей

Полученные в п. 2.2 выражения и зависимости, приведенные на рис. 2.1, характеризуют свойства ЭНРП и позволяют определить подходы, возможности, условия и методы их приближенного исследования при упрощенном представлении в виде моделей с сосредоточенными параметрами.

На очень низких частотах (при $k \ll 1$) вид частотной характеристики ЭНРП определяется только суммарной массой элемента, а упругие свойства системы не проявляются, поэтому их можно не учитывать и рассматривать систему как абсолютно жесткую.

На низких частотах (при $k \approx 1$) отдельные резонансы ЭНРП отчетливо

различаются, и поэтому при выполнении исследований ЭМС в низкочастотном диапазоне можно учитывать только несколько первых членов ряда вида (2.3), количество которых определяется, в общем случае, решаемыми задачами.

На высоких частотах ($k \gg 1$) при $\omega_v > \omega_l / \eta$, когда влияние затухания становится значительным и отдельные формы собственных колебаний сливаются в сплошную плавную кривую, упрощенное исследование ЭНРП в виде дискретной модели становится принципиально невозможным.

Анализ показывает, что в общем случае возможность приближенного исследования поведения ЭНРП с помощью дискретной модели определяется его линейными размерами l , скоростью распространения упругих деформаций V и коэффициентом затухания η , значение которого зависит от диссипативных свойств материала.

В практических исследованиях удобно сравнивать размеры ЭНРП с длиной волн упругих деформаций $\lambda_v = 2\pi V / \omega_v$. В большинстве случаев можно рассматривать вопросы аппроксимации характеристик ЭНРП моделью с дискретным расположением масс, если линейные размеры элементов и узлов рабочих машин меньше длины волны упругой деформации в рассматриваемом направлении.

При необходимости выполнения исследований ЭМС в области средних и высоких частот их упругих механических колебаний, когда размеры МЧС больше длины волны ($l \geq \lambda$), расчетную динамическую модель объекта необходимо представлять с учетом распределенности его параметров. Кроме этого, нельзя переходить к дискретным моделям при исследовании распространения энергии колебаний в ЭНРП, так как физика процессов при этом существенно различается. При рассмотрении дискретных моделей механизмов предполагается, что энергия в них распространяется мгновенно, а в системах с распределенными параметрами изменение энергии определяется волновыми процессами в МЧС.

В низкочастотном диапазоне исследований размеры элементов рабочих машин меньше длины волны упругой деформации, распространяющейся по конструкции, ($l < \lambda$), и поэтому математическое описание ЭМС с УС можно рассматривать в виде дискретных многомассовых динамических моделей с сосредоточенными параметрами. При этом важно определить необходимые степени свободы дискретной модели, обеспечивающей выполнение исследований ЭМС с УС с заданной точностью.

При аппроксимации ЭНРП дискретными моделями число сосредото-

ченных масс при рассмотрении ЭМС с УС может изменяться в широких пределах – от одной – двух до 10 – 20. При этом слишком большое число масс приводит к неоправданному усложнению расчетной схемы и значительному повышению порядка системы в целом. Поэтому при аппроксимации длинных кинематических передач наиболее часто упрощение математического описания ЭНРП выполняется в два этапа: на первом этапе осуществляется аппроксимация объекта с распределенными параметрами моделью с сосредоточенными массами, а на втором этапе производится понижение порядка полученной дискретной модели.

В зависимости от решаемых задач, вида и структуры ЭНРП применяют различные методы их аппроксимации. Наиболее характерные из них – разложение в цепные дроби, бесконечные произведения, по собственным функциям и другие [5]. При этом наиболее часто исходные расчетные схемы получают путем деления ЭНРП на n одинаковых участков (рис. 2.3, *а* и *б*). Массу каждого участка $m_i = m_{\Sigma}/n$ сосредотачивают в его середине в виде абсолютно жесткого тела. Упругости между соседними участками учитывают коэффициентами жесткости $c_{i,(i+1)} = n c_0 = n (E S_c / l)$. После этого задаются необходимой погрешностью аппроксимации в диапазоне частот, существенных для данного исследования, и определяют требуемое число масс дискретной модели МЧС.

Наиболее часто в качестве предварительной оценки правомерности замены ЭНРП дискретной моделью используется величина отклонения собственных частот эквивалентных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами. Анализ погрешности аппроксимации однородного стержня с распределенными параметрами моделью дискретной системы с одинаковыми массами и жесткостями, выполненный в [5], показал, что при таком подходе погрешность не зависит от параметров объекта, а определяется только числом выделенных сосредоточенных масс и номером рассматриваемой гармоники. Так, при аппроксимации свойств однородного стержня (вала) с распределенными параметрами дискретной трехмассовой моделью (рис. 2.3, *в*) имеет место достаточно хорошее совпадение первых резонансных частот.

Рассмотренные подходы аппроксимации могут использоваться и при исследовании неоднородных колебательных ЭНРП, так как решения исходных уравнений будут отличаться только граничными условиями, что позволяет почти все неоднородные системы, представляющие практический инте-

рес, исследовать в виде однородного ЭНРП с дополнительно присоединенной сосредоточенной массой.

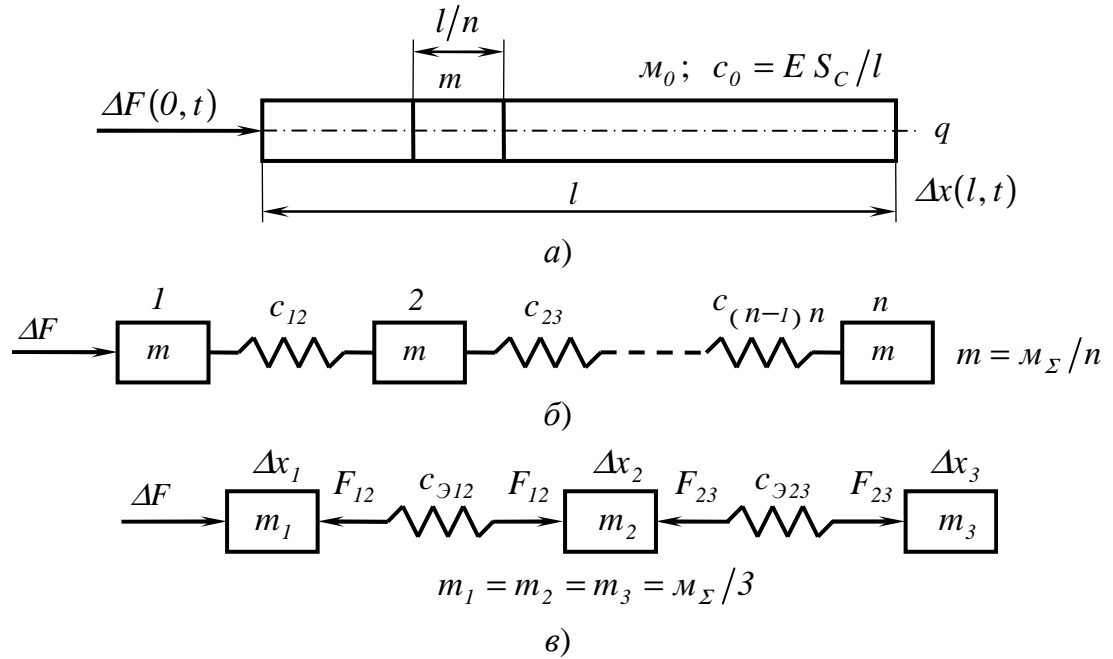


Рис. 2.3. Аппроксимация ЭНРП трёхмассовой моделью с дискретными параметрами

Особенности аппроксимации комбинированных систем, содержащих одновременно элементы с сосредоточенными и распределенными параметрами и совершающих крутильные колебания, рассмотрим на примере анализа модели с расчетной схемой, приведенной на рис. 2.4,а. Такие схемы наиболее часто встречаются при рассмотрении электроприводов с упругими механическими передачами. Исследования, выполненные в [5], показывают, что при анализе процессов по управляющему воздействию при $J_1 = 0$, соответствующем применению малоинерционных двигателей, ошибки аппроксимации уменьшаются с возрастанием момента инерции механизма J_2 . График изменения погрешности $\Delta\omega = (1 - \omega_{СП} / \omega_{1РП})$ первой резонансной частоты $\omega_{1РП}$ элемента с распределенными параметрами относительно резонансной частоты $\omega_{СП}$ эквивалентной двухмассовой системы в зависимости от отношения $\mu_2 = J_2 / J_{РП} = J_2 / \rho I_p l$ приведен на рис. 2.4,б (кривая 1). Исследование влияния диссипативных сил на возможность представления рассматриваемой комбинированной системы эквивалентной двухмассовой моделью показало, что с увеличением коэффициента затухания $\alpha = \omega_v \eta / 2$ точность аппроксимации возрастает. На рис. 2.4,б в виде кривой 2 представлена зависимость $\alpha = f(\mu_2)$, определяющая условия, когда максимум второго резонансного

пика колебаний скорости $\Omega_2(\omega_2)$, а значит и всех последующих резонансов, не будет превышать её отклонений при нулевой частоте $\Omega_2(0)$. Область значений параметров μ_2 и α , соответствующих условию $\Omega_2(\omega_2)/\Omega_2(0) \leq 1$, заштрихована. Анализ приведенных характеристик показывает, что при $\alpha = 0,1$ момент инерции объекта управления J_2 должен, по крайней мере в три раза превышать момент инерции ЭНРП $J_{рп} = \rho I_p l$, чтобы не возникали значительные по величине высокочастотные колебания системы. При использовании ЭНРП с коэффициентом затухания $\alpha = 0,05$ аналогичное уменьшение колебаний скорости Ω_2 наступит при $J_2/J_{рп} > 7$.

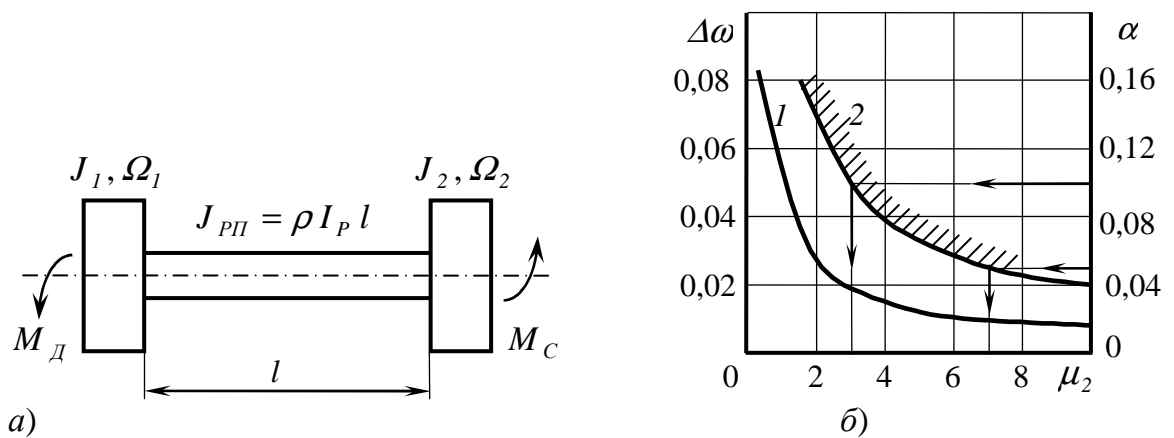


Рис. 2.4. Механическая система с сосредоточенными и распределенными параметрами, испытывающая крутильные колебания

Исследования показали, что при анализе ЭМС, включающих ЭНРП, возможно с учетом диапазона существенных для данного исследования частот выделить ряд гармоник упругих колебаний, подлежащих учету, и представить звено с распределенными параметрами соответствующими дискретными моделями с сосредоточенными параметрами.

При другой постановке задачи можно, исходя из требуемой погрешности аппроксимации, заменить объект с распределенными массой и упругостью многомассовой системой с сосредоточенными параметрами, содержащей минимально возможное количество дискретных масс.

Выполненный в монографии [7] анализ позволил определить основные влияющие факторы и условия, которые необходимо учитывать при определении возможностей исследования ЭНРП моделями с сосредоточенными параметрами. При исследовании рабочих машин с протяженными механическими передачами допустимо представлять их математическое описание в виде дискретных моделей с сосредоточенными параметрами, если размеры

МЧС l намного меньше длины волны упругой деформации $\lambda = 2\pi V/\omega_v$, распространяющейся по механическим конструкциям. Для стальных конструкций в виде длинных стержней или валов из стали с модулем упругости $E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³ имеем $V = \sqrt{E/\rho} \approx 5000$ м/с. Полоса пропускания частот контуров регулирования тока или момента двигателей современных ЭП может достигать 500–1000 рад/с. Поэтому при создании систем регулирования быстродействующих электроприводов необходимость учета распределенности параметров МЧС может возникнуть при протяженности механических передач в несколько десятков метров, что расширяет области применения таких моделей.

В большинстве практических случаев имеем $\lambda \gg l$, поэтому при исследовании реальных ЭМС с УС допустимо использовать дискретные модели, достаточно точно описывающие свойства таких МЧС. Основной проблемой при этом является правильный выбор структуры и необходимого количества степеней свободы дискретной модели МЧС, позволяющей эффективно решать поставленную задачу. При этом, исходя из диапазона частот, существенных для данного исследования, с учетом демпфирующих свойств и соотношения масс элементов с распределенными и сосредоточенными параметрами определяют вид и структуру математической модели. В общем случае увеличение демпфирующих свойств ЭМС и значительное превышение имеющихся сосредоточенных масс над массами ЭНРП способствуют расширению области рационального применения и повышению точности дискретных моделей МЧС меньшей размерности.

Таким образом, с использованием рассмотренных подходов, допущений и методов в большинстве случаев механическую часть ЭМС можно представить в виде эквивалентных расчетных схем с сосредоточенными параметрами. При исследовании ЭМС с УС модель МЧС необходимо привести к эквивалентной расчетной схеме, состоящей из ряда инерционных элементов, соединенных невесомыми упругими связями.

2.5. Математическое описание механической части системы с использованием уравнений Лагранжа

При исследовании силовых взаимодействий и перемещений элементов МЧС физическую модель системы представляют в виде совокупности материальных точек с определенным количеством степеней свободы. При этом движение системы характеризуют совокупностью n независимых величин

(q_1, q_2, \dots, q_n) , называемых обобщенными координатами, их производными по времени $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ – обобщенными скоростями и вторыми производными по времени $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n)$ – обобщенными ускорениями, которые совместно однозначно определяют поведение исследуемой системы.

Соотношения во времени t , связывающие ускорения с координатами и скоростями, представляют в виде уравнений движения, разрешенных относительно производных \ddot{q}_i :

$$\Phi_i(q, \dot{q}, t) \ddot{q}_i + \Psi_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Общим подходом, позволяющим получать уравнения движения ЭМС в таком виде, является принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона), физический смысл и математическая трактовка которого заключаются в следующем: если исследуемая система в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ занимает соответственно положения $q(t_1)$ и $q(t_2)$, то из всех возможных траекторий, по которым система могла бы перейти из положения $q(t_1)$ в положение $q(t_2)$, в действительности всегда реализуется траектория, обеспечивающая минимум интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} L_M(q, \dot{q}, t) dt = \min. \quad (2.5)$$

Функция L_M в выражении (2.5) является функцией Лагранжа данной механической системы [1]. Необходимым условием экстремальности интеграла (2.5) является обращение в нуль его первой вариации: $\delta \int_{t_1}^{t_2} L_M(q, \dot{q}, t) dt = 0$, когда все n функций $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ должны варьироваться независимо. Выполнение этих условий возможно в случае, когда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_M}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Дифференциальные уравнения вида (2.6) в механике называются уравнениями Лагранжа [1], а в вариационном исчислении – уравнениями Эйлера [6].

Для того чтобы из уравнений (2.6) получить уравнения движения исследуемой системы, необходимо определить функцию Лагранжа этой системы. В общем виде функцию Лагранжа удобно представить зависящей от изменения кинетической T , потенциальной Π энергий и диссипативной функции рассеяния D_M :

$$L = T(q_i, q_j; \dot{q}_i, \dot{q}_j) - \dot{I}(q_i, q_j) + D_i(q_i, q_j; \dot{q}_i, \dot{q}_j; \ddot{q}_i, \ddot{q}_j).$$

Кинетическая энергия системы может быть определена через обобщенные скорости:

$$T(q_i, q_j; \dot{q}_i, \dot{q}_j) = 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\dot{q}_i, \dot{q}_j) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Коэффициенты a_{ij} характеризуют инерционные свойства системы и могут зависеть от координат. Кинетическая энергия при малых отклонениях от положения равновесия может быть представлена квадратичной формой скоростей

$$T(\dot{q}_i, \dot{q}_j) \approx 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Потенциальная энергия $\Pi(q_i, q_j)$ в положении устойчивого равновесия системы имеет $[\partial \Pi(q_i) / \partial q_i]_{q_i=0} = 0$. При малых отклонениях от положения равновесия выражение для потенциальной энергии может быть разложено по степеням координат q_i :

$$\Pi(q_i, q_j) = \Pi(q_i)_{q_i=0} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Pi(q_i)}{\partial q_i} \right]_{q_i=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 \Pi(q_i, q_j)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{q_i=0} q_i q_j + \dots$$

Если принять, что в начале координат $\Pi(q_i)_{q_i=0} = 0$, и рассматривать лишь изменения потенциальной энергии с учетом условия $[\partial \Pi(q_i) / \partial q_i]_{q_i=0} = 0$, то при не учете членов разложения, более высоких, чем квадратичные, получим

$$\Pi(q_i, q_j) \approx 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j,$$

где $c_{ij} = \left[\frac{\partial^2 \Pi(q_i, q_j)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{q_i=0}$ – коэффициент пропорциональности, ха-

рактеризующий упругие свойства механических элементов системы.

Силы внутреннего сопротивления F_{BC} учитываются функцией рассеяния D_M , которая в общем случае сложным образом зависит от координат

системы и её производных $D_M(q_i, q_j; \dot{q}_i, \dot{q}_j; \ddot{q}_i, \ddot{q}_j)$. Однако при решении практических задач обычно предполагают, что силы сопротивления являются силами вязкого трения F_{BT} и линейно зависят от скоростей. В этом случае функция рассеяния принимает вид

$$D_M(\dot{q}_i, \dot{q}_j) \approx 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Силу, характеризующую вязкое трение в системе, определяют как взятую с обратным знаком частную производную от функции рассеяния по изменению координаты: $F_{BTi} = -\partial D_M / \partial \dot{q}_i$.

В зависимости от физической природы системы постоянные a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} выражают различные физические величины. В механических системах это, соответственно, массы или моменты инерции, коэффициенты демпфирования и коэффициенты жесткости.

При линейной постановке задачи во всех рассмотренных выражениях коэффициенты входят в виде сумм, поэтому их можно выбрать так, чтобы $a_{ij} = a_{ji}$; $b_{ij} = b_{ji}$; $c_{ij} = c_{ji}$, и уравнения Лагранжа представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D_M}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При выполнении вышеуказанных допущений и подстановке выражений для кинетической $T(\dot{q}_i, \dot{q}_j)$, потенциальной $\Pi(q_i, q_j)$ энергий и диссипативной функции рассеяния $D_M(\dot{q}_i, \dot{q}_j)$ в уравнения Лагранжа получим систему n уравнений, описывающих свободное движение механической части системы:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Многочисленные эксперименты с реальными системами показали [2], что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса систем имеют универсальный характер – они оказываются верны и в тех случаях, когда на систему действуют внешние силы произвольной природы, а не только порожденные силовым полем. Поэтому в общем случае с учетом однородности времени при выполнении условий изотропии пространства и соотношений, подтвержденных экспериментальными данными, обобщенные динамические модели механических колебательных систем можно получать с использова-

нием уравнений Лагранжа второго рода в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D_M}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

где F_i – обобщенная сила, определяющая движение системы при действии как внутренних F_{bi} , так и внешних F_{ci} сил.

Обобщенные силы, обуславливающие колебательные процессы в механических системах, разделяют на силы, зависящие от времени, $F(t)$, силы, зависящие от положения, $F(q)$ и силы, зависящие от скорости, $F(\dot{q})$. В зависимости от функционального воздействия различают обобщенные вынуждающие силы, позиционные силы и силы трения. Особенности математических моделей различных обобщенных сил, в том числе и случайного характера, используемых при исследовании силовых взаимодействий в ЭМС, рассмотрены в работе [7].

2.6. Расчетные и структурные схемы механизмов при учете упругих связей

Исследованию динамики системы управления электропривода с учетом реальных свойств механизма предшествует создание математической модели. Эта модель должна быть достаточно подробной, чтобы достоверно отражать свойства системы в области существенных частот ЭМС, и в то же время простой, чтобы изучение динамических процессов на ее основе было реально осуществимым. Критерием допустимости принятых упрощений является совпадение результатов теоретических расчетов с результатом эксперимента.

В общем случае реальный механизм при учете упругих свойств протяженных передач представляет собой систему с распределенными параметрами и имеет бесконечное число степеней свободы. Для упрощения математической модели ЭМС с УС её механическую часть представляют в виде системы с сосредоточенными параметрами. При этом используют следующие общепринятые допущения [7]:

- волновые процессы деформации элементов механической передачи не учитывают;
- силы и моменты, действующие в системе, приложены к недеформируемым сосредоточенным массам;
- упругие звенья невесомы и имеют постоянную жесткость;
- удлинение канатов и скручивание валов достаточно мало, и реальные

деформации могут быть учтены с помощью закона Гука;

– силы внутреннего трения малы и пропорциональны скорости изменения деформации.

Многим реальным ЭМС присущи типовые нелинейности: зона нечувствительности и зона насыщения усилителей каналов передачи сигналов, ограничение движущих моментов, люфты и трение в кинематических передачах прямых каналов и обратных связей, нелинейности преобразователей обратных связей. Однако на начальном этапе исследования динамики ЭМС с УС часто представляют в виде линеаризованных математических моделей и влияние указанных нелинейностей не учитывают. На последующих этапах исследований необходимо уточнить области устойчивости системы и определить качество динамических процессов с учетом влияния основных нелинейностей.

При исследовании различных технологических машин расчетные схемы механизмов в зависимости от конфигурации кинематической схемы наиболее часто представляют в виде рядных или разветвленных многомассовых моделей.

Поскольку характер движения системы определяется наибольшими массами и наименьшими жесткостями связей, то при наличии в системе определяющих трех масс с учетом рассмотренных допущений рекомендуется использовать трехмассовые расчетные схемы в виде рядной схемы механизма, приведенной на рис. 2.5,а, или разветвленной – на рис. 2.5,б.

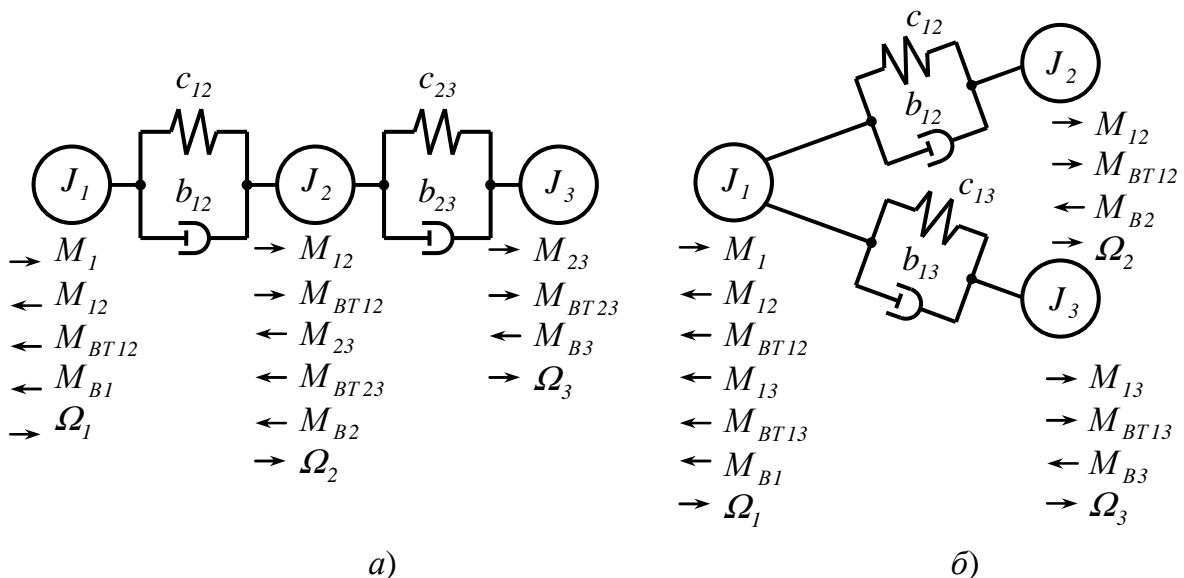


Рис. 2.5. Рядная (а) и разветвленная (б) трехмассовые расчетные схемы

На рис. 2.5 приняты следующие обозначения:

J_1 – суммарный приведенный к валу двигателя момент инерции первой массы (якорь или ротор электродвигателя, муфта, зубчатая передача, барабан);

J_2 и J_3 – приведенные моменты инерции второй и третьей масс;

b_{ij} и c_{ij} – приведенные коэффициенты демпфирования и эквивалентной жесткости передачи между i -й и j -й массами;

M_1 – электромагнитный момент электродвигателя;

M_{ij} , M_{BTij} – упругий момент и момент вязкого трения в механической передаче между i -й и j -й массами;

M_{Bi} – внешний момент нагрузки i -й массы;

Ω_i – скорость i -й массы.

Системы дифференциальных уравнений, описывающие переходные процессы в ЭМС, представленной рядной и разветвленной схемами, будут иметь следующий вид:

для рядной схемы

$$\begin{cases} M_1 - M_{12} - M_{BT12} - M_{B1} = J_1 (d\Omega_1/dt); \\ M_{12} + M_{BT12} - M_{23} - M_{BT23} - M_{B2} = J_2 (d\Omega_2/dt); \\ M_{23} + M_{BT23} - M_{B3} = J_3 (d\Omega_3/dt); \end{cases} \quad (2.8)$$

для разветвленной схемы

$$\begin{cases} M_1 - M_{12} - M_{BT12} - M_{13} - M_{BT13} - M_{B1} = J_1 (d\Omega_1/dt); \\ M_{12} + M_{BT12} - M_{B2} = J_2 (d\Omega_2/dt); \\ M_{13} + M_{BT13} - M_{B3} = J_3 (d\Omega_3/dt); \end{cases} \quad (2.9)$$

где $M_{12} = c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)$; $M_{BT12} = b_{12} (\Omega_1 - \Omega_2)$; $M_{23} = c_{23} (\varphi_2 - \varphi_3)$;

$M_{BT23} = b_{23} (\Omega_2 - \Omega_3)$; $M_{13} = c_{13} (\varphi_1 - \varphi_3)$; $M_{BT13} = b_{13} (\Omega_1 - \Omega_3)$.

Для общности исследования и абстрагирования от частных параметров перейдем к системе относительных единиц. В качестве базовых значений моментов примем номинальный момент двигателя M_H : $M_B = M_{ijB} = M_{BTijB} = M_{BiB} = M_H$, а для скоростей – скорость идеального холостого хода двигателя Ω_0 : $\Omega_{1B} = \Omega_{2B} = \Omega_{3B} = \Omega_0$. Тогда системы (2.8) и (2.9) с координатами, определяемыми в относительных единицах, примут вид:

$$\begin{cases} T_{M1}S \Omega_1(S) = M_1(S) - \frac{T_{d12}S+1}{T_{C12}S} [\Omega_1(S) - \Omega_2(S)], \\ T_{M2}S \Omega_2(S) = \frac{T_{d12}S+1}{T_{C12}S} [\Omega_1(S) - \Omega_2(S)] - M_{B2}(S) - \frac{T_{d23}S+1}{T_{C23}S} [\Omega_2(S) - \Omega_3(S)], \\ T_{M3}S \Omega_3(S) = \frac{T_{d23}S+1}{T_{C23}S} [\Omega_2(S) - \Omega_3(S)] - M_{B3}(S); \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} T_{M1}S \Omega_1(S) = M_1(S) - \frac{T_{d12}S+1}{T_{C12}S} [\Omega_1(S) - \Omega_2(S)] - \frac{T_{d13}S+1}{T_{C13}S} [\Omega_1(S) - \Omega_3(S)], \\ T_{M2}S \Omega_2(S) = \frac{T_{d12}S+1}{T_{C12}S} [\Omega_1(S) - \Omega_2(S)] - M_{B2}(S), \\ T_{M3}S \Omega_3(S) = \frac{T_{d13}S+1}{T_{C13}S} [\Omega_1(S) - \Omega_3(S)] - M_{B3}(S), \end{cases} \quad (2.11)$$

где T_{Mi} – механические постоянные времени масс J_i ;

T_{cij} – постоянная времени эквивалентной жесткости передач между i -й и j -й массами;

T_{dij} – постоянная времени диссипативных сил, обусловленных вязким трением.

Системам уравнений (2.10) и (2.11) соответствуют структурные схемы механической части, изображенные на рис. 2.6.

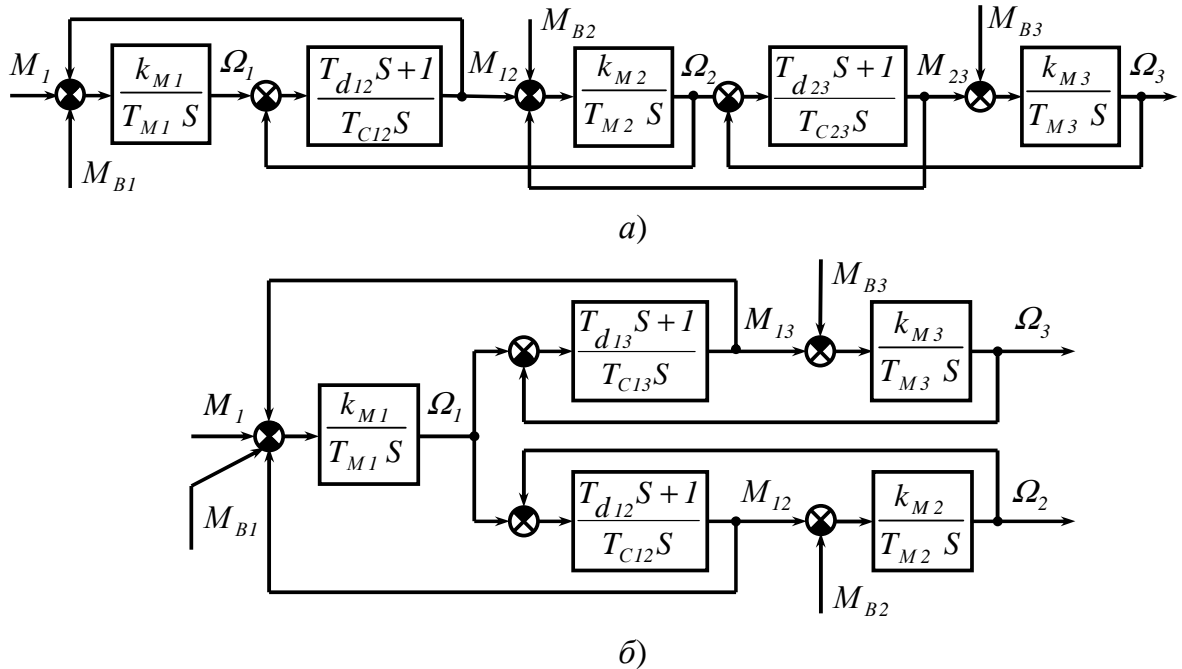


Рис. 2.6. Структурные схемы рядной (а) и разветвленной (б) трехмассовых систем

При выбранных базовых переменных ряд коэффициентов приведенных структурных схем равен единице, а параметры и координаты механической части в относительных единицах определяются из выражений:

$$T_{Mi} = J_i \frac{\Omega_0}{M_H}, \quad T_{cij} = \frac{1}{c_{ij}} \frac{M_H}{\Omega_0}, \quad T_{dij} = \frac{\psi_M}{2\pi\omega_{ci}},$$

$$M_{ij}^* = M_{ij}/M_H, \quad M_{Bi}^* = M_{Bi}/M_H, \quad \Omega_i^* = \Omega_i/\Omega_0,$$

где $\psi_M = 0,2-0,6$ – коэффициент рассеяния;

ω_{ci} – собственная резонансная частота недемпфированных колебаний механической части системы.

В трехмассовой системе имеются две резонансные частоты. Для рядной схемы:

$$\omega_{C1,2} = \sqrt{0,5(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{0,25(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - (T_{M1} + T_{M2} + T_{M3})/(T_{M1}T_{M2}T_{M3}T_{C12}T_{C23})}}$$

где $\omega_1 = \sqrt{(T_{M1} + T_{M2})/(T_{M1}T_{M2}T_{C12})}$;

$$\omega_2 = \sqrt{(T_{M2} + T_{M3})/(T_{M2}T_{M3}T_{C23})}.$$

Для разветвленной схемы в приведенных формулах следует заменить T_{C23} на T_{C13} .

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ

3.1. Определение силовых взаимодействий в электромеханических системах

Уравнения Лагранжа (2.7), полученные для МЧС, можно распространить на электрическую часть ЭМС, если учесть, что в исследуемой системе, кроме потенциальных сил $-\partial\Pi/\partial q_i$, диссипативных сил $-\partial D_M/\partial \dot{q}_i$, неконсервативных обобщенных сил механической природы F_{Mi} , действуют пондеромоторные силы F_{pi} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial D_M}{\partial \dot{q}_i} + F_{Mi} + F_{pi}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где $F_{pi} = \frac{\partial W_M}{\partial q_i} - \frac{\partial W_{\mathcal{E}}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} (W_M - W_{\mathcal{E}})$ – пондеромоторные силы, ко-

торые возникают при действии на элементы двигателей магнитных и элек-

трических молей;

W_M – энергия магнитного поля, запасенная в контурах с токами;

W_\varnothing – энергия электрического поля, запасенная между обкладками заряженных конденсаторов.

Пондеромоторные силы наиболее просто определить из уравнений баланса энергии ЭМС:

$$\sum_{k=1}^m E_k i_k = \frac{\partial W_M}{\partial t} + \frac{\partial W_\varnothing}{\partial t} + \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \sum_{i=1}^n F_{\pi i} \frac{dq_i}{dt}.$$

Из приведенного уравнения видно, что в общем случае работа, совершаемая сторонней ЭДС E_k , идет на изменение магнитного и электрического полей, на тепловые потери, а также на работу пондеромоторных сил.

Подставив в полученное выражение значения пондеромоторных сил F_π и объединив его с уравнением для напряжений U_k электрических цепей, получим систему уравнений для ЭМС в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_M}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_\varnothing}{\partial e_k} + \frac{\partial D_\varnothing}{\partial i_k} = U_k, & k = 1, 2, \dots, m; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial W_M}{\partial q_i} + \frac{\partial W_\varnothing}{\partial q_i} + \frac{\partial D_M}{\partial \dot{q}_i} = F_{\pi i}, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для представления полученных выражений в единой форме уравнений Лагранжа–Максвелла введем функцию Лагранжа ЭМС в виде

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - \Pi(q_i) + W_M(q_i, i_k) - W_\varnothing(q_i, e_k)$$

и диссипативную функцию ЭМС, равную сумме электрической D_\varnothing и механической D_M диссипативных функций:

$$D = D_\varnothing(i_k) + D_M(\dot{q}_i),$$

где $D_\varnothing = 0,5 \sum_{k=1}^m R_k i_k^2$ не зависит от обобщенных скоростей \dot{q}_i , а D_M не зависит от токов i_k , поэтому $\partial D_\varnothing / \partial i_k = \partial D / \partial i_k$, $\partial D_M / \partial q_i = \partial D / \partial q_i$ и частные производные от обобщенной функции Лагранжа равны:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial W_M}{\partial q_i} - \frac{\partial W_\varnothing}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}; \quad \frac{\partial L}{\partial e_k} = -\frac{\partial W_\varnothing}{\partial e_k}; \quad \frac{\partial L}{\partial i_k} = \frac{\partial W_M}{\partial i_k}.$$

Подставив значения частных производных в систему уравнений (3.1) и учитывая, что ток есть производная заряда по времени $i_k = \dot{e}_k$, получим систему уравнений Лагранжа–Максвелла для ЭМС:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{e}_k} = E_k, & k = 1, 2, \dots, m; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{mi}, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) образуют систему $(n + m)$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат МЧС, зарядов и токов. Связность систем уравнений для обобщенных координат \dot{q}_i и зарядов \dot{e}_k обусловлена зависимостью коэффициентов квадратичных форм, определяющих энергии электрического и магнитного полей от обобщенных координат.

Рассмотрим особенности получения математической модели ЭМС с УС при использовании уравнений движения в форме Лагранжа–Максвелла (3.2).

Для описания вращательной формы движения МЧС необходимо использовать в качестве обобщенных координат угловые значения координат системы $\varphi (q_i \rightarrow \varphi_i)$, заряды e_k или токи i_k . В этом случае уравнения (3.2) позволяют получить математическое описание ЭМС с УС в наиболее удобной форме.

Определим частные производные от обобщенной функции Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, e_k, i_k)$ и диссипативной функции $D(q_i, \dot{q}_i, i_k)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial i_k} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial W_M(i_k)}{\partial i_k} \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial i_k} (0,5 L_{\varepsilon k} i_k^2) = \frac{d}{dt} (L_{\varepsilon k} i_k) = L_{\varepsilon k} \frac{di_k}{dt} \\ \frac{\partial L}{\partial e_k} &= - \frac{\partial W_{\varepsilon}(e_k)}{\partial e_k} = \frac{\partial}{\partial e_k} (0,5 e_k^2 / C_{\varepsilon k}) = \frac{e_k}{C_{\varepsilon k}} = U_{ck}; \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{e}_k} &= \frac{\partial D_{\varepsilon}(i_k)}{\partial i_k} = \frac{\partial}{\partial i_k} (0,5 R_k i_k^2) = R_k i_k = U_{rk}. \end{aligned}$$

В случае изменяющегося момента инерции $J_i(\varphi_i)$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(\Omega)}{\partial \Omega_i} \right] = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial [0,5 J_i(\varphi_i) \Omega_i^2]}{\partial \Omega_i} \right\} = J_i(\varphi_i) \frac{d\Omega_i}{dt}; \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} &= \frac{\partial T(\varphi_i, \Omega_i)}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \Pi(\varphi_i)}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial [0,5 J_i(\varphi_i) \Omega_i^2]}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial [0,5 C_{i(i+1)} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2]}{\partial \varphi_i} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{dJ_i(\varphi_i)}{d\varphi} \Omega_i^2 - C_{i(i+1)}(\varphi_i - \varphi_{i+1});$$

$$\frac{\partial [D_M(\Omega_i)]}{\partial \Omega_i} = \frac{\partial [0,5 b_{i(i+1)}(\Omega_i - \Omega_{i+1})^2]}{\partial \Omega_i} = b_{i(i+1)}(\Omega_i - \Omega_{i+1}).$$

Обобщенное внешнее силовое воздействие в виде соответствующих моментов определяется суммой элементарных работ на всех возможных перемещениях внешних движущих сил и сил сопротивления. Пондеромоторные силы в ЭМС определяются, в общем случае, принципом действия и конструктивным исполнением двигательного устройства. Для учета силового воздействия со стороны электропривода в математической модели ЭМС с УС необходимо в полученных уравнениях учесть влияние ЭДС вращения $E_d(\Omega_i)$, зависящей от скорости Ω_i и развиваемого двигателем момента $M_d(i_k, \Phi_k)$, зависящего от значения тока i_k в его электрической цепи и соответствующего потокосцепления Φ_k .

Выполнив подстановку полученных выражений в систему уравнений (3.2), получим:

$$\begin{cases} i_k R_k + L_{\varepsilon k} \frac{di_k}{dt} = E_k - E_d(\Omega_i); \\ J_i(\varphi_i) \frac{d\Omega_i}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dJ_i(\varphi_i)}{d\varphi_i} \Omega_i^2 = M_d(i_k, \Phi_k) - M_{ci} - M_{yi}(\Delta\varphi_i) - M_{bti}(\Delta\Omega_i), \end{cases}$$

где R_k и L_k – сопротивление и индуктивность электрических цепей двигателя;

J_i – момент инерции движущихся элементов МЧС;

M_{ci} – моменты внешних сил, действующих на i -е элементы ЭМС;

$M_{yi} = C_{i(i+1)}(\varphi_i - \varphi_{i+1})$ – моменты упругих сил;

$M_{bti} = b_{i(i+1)}(\Omega_i - \Omega_{i+1})$ – моменты сопротивления внутреннего вязкого

трения, вызванные диссипативными силами в упругих передачах механизма.

Например, движение электродвигателя совместно с рядной трехмассовой механической системой при постоянных моментах инерции всех элементов будет описываться системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = U_{\Pi}(U_V) - E_D(\Omega_1); \\ J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = M_D(i, \Phi) - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - b_{12}(\Omega_1 - \Omega_2) - M_{C1}; \\ J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + b_{12}(\Omega_1 - \Omega_2) - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) - b_{23}(\Omega_2 - \Omega_3) - M_{C2}; \\ J_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + b_{23}(\Omega_2 - \Omega_3) - M_{C3}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Отметим, что уравнения (3.3) по структуре аналогичны системе уравнений (2.8), приведенной в п. 2.6.

Из системы уравнений (3.3) легко получить выражения для двухмассовой МЧС, положив $\varphi_2 = \varphi_3$ и $\Omega_2 = \Omega_3$:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = M_D(i, \Phi) - M_{12}(\varphi, \Omega) - M_{C1}; \\ J_{2\Sigma} \frac{d\Omega_2}{dt} = M_{12}(\varphi, \Omega) - M_{C2\Sigma}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $M_{12}(\varphi, \Omega) = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + b_{12}(\Omega_1 - \Omega_2)$; $J_{2\Sigma} = J_2 + J_3$;
 $M_{C2\Sigma} = M_{C2} + M_{C3}$.

Необходимо иметь в виду, что в системах уравнений (3.3) и (3.4) должны использоваться приведенные значения статических моментов, моментов инерции, коэффициентов жесткости и сопротивления.

3.2. Линеаризованные математические модели электродвигателей постоянного тока

При получении математических моделей электроприводов постоянного тока приходится учитывать ряд гипотез и предположений. При упрощенном исследовании электродвигателей постоянного тока с использованием линеаризованных математических моделей обычно принимают следующие допущения:

- поток возбуждения машины постоянен во всех режимах работы двигателя, которые будут проанализированы с помощью создаваемой модели;
- сопротивление $R_{\text{я}}$ и индуктивность $L_{\text{я}}$ якоря не зависят от значения тока возбуждения, тока якорной цепи и других факторов и считаются неизменными;
- преобразователь, питающий двигатель, рассматривается как идеальный источник и его внутреннее сопротивление R_{Π} и индуктивность L_{Π} учи-

тываются эквивалентными параметрами $R_{\Sigma} = R_{\text{я}} + R_{\text{л}}$, $L_{\Sigma} = L_{\text{я}} + L_{\text{л}}$, определяющими электромагнитную постоянную времени $T_{\Sigma} = L_{\Sigma} / R_{\Sigma}$ якорной цепи электропривода;

- момент инерции привода не зависит от параметров его движения.

Учет перечисленных явлений при получении и применении уточненных моделей двигателей постоянного тока возможен с использованием результатов исследований, приведенных в работах [8–10]. В каждом конкретном случае необходимо выделить основные факторы и пренебречь влиянием других во избежание искусственного усложнения модели.

При использовании относительных единиц и линеаризации характеристик передаточная функция якорной цепи коллекторного электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением может быть представлена в виде

$$W_{\Sigma}(S) = M(S) / [E_{\text{л}}(S) - \Omega_{\text{л}}(S)] = k_{\Sigma} / (T_{\Sigma} S + 1), \quad (3.5)$$

где k_{Σ} – коэффициент кратности момента короткого замыкания электродвигателя в исследуемой системе.

Отметим, что аналитические методы расчета и моделирования электроприводов с бесконтактными двигателями постоянного тока еще не достаточно разработаны. Использование при моделировании таких электроприводов методик, полученных для коллекторных двигателей постоянного тока, не позволяет учесть ряд специфических особенностей бесконтактных двигателей, связанных с тем, что электромагнитный момент и ЭДС вращения в таких двигателях являются функциями углового положения ротора на межкоммутационном периоде. Математические модели таких двигателей и особенности их исследования представлены в монографиях [11–13].

3.3. Математические модели управляемых преобразователей в электроприводах постоянного тока

В общем случае в электроприводах постоянного тока в качестве управляемых преобразователей могут применяться электромашинные, магнитные или статические полупроводниковые преобразователи. В настоящее время в электроприводах наибольшее распространение получили тиристорные и транзисторные преобразователи напряжения.

При анализе электромагнитных процессов в тиристорных выпрямителях для упрощения исследований и получения приемлемых для практического использования результатов в зависимости от решаемых задач приходится

принимать те или иные допущения.

Наиболее часто при анализе физики работы силовых схем вентильных преобразователей используют следующие предположения и допущения, подробно рассмотренные в монографии [15]:

а) прямое падение напряжения и обратный ток через вентиль равны нулю. Это допущение обычно не вносит больших погрешностей в результаты исследования, так как при использовании в качестве силовых вентилей современных тиристоров прямое падение напряжения на них составляет не более десятых долей процента от рабочего напряжения, а обратный ток не превышает сотых долей процента по сравнению с током нагрузки;

б) предполагается, что коммутация тока в тиристорах происходит мгновенно. Такое допущение практически не вызывает погрешности исследований в случаях, когда питание преобразователя осуществляется от мощной сети, на один или два порядка превышающей мощность электропривода. Если же тиристорный преобразователь питается от сети соизмеримой мощности или через согласующий входной трансформатор, процесс коммутации необходимо учитывать, так как он оказывает заметное влияние на допустимый угол открывания тиристоров в инверторном режиме и на наклон внешних характеристик преобразователя. При исследовании динамических процессов рассматриваемое допущение принимается лишь в том смысле, что длительность коммутации тока в тиристорах мала по сравнению с периодом питающего напряжения;

в) считается, что время восстановления запирающих свойств тиристоров равно нулю. Это допущение может иметь смысл при анализе работы преобразователя в инверторном режиме в случае полного открытия вентилей, соответствующем максимально возможному для исследуемой силовой схемы выходному напряжению. В остальных случаях данное допущение практического значения не имеет;

г) часто при выполнении исследований на обобщенных моделях принимают допущение о непрерывности тока в цепи нагрузки преобразователя. Это допущение предполагает наличие в цепи нагрузки преобразователя значительной индуктивности, обусловленной специальными дросселями. При работе тиристорного преобразователя в режиме прерывистого тока физика процессов и, соответственно, структура и параметры математической модели электропривода существенно изменяются.

При описании динамических процессов в вентильных преобразователях

необходимо учитывать свойства системы импульсно-фазового управления, управляемого выпрямителя и цепи нагрузки. Специфика динамических свойств вентильных преобразователей определяется рядом факторов: дискретным характером управления с изменяющимся интервалом следования управляющих импульсов; неполной управляемостью клапанов и наличием пульсаций выходного напряжения. Поэтому строгое математическое описание динамики управляемых выпрямителей при различных режимах работы представляет значительные трудности. В общем случае вид математической модели вентильного преобразователя определяется, главным образом, быстродействием системы управления, в которой он используется.

В быстродействующих системах электропривода, когда время переходных процессов соизмеримо с интервалами работы клапанов, возникает необходимость учета дискретности управления. В этом случае вентильный преобразователь представляют звеном с широтно-импульсной модуляцией второго рода, для которого ширина импульсов изменяется в зависимости от угла управления [15].

При анализе относительно медленных переходных процессов, когда их длительность значительно больше периода напряжения питающей сети, управляемый выпрямитель можно рассматривать как непрерывное устройство, поскольку пульсации напряжения, обусловленные дискретностью управления, хорошо фильтруются системой. В случае, когда инерционности элементов преобразователя не хватает, на вход системы импульсно-фазового управления включают апериодический фильтр с постоянной времени $T_\phi = (1 \div 2) / \omega_0$, где ω_0 – круговая частота напряжения питания. Это обеспечивает выполнение условия $|d\alpha(t)/dt| \leq \omega_0$, определяющего допустимую скорость изменения угла управления α , и позволяет считать управляемый выпрямитель непрерывным элементом, в котором переходные процессы при уменьшении и увеличении входного сигнала оказываются практически одинаковыми. Неполную управляемость вентильных преобразователей, проявляющуюся в том, что после открывания очередного клапана изменение управляющего воздействия не оказывает влияния на работу преобразователя до конца периода естественной коммутации, принято учитывать звеном чистого запаздывания с постоянной времени τ . В общем случае время запаздывания определяется числом фаз преобразователя m , частотой сети f_c и углом управления. Обычно при моделировании ЭМС учитывают максимальное время запаздывания $\tau = 1 / (m f_c)$, равное периоду естественной коммутации вен-

тилей, но иногда допустимо эту величину уменьшать в два раза, рассматривая в этом случае τ как среднестатистическое время запаздывания при равновероятном распределении управляющих импульсов по времени. Чем меньше число фаз m в управляемом преобразователе, тем его запаздывание будет больше. Так, при частоте питающей сети $f_c = 50$ Гц максимальное запаздывание может быть 0,01 с при $m = 2$, 0,0066 с при $m = 3$ и 0,0033 с при $m = 6$. Фактическое запаздывание преобразователя будет зависеть от момента подачи управляющих импульсов.

С учетом линеаризации статической характеристики передаточная функция управляемого преобразователя при включении на входе системы импульсно-фазового управления апериодического фильтра с постоянной времени $T_\phi \geq 0,007$ с может быть представлена в диапазоне частот от нуля до $f_{ГП} = (m f_c)/2$ в виде

$$W_{II}(S) = \frac{E_{II}(S)}{U_{yH}(S)} = \frac{k_{II} e^{-\tau S}}{T_\phi S + 1}, \quad (3.6)$$

где k_{II} – коэффициент передачи напряжения по напряжению.

Исследование систем, содержащих неминимально фазовые звенья, вызывает трудности, поэтому, ввиду малости постоянной времени τ , звено чистого запаздывания обычно заменяют апериодическим. При этом упрощение выражения $e^{-\tau S}$ осуществляют путем его разложения в различные ряды. Наиболее точную аппроксимацию получают, применяя разложение в ряд Паде. Этот метод приводит к дробно-линейной передаточной функции с одинаковым порядком числителя и знаменателя:

$$e^{-\tau S} \approx P_n(S)/Q_n(S),$$

$$\text{где } P_n(S) = 1 - \frac{\tau S}{2} + \frac{n(n-1)(\tau S)^2}{2n(2n-1)2!} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} (\tau S)^n;$$

$$Q_n(S) = 1 + \frac{\tau S}{2} + \frac{n(n-1)(\tau S)^2}{2n(2n-1)2!} + \dots + \frac{n!}{(2n)!} (\tau S)^n.$$

Аппроксимация в виде ряда Паде дает хорошие результаты при $n = 2$ в диапазоне частот изменения входного сигнала $0 \leq \omega\tau \leq 2$ и при $n = 4$ в диапазоне частот изменения входного сигнала $0 \leq \omega\tau \leq 6$.

Другим возможным способом приближенной аппроксимации звена чистого запаздывания является представление его передаточной функции в виде последовательного соединения n инерционных звеньев первого порядка с

одинаковыми постоянными времени $T_i = \tau/n$:

$$e^{-\tau S} \approx 1/[(\tau/n)S + 1]^n.$$

Причем, часто используют наиболее простую аппроксимацию звена чистого запаздывания, соответствующую $n = 1$:

$$e^{-\tau S} \approx (\tau S + 1)^{-1}.$$

В результате получают передаточную функцию вентильного преобразователя

$$W_{\Pi}(S) = k_{\Pi} / (T_{\Pi} S + 1), \quad (3.7)$$

где T_{Π} - эквивалентная постоянная времени, которая может быть определена по выражению $T_{\Pi} = T_{\phi} + \tau = T_{\phi} + [(1 \div 2) m f_c]^{-1}$.

При необходимости нелинейные свойства регулировочной характеристики управляемых вентильных преобразователей учитываются включением в систему нелинейных звеньев типа "ограничение ЭДС", "зона нечувствительности", "люфт", "бестоковая пауза" для реверсивных преобразователей. В режиме прерывистого тока вентильный преобразователь проявляет себя как существенно нелинейное звено. Методы построения эквивалентных линейаризованных характеристик ЭМС с тиристорными преобразователями рассмотрены в работе [16].

При использовании электроприводов с широтно-импульсными преобразователями их линейаризованную математическую модель также можно представлять в виде звена чистого запаздывания с передаточной функцией

$$W_{\Pi}(S) = E_{\Pi}(S) / U_{\text{вн}}(S) = k_{\Pi} e^{-\tau S} \quad (3.8)$$

При этом время чистого запаздывания τ принимается равное периоду T_K коммутации управляемых ключей. Поскольку частота коммутации в современных импульсных преобразователях составляет несколько килогерц, то во многих случаях их модель в виде звена чистого запаздывания можно заменить аperiодическим или даже безынерционным звеном:

$$W_{\Pi}(S) \approx k_{\Pi} / (1 + \tau S) \approx k_{\Pi}.$$

При применении в качестве управляемых преобразователей силовых магнитных усилителей их линейаризованную математическую модель можно представлять в виде передаточной функции

$$W_{\Pi}(S) = W_{MY}(S) = \frac{E_{\Pi}(S)}{U_{PH}(S)} = \frac{k_{\Pi}}{T_{\Pi}S + 1} e^{-\tau S}, \quad (3.9)$$

где τ - постоянная времени чистого запаздывания определяется из тех же соображений, что и для вентильного преобразователя, а постоянная времени T_f учитывает эквивалентную магнитную инерционность обмоток управления и силовой цепи. Так как при питании магнитных усилителей напряжением с частотой $f_c = 50$ Гц постоянная времени $T_{\Pi} = 0,2-0,4$ с, то влияние чистого запаздывания можно не учитывать и описывать свойства магнитного усилителя передаточной функцией

$$W_{\Pi}(S) = k_{\Pi} / (T_{\Pi}S + 1).$$

При реализации ЭМС с использованием системы "генератор-двигатель" инерционность управляемого преобразователя определяется, в основном, эквивалентной электромагнитной постоянной времени обмотки возбуждения генератора, значение которой зависит от положения рабочей точки на кривой намагничивания и может достигать нескольких секунд. Поэтому при линеаризации математической модели генератора его динамические свойства можно в первом приближении можно учитывать передаточной функцией

$$W_{\Pi}(S) = E_{\Pi}(S) / U_{PH}(S) = k_{\Pi} / (T_{\Pi}S + 1), \quad (3.10)$$

где $T_{\Pi} = L_B / R_B$ - электромагнитная постоянная времени обмотки возбуждения генератора.

Электромагнитную инерционность якорной обмотки генератора учитывают обычно с помощью эквивалентной электромагнитной постоянной времени якорной цепи системы "генератор-двигатель".

При необходимости учета нелинейности статических характеристик магнитных усилителей или генераторов в структуру модели необходимо добавить звенья, отражающие вид их характеристик управления.

Таким образом, динамические свойства различных преобразователей в электроприводах постоянного тока можно учитывать универсальной линеаризованной математической моделью в виде передаточной функции

$$W_{\Pi}(S) = W_{III}(S) = \frac{E_{\Pi}(S)}{U_{PH}(S)} = \frac{k_{\Pi}}{T_{\Pi}S + 1} e^{-\tau S}, \quad (3.11)$$

где постоянные времени могут принимать различные значения в зависимости от вида и типоразмера применяемых преобразователей.

3.4. Линеаризация математической модели электродвигателей переменного тока

Исследование динамических процессов в ЭМС с электродвигателями переменного тока связано с большими трудностями и обычно требует применения сложных математических моделей. Это обусловлено, прежде всего, зависимостью параметров асинхронных и синхронных двигателей от частоты вращения и необходимостью записи их уравнений в трехфазной или двухфазной системе вращающихся осей статора и ротора. Причем система уравнений получается существенно нелинейной, поэтому в общем случае получение динамической характеристики машины переменного тока в виде компактного уравнения, связывающего вращающий момент двигателя M с угловой скоростью ротора Ω_p , не представляется возможным. Это заставляет при исследовании переходных процессов в трехфазном асинхронном электродвигателе для упрощения его математической модели принимать следующие основные допущения:

- намагничивающие силы обмоток двигателя распределены синусоидально вдоль окружности воздушного зазора;
- потери в стали статора и ротора отсутствуют;
- обмотки статора и ротора симметричны и их оси смещены на 120° ;
- насыщение магнитной цепи отсутствует.

С учетом этих допущений можно считать, что при вращении ротора взаимная индуктивность пропорциональна косинусу текущего угла между осями обмоток ротора и статора. Далее, для исключения гармонически изменяющихся коэффициентов в уравнениях потокоцеплений обмоток ротора и статора осуществляют преобразование координат, что позволяет реальные переменные статора и ротора заменить их проекциями на взаимно перпендикулярные оси координат, вращающиеся с произвольной угловой скоростью ω_k . В общем случае обычно рассматривают системы, оси которых неподвижны относительно ротора (или статора) или вращаются с синхронной скоростью. При этом систему осей, жестко связанную с ротором ($\omega_p = 2\pi f_c s_p$), применяют в основном для анализа асинхронных двигателей с несимметричными включениями в роторе. Систему, жестко связанную со статором ($\omega_p = 0$), целесообразно применять при несимметрии статорных цепей или при включении в них дополнительных элементов. Наиболее часто используют систему осей, жестко связанных с вращающимся полем статора

($\omega_c = 2\pi f_c$), что позволяет существенно упростить исследование переходных процессов в асинхронном электродвигателе, управляемом изменением частоты и напряжения статора. В этом случае угловая частота напряжения статора ω_c однозначно определяется его частотой f_c , а скольжение электродвигателя s_p зависит от угловой скорости вращения магнитного поля $2\pi f_c / p_n$, определяющей синхронную скорость двигателя Ω_0 , и текущего значения скорости ротора Ω_p :

$$s_p = \frac{(2\pi f_c / p_n) - \Omega_p}{2\pi f_c / p_n} = \frac{\Omega_0 - \Omega_p}{\Omega_0},$$

где p_n – число пар полюсов двигателя.

Однако и при таком подходе система уравнений электродвигателя получается нелинейной и её решение возможно только в частных случаях с использованием численных методов и вычислительных машин.

Для возможности применения более простых динамических моделей электродвигателей переменного тока, в виде структурных схем или передаточных функций, необходимо выполнить линеаризацию динамических характеристик в окрестностях рабочей точки. Сравнительно простая структурная структура асинхронного двигателя может быть получена, если пренебречь активным сопротивлением статорной цепи. В этом случае линеаризованное дифференциальное уравнение асинхронного двигателя можно представить в виде [14]

$$\left[\frac{T_\vartheta^2}{1 + \kappa^2} \frac{d^2 M}{dt^2} + 2T_\vartheta (1 + \kappa^2) \frac{dM}{dt} + M \right] \beta = \frac{T_\vartheta}{1 + \kappa^2} \frac{ds_p}{dt} + s_p,$$

где $T_\vartheta = 1/(2\pi f_c s_K)$ – аналог электромагнитной постоянной времени двигателя;

f_c – частота напряжения преобразователя, питающего статорную обмотку двигателя;

$\kappa = s_{p0} / s_K$ – коэффициент, характеризующий положение рабочей точки, имеющей скольжение s_{p0} по отношению к критическому скольжению ротора s_K ;

$\beta = \beta_0 (1 + \kappa^2) / (1 - \kappa^2) = (s_K / 2M_K) [(1 + \kappa^2) / (1 - \kappa^2)]$ – коэффициент жесткости (крутизны) механической характеристики, линеаризованной в рабочей точке;

M_K – критическое значение вращающего момента;

s_P – текущее значение скольжения, соответствующее скорости

$$\Omega_P = \Omega_0 (1 - s_P) = 2\pi f_c (1 - s_P) / p_n.$$

При переходе к описанию процессов в относительных единицах передаточную функцию асинхронного электродвигателя относительно входного напряжения можно представить в виде

$$W_{\mathfrak{S}}(S) = \frac{M(S)}{U_c(S) - \Omega_P(S)} = \left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^2 \frac{(T_{\mathfrak{S}}S + 1) - \frac{(s_P/s_K)^2}{1 + (s_P/s_K)^2} (T_{\mathfrak{S}}S + 2)}{(T_{\mathfrak{S}}S + 1)^2 + (s_P/s_K)^2}, \quad (3.12)$$

где $\gamma = U_c / U_{CH}$ – относительное напряжение статора;

$\nu = f_c / f_{CH}$ – относительная частота напряжения статора.

При работе асинхронного электродвигателя на линейном участке механической характеристики $s_{P0} \ll s_K$, поэтому можно принять $\kappa = 0$, $\beta = \beta_0 = s_K / 2M_K$. Ввиду малости изменения второй производной по моменту $d^2M/dt^2 \approx 0$ и скольжения $ds_P/dt \approx 0$ динамическое уравнение (3.12) асинхронного двигателя можно привести к виду

$$\left(2T_{\mathfrak{S}} \frac{dM}{dt} + M\right) \beta = s_P(t)$$

и получить упрощенную передаточную функцию

$$W_{\mathfrak{S}}(S) = \frac{M(S)}{E_{II}(S) - \Omega_P(S)} = \frac{k_{\mathfrak{S}}}{T_{\mathfrak{S}}S + 1}, \quad (3.13)$$

где $k_{\mathfrak{S}} = \gamma^2 / \nu^2$ – коэффициент, зависящий от способа управления и диапазона регулирования момента и скорости двигателя;

$T_{\mathfrak{S}}$ – приведенная электромагнитная постоянная времени двигателя в системе вращающихся ортогональных осей.

Полученная передаточная функция структурно совпадает с передаточной функцией двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (3.5), что позволяет с учетом принятых допущений при выполнении обобщающих исследований электроприводов постоянного и переменного тока приближенно учитывать свойства двигателей упрощенной линеаризованной моделью в виде апериодического звена первого порядка. Однако, применяя такую универсальную модель для анализа асинхронных электродвигателей с фазным ротором, необходимо учитывать, что коэффициент жесткости β статической характеристики двигателя существенно зависит от положения ра-

бочей точки, т.е. от значения безразмерного параметра $\kappa = s_{p0} / s_K$. Исследования, выполненные в [14], показали, что при $\kappa = 0,1$ $\beta / \beta_0 = 1,030$, при $\kappa = 0,3$ $\beta / \beta_0 = 1,306$, а при $\kappa = 0,5$ $\beta / \beta_0 = 2,083$.

Не учет активного сопротивления статора накладывает дополнительные ограничения на использование полученной упрощенной модели вида (3.13). Она вполне применима для систем с небольшим диапазоном регулирования скорости относительно синхронной, для двигателей средней и большой мощности. Однако при широком регулировании скорости, а также для электродвигателей малой мощности, необходимо осуществлять уточнение математического описания, что приводит к усложнению получаемых моделей.

Исследование влияния электромагнитных процессов в асинхронном двигателе на динамические свойства электропривода показали, что использование упрощенной линеаризованной модели асинхронного двигателя обычно занижает колебательность рассматриваемых процессов в ЭМС [14]. Однако возникающие в этом случае погрешности моделирования частично компенсируются тем, что реально сопротивление статорной обмотки двигателя повышает демпфирующие свойства электропривода.

Исследования, выполненные с использованием частотных характеристик, показали, что применение упрощенной модели асинхронного двигателя в виде апериодического звена при наиболее часто встречающихся параметрах $\kappa \leq 0,2 - 0,3$, соответствующих положению рабочей точки на линейном рабочем участке механической характеристики, обуславливает погрешность определения амплитудных значений вращающего момента и скольжения, вызванных изменением момента нагрузки, не более 12–15 %.

При исследовании силовых взаимодействий в ЭМС с упругими механическими передачами чаще всего приходится рассматривать достаточно мощные асинхронные электроприводы, работающие в режиме стабилизации скорости исполнительных органов технологических машин, поэтому применение универсальных упрощенных линеаризованных моделей с передаточными функциями вида (3.7) в таких случаях представляется приемлемым.

3.5. Математическое описание статических преобразователей электроприводов переменного тока

Для управления электродвигателями переменного тока используются различные виды управляемых статических преобразователей – выпрямители и зависимые инверторы, автономные инверторы, преобразователи частоты,

импульсные преобразователи, преобразователи напряжения, – которые в общем случае могут включаться в статорные и роторные цепи. В свою очередь, получившие наибольшее распространение в электроприводе тиристорные преобразователи разделяются на управляемые преобразователи частоты со звеном постоянного тока и с непосредственной связью с питающей сетью. Кроме этого, тиристорные преобразователи частоты со звеном постоянного тока разделяются на преобразователи с управляемым и неуправляемым выпрямителем, реализуемые в виде автономного инвертора тока или напряжения. Моделирование динамических процессов в различных видах преобразователей имеет специфические особенности, причем процессы должны рассматриваться с учетом динамических свойств двигателей. При этом структурные модели получаются сложными, взаимосвязанными, с существенно нелинейными звеньями, с блоками перемножения и деления координат, с параметрами, зависящими от управляющих воздействий и режимов работы электропривода. Однако математическую модель можно значительно упростить [17], если использовать приближенное описание процессов в силовой части преобразователя частоты с автономным инвертором напряжения применяя следующие допущения:

- выходное напряжение синусоидальное, с амплитудой, равной амплитуде первой гармоники несинусоидального напряжения;
- инвертор является безынерционным звеном с постоянным коэффициентом передачи;
- выпрямитель представляет собой идеальный источник напряжения, равного среднему значению выпрямленной ЭДС;
- вентильные свойства источника учитываются однонаправленностью протекания тока и значением фиктивного активного сопротивления в цепи его нагрузки.

Приближенное описание процессов в преобразователе частоты с автономным источником тока осуществляется при следующих исходных предположениях:

- выходной ток считается синусоидальным с амплитудой, равной амплитуде первой гармоники несинусоидального тока;
- автономный инвертор тока представляется безынерционным звеном;
- влияние коммутационных процессов на цепь выпрямленного тока учитывается эквивалентной индуктивностью, включенной последовательно с инвертором.

Динамические свойства управляемых преобразователей частоты с непосредственной связью в основном соответствуют динамическим характеристикам реверсивных управляемых выпрямителей постоянного тока и к ним применимы основные положения и допущения, применяемые при исследовании динамики управляемых преобразователей электроприводов постоянного тока [15]. При исследовании частотно-регулируемых электроприводов кроме основных, общих для этих видов преобразователей допущений, при анализе различных процессов и явлений принимаются некоторые из следующих условий, отражающих специфику работы преобразователей частоты без звена постоянного тока [18]:

а) ток в цепи нагрузки преобразователя непрерывен, что предполагает наличие в цепи нагрузки преобразователя значительной индуктивности. При этом, в случае работы преобразователя на асинхронный двигатель, роль сглаживающей индуктивности выполняет индуктивность рассеяния обмоток статора электродвигателя;

б) индуктивность внутреннего контура силовой цепи мала. Это условие полностью справедливо при получении математической модели преобразователя частоты с отдельным управлением реверсивными группами и вполне приемлемо для преобразователей, выполненных на стороне питающей сети по многофазной схеме, при сравнительно большом отношении частот напряжения питающей сети и цепи нагрузки. Однако в случае исследования процесса изменения токов в силовой схеме индуктивность внутреннего контура должна учитываться;

в) уравнивающий ток равен нулю. Это условие всегда выполняется в преобразователях с отдельным управлением группами вентилей. Такое допущение может быть вполне приемлемо и для преобразователей с согласованным управлением, выполненных по многофазным схемам;

г) высшие гармоники в кривой тока, потребляемого преобразователем из сети, отсутствуют. Это допущение вполне обосновано при использовании многофазных схем на стороне питающей сети;

д) частота напряжения на выходе преобразователя значительно ниже частоты напряжения питающей сети.

Последнее условие для получения математических моделей преобразователей частоты с непосредственной связью с сетью является наиболее важным, так как позволяет рассматривать "гладкую" составляющую выходного напряжения преобразователя как кривую средних значений. Область рационального

применения этого допущения зависит от требуемой степени точности результатов моделирования и определяется числом фаз силовой схемы на стороне питающей сети, отношением частот напряжений первичной и вторичной сети, требуемой степенью регулирования амплитуды выходного напряжения.

Но даже при принятии этих допущений описание процессов в приводах переменного тока оказывается очень сложным и обычно требует использования полных дифференциальных уравнений, рационального выбора координатной системы, в которой осуществляется регулирование векторов напряжения, тока и потокосцепления. Такие исследования возможно осуществлять только с использованием вычислительных машин при заданных конкретных значениях параметров, определенных условиях и режимах работы электроприводов. В то же время для получения обобщающих выводов можно использовать более простые математические модели ЭМС.

В работах [8, 10, 14, 17] показано, что на начальных стадиях исследований в первом приближении при линеаризации характеристик на малых интервалах приращений координат динамические свойства управляемых преобразователей для двигателей переменного тока можно учитывать моделью в виде апериодического звена первого порядка с передаточной функцией

$$W_{\Pi}(S) = E_{\Pi}(S)/U_{PH}(S) = k_{\Pi}/(T_{\Pi}S + 1). \quad (3.14)$$

Параметры этой передаточной функции зависят в каждом конкретном случае от многих факторов.

3.6. Математическое описание асинхронного электродвигателя при частотном регулировании электромагнитного момента

В последнее время на практике широкое распространение получили частотные методы регулирования электродвигателей переменного тока, для качественного управления которыми необходимо использовать уточнённые математические модели учитывающие специфику переходных процессов в таких ЭМС.

Наличие в асинхронном двигателе (АД) многофазной системы переменных напряжений и токов значительно усложняет математическое описание переходных процессов в них и приводит к большому количеству взаимосвязанных переменных, участвующих в формировании электромагнитного момента. Анализ существующих подходов к математическому описанию и исследованию электромагнитных процессов в многофазных машинах переменного тока, показал рациональность применения следующих подходов [18, 19, 20]:

- использование понятия обобщенного пространственного вектора;
- применение идеализированной двухфазной обобщенной электрической машины;
- использование фазовых и координатных преобразований переменных, описывающих процессы в электрических двигателях.

Математическое описание динамических процессов в АД при частотном регулировании, осуществляют с использованием дифференциальных уравнений, применяя следующие допущения [19, 20]:

- машина симметрична, обеспечивается синусоидальное распределение магнитодвижущей силы и магнитного потока вдоль воздушного зазора, который принимается равномерным по окружности ротора;
- магнитная цепь машины не насыщена, что позволяет принять значения индуктивностей постоянными;
- не учитываются потери энергии в стали статора;
- отсутствуют напряжения и токи нулевой последовательности.

Схематично, обмотки статора и ротора трехфазного АД с короткозамкнутым ротором можно изобразить в виде, показанном на рис. 3.1, где обозначено: α – угол поворота ротора.

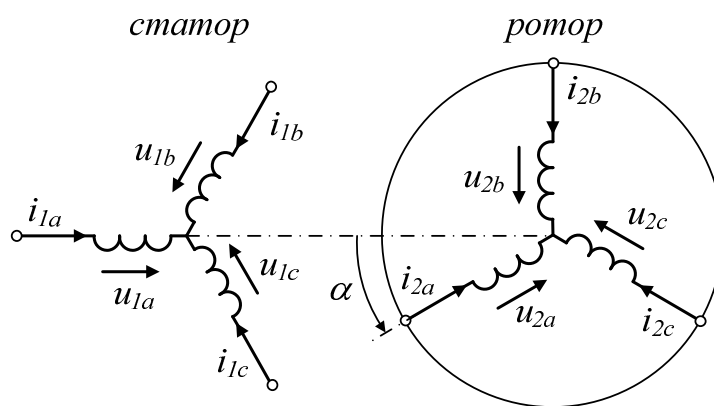


Рис.3.1. – Обмотки статора и ротора трехфазного АД

По второму закону Кирхгофа, с учетом того, что в АД с короткозамкнутым ротором напряжения $u_{2a} = u_{2b} = u_{2c} = 0$, уравнения равновесия ЭДС для обмоток статора и ротора двигателя, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 u_{1a} &= R_{1a} i_{1a} + \frac{d\psi_{1a}}{dt} & 0 &= R_{2a} i_{2a} + \frac{d\psi_{2a}}{dt} \\
 u_{1b} &= R_{1b} i_{1b} + \frac{d\psi_{1b}}{dt} & 0 &= R_{2b} i_{2b} + \frac{d\psi_{2b}}{dt} \\
 u_{1c} &= R_{1c} i_{1c} + \frac{d\psi_{1c}}{dt} & 0 &= R_{2c} i_{2c} + \frac{d\psi_{2c}}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

В уравнениях (3.15) используются мгновенные значения напряжений, токов и потокосцеплений статора и ротора, а также активные сопротивления обмоток. Обычно обмотки двигателя выполняются симметричными, поэтому допустимо принять $R_{1a} = R_{1b} = R_{1c} = R_1$ – активное сопротивление фазы статорной обмотки, $R_{2a} = R_{2b} = R_{2c} = R_2$ – активное сопротивление фазы роторной обмотки.

Для решения уравнений (3.15) необходимо определить связи между потокосцеплениями и токами. Это можно осуществить либо на основе теории магнитных цепей, предполагающей рассмотрение магнитных полей в воздушном зазоре машины [20, 26], либо на основе теории магнитно-связанных электрических цепей с использованием соответствующих индуктивностей [19].

Первый путь позволяет описывать электромагнитные переходные процессы в АД с учетом нелинейных свойств цепи намагничивания. Однако использование такого подхода приводит к получению достаточно сложных моделей. Поэтому его рекомендуется использовать лишь в тех случаях, когда требуется моделирование электромагнитных процессов в режимах насыщения или ослабления поля двигателя.

При использовании в ЭМС асинхронного частотно-регулируемого электропривода с векторным управлением, для математического описания электромагнитных переходных процессов в АД целесообразно использовать второй подход, основанный на использовании идеализированной машины с линейной характеристикой

$$\begin{aligned}
 \psi_{1a} &= L_{1a} i_{1a} + L_{1a,1b}(\alpha) i_{1b} + L_{1a,1c}(\alpha) i_{1c} + L_{1a,2a}(\alpha) i_{2a} + L_{1a,2b}(\alpha) i_{2b} + L_{1a,2c}(\alpha) i_{2c} \\
 \psi_{1b} &= L_{1b,1a}(\alpha) i_{1a} + L_{1b} i_{1b} + L_{1b,1c}(\alpha) i_{1c} + L_{1b,2a}(\alpha) i_{2a} + L_{1b,2b}(\alpha) i_{2b} + L_{1b,2c}(\alpha) i_{2c} \\
 \psi_{1c} &= L_{1c,1a}(\alpha) i_{1a} + L_{1c,1b}(\alpha) i_{1b} + L_{1c} i_{1c} + L_{1c,2a}(\alpha) i_{2a} + L_{1c,2b}(\alpha) i_{2b} + L_{1c,2c}(\alpha) i_{2c} \\
 \psi_{2a} &= L_{2a,1a}(\alpha) i_{1a} + L_{2a,1b}(\alpha) i_{1b} + L_{2a,1c}(\alpha) i_{1c} + L_{2a} i_{2a} + L_{2a,2b}(\alpha) i_{2b} + L_{2a,2c}(\alpha) i_{2c} \\
 \psi_{2b} &= L_{2b,1a}(\alpha) i_{1a} + L_{2b,1b}(\alpha) i_{1b} + L_{2b,1c}(\alpha) i_{1c} + L_{2b,2a}(\alpha) i_{2a} + L_{2b} i_{2b} + L_{2b,2c}(\alpha) i_{2c} \\
 \psi_{2c} &= L_{2c,1a}(\alpha) i_{1a} + L_{2c,1b}(\alpha) i_{1b} + L_{2c,1c}(\alpha) i_{1c} + L_{2c,2a}(\alpha) i_{2a} + L_{2c,2b}(\alpha) i_{2b} + L_{2c} i_{2c}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

где L_{1a} , L_{1b} , L_{1c} , L_{2a} , L_{2b} , L_{2c} – собственные индуктивности обмоток статора и ротора двигателя;

$L_{1a,1b}(\alpha) \dots L_{1c,1b}(\alpha)$ – взаимные индуктивности между соответствующими фазами, являющиеся функцией угла поворота ротора α (см. рис.3.1).

Анализируя уравнения (3.16) видим, что потокосцепление каждой обмотки зависит также от токов в других обмотках и эти зависимости учитываются через взаимную индуктивность, которая является переменной и зави-

сит от угла поворота ротора α .

Несмотря на полное и строгое математическое описание, использование уравнений (3.15), (3.16) на практике при моделировании АД имеет серьезные трудности, заключающиеся в следующем:

- количество взаимосвязанных уравнений равно 12, а количество коэффициентов – 30;
- в уравнениях (3.16) присутствуют переменные коэффициенты взаимодукции между обмотками статора и ротора, которые изменяются в зависимости от угла поворота ротора α относительно статора;

Поэтому при составлении математического описания машин переменного тока используется метод обобщенного пространственного вектора [19, 21]. Суть этого метода заключается в том, что совокупное действие всех трех фаз выражается одним вектором. Благодаря этому удастся существенно сократить количество вышеприведенных уравнений, а также связать их в единую систему с векторными переменными состояния.

Возможность применения данного метода для АД обусловлена симметричным конструктивным исполнением трехфазной обмотки статора. В этом случае при протекании токов по обмоткам отдельных фаз, обеспечивается синусоидальное распределение магнитодвижущей силы (МДС) по окружности воздушного зазора. Это обстоятельство позволяет представить МДС или пропорциональные им токи обобщенным пространственным вектором на комплексной плоскости, представляющим собой геометрическую сумму отрезков, построенных на пространственных осях фазных обмоток и соответствующих мгновенным значениям фазных МДС или токов. При этом проекции обобщенного вектора на оси фаз обмоток в любой момент времени будут соответствовать мгновенным значениям соответствующих величин.

Векторная форма записи дифференциальных уравнений существенно облегчает исследование АД, однако их применение на практике при моделировании переходных процессов затруднительно. Более удобным является использование модели двухфазной обобщенной электрической машины (ОЭМ), показанной на рис.3.2, которая позволяет выразить векторные переменные через проекции на соответствующие оси декартовой системы координат.

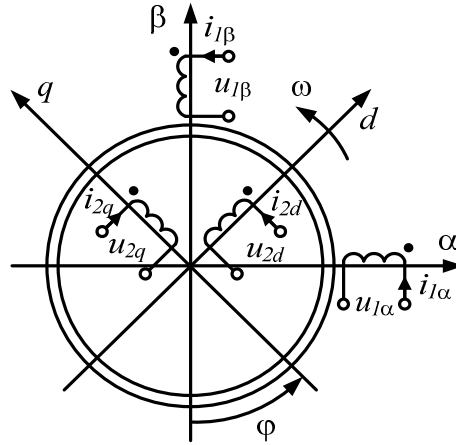


Рис.3.2 – Обобщенная двухфазная электрическая машина

При использовании модели двухфазной ОЭМ, уравнения (3.15) в проекциях на соответствующие координатные оси примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{1\alpha} &= R_1 i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt} & u_{2d} &= R_2 i_{2d} + \frac{d\psi_{2d}}{dt} \\ u_{1\beta} &= R_1 i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt} & u_{2q} &= R_2 i_{2q} + \frac{d\psi_{2q}}{dt} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Индексы α, β и d, q при переменных статора и ротора означают, что они записаны в различных системах координат: $(\alpha - \beta)$ – системе координат, жестко связанной с неподвижным статором; $(d - q)$ – системе координат жестко связанной с ротором и вращающейся со скоростью ω , получившей название электрической скорости вращения ротора двигателя:

$$\omega = \Omega_D \cdot Z_P,$$

где Ω_D и Z_P – механическая скорость вращения вала двигателя и число пар полюсов АД.

Аналогичные преобразования можно выполнить и для уравнений связи:

$$\begin{aligned} \psi_{1\alpha} &= L_{1\alpha} i_{1\alpha} + L_{1\alpha,1\beta}(\varphi) i_{1\beta} + L_{1\alpha,2d}(\varphi) i_{2d} + L_{1\alpha,2q}(\varphi) i_{2q} \\ \psi_{1\beta} &= L_{1\beta,1\alpha}(\varphi) i_{1\alpha} + L_{1\beta} i_{1\beta} + L_{1\beta,2d}(\varphi) i_{2d} + L_{1\beta,2q}(\varphi) i_{2q} \\ \psi_{2d} &= L_{2d,1\alpha}(\varphi) i_{1\alpha} + L_{2d,1\beta}(\varphi) i_{1\beta} + L_{2d} i_{2d} + L_{2d,2q}(\varphi) i_{2q} \\ \psi_{2q} &= L_{2q,1\alpha}(\varphi) i_{1\alpha} + L_{2q,1\beta}(\varphi) i_{1\beta} + L_{2q,2d}(\varphi) i_{2d} + L_{2q} i_{2q} \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $L_{1\alpha}, L_{1\beta}, L_{2d}, L_{2q}$ – собственные индуктивности обмоток статора и ротора ОЭМ; $L_{1\alpha,1\beta}(\varphi), \dots, L_{2q,2d}(\varphi)$ – взаимные индуктивности между обмотками соответствующих фаз, причем первый индекс показывает, в какой обмотке наводится ЭДС, а второй – током какой обмотки она создается.

Анализ уравнений (3.16) и (3.18) показал, что переход к двухфазной ОЭМ позволил значительно сократить количество уравнений, описывающих электромагнитные процессы. Однако коэффициенты взаимной индукции по-прежнему являются переменными, а их значения зависят от угла поворота ротора φ . Это связано с тем, что уравнения равновесия ЭДС для обмоток статора записаны в неподвижной системе координат, связанной со статором, а уравнения равновесия ЭДС обмоток ротора записаны во вращающейся системе координат связанной с ротором. Поэтому для решения проблемы переменных коэффициентов, уравнения статора и ротора рекомендуется записывать в единой системе координат: в неподвижной $(\alpha - \beta)$ – статора или во вращающейся $(d - q)$ – ротора. Графическое пояснение данного подхода показано на рис.3.3 (а, б)

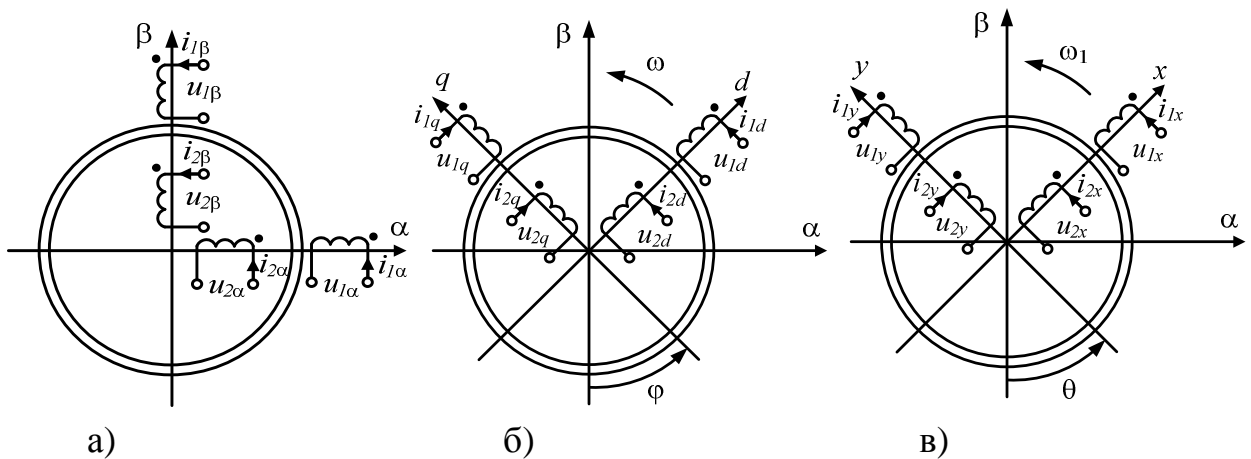


Рис.3.3 – Преобразованная обобщенная электрическая машина:

- а) в неподвижной системе координат статора $(\alpha - \beta)$;
- б) во вращающейся со скоростью ω системе координат ротора $(d - q)$;
- в) во вращающейся со скоростью ω_1 системе координат $(x - y)$.

Исследования, выполненные в работе [18] показали, что при записи дифференциальных уравнений в осях статора или ротора напряжения и токи являются переменными и их амплитуда изменяется во времени. При использовании системы координат статора $(\alpha - \beta)$ они изменяются с электрической скоростью вращения поля статора:

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1,$$

где f_1 – частота тока статора в Гц.

При записи уравнений в системе координат ротора $(d - q)$ вращающейся с частотой скольжения ротора $\omega_2 = \omega_1 - \omega$ существенно усложняет анализ

динамических процессов в АД.

Поэтому при разработки математической модели АД для записи дифференциальных уравнений целесообразно использовать систему координат $(x-y)$, вращающейся относительно неподвижной системы координат статора $(\alpha-\beta)$ с частотой ω_1 , что позволяет представить переменные токи, напряжения и потокосцепления в виде сигналов с постоянной амплитудой. В этом случае обобщённая электрическая машина в осях $(x-y)$ будет иметь вид, показанный на рис.3.3 (в), где обозначено: θ – угол поворота вращающейся системы координат $(x-y)$ относительно неподвижной системы координат статора $(\alpha-\beta)$. В этом случае используя выражения прямого преобразования координат [18, 19]:

$$\begin{aligned} x_{1x} &= x_{1\alpha} \cos \theta + x_{1\beta} \sin \theta \\ x_{1y} &= -x_{1\alpha} \sin \theta + x_{1\beta} \cos \theta \\ x_{2x} &= x_{2d} \cos(\theta - \varphi) + x_{2q} \sin(\theta - \varphi) \\ x_{2y} &= -x_{2d} \sin(\theta - \varphi) + x_{2q} \cos(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (3.19)$$

и приняв при рассмотрении переменных ОЭМ на комплексной плоскости за действительную ось абсцисс x , а за мнимую – ось ординат y , уравнения (3.17), (3.18) можно представить более компактно, записав их в комплексной форме относительно результирующих векторов:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = R_1 \vec{i}_1 + p \vec{\psi}_1 + j\omega_1 \vec{\psi}_1 \\ 0 = R_2 \vec{i}_2 + p \vec{\psi}_2 + j\omega_2 \vec{\psi}_2 \\ \vec{\psi}_1 = L_1 \vec{i}_1 + L_m \vec{i}_2 \\ \vec{\psi}_2 = L_2 \vec{i}_2 + L_m \vec{i}_1 \end{cases} \quad (3.20)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; L_m – коэффициент взаимной индуктивности; $\vec{i}_1 = i_{1x} + ji_{1y}$, $\vec{i}_2 = i_{2x} + ji_{2y}$, $\vec{\psi}_1 = \psi_{1x} + j\psi_{1y}$, $\vec{\psi}_2 = \psi_{2x} + j\psi_{2y}$, $\vec{u}_1 = u_{1x} + ju_{1y}$, $\vec{u}_2 = u_{2x} + ju_{2y}$ – результирующие вектора комплексных переменных.

Учитывая, что сумма токов статора и ротора образует ток намагничивания, т.е. $\vec{i}_m = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$, можно потокосцепления статора $\vec{\psi}_1$ и ротора $\vec{\psi}_2$, описываемые уравнениями связей, выразить через главный магнитный поток $\vec{\psi}_m = L_m \vec{i}_m = L_m (\vec{i}_1 + \vec{i}_2)$ и потоки рассеяния обмоток статора $\vec{\psi}_{\sigma 1} = L_{\sigma 1} \vec{i}_1$ и ротора $\vec{\psi}_{\sigma 2} = L_{\sigma 2} \vec{i}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_1 &= L_1 \vec{i}_1 + L_m \vec{i}_2 = (L_{\sigma 1} + L_m) \vec{i}_1 + L_m \vec{i}_2 = L_{\sigma 1} \vec{i}_1 + L_m (\vec{i}_1 + \vec{i}_2) = \vec{\psi}_{\sigma 1} + \vec{\psi}_m \\ \vec{\psi}_2 &= L_2 \vec{i}_2 + L_m \vec{i}_1 = (L_{\sigma 2} + L_m) \vec{i}_2 + L_m \vec{i}_1 = L_{\sigma 2} \vec{i}_2 + L_m (\vec{i}_1 + \vec{i}_2) = \vec{\psi}_{\sigma 2} + \vec{\psi}_m\end{aligned}\quad (3.21)$$

где $L_{\sigma 1} = L_1 - L_m$ – индуктивность рассеяния обмоток статора

$L_{\sigma 2} = L_2 - L_m$ – индуктивность рассеяния обмотки ротора.

Анализ уравнения (3.20) показал, что благодаря записи уравнений электрической машины в единой системе координат в осях $(x - y)$ удалось получить постоянные коэффициенты взаимной индукции. Для учёта их влияния теперь используется один общий коэффициент взаимной индуктивности L_m имеющий постоянное значение, что вполне допустимо для неявнополюсных машин с симметричным исполнением обмоток, к которым принадлежит АД. При этом вращение координатных осей и реальных обмоток учтено введением дополнительных переменных коэффициентов $\omega_1 \psi_1$ и $\omega_2 \psi_2$ в уравнениях электрического равновесия.

Уравнениям (3.20), (3.21) соответствует электрическая Т-образная схема замещения АД с короткозамкнутым ротором, показанная на рис.3.4. Эта схема может быть использована для анализа электромагнитных переходных процессов, происходящих в асинхронном двигателе.

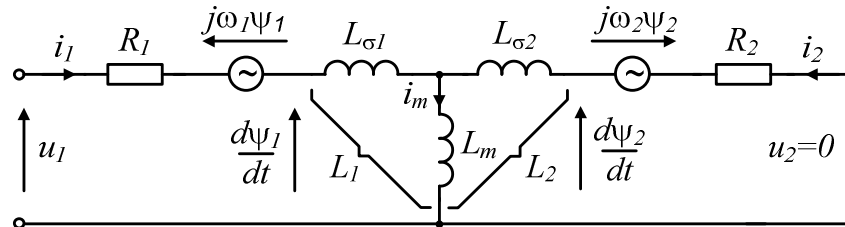


Рис.3.4 – Электрическая Т-образная схема замещения АД с короткозамкнутым ротором

Если преобразовать уравнения (3.10) и (3.11) и записать их относительно проекций векторов на координатные оси $(x - y)$, то получим систему дифференциальных уравнений, описывающую электромагнитные процессы в АД:

$$\begin{cases}
 p\psi_{1x} = u_{1x} - R_1 i_{1x} + \omega_1 \psi_{1y} \\
 p\psi_{1y} = u_{1y} - R_1 i_{1y} - \omega_1 \psi_{1x} \\
 p\psi_{2x} = -R_2 i_{2x} + (\omega_1 - \omega) \psi_{2y}; \\
 p\psi_{2y} = -R_2 i_{2y} - (\omega_1 - \omega) \psi_{2x} \\
 i_{1x} = \frac{1}{L_{\sigma 1}} \psi_{\sigma 1x}; \quad i_{1y} = \frac{1}{L_{\sigma 1}} \psi_{\sigma 1y} \\
 i_{2x} = \frac{1}{L_{\sigma 1}} \psi_{\sigma 2x}; \quad i_{2y} = \frac{1}{L_{\sigma 1}} \psi_{\sigma 2y} \\
 \psi_{\sigma 1x} = \psi_{1x} - \psi_{mx}; \quad \psi_{\sigma 1y} = \psi_{1y} - \psi_{my} \\
 \psi_{\sigma 2x} = \psi_{2x} - \psi_{mx}; \quad \psi_{\sigma 2y} = \psi_{2y} - \psi_{my} \\
 \psi_{mx} = L_m i_{mx}; \quad \psi_{my} = L_m i_{my} \\
 i_{mx} = i_{1x} + i_{2x}; \quad i_{my} = i_{1y} + i_{2y}
 \end{cases} \quad (3.22)$$

Системе уравнений (3.22) соответствует математическая модель АД, представленная в виде структурной схемы на рис.3.5. При этом для определения электромагнитного момента M_d , электрической скорости вращения ротора ω и скорости вращения двигателя Ω_d , используются выражения:

$$\begin{cases}
 M_{\ddot{A}} = \frac{3}{2} Z_P (\psi_{2y} i_{2x} - \psi_{2x} i_{2y}) \\
 \omega = Z_P \cdot \Omega_{\ddot{A}} \\
 \Omega_{\ddot{A}} = \frac{1}{J_{\ddot{A}} p} \cdot (M_{\ddot{A}} - M_{\tilde{N}}).
 \end{cases}$$

Полученное математическое описание процессов происходящих в электромагнитной части АД соответствует многосвязанной нелинейной динамической системе. Входными воздействиями в полученной модели являются напряжения статора u_l и скорость вращения магнитного поля ω_1 двигателя, а выходными переменными являются токи, потокосцепления, электромагнитный момент и скорость вращения ротора двигателя. Связующей переменной между математическими моделями статора и ротора является главное потокосцепление ψ_m , которое является функцией тока намагничивания i_m и зависит от индуктивности намагничивания L_m .

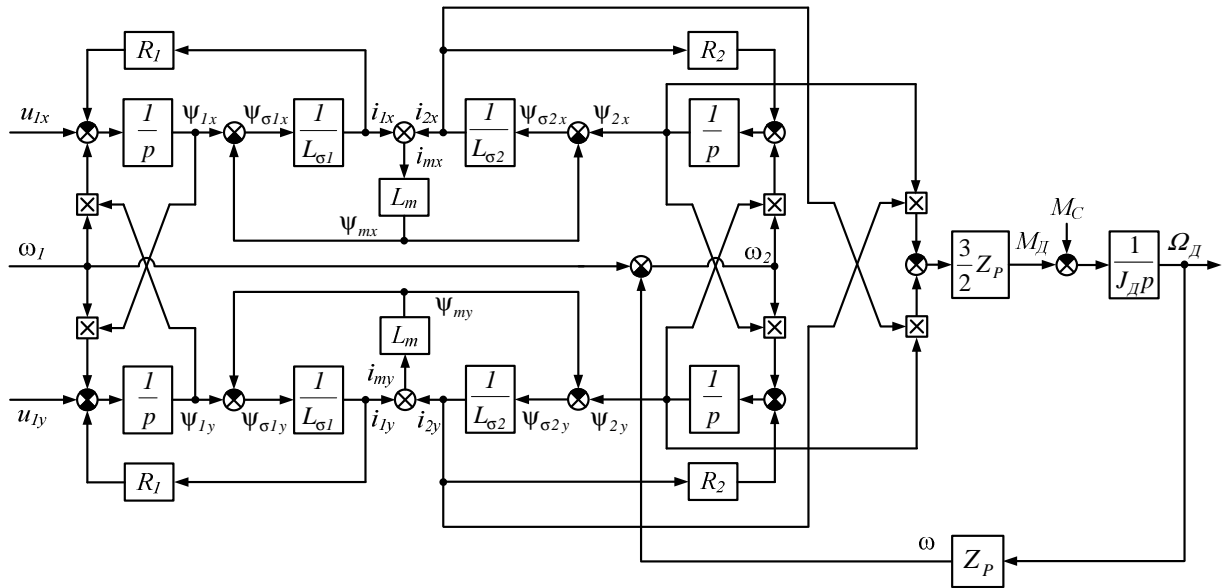


Рис.3.3 – Математическая модель двухфазного АД

Инерционные свойства электромагнитных контуров статора и ротора описываются в модели интегрирующими звеньями, а падения напряжения на активных сопротивлениях обмоток учитываются внутренними обратными связями по токам статора и ротора.

Относительная простота, наглядность отображения параметров двигателя и взаимодействий между различными переменными, дают преимущество рассматриваемой модели при анализе переходных процессов в ЭМС с АД. Однако ее использование на практике, например, при решении задачи синтеза систем управления асинхронным ЭП, весьма затруднительно.

Исследования, выполненные в [23], показали, что при реализации ЭМС на базе современных частотно-регулируемых ЭП с векторным управлением момента АД, систему дифференциальных уравнений (2.25), рационально записать относительно переменных тока статора I_1 и потокосцепления ротора Ψ_2 в виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
i_{1x} &= \frac{1/R'_1}{T'_1 p + 1} \left(u_{1x} + \sigma L_1 \omega_l i_{1y} + K_2 \omega \psi_{2y} + \frac{K_2}{T_2} \psi_{2x} \right) \\
i_{1y} &= \frac{1/R'_1}{T'_1 p + 1} \left(u_{1y} - \sigma L_1 \omega_l i_{1x} - K_2 \omega \psi_{2x} + \frac{K_2}{T_2} \psi_{2y} \right) \\
\psi_{2x} &= \frac{L_m}{T_2 p + 1} \left(i_{1x} + \frac{1}{K_2 R_2} (\omega_l - \omega) \psi_{2y} \right) \\
\psi_{2y} &= \frac{L_m}{T_2 p + 1} \left(i_{1y} - \frac{1}{K_2 R_2} (\omega_l - \omega) \psi_{2x} \right) \\
M_D &= \frac{3}{2} Z_P K_2 (\psi_{2x} i_{1y} - \psi_{2y} i_{1x}) \\
\omega &= Z_P \Omega_D \\
\Omega_D &= \frac{1}{J_D p} (M_D - M_C)
\end{aligned} \right. \quad (3.23)$$

где $K_2 = L_m/L_2$ – коэффициент электромагнитной связи ротора;
 $T'_1 = \sigma L_1/R'_1$ – электромагнитная постоянная времени цепи статора;
 $R'_1 = R_1 + K_2^2 R_2$ – эквивалентное активное сопротивление двигателя;
 $T_2 = L_2/R_2$ – электромагнитная постоянная времени ротора;
 $\sigma = 1 - L_m^2/(L_1 \cdot L_2)$ – общий коэффициент рассеяния двигателя;

Современные ЭП с векторным управлением реализованы так, что обеспечивают ориентацию вещественной оси x вращающейся системы координат $(x - y)$ по направлению вектора потокосцепления ротора ψ_2 . Поэтому проекция потокосцепления ротора на мнимую ось y становится равной нулю ($\psi_{2y} = 0$). С учётом этого для исследования электромагнитных процессов в асинхронном ЭП при векторном управлении моментом двигателя, допустимо использовать математическую модель в упрощенном виде, описываемую системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}
 i_{lx} = \frac{1/R'_l}{T'_l p + 1} \left(u_{lx} + \sigma L_l \omega_l i_{ly} + \frac{K_2}{T_2} \psi_{2x} \right) \\
 i_{ly} = \frac{1/R'_l}{T'_l p + 1} \left(u_{ly} - \sigma L_l \omega_l i_{lx} - K_2 \omega \psi_{2x} \right) \\
 \psi_{2x} = \frac{L_m}{T_2 p + 1} i_{lx} \\
 M_D = \frac{3}{2} Z_P K_2 \psi_{2x} i_{ly} \\
 \omega = Z_P \Omega_D \\
 \Omega_D = \frac{1}{J_D p} (M_D - M_C)
 \end{cases} \quad (3.24)$$

Структурная схема математической модели АД при векторном управлении, соответствующая уравнениям (3.24) приведена на рис.3.6.

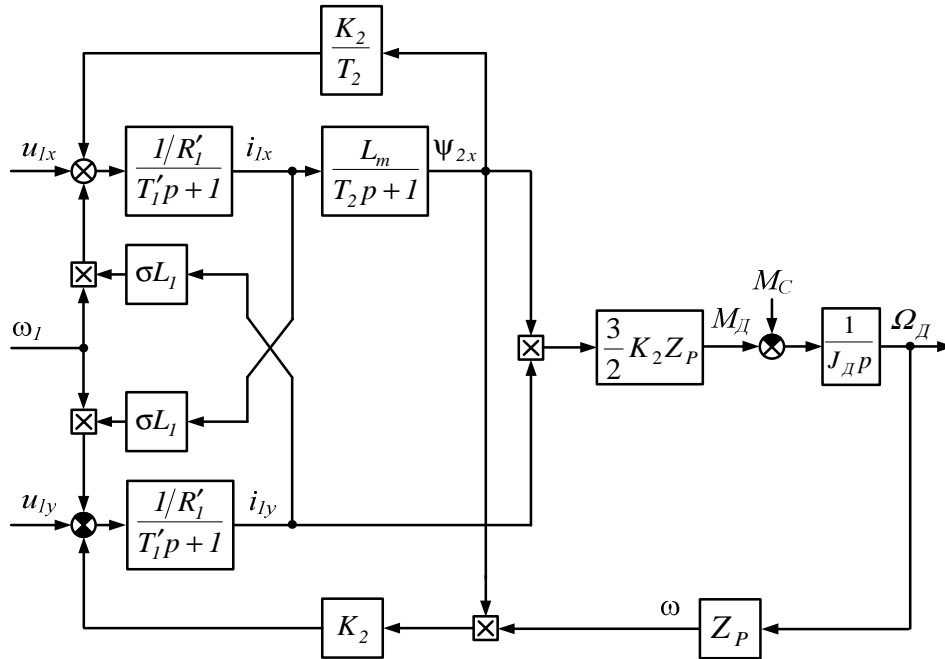


Рис.3.6 – Структурная схема математической модели АД при векторном управлении.

Поддержание ориентации координатной системы по потокоцеплению ротора реализуется системой управления за счет формирования требуемой скорости вращения поля двигателя ω_l , значение которой может быть определено по выражению:

$$\omega_l = \omega + \omega_2 = \omega + K_2 R_2 \frac{i_{ly}}{\psi_{2x}} - \frac{\psi_{2y}}{\psi_{2x}} \frac{T_2 p + 1}{T_2} \quad (3.25)$$

При выполнении условия $\psi_{2y} = 0$, выражения (2.25) примет более простой вид:

$$\omega_l = \omega + \omega_2 = \omega + K_2 R_2 \frac{i_{ly}}{\psi_{2x}} \quad (3.26)$$

Полученные математические модели АД с короткозамкнутым ротором отражают основные силовые взаимодействия между электрическими переменными при векторном управлении момента двигателя. Входными переменными полученной математической модели АД при векторном управлении являются проекции вектора напряжения статора, электрическая скорость вращения поля статора и механическая скорость вращения вала двигателя.

В полученной математической модели АД в электромагнитных контурах тока статора имеется четыре перекрестные связи. Поэтому для получения высокого быстродействия при управлении электромагнитным моментом АД, система управления ЭП должна осуществлять эффективную их компенсацию.

3.7. Математическое описание синхронного электродвигателя с постоянными магнитами при частотном регулировании электромагнитного момента

Для математического описания переходных процессов, происходящих в синхронном двигателе с постоянными магнитами (СДПМ), применяют подход базирующийся на использовании метода пространственного вектора.

При построении математической модели синхронного двигателя с постоянными магнитами обычно применяют следующие допущения [23, 24]:

- отсутствует насыщение магнитной цепи, не учитывают потери в стали и эффект вытеснения тока;
- обмотки статора симметричны;
- индуктивность рассеяния не зависит от положения ротора в пространстве.

Уравнения синхронного двигателя составляют обычно в ортогональной синхронной системе координат $(d-q)$, ось d которой ориентирована по магнитной оси ротора, как показано на рис.3.7.

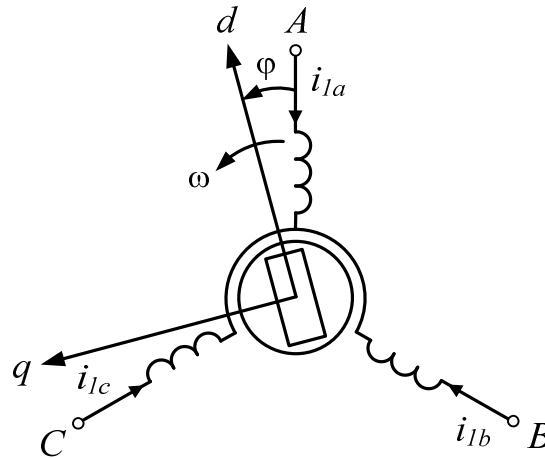


Рис.3.7 – Система координат при исследовании процессов в СДПМ

В векторной форме записи уравнения статора СДПМ имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = R_l \vec{i}_1 + p \vec{\psi}_1 + j\omega \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_1 = L_{\sigma l} \vec{i}_1 + \vec{\psi}_f \end{cases} \quad (3.27)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования;

R_l – активное сопротивление обмотки статора;

$L_{\sigma l}$ – индуктивность рассеяния обмотки статора;

ψ_f – потокосцепление, создаваемое постоянными магнитами на роторе двигателя;

ω – электрическая скорость вращения ротора;

$\vec{i}_1 = i_{1d} + j i_{1q}$, $\vec{\psi}_1 = \psi_{1d} + j \psi_{1q}$, $\vec{u}_1 = u_{1d} + j u_{1q}$, $\vec{\psi}_f = \psi_f$ – результирующие вектора соответствующих переменных, записанные в комплексной форме.

Уравнениям (3.27) соответствует электрическая схема замещения СДПМ, показанная на рис.3.8.

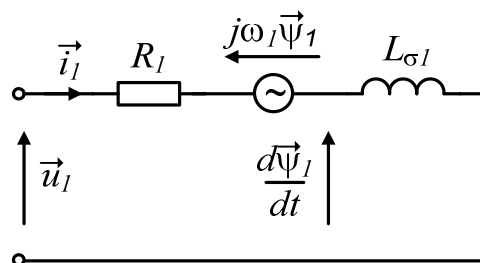


Рис.3.8 – Электрическая схема замещения СДПМ.

Если уравнения (3.27) записать относительно проекций векторов на координатные оси ($d - q$), то получим систему дифференциальных уравнений,

описывающую электромагнитные процессы в СДПМ:

$$\begin{cases} p\psi_{1d} = u_{1d} - R_l i_{1d} + \omega \psi_{1q} \\ p\psi_{1q} = u_{1q} - R_l i_{1q} - \omega \psi_{1d} \\ i_{1d} = \frac{1}{L_{\sigma l}} (\psi_{1d} - \psi_f) \\ i_{1q} = \frac{1}{L_{\sigma l}} \psi_{1q} \end{cases} \quad (3.28)$$

Дополнив систему уравнений (3.28) выражениями для расчета электромагнитного момента и скоростей вращения ротора двигателя:

$$\begin{cases} M_{\ddot{A}} = \frac{3}{2} Z_p (\psi_{1d} i_{1q} - \psi_{1q} i_{1d}) \\ \omega = Z_D \Omega_{\ddot{A}} \\ \Omega_{\ddot{A}} = \frac{1}{J_{\ddot{A}} p} (M_{\ddot{A}} - M_C) \end{cases} \quad (3.29)$$

получим математическую модель СДПМ в виде структурной схемы, представленной на рис.3.9.

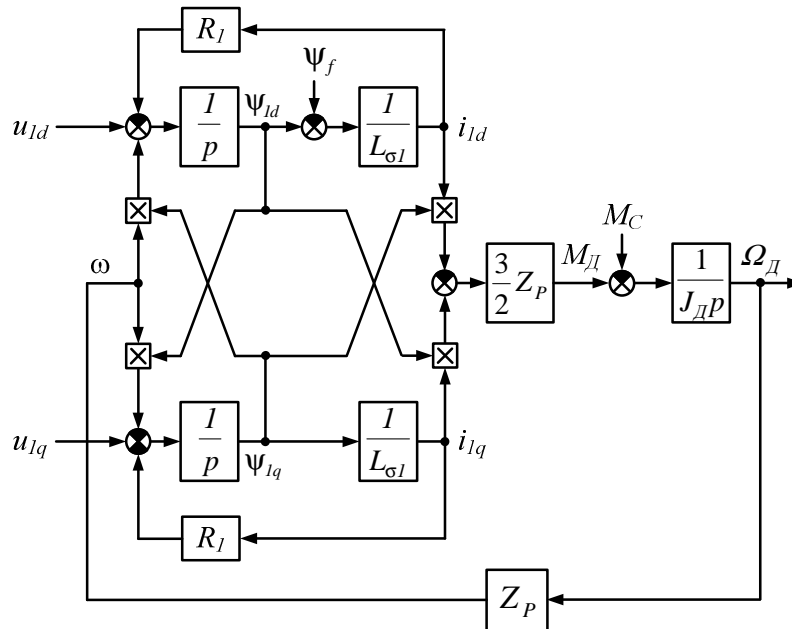


Рис.3.9 – Математическая модель СДПМ в виде структурной схемы

Полученная модель содержит основные параметры двигателя и отображает взаимосвязи между различными переменными. Поэтому ее удобно использовать при анализе переходных процессов в СДПМ.

При решении задачи синтеза системы управления электропривода, вы-

полненного на базе частотно-регулируемого СДПМ с векторным управлением, систему дифференциальных уравнений (3.28), целесообразно записать относительно тока статора I_1 :

$$\begin{cases} i_{1d} = \frac{1/R_1}{T_1 p + 1} (u_{1d} + \omega \psi_{1q}) \\ i_{1q} = \frac{1/R_1}{T_1 p + 1} (u_{1q} - \omega \psi_{1d}) \\ \psi_{1d} = L_{\sigma 1} i_{1d} + \psi_f \\ \psi_{1q} = L_{\sigma 1} i_{1q} \\ M_{\ddot{A}} = \frac{3}{2} Z_P \psi_f i_{1q} \\ \omega = Z_D \Omega_{\ddot{A}} \\ \Omega_{\ddot{A}} = \frac{1}{J_{\ddot{A}} p} (M_{\ddot{A}} - M_C) \end{cases} \quad (3.30)$$

Структурная схема математической модели СДПМ при векторном управлении, соответствующая уравнениям (3.30) приведена на рис.3.10.

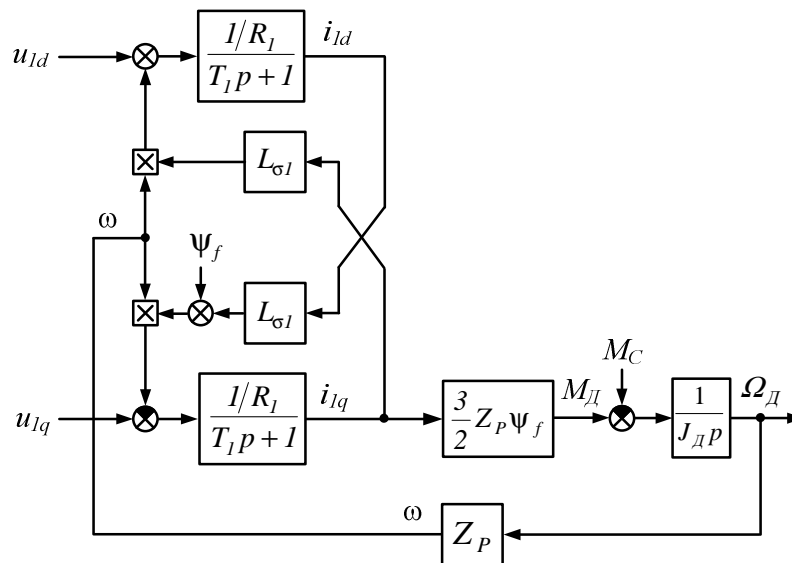


Рис.3.10 – Математическая модель СДПМ при векторном управлении.

Сравнивая полученные математические модели СДПМ с моделями АД, можно заметить, что модель СДПМ значительно проще благодаря меньшему количеству перекрестных связей. В математической модели СДПМ имеется две перекрестные связи, вместо четырех в АД. С физической точки зрения это объясняется постоянством магнитного потока ротора, который создается постоянными магнитами, а не обмоткой ротора, как в асинхронном двигателе.

ле. В результате, токи, протекающие в обмотках статора СДПМ, не способны оказывать влияние на потокосцепление, создаваемое постоянными магнитами. Поэтому соответствующие перекрестные связи в математической модели СДПМ отсутствуют.

3.8. Математическое описание электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением как обобщённой машины

Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением имеет обмотку якоря и обмотку возбуждения, которые в общем случае получают питание от независимых источников постоянного тока. Необходимым условием непрерывного процесса электромеханического преобразования энергии является протекание переменных токов хотя бы по части обмоток машины [25].

Выполнение этого условия в машине постоянного тока обеспечивается работой коллектора, коммутирующего постоянный ток, поступающий в якорную обмотку со стороны источника питания, с частотой ω , равной электрической скорости вращения якоря. Таким образом, точки зрения внутренних процессов, двигатель постоянного тока является машиной переменного тока. Поэтому при математическом описании процессов электромеханического преобразования энергии, происходящих в машине постоянного тока, допустимо использовать те же подходы, что и для машин переменного тока.

Двухфазная модель двигателя постоянного тока приведена на рис.3.11, где обозначено: ОЯ – обмотка якоря; ОВ – обмотка возбуждения; ДП, – обмотка добавочных полюсов; КО – компенсационная обмотка; $(\alpha-\beta)$ – неподвижная система координат.

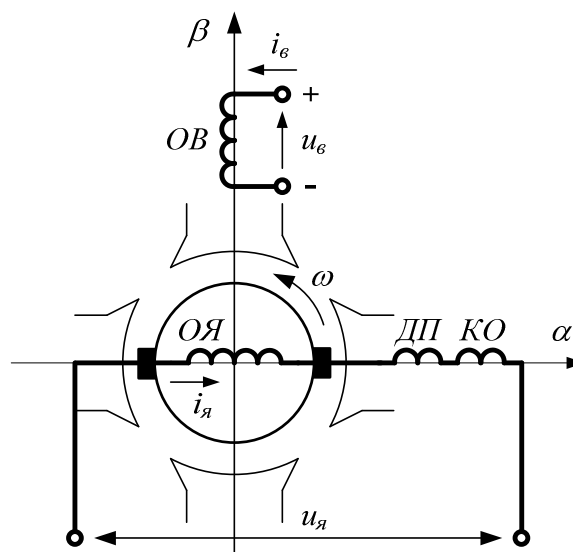


Рис.3.11 – Двухфазная модель двигателя постоянного тока

Система дифференциальных уравнений, описывающая электромеханические процессы в приведенной выше двухфазной модели двигателя постоянного тока имеет вид:

$$\begin{cases} u_{\varepsilon} = i_{\varepsilon} R_{\varepsilon} + L_{\varepsilon} \frac{di_{\varepsilon}}{dt} \\ u_{\gamma} = i_{\gamma} R_{\gamma\Sigma} + L_{\gamma\Sigma} \frac{di_{\gamma}}{dt} + \omega L_{12} i_{\varepsilon} \\ M_{\text{Д}} = p_n L_{12} i_{\varepsilon} i_{\gamma} \end{cases} \quad (3.31)$$

где $\omega = p_n \Omega_{\ddot{A}}$ – электрическая скорость вращения якоря;

p_n – число пар полюсов;

$\Omega_{\ddot{A}}$ – фактическая скорость вращения якоря;

L_{ε} – полная индуктивность обмотки возбуждения;

R_{ε} – активное сопротивление обмотки возбуждения;

$R_{\gamma\Sigma}$, $L_{\gamma\Sigma}$ – суммарное активное сопротивление и индуктивность рассеяния обмоток ЯО, ДП и КО;

L_{12} – взаимная индуктивность обмоток возбуждения и якоря.

Первые два уравнения приведенной системы представляют собой уравнения Кирхгофа для цепей возбуждения и якоря машины, причем последний член уравнения для цепи якоря есть ЭДС двигателя:

$$e = \omega L_{12} i_{\varepsilon} = p_n L_{12} i_{\varepsilon} \Omega_{\ddot{A}} = C \hat{O} \Omega_{\ddot{A}} \quad (3.32)$$

где $C = p_n N / 2\pi a$ – конструктивный коэффициент машины постоянного тока;

N – число активных проводников;

a – число пар параллельных ветвей якорной обмотки;

$\hat{O} = k_{\hat{O}} i_{\varepsilon}$ – магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения;

$k_{\hat{O}}$ – коэффициент, соответствующий линейной части кривой намагничивания двигателя.

С учётом выражения (3.32), момент в (3.31) можно определить соотношением:

$$M_{\ddot{A}} = p_n L_{12} i_{\varepsilon} i_{\gamma} = \tilde{N} \hat{O} i_{\gamma} \quad (3.33)$$

Дополним систему (3.31) уравнением движения электропривода:

$$\dot{I}_{\ddot{A}} - \dot{I}_{\ddot{N}} = J_{\ddot{A}} \frac{d\Omega_{\ddot{A}}}{dt} \quad (3.34)$$

Введя обозначение $p = d/dt$, с учетом выражений (3.32) - (3.34), запишем систему уравнений (3.31) относительно токов:

$$\begin{cases} i_{\epsilon} = \frac{1/R_{\epsilon}}{(1 + T_{\epsilon}p)} u_{\epsilon} \\ i_{\gamma} = \frac{1/R_{\gamma\Sigma}}{(1 + T_{\gamma}p)} (u_{\gamma} - C\Phi \Omega_{\text{Д}}) \\ \Phi = k_{\Phi} i_{\epsilon} \\ M_{\text{Д}} = C\Phi i_{\gamma} \\ \Omega_{\text{Д}} = \frac{1}{J_{\text{Д}}p} (M_{\text{Д}} - M_{\text{С}}) \end{cases} \quad (3.35)$$

где $T_{\epsilon} = L_{\epsilon}/R_{\epsilon}$ – электромагнитная постоянная времени обмотки возбуждения;

$T_{\gamma} = L_{\gamma\Sigma}/R_{\gamma\Sigma}$ – электромагнитная постоянная времени цепи якоря.

Структурная схема, соответствующая системе уравнений (3.25), приведена на рис.3.12.

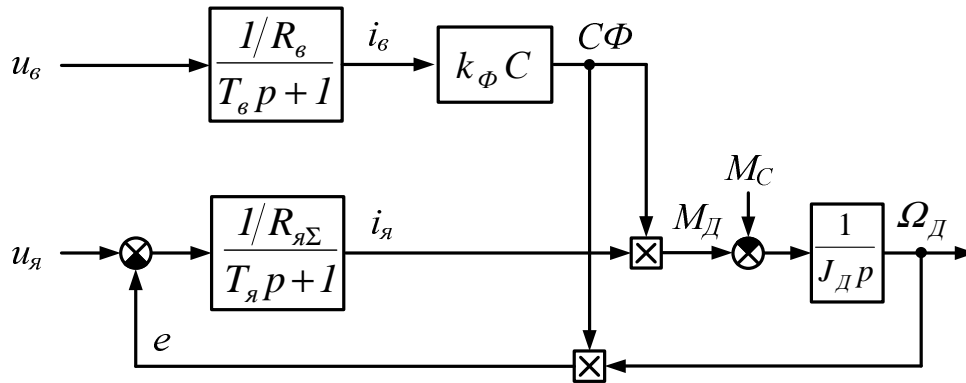


Рис.3.12. Структурная схема математической модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

На схеме показаны два возможных канала управления моментом двигателя при его питании от источника напряжения:

а) канал управления полем двигателя, которому соответствует управляющее воздействие в виде напряжения возбуждения u_{ϵ} ,

б) канал управления по цепи якоря с управляющим воздействием в виде напряжения якоря u_{γ} .

Из рис.3.12 следует, что при отсутствии реакции якоря процессы в цепи возбуждения протекают независимо от процессов в якорной цепи, а процессы в якорной цепи зависят от изменений магнитного потока двигателя Φ .

Математическое описание цепи возбуждения представлено апериодическим звеном с постоянной времени T_ϵ . Индуктивность L_ϵ обмотки возбуждения может быть определена по формуле:

$$L_\epsilon = 2 p_n k_{\dot{\alpha}\dot{n}} w_\epsilon \hat{O}_{\dot{m}} / I_{\dot{a},\dot{m}},$$

где $k_{\dot{\alpha}\dot{n}} = I_{\dot{a},\dot{m}} / I_{\dot{a},\dot{\epsilon}\dot{\epsilon}\dot{i}}$ – коэффициент насыщения;

$I_{\dot{a},\dot{m}}$ – ток возбуждения, создающий номинальный поток $\Phi_{ном}$ при отсутствии насыщения магнитной цепи;

w_ϵ – число витков обмотки возбуждения.

Для двигателей мощностью от единицы до нескольких тысяч киловатт, постоянная времени цепи возбуждения лежит в пределах $T_\epsilon = 0,2 \div 5$ с, причем с увеличением мощности двигателя она быстро возрастает.

Математическое описание цепи якоря также представляет собой апериодическое звено с постоянной времени T_γ . Индуктивность рассеяния якорной цепи двигателя может быть вычислена по приближенной формуле:

$$L_{\dot{y}\Sigma} = \gamma U_{\dot{y},\dot{m}} / p_n \omega_{\dot{m}} I_{\dot{y},\dot{m}}$$

где $\gamma = 0,6$ для некомпенсированных и $\gamma = 0,25$ для компенсируемых двигателей.

Постоянная времени якорной цепи двигателей средней и большой мощности лежит в пределах $T_\gamma = 0,02 \div 0,1$ с, причем наибольшие значения соответствуют некомпенсированным либо тихоходным двигателям большой мощности.

При учёте изменения потока возбуждения математическая модель обмотки возбуждения становится нелинейной. Если в ЭМС управление моментом двигателя постоянного тока осуществляют при питании якорной цепи двигателя от источника напряжения при постоянстве потока возбуждения $\hat{O} = \hat{O}_{\dot{m}} = const$, то для математического описания переходных процессов двигателя допустимо использовать структурную схему в упрощенном виде, показанном на рис.3.13.

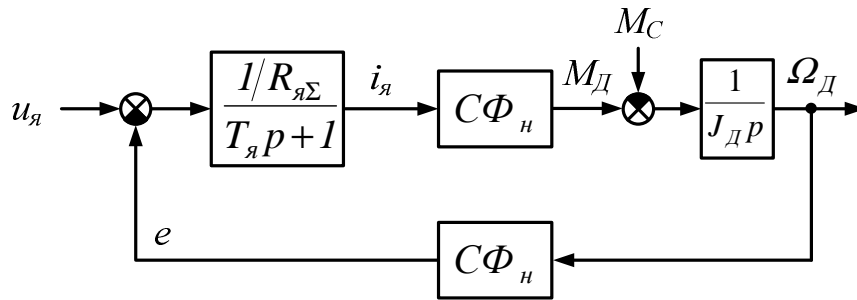


Рис.3.13 – Структурная схема математической модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением при $\Phi = \Phi_{ном} = const$

При этом значение коэффициента $C\Phi_n$ может быть найдено по выражению:

$$C\Phi_n = (U_{я.ном} - I_{я.ном} R_{я\Sigma}) / \Omega_{д.ном},$$

где $U_{я.ном}$, $I_{я.ном}$, $\Omega_{д.ном}$ – соответственно номинальное напряжение, ток и скорость вращения якоря двигателя.

3.9. Структурные взаимодействия управляющих и информационных устройств ЭМС

С учетом особенностей построения активных СКС, реализации ЭП с двигателями постоянного тока, а также асинхронных и синхронных при применении векторного управления моментом двигателя, была получена обобщенная функциональная схема, показанная на рис.3.14.

Основными элементами СКС являются двигатель постоянного тока (ДПТ), асинхронный (АД) или синхронный с постоянными магнитами (СДПМ) двигателя. Момент на валу двигателя, через редуктор Y , барабан и канатную передачу, передается к объекту обезвешивания массой m_0 .

Управление ДПТ осуществляется от комплектного преобразователя напряжения, АД и СДПМ от преобразователя частоты (ПЧ), в котором реализована система векторного регулирования момента двигателя [23].

Внутренние контуры регулирования тока ЭП переменного тока (см. рис. 3.14 б, в), состоящие из автономного инвертора напряжения (АИН), датчиков фазных токов статора (ТА), канала обратной связи по току (ОСТ), регуляторов токов PT_x (PT_d) и PT_y (PT_q), канала измерения скорости (КС) и блока компенсации перекрестных связей (БК), осуществляют регулирование моментной I_{1y} (I_{1q}) и потокообразующей I_{1x} ($I_{1d} = 0$) составляющих тока статора.

Внешний контур регулирования потокосцепления ротора Ψ_{2x} для АД, состоящий из регулятора потокосцепления (РП_x) и канала обратной связи

Для получения высокого быстродействия при управлении моментом двигателя в контуре регулирования тока якоря реализуется компенсация противо ЭДС с помощью блока БКЭ. Дополнительный контур стабилизации потока возбуждения на уровне $\Phi_{зад} = \Phi_{ном}$ в ЭП постоянного тока обычно не требуется, так как процессы в цепи обмотки возбуждения протекают независимо от процессов в якорной цепи. Поэтому задание на ток возбуждения допустимо формировать пропорционально $\Phi_{зад}$ с учетом коэффициента $1/k_\phi$.

Задание $M_{зад}$ на контур регулирования моментной составляющей тока статора или якоря, поступает от системы регулирования момента двигателя или усилия через блок ограничения момента (БО), блок деления и коэффициент $1/K_M$, где $K_M = \frac{3}{2}Z_P K_2$ – для АД; $K_M = \frac{3}{2}Z_P$ – для СДПМ; $K_M = C$ – для ДПТ.

Для измерения усилия, действующего в подвеске объекта обезвешивания, используется тензометрический датчик BQ и вторичный преобразователь (ДУ), выходной сигнал которого ($U_{ДУ}$), подается на систему регулирования усилия.

Функциональная схема, показанная на рис.3.14, позволяет выделить основные управляющие и информационно-измерительные устройства, для которых при исследовании СКС необходимо получить математические модели:

- автономный инвертор напряжения (АИН) и силовой преобразователь (П);
- канал обратной связи по току (ОСТ) с датчиками фазных токов (ТА);
- канал обратной связи по потокосцеплению (ОСП);
- канал измерения скорости (КС) с датчиком скорости (ВВ);
- датчик усилия, состоящий из измерительного элемента (ВQ) и вторичного преобразователя (ДУ);
- регуляторы токов $РТ_x$, $РТ_d$, $РТ_v$, $РТ_u$, $РТ_q$, $РТ_\alpha$, и потокосцепления $РП_x$;
- блок компенсации перекрестных связей (БК) и противо ЭДС (БКЭ);

3.10. Математическое описание статических преобразователей с широтно-импульсной модуляцией

При математическом описании свойств ПН и АИН были приняты следующие допущения [20, 22]:

- источник питания инвертора считается идеальным источником ЭДС;
- все вентили инвертора являются идеальными ключами, сопротивление которых в проводящем состоянии равно нулю, а в непроводящем – бесконечности;
- время переключения вентиля принимается равным нулю.

В современных ЭП формирование выходного напряжения осуществляется с помощью ПН или АИН с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), который в общем случае является дискретным элементом, осуществляющим квантование управляющих сигналов U_{1x} , U_{1d} , $U_{\hat{a}}$, U_{1y} , U_{1q} , $U_{\dot{y}}$, как по времени, так и по уровню. Для наиболее полного и строгого математического описания свойств АИН (П) с ШИМ могут применяться различные подходы и способы описанные в [25, 27]. Однако наиболее часто для описания динамических свойств ПН или АИН с ШИМ, с учётом чистого запаздывания отработки управляющих воздействий, допустимо использовать передаточную функции со звеном чистого запаздывания [8]:

$$W_{\Pi}(S) = K_{\Pi} e^{-\tau_{\Pi} S} \quad (3.36)$$

где K_{Π} – коэффициент передачи ПН или АИН по напряжению; $\tau_{\Pi} = T_{\text{ШИМ}} = 1/f_{\text{ШИМ}}$ – запаздывание ПН или в АИН, принимаемое равным периоду ШИМ; $f_{\text{ШИМ}}$ – частота ШИМ, значения которой обычно лежат в диапазоне от 4 до 16 кГц.

Исследование систем, содержащих неминимально фазовые звенья, к которым относится звено чистого запаздывания, вызывает ряд трудностей. Анализ различных подходов к аппроксимации звена чистого запаздывания показал, что для описания динамических свойств ПН или АИН с ШИМ вполне допустимо использовать передаточную функцию вида [8, 16]:

$$W_{\Pi}(S) = \frac{K_{\Pi}}{T_{\Pi} S + 1} \quad (3.37)$$

где T_{Π} – постоянная времени ПН или АИН с ШИМ, значение которой часто принимают равной запаздыванию τ_{Π} .

3.11. Математическое описание информационно-измерительных устройств ЭМС

Анализ элементной базы используемой в современных ЭП показал, что в них для измерения фазных токов применяются электронные бесконтактные датчики, которые позволяют измерять сигналы с частотой до 100 кГц и обеспечивают быстроедействие с полосой пропускания около 1 МГц. Поэтому при математическом описании канала обратной связи по току инерционными

свойствами такого датчика можно пренебречь.

Обработка аналоговых сигналов с датчиков фазных токов и обсчёт внутренних контуров регулирования тока в современных ЭП выполняется каждый период ШИМ, поэтому динамические свойства канала обратной связи по току допустимо описать безынерционным звеном с передаточной функцией вида [18]:

$$W_{OCT}(S) = K_{OCT} \quad (3.38)$$

где K_{OCT} – коэффициент передачи обратной связи по току;

Вычисление текущего значения потокосцепления ротора Ψ_{2x} также осуществляется каждый период ШИМ, поэтому для описания свойств канала обратной связи по потокосцеплению допустимо использовать пропорциональное звено:

$$W_{OCP}(S) = K_{OCP} \quad (3.39)$$

Исследования, выполненные в работе [18] показали, что для обеспечения эффективной компенсации перекрестных связей во внутренних контурах регулирования тока и получения высокого быстродействия при управлении моментом, необходимо с высокой точностью и быстродействием осуществлять измерение фактической скорости двигателя. Для этого рекомендуется использовать инкрементальные датчики. На выходе такого датчика формируется две серии импульсов, сдвинутых по фазе на 90 электрических градусов, которые используются для определения фактической позиции и направления перемещения.

Значение скорости двигателя вычисляется в преобразователе частоты путем дифференцирования сигнала фактического положения ротора в соответствии с выражением

$$\Omega_{\ddot{A}} = \Delta\varphi / \Delta t_{\dot{\varphi}i} ,$$

где $\Delta t_{изм}$ – период опроса инкрементального датчика;

$\Delta\varphi$ – приращение фактического положения ротора за время $\Delta t_{изм}$.

Следует отметить, что время $\Delta t_{изм}$ является не фиксированным и может варьироваться системой управления ПЧ в широком диапазоне в зависимости от скорости вращения вала двигателя и разрешения инкрементального датчика. При этом, чем ниже скорость вращения и разрешение датчика, тем это время больше. Однако максимальное его значение в большинстве случаев не превышает 1 мс [27].

Учитывая, что механическая постоянная времени, обусловленная инерционностью ротора двигателя и приведенных к нему масс, во много раз превышает период опроса инкрементального датчика, запаздыванием $\Delta t_{изм}$ можно пренебречь и динамические свойства канала измерения фактической скорости учитывать пропорциональным звеном вида:

$$W_{KC}(S) = K_{KC}, \quad (3.40)$$

где K_{KC} – коэффициент передачи канала измерения скорости;

При практической реализации СКС для измерения усилия в подвеске объекта обезвешивания рекомендуется использовать тензометрический преобразователь силы типа «Тензо-М С2-500», имеющий в зависимости от настройки выходных фильтров полосу пропускания 300÷500 рад/с.

Исследования, выполненные в работах [23, 24] показали, что для описания динамических свойств датчика усилия допустимо использовать передаточную функцию вида:

$$W_{дв}(S) = \frac{K_{дв}}{T_{дв}S + 1}, \quad (3.41)$$

где $K_{дв}$ – коэффициент передачи датчика усилия,

$T_{дв}$ – постоянная времени датчика усилия, значение которой лежит в пределах 2÷3 мс.

3.12. Математическое описание и определение параметров регуляторов электроприводов постоянного и переменного тока

Обеспечение требуемых статических и динамических характеристик ЭП при управлении токами I_{1x} , I_{ld} , I_{ϕ} , I_{1y} , I_{lq} , I_{α} и потокосцеплением ротора Ψ_{2x} используются регуляторы тока $РТ_x$, $РТ_d$, $РТ_v$, $РТ_y$, $РТ_q$, $РТ_{\alpha}$ и потокосцепления $РП_x$. Их структура и методика расчета параметров подробно изложена в работах [18, 21, 22,].

Передаточная функция ПИ-регуляторов тока $РТ_x$, $РТ_d$, $РТ_v$, $РТ_y$, $РТ_q$, $РТ_{\alpha}$ в общем случае имеет следующий вид:

$$W_{PT}(S) = K_{PT} \frac{T_{PT}S + 1}{T_{PT}S} \quad (3.2)$$

Расчет значений K_{PT} и T_{PT} , в зависимости от типа двигателя, рекомендуется выполнять по выражениям:

Асинхронный двигатель (АД):	Синхронный двигатель (СДПМ):
$K_{PT} = \frac{T'_1 R'_1}{2T_\Pi K_\Pi K_{OCT}}, \quad T_{PT} = T'_1$ <p>где:</p> $R'_1 = R_1 + K_2^2 R_2, \quad K_2 = L_m / L_2, \quad T_\Pi = T_{ШИМ},$ $T'_1 = \sigma L_1 / R'_1, \quad \sigma = 1 - L_m^2 / (L_1 \cdot L_2)$	$K_{PT} = \frac{T_1 R_1}{2T_\Pi K_\Pi K_{OCT}}, \quad T_{PT} = T_1$ <p>где:</p> $T_1 = L_{\sigma 1} / R_1, \quad T_\Pi = T_{ШИМ}$
Двигатель постоянного тока (ДПТ)	
<p>Регулятор тока якоря:</p> $K_{PT\alpha} = \frac{T_\alpha R_{\Sigma}}{2T_\Pi K_\Pi K_{OCT}}, \quad T_{PT} = T_\alpha$ <p>где:</p> $R_{\Sigma} = R_\alpha + R_{\text{оп}} + R_{\text{ко}}, \quad T_\Pi = T_{ШИМ},$ $T_\alpha = L_{\Sigma} / R_{\Sigma}, \quad L_{\Sigma} = \gamma U_{\text{ном}} / p_n \omega_{\text{ном}} I_{\text{ном}}$	<p>Регулятор тока возбуждения:</p> $K_{PT\epsilon} = \frac{T_\epsilon R_\epsilon}{2T_\Pi K_\Pi K_{OCT}}, \quad T_{PT} = T_\epsilon$ <p>где:</p> $T_\Pi = T_{ШИМ}, \quad T_\epsilon = L_\epsilon / R_\epsilon,$ $L_\epsilon = 2 p_n k_{\text{нас}} w_\epsilon \Phi_{\text{ном}} / I_{\epsilon.\text{ном}}$

Регулятор потокосцепления ротора используется только в случае применения в СКС АД. При этом регулятор потокосцепления ротора является пропорционально-интегральным, имея следующую передаточную функцию:

$$W_{PI}(S) = K_{PI} \frac{T_{PI} S + 1}{T_{PI} S}, \quad (3.33)$$

где $K_{PI} = \frac{T_2 K_{OCT}}{4T_\Pi L_m K_{OCT}}$ – коэффициент усиления регулятора потокосцепления; $T_{PI} = T_2$ – постоянная времени интегрирования.

При моделировании систем управления ЭП с ПИ-регуляторами в режиме больших сигналов необходимо выполнять ограничение управляющих сигналов на заданном уровне. В этом случае для моделирования ПИ-регуляторов рекомендуется использовать структурную схему, показанную в общем виде на рис.3.15, где обозначено: K_P – коэффициент усиления регулятора; T_P – постоянная времени интегрирования; $E(S)$ – сигнал ошибки; $Y(S)$ – выходной сигнал регулятора; БО – блок ограничения выходного сигнала.

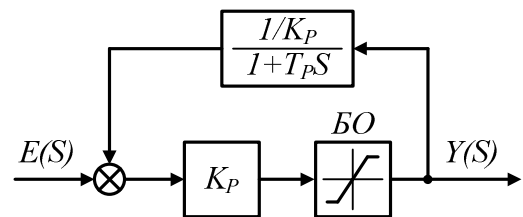


Рис.3.15 – Модель ПИ-регулятора с ограничением выходного сигнала

В общем случае уровни ограничений сигналов, задаваемые в блоке БО для регуляторов тока и потокосцепления различны.

Для регуляторов тока ограничения задаются на уровне:

$$U_{\max} = \pm \sqrt{2} \cdot U_{I\phi n} - \text{для ЭП переменного тока (РТ}_x, \text{РТ}_d, \text{РТ}_y, \text{РТ}_q);$$

$$U_{\dot{y}. \max} = U_{\dot{y}. \text{н}} , \quad U_{\dot{a}. \max} = U_{\dot{a}. \text{н}} - \text{для ЭП постоянного тока (РТ}_в, \text{РТ}_я);$$

где $U_{I\phi n}$ – номинальное действующее значение фазного напряжения двигателя переменного тока;

$U_{я. \text{ном}}$, $U_{в. \text{ном}}$ – номинальные напряжения обмоток якоря и возбуждения.

Для регулятора потокосцепления нижнее ограничение устанавливается равным нулю ($I_{Ix \min} = 0$), а верхнее рассчитывается по формуле $I_{Ix \max} = \Psi_{\max} / L_m$, где $\Psi_{\max} = \sqrt{2} \cdot U_{I\phi n} / \omega_{I\phi}$ – максимальное допустимое значение потокосцепления, $\omega_{I\phi} = 2 \cdot \pi \cdot f_{I\phi}$ – номинальная электрическая скорость вращения поля статора АД.

Параметры блока БО, обеспечивающего ограничение момента по каналу задания (см. рис. 3.14), выбираются в пределах: $M_{\max} = \pm (1.5 \dots 2) M_{\phi}$.

В современных ЭП, кроме ограничения по моменту, реализуется ограничение по току. Соответствующий блок устанавливается по каналу задания токов I_{ly} , I_{lq} , $I_{я}$, а его параметры выбираются в пределах:

$$I_{ly \max} = \pm \sqrt{I_{l \max}^2 - I_{Ix \max}^2} - \text{для асинхронного ЭП;}$$

$$I_{lq \max} = \pm I_{l \max} - \text{для синхронного ЭП;}$$

$$I_{я \max} = \pm (2 \dots 2.5) I_{я. \text{ном}} - \text{для ЭП постоянного тока;}$$

где $I_{l \max} = (1.5 \dots 2) \sqrt{2} \cdot I_{I\phi}$ – амплитудное значение максимально допустимого тока статора.

Если необходимо, чтобы ограничения по токам $I_{ly \max}$, $I_{lq \max}$, $I_{я \max}$ соответствовали ограничениям по моменту M_{\max} , параметры блока ограничения тока рассчитывают по выражениям:

$$I_{ly \max} = \pm M_{\max} / (K_M \cdot \Psi_{2\phi \text{дв}}) - \text{для асинхронного ЭП;}$$

$$I_{lq \max} = \pm M_{\max} / (K_M \cdot \Psi_f) - \text{для синхронного ЭП;}$$

$$I_{я \max} = \pm M_{\max} / C\Phi_{\text{ном}} - \text{для ЭП постоянного тока;}$$

Блок БК обеспечивает развязку контуров регулирования тока, обеспечивая их независимую работу, путем компенсации перекрестных связей. Для

этого он формирует сигналы компенсации U_{kx} , U_{kd} , U_{ky} , U_{kq} , которые добавляются к выходным сигналам соответствующих регуляторов тока: РТ_х, РТ_д, РТ_у, РТ_q.

Для получения высокого быстродействия при управлении моментом ДПТ в контуре регулирования тока якоря, с помощью блока БКЭ, реализуют компенсацию сигнала противоЭДС.

В зависимости от типа используемого двигателя, для каждого регулятора тока, сигналы компенсации рассчитываются по выражениям:

Асинхронный двигатель (АД):	Синхронный двигатель (СДПМ):
РТ _х : $U_{kx} = -\frac{I}{K_{\Pi}} \left(\sigma L_l \omega_l i_{ly} + \frac{K_2}{T_2} \psi_{2x} \right)$	РТ _д : $U_{kd} = -\frac{I}{K_{\Pi}} \omega L_{\sigma l} i_{ld}$
РТ _у : $U_{ky} = \frac{I}{K_{\Pi}} (\sigma L_l \omega_l i_{lx} + K_2 \omega \psi_{2x})$	РТ _q : $U_{kq} = \frac{I}{K_{\Pi}} \omega (L_{\sigma l} i_{ld} + \psi_f)$
Двигатель постоянного тока (ДПТ)	
РТ _я : $U_{кя} = \frac{I}{K_{\Pi}} (C \Phi_{ном} \Omega_D)$	

3.13. Структурные схемы электрической части ЭМС

Окончательно, структурные схемы полных математических моделей систем векторного регулирования моментом асинхронного и синхронного двигателя с постоянными магнитами, а также управления моментом двигателя постоянного тока, представлены на рис.2.18 (а), 2.19 (а), 2.20 (а).

Если считать, что регулирование момента осуществляется в первой зоне изменения скоростей двигателя с поддержанием потокосцепления на номинальном уровне, а влияние перекрестных связей и противо ЭДС полностью скомпенсированны, то для решения задач синтеза удобно использовать структурные схемы в упрощенном виде, приведенные на рис.3.16 (б), 3.17 (б), 3.18 (б).

Рис.3.16 – Структурная схема системы векторного регулирования момента АД: а) полная, б) упрощенная

The block diagram illustrates the control system for an induction motor. The input is the reference speed M_{3a0} , which is processed by a saturation block (BO1) with limits M_{max} and $-M_{max}$. The output is then multiplied by the gain $\frac{2}{3 \cdot Z_p \cdot \Psi_f}$ and passed through another saturation block (BO2) with limits I_{1qmax} and $-I_{1qmax}$ to produce the reference current I_{1q3a0} . This reference current is summed with a feedback current I_{1q} from the K_{OCT} block. The resulting signal is processed by a PT_q block and then a PI controller $\frac{K_{II}}{T_{II}S + 1}$ to generate the voltage u_{1q} . This voltage is summed with a feedback current i_{1q} from the $\frac{1/R_l}{T_l p + 1}$ block. The output of this summing junction is then processed by the block $\frac{3}{2} Z_p \Psi_f$ to produce the motor torque M_d . Finally, M_d is summed with the load torque M_C and integrated by the block $\frac{1}{J_d S}$ to produce the motor speed Ω_d .

Рис.3.17 – Структурная схема системы векторного управления моментом СДПМ: а) полная, б) упрощенная

6)

Рис.3.18 – Структурная схема ЭП управления моментом ДПТ: а) полная, б) упрощенная

3.14. Математические модели элементов систем управления электроприводов

Структура математической модели систем управления электроприводами может отличаться большим разнообразием в зависимости от целей, задач, применяемых принципов управления и используемой элементной базы. Однако в последнее время современные системы управления электроприводами постоянного тока и частотно-управляемыми приводами с асинхронными и синхронными двигателями, как правило, выполняются по принципу подчиненного регулирования. Структура трехконтурной системы подчиненного регулирования имеет регуляторы напряжения, тока и скорости двигателя, которые описываются передаточными функциями $W_{PH}(S)$, $W_{PT}(S)$, $W_{PC}(S)$ и в общем случае могут соответствовать пропорциональным (П), пропорционально-интегральным (ПИ) или пропорционально-интегро-дифференциальным (ПИД) законам регулирования. Передаточные функции в этом случае будут иметь вид:

для П-регулятора $W_P(S) = k_P$;

для ПИ-регулятора $W_P(S) = k_P(1 + T_I S)/(T_I S)$;

для ПИД-регулятора $W_P(S) = k_P(1 + T_I S)(1 + T_2 S)/(T_I S)$.

Запаздывание и инерционность элементов в цепях обратных связей по напряжению, току и скорости могут быть учтены передаточными функциями $W_{OH}(S)$, $W_{OT}(S)$, $W_{OC}(S)$, которые могут быть колебательными звеньями второго порядка, но обычно имеют вид апериодических звеньев первого порядка:

$$W_{OH}(S) = U_E(S)/E_H(S) = k_{OH}/(T_{OH}S + 1);$$

$$W_{OT}(S) = U_T(S)/M(S) = k_{OT}/(T_{OT}S + 1);$$

$$W_{OC}(S) = U_C(S)/\Omega_I(S) = k_{OC}/(T_{OC}S + 1).$$

При наличии в системе элементов с существенно нелинейными характеристиками, например, в виде насыщения регулятора скорости, зоны нечувствительности управляемого преобразователя, сухого трения и зазора механических передач, их влияние учитывают путем включения нелинейных звеньев последовательно или параллельно в соответствующие места обобщенной структурной схемы исследуемой ЭМС.

Анализ подходов и методов математического описания электроприводов с протяженными механическими передачами показал, что в настоящее время в теории ЭМС с УС сложилась ситуация, когда в каждом конкретном случае требуется подыскивать и применять специфические методы их исследования, так как общие методы решения подобных задач отсутствуют. Поэтому представляется целесообразным общие подходы и методы исследования рассмотреть на линеаризованной модели ЭМС, а затем при решении задач анализа и синтеза конкретных ЭМС с

УС их исходные модели уточнить, дополняя элементами, учитывающими специфические для данного исследования особенности. Однако и в этом случае структурная схема ЭМС получается достаточно сложной – содержит большое количество контуров, ряд перекрестных связей, – что затрудняет её исследование общепринятыми методами, усложняет анализ и физическую интерпретацию получаемых результатов. Это заставляет искать более рациональные формы представления математического описания ЭМС с УС и эффективные методы их исследования, позволяющие получать обобщающие результаты и выводы. В то же время выполненный анализ показал, что неизменяемая часть ЭМС с УС при выполнении общих исследований может быть представлена универсальной математической моделью, одинаковой по структуре для электроприводов постоянного и переменного тока.

4. ОБОБЩЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

4.1. Способы получения обобщенных математических моделей

В реальных технологических машинах электрические и механические части ЭМС являются органически связанными и образуют единую систему, в которой происходят силовые взаимодействия и обмен энергией. В соответствии с рассмотренными выше подходами, упрощениями и допущениями для получения уравнений движения, связывающих ускорения \ddot{q}_i с обобщенными координатами q_i и скоростями \dot{q}_i , используют принцип наименьшего действия Гамильтона [1], из которого получают уравнения Лагранжа вида (2.7). Уравнения Лагранжа при общих предположениях и ограничениях эквивалентны уравнениям Максвелла для электромагнитных цепей и поэтому с учетом пондеромоторных сил могут в форме уравнений Лагранжа–Максвелла вида (3.1) использоваться для описания ЭМС.

В общем случае при исследовании достаточно малых отклонений координат системы от положения равновесия после линеаризации нелинейностей может быть получена система n уравнений, описывающих движение ЭМС с УС, в каждом из которых i фиксировано:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где a_{ij} – коэффициенты, характеризующие величину кинетической энергии в системе;

b_{ij} – коэффициенты, характеризующие силы сопротивления, которые ли-

нейно зависят от скорости;

c_{ij} – коэффициенты, характеризующие запас потенциальной энергии системы;

F_i – обобщенные силы, действующие по координате q_i .

В зависимости от физической сущности элементов системы коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} выражают различные физические величины. Так, в МЧС это, соответственно, массы или моменты инерции, коэффициенты демпфирования или жесткости; в ЭЧС это индуктивности, сопротивления и емкости. Обобщенные силы F_i физически могут представлять напряжения и ЭДС для электрических цепей или потенциальные, диссипативные, пондеромоторные, нагрузочные силы и моменты, приложенные к элементам МЧС. В зависимости от особенностей конкретных механизмов, систем управления электроприводов и цели исследования на основе общего подхода составляется математическое описание рассматриваемой ЭМС, выполняемое с определенной степенью её детализации.

При выборе рациональной схемы замещения механической части системы и рассмотрении её с учетом свойств электроприводов рекомендуется руководствоваться следующими соображениями:

а) модели с учетом распределенности параметров могут быть применены при очень протяженных элементах механических передач, необходимости учета высокочастотной области частотного спектра колебаний и невозможности получения достоверных результатов при использовании более простых дискретных моделей;

б) многомассовые модели реальных ЭМС с УС целесообразно использовать только как исходные, требующие дальнейшего корректного упрощения путем эквивалентных преобразований;

в) трехмассовые модели ЭМС могут применяться при возможности выделить три наибольшие и примерно одинаковые приведенные массы или моменты инерции ($J_1 \approx J_2 \approx J_3 = \max$) так, чтобы между ними находились элементы с минимальными коэффициентами жесткости ($c_{12} \approx c_{23} = \min$), что на практике встречается редко.

Наиболее часто расчетные схемы ЭМС с УС представляют в виде двухмассовых эквивалентных моделей, МЧС которых описываются уравнениями вида (2.7). Это можно делать без ущерба для практических расчетов, если приведенные массы или моменты инерции крайних элементов составляют не менее 80 % приведенного значения масс или моментов инерции всей n -массовой системы

$$(J_{1\text{пр}} + J_{2\text{пр}}) \geq 0,8 \sum_{i=1}^n J_i.$$

Причем, место разделения масс целесообразно выбирать в наиболее подат-

ливой части механической передачи, характеризуемой коэффициентом жесткости c_{12} . Приведенные моменты инерции $J_{1ПР}$ и $J_{2ПР}$ суммируются отдельно по обе стороны от этого упругого элемента с приведенным значением коэффициента $c_{12ПР}$.

Таким образом, в большинстве практических случаев получение математической модели механической части ЭМС можно свести к её представлению в виде набора различных соединений элементарных инерционных, упругих и диссипативных элементов и последующему определению приведенных эквивалентных значений моментов инерции, коэффициентов и характеристик жесткости и различных видов трения.

При использовании структурных методов исследования ЭМС с УС на основе уравнений вида (3.3) могут быть получены передаточные функции МЧС и электродвигателя с учетом системы управления электропривода. Многочисленные исследования показали, что большинство реальных ЭМС с УС при выполнении обобщающих исследований целесообразно представлять в виде эквивалентных двухмассовых ЭМС с дополнительными линейными и нелинейными электрическими и механическими связями. При рассмотрении ЭМС с УС обычно приходится учитывать следующие их особенности: распределенность параметров МЧС; нелинейность характеристик элементов системы управления в виде насыщения, зоны нечувствительности, бестоковых пауз тиристорных преобразователей; наличие кинематических зазоров в передачах, "сухого" трения, пульсации передаточного числа, обусловленной погрешностью изготовления передач. В этих случаях наиболее эффективным методом исследования нелинейных ЭМС с УС является метод дополнения линейной динамической модели электропривода звеньями с существенно нелинейными характеристиками. При таком подходе нелинейную систему удобно разделить на две части – линейную динамическую модель и нелинейную, которая учитывает исследуемые нелинейности. Это позволяет эффективно применять метод гармонической линеаризации, решать задачи анализа и синтеза, исследовать устойчивость и автоколебания таких ЭМС с использованием частотных характеристик.

4.2. Структурная схема эквивалентной двухмассовой электромеханической системы

В настоящее время наиболее обобщенным представлением ЭМС с УС является её математическое описание в виде эквивалентной двухмассовой ЭМС. Особенности структурного построения ЭМС с УС рассмотрим на примере регулируемого электропривода, реализованного по системе "управляемый преобразователь – двигатель", упрощенная функциональная схема которого представлена на

рис. 4.1.

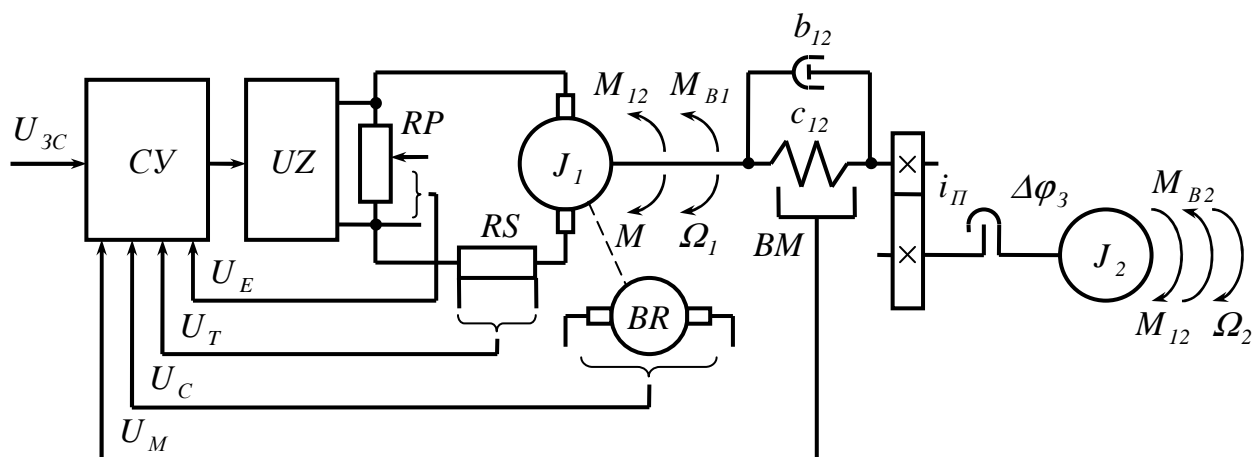


Рис. 4.1. Расчетная схема электромеханической системы

Здесь обозначено:

J_1 и J_2 – суммарные моменты инерции масс установки, приведенные к валу двигателя и жестко связанные, соответственно, с валом двигателя и с выходным валом механизма;

Ω_1 и Ω_2 – скорости вала двигателя и механизма;

c_{12} – эквивалентная жесткость механических передач;

M_{12} – момент в упругом элементе;

M – момент двигателя;

M_{B1} и M_{B2} – прикладываемые к валу двигателя и механизма моменты сопротивления, в общем случае учитывающие влияние статической нагрузки M_{ci} , моментов трогания M_{cti} и внешнего вязкого трения M_{di} , т.е. $M_{Bi} = M_{ci} + M_{cti} + M_{di}$ ($i = 1, 2$).

Особенности реальных передач в расчетной схеме учтены введением приведенного к валу двигателя кинематического зазора $\Delta\varphi_3$, а также зубчатой пары с переменным передаточным числом $i_{\Pi} = 1 + \Delta i(\varphi_2)$, обусловленным кинематической погрешностью передач.

Наличие зазоров приходится учитывать при исследовании электроприводов, передаточные механизмы которых содержат зубчатые, цепные, реечные и другие виды соединений. Определенный минимальный зазор необходим для нормального функционирования передачи, однако с течением времени в результате износа кинематические зазоры увеличиваются и, соответственно, возрастает их влияние на условия работы электропривода [8]. Обычно величина зазора в зубчатом зацеплении тем больше, чем выше модуль зацепления. Поэтому наибольший действительный зазор имеют выходные ступени зубчатых передач, понижающих выходную скорость электропривода. Эти зазоры при приведении к валу двигателя умножают-

ся на наибольшее передаточное число i_{II} и в суммарном зазоре $\Delta\varphi_3$ определяют наибольшую составляющую.

Реальные передачи имеют ограниченную точность изготовления, поэтому равномерность движения связываемых элементов механизма электропривода нарушается. Эксцентриситеты, накопленные ошибки окружного шага, отклонения профилей зубьев от идеальных и другие аналогичные погрешности каждого вала передач суммируются геометрически и являются источником возмущений с угловой частотой, пропорциональной скорости вращения данного вала, поэтому их чаще всего учитывают изменением эквивалентного передаточного числа Δi электропривода. Реально в большинстве практических случаев пульсации передаточного числа не превышают 1 % среднего значения и лишь для некоторых инерционных механизмов они достигают 2–5 % [8]. Это позволяет при анализе динамики ЭМС с учетом кинематических погрешностей передач линеаризовать математическое описание МЧС.

Из всего спектра кинематических возмущений, обусловленных передаточным механизмом привода, необходимо учитывать те, которые в приведенной схеме имеют наибольшие значения и частоты которых наиболее близки к частотам свободных колебаний ЭМС с УС. Кинематические погрешности являются источником внутренних периодических возмущений, максимальные величины которых обычно составляют несколько процентов рабочей нагрузки передач, однако в наиболее тяжелых случаях могут достигать 15–20 %. Поэтому в большинстве случаев влияние кинематических погрешностей можно не учитывать, но при резонансе фактическая динамическая нагрузка УЭ, обусловленная внутренними параметрическими возмущениями, может многократно возрасти. В таких случаях резонансное усиление упругих колебаний, вызванных погрешностями передач, является причиной их быстрого износа и выхода из строя.

При необходимости кинематические погрешности учитывают в виде пульсаций передаточного числа $\Delta i(\varphi_2)$ механических передач или дополнительных угловых смещений $\Delta\varphi_{\dot{E}\dot{I}}$. При исследовании силовых взаимодействий в ЭМС с УС кинематические погрешности можно учитывать моментом $\Delta\dot{I}_{\dot{E}\dot{I}} = c_{I2} \Delta\varphi_{\max}$, приложенным к обеим массам в противофазе и изменяющимся по синусоидальному закону с частотой ω , пропорциональной угловой скорости привода Ω_1 . Однако это силовое возмущение в виде самостоятельных моментов в системе отсутствует, являясь неотъемлемой составной частью упругого момента

$$M_{I2} = c_{I2} (\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta\varphi_{\max} \sin \omega t).$$

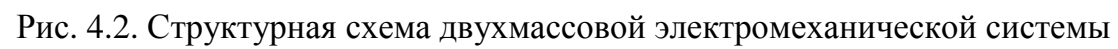
Внутреннее вязкое трение в передаче учитывается коэффициентом b_{I2} . Обобщенная

структурная схема двухмассовой ЭМС с многоконтурной системой подчиненного регулирования координат электропривода может быть представлена в виде рис. 4.2. Угловые скорости Ω_1 и Ω_2 , моменты нагрузки M_{C2} , трогания M_{CT2} и внешнего вязкого трения $M_{d2} = d_2 \Omega_2$, а также момент инерции механизма J_2 , коэффициенты жесткости c_{12} и внутреннего вязкого трения в передаче b_{12} приведены к валу двигателя. Для представления структурной схемы в относительных единицах выбраны базовые величины: $\Omega_{1B} = \Omega_{2B} = \Omega_B$; $M_{1A} = M_{12A} = M_{C1A} = M_{\tilde{N}01A} = M_{d1A} = M_{C2A} = M_{\tilde{N}02A} = M_{d2A} = M_A$. Система характеризуется механическими постоянными времени $T_{M1} = J_1(\Omega_B/M_B)$ и $T_{M2} = J_2(\Omega_B/M_B)$, постоянными времени жесткости $T_C = (1/c_{12})(M_B/\Omega_B)$ и коэффициентов диссипативных сил $k_{BC1} = d_1(\Omega_B/M_B)$; $k_{BC2} = d_2(\Omega_B/M_B)$; $k_{BT} = b_{12}(\Omega_B/M_B)$. При использовании в качестве выходной координаты момента $M_v(S) = M_{12}(S) + M_{BT}(S)$ внутреннее демпфирование МЧС удобно учитывать постоянной времени диссипативных сил $T_d = k_{BT}/T_C = b_{12}/c_{12}$.

Система управления реализует структуру подчиненного управления напряжением E_{II} , моментом (током) M и скоростью вращения Ω_1 двигателя с помощью соответствующих датчиков, имеющих передаточные функции $W_{OH}(S)$, $W_{OT}(S)$, $W_{OC}(S)$, и регуляторов – $W_{PH}(S)$, $W_{PT}(S)$, $W_{PC}(S)$. Свойства преобразователя учитываются передаточной функцией $W_{II}(S)$, а электромагнитные процессы в двигателе – $W_{\Omega}(S)$. Канал управления моментом в упругих элементах механических передач показан в виде параллельной коррекции. Свойства датчика момента учитываются передаточной функцией $W_{OM}(S)$, а корректирующего устройства – $W_{KM}(S)$.

Передаточные функции элементов и устройств электрической части исследуемой ЭМС приведены в пп. 3.2–3.6.

Механическая часть системы представляет собой объект управления с существенными нелинейностями, учитывающими зазоры $\Delta\varphi$ и моменты сухого трения M_{CT1} , M_{CT2} . Чаще всего при рассмотрении конкретных ЭМС с УС не возникает необходимости в учете всех факторов и нелинейностей, так как обычно, в зависимости от цели и задач исследования, определяют наиболее существенные особенности ЭМС, представляющие наибольший интерес в данном исследовании.



Представленное описание механической части привода эквивалентной двух-массовой упругой системой принципиально полно отражает особенности физических процессов реальных механизмов и в то же время является предельно упрощенной моделью ЭМС с УС, позволяющей осуществлять комплексные исследования и получать обобщенные выводы.

4.3. Учет и определение эквивалентных параметров электромеханических систем

После определения структуры математического описания ЭМС с УС важное значение приобретает нахождение эквивалентных параметров её математической модели.

Параметры электрической части системы в виде сопротивлений, индуктивностей, емкостей определяются сравнительно легко расчетными методами или могут быть измерены электрическими приборами. Экспериментальные способы нахождения структуры и параметров электрических элементов с использованием методов пассивной или активной идентификации достаточно хорошо проработаны и реализуются простыми средствами, так как электрическую часть системы можно легко разделить на отдельные устройства и элементы с исследуемыми координатами в виде электрических токов и напряжений, измерение и регистрация которых не вызывает особых трудностей.

Гораздо сложнее определяются параметры МЧС в виде коэффициентов, характеризующих механическую инерционность, жесткость, диссипативные силы различных видов трения. Известные трудности вызывает измерение сил, крутящих моментов, перемещений, скоростей и ускорений в механических передачах технологических машин.

Проблемы, возникающие при определении эквивалентных параметров математических моделей МЧС и реальных усилий в элементах механических передач ЭМС, подробно рассмотрены в монографии [7]. В общем случае элементы различных механизмов обладают инерционными и упругодиссипативными свойствами, которые проявляются совместно, определяя особенности динамики силовых взаимодействий в ЭМС с УС. Причем, определение и учет влияния на колебательные процессы упруго-диссипативных свойств механизмов с ЭП являются наиболее сложной проблемой, затрагивающей комплекс еще не полностью решенных вопросов. Выполненные исследования позволяют рекомендовать следующие подходы к определению упругодиссипативных свойств передач ЭМС.

При исследовании стационарных периодических режимов нагружения механизмов рассеяние внутренней энергии в упругих элементах за цикл можно характеризовать коэффициентом рассеяния Ψ . Эксперименты показали, что для конструкционных сталей различных марок $\Psi = 0,01-0,02$, для серого чугуна $\Psi = 0,23$.

Значительно большее, чем для металлов, внутреннее трение имеют высокомолекулярные материалы – различного рода пластмассы и резины, для которых $\Psi = 0,1-1,0$ [4]. Приведенные значения коэффициентов рассеяния, учитывающие только внутреннее трение в материале, следует корректировать при исследовании сочленений деталей, т.е. учитывать влияние так называемого конструкционного гистерезиса [14]. Как показывают исследования, рассеяние энергии в реальных механизмах обусловлено, в основном, трением в сочленениях деталей, которое называют конструкционным демпфированием. Для механических передач с учетом конструкционного демпфирования Ψ может достигать значений 0,40–0,65.

При исследовании свободных колебаний потери энергии в ЭМС с УС удобно определять с помощью логарифмического декремента затухания λ или коэффициента относительного демпфирования ξ . В работе [8] действие внутренних сил вязкого трения в механических передачах рекомендовано характеризовать величиной $\lambda = 0,1-0,3$. По данным, приведенным в [10], для механических передач с учетом демпфирующих свойств ЭП $\xi_{ЭМ} < 0,1-0,3$.

В простейших механических системах собственные упругие ω_y , затухающие β и резонансные ω_p частоты зависят от коэффициента затухания $\alpha = \xi/\omega_0$ и соотносятся так:

$$\left[\omega_p = (\omega_0^2 - 2\alpha^2)^{1/2} \right] < \left[\beta = (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \right] < \omega_0.$$

Таким образом, трение практически не изменяет частоту колебаний МЧС, поэтому можно принять $\omega_p \approx \beta \approx \omega_0$, что позволяет считать

$$\lambda = 2\pi\alpha / \sqrt{\omega_y^2 - \alpha^2} \approx 2\pi\alpha / \omega_y = 2\pi\xi.$$

При линейном характере внутренних потерь между коэффициентом рассеяния Ψ и логарифмическим декрементом затухания λ существует зависимость

$$\Psi = 2\lambda / \sqrt{1 + (\lambda/2\pi)^2}.$$

Коэффициент b_{ij} , характеризующий эквивалентное вязкое трение в уравнении вида (3.3), при $\omega \approx \omega_p \approx \omega_y$ можно определить по различным эквивалентным диссипативным характеристикам системы

$$b = \frac{c\Psi_{\mathfrak{O}}}{2\pi\omega_y} = \frac{c\lambda_{\mathfrak{O}}}{\pi\omega_y} = \frac{2\xi_{\mathfrak{O}}c}{\omega_y} = \frac{2\alpha_{\mathfrak{O}}c}{\omega_y}.$$

Приведенные соотношения позволяют определять диссипативные свойства ЭМС с УС при её свободном движении в условиях отсутствия внешних сил, действующих на систему.

При исследовании вынужденных колебаний усилий в ЭМС с УС, работающих в условиях гармонических воздействий, эффективность демпфирования в системе рекомендуется оценивать коэффициентом потерь η , определяемым в области резонансных частот. Коэффициентом потерь особенно удобно учитывать потери в случае различных видов внутреннего и внешнего трения. Внутреннее трение определяется деформацией механических элементов. Исследования показали, что при наиболее распространенном виде внутреннего жидкостного трения сопротивление потерь (b/c) постоянно, а сила вязкого трения пропорциональна скорости. Коэффициент потерь в этом случае равен $\eta = (b/c) \omega_p$, а потери энергии и, следовательно, η пропорциональны частоте $\eta \equiv \omega$.

При наличии механического гистерезиса в условиях гармонического возбуждения колебаний деформация отстает по фазе от напряжения. Если коэффициент жесткости c не зависит от частоты, то механическому резонансу соответствует постоянное значение коэффициента потерь ($\eta = \text{const}$).

При низких частотах возбуждения (1–50 Гц) внутренние потери обусловлены пластическим течением материала, при этом остаточная деформация пропорциональна времени действия возбуждающего усилия, а коэффициент потерь обратно пропорционален частоте колебаний $\eta \equiv 1/\omega_p$. Эти особенности диссипативных свойств механизмов необходимо учитывать при исследовании силовых взаимодействий в ЭМС с УС. Результаты исследований, приведенные в [4], показывают, что для образцов из стали $\eta \approx 0,0003\text{--}0,0010$, а для резины $\eta \approx 0,1\text{--}0,5$. Сопоставление различных экспериментальных данных показало, что с учетом конструкционного демпфирования коэффициент потерь для механических передач обычно равен $\eta = 0,03\text{--}0,08$, а предельное значение – $\eta = 0,1$.

Еще сложнее коэффициент потерь определяется при внешнем трении, которое в общем случае является функцией смещения и его производных, обычно зависит от массы и не зависит от податливости элементов механических передач, что обуславливает зависимость коэффициента потерь от частоты. Влияние внешнего трения на движение ЭП при предположении об абсолютной жесткости механических передач учитывают при исследовании силовых взаимодействий с помощью коэффициентов трения покоя, скольжения и качения. Реально коэффициенты трения могут изменяться в десятки раз, при этом природа материалов влияет на величину коэффициента трения меньше, чем внешние условия. Так, подшипники скольжения имеют коэффициенты трения покоя $f_{\text{тп}} = 0,12\text{--}0,15$, а коэффициенты трения скольжения $f_{\text{тс}} = 0,002\text{--}0,005$; направляющие различных механизмов, работающих в диапазоне скоростей до 0,05 м/с, могут иметь $f_{\text{тп}} = 0,20\text{--}0,35$, а с увеличением скорости коэффициент трения уменьшается до

$$f_{TC} = 0,02-0,04.$$

При учете упругости механических передач проблема определения влияния внешнего трения на силовые взаимодействия в ЭМС с УС усложняется. Это обусловлено тем, что в большинстве практических случаев исследователи не располагают надежной информацией о реальном распределении различных видов трения в системе (внутреннее и внешнее трение, конструкционный гистерезис). С помощью экспериментов удастся определить лишь интегральные характеристики сил трения. Это заставляет различные по своей физической природе силы трения заменять энергетически эквивалентными силами вязкого трения, которые представляют пропорциональными скорости движения масс или скорости их относительного перемещения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение и исследование математических моделей ЭМС, учитывающих упругие механические связи, – сложная проблема, требующая единого методологического подхода, обеспечивающего одновременное совместное рассмотрение и учет процессов, происходящих в электрической и механической частях системы. При этом приходится искать приемлемый компромисс между точностью и сложностью получаемых физических и математических моделей, возможностью их эффективного исследования существующими методами, а также обозримостью и возможностью обобщения получаемых результатов.

Наиболее общий подход к математическому описанию ЭМС базируется на применении гипотез об однородности времени, однородности и изотропности пространства, с использованием которых получают законы сохранения энергии для замкнутых систем.

Исходя из желания получить уравнения движения, выраженные через производные координат с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона и функций Лагранжа, определяют понятия энергии, обобщенных координат, механических и пондеромоторных сил, что позволяет получить уравнения движения исследуемых ЭМС с УС в форме уравнений Лагранжа–Максвелла.

В общем случае уравнения объектов управления исследуемых ЭМС получаются нелинейными, с распределенными параметрами и различными силовыми и параметрическими возмущениями. В настоящее время общие методы их решения отсутствуют, а частные – сложны и громоздки.

При переходе от моделей, учитывающих распределенность параметров системы и процессы распространения деформации механических элементов, к дискретным моделям, в которых время передачи силовых воздействий не учитывается, определяющими факторами являются массогабаритные параметры объекта

управления и диапазон существенных для данного исследования частот. С учетом достаточно большой скорости распространения волн упругих деформаций в металлах и реального быстрогодействия современных электроприводов в большинстве практических случаев ЭМС с УС можно описывать и исследовать в виде дискретных многомассовых моделей, учитывающих обобщенные, эквивалентные жесткости, массы, диссипативные внутренние и внешние силы трения.

Дальнейшее упрощение математического описания ЭМС возможно при линеаризации функций Лагранжа, переходе к дискретным моделям и эквивалентировании обобщенных свойств конкретных реальных систем.

В практике исследования и реализации ЭМС наибольшее распространение получили методы линеаризации элементов систем управления в окрестностях рабочей точки, на рабочем интервале, способом усреднения, а также путем добавления в систему специальных нелинейных звеньев или применением специальных режимов работы (вибрационная и гармоническая линеаризация). Однако и в этом случае ввиду большого многообразия механических конструкций, элементов, узлов и видов их соединений существуют значительные трудности учета реальных жесткостей механических передач, их механической инерционности, различных видов трения, а также влияния изменения этих параметров и характеристик от времени, пути, скорости и условий эксплуатации технологических машин. Поэтому большое значение приобретают экспериментальные способы определения параметров ЭМС с УС с привлечением методов пассивной и активной идентификации.

В практике проектирования и реализации ЭМС при необходимости исследования шума, вибраций, силовых динамических взаимодействий отдельных механических элементов для оценки возможных форм колебаний исследуемых координат, как правило, применяют разветвленные многомассовые расчетные схемы МЧС. При решении задач по определению влияния электропривода на МЧС для получения обобщающих результатов обычно бывает достаточным использовать двух- или, реже, трехмассовые модели МЧС, так как более высокие резонансные частоты системой электропривода практически не воспринимаются и не воспроизводятся. Поэтому в настоящее время при исследовании ЭМС в качестве основного объекта исследования наиболее часто используются математические модели в виде эквивалентной двухмассовой ЭМС, получаемая путем линеаризации исходных уравнений и уточнения параметров с использованием результатов экспериментальных исследований.

При составлении математического описания ЭМС с машиной переменного тока используют метод обобщенного пространственного вектора, суть которого заключается в представлении совокупного действия всех трех фаз одним векто-

ром, что позволяет существенно сократить количество уравнений описывающих исследуемые процессы. При этом удобным является использование модели двухфазной обобщенной электрической машины (ОЭМ), которая позволяет выразить векторные переменные через проекции на соответствующие оси декартовой системы координат. Для решения проблемы переменных коэффициентов, уравнения статора и ротора рекомендуется записывать в единой системе координат: в неподвижной $(\alpha - \beta)$ – статора или во вращающейся $(d - q)$ – ротора.

Современные электропривода переменного тока с векторным управлением реализованы так, что обеспечивают ориентацию вещественной оси x вращающейся системы координат $(x - y)$ по направлению вектора потокосцепления ротора ψ_2 . Поэтому проекция потокосцепления ротора на мнимую ось y становится равной нулю ($\psi_{2y} = 0$), что упрощает математическое описание асинхронного электродвигателя при частотном управлении. ($\psi_{2y} = 0$). Этот приём позволяет упростить математическую модель асинхронного электропривода при векторном управлении моментом двигателя.

Математические модели синхронных электродвигателей с постоянными магнитами получается значительно проще, чем модель асинхронного двигателя благодаря меньшему количеству перекрестных связей.

В настоящее время наиболее обобщенным представлением ЭМС с УС является её математическое описание в виде эквивалентной двухмассовой ЭМС. При этом описание механической части привода эквивалентной двухмассовой упругой системой принципиально полно отражает особенности физических процессов реальных механизмов и в то же время является предельно упрощенной моделью ЭМС с УС, позволяющей осуществлять комплексные исследования и получать обобщенные выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Аналитическая механика.– М.: Физматгиз, 1961.– 824 с.
2. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей.– М.: Изд-во МГУ, 1983.– 264 с.
3. Ильинский Н.Ф., Цаценкин В.К. Приложение теории графов к задачам электромеханики.– М.: Энергия, 1968.– 200 с.
4. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы.– М.: Мир, 1971.– 557 с.
5. Киселев Н.В., Мядзель В.Н., Рассудов А.Н. Электроприводы с распределенными параметрами.– Л.: Судостроение, 1985.– 220 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1984.– 831 с.
7. Пятибратов Г.Я. Методология комплексного исследования и проектирования электромеханических систем управления усилиями в упругих передачах механизмов /Юж.-Рос. гос. техн. ун-т.– Новочеркасск, 1999.– 154 с.– Деп. в ВИНТИ 29.06.99, № 2119–В99.
8. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода.– М.: Энергия, 1979.– 616 с.
9. Вейц В.Л., Вербовой П.Ф., Вольберг О.Л. и др. Синтез электромеханических приводов с цифровым управлением /АН Украины. Ин-т электродинамики.– Киев: Наук. думка, 1991.– 232 с.
10. Ковчин С.А., Сабинин Ю.А. Теория электропривода.– СПб.: Энергоатомиздат, 1994.– 496 с.
11. Овчинников И.Е., Лебедев Н.И. Бесконтактные двигатели постоянного тока с транзисторными коммутаторами.– Л.: Наука, 1979.– 270 с.
12. Овчинников И.Е. Теория вентильных электрических двигателей.– Л.: Наука, 1985.– 164 с.
13. Адволоткин Н.П., Гращенков В.Т., Лебедев Н.Н. и др. Управляемые бесконтактные двигатели постоянного тока.– Л.: Энергоатомиздат, 1984.– 160 с.
14. Вейц В.Л., Царев Г.В. Динамика и моделирование электромеханических приводов.– Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1992.– 228 с.
15. Донской Н.В., Иванов А.Г., Никитин В.М.. Управляемый выпрямитель в системах автоматического управления /Под ред. А.Д.Поздеева.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 352 с.
16. Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями.– СПб.: Энергоатомиздат, 1992.– 228 с.
17. Сандлер А.С., Сарбатов Р.С. Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями.– М.: Энергия, 1974.– 328 с.

18. Бернштейн И.Я. Тиристорные преобразователи частоты без звена постоянного тока. – М.: Энергия, 1968. – 88 с.
19. Пятибратов Г.Я. Математическое описание и моделирование систем компенсации силы тяжести с асинхронными частотно-регулируемыми электроприводами / Г.Я. Пятибратов, Д.В. Барыльник, О.А. Кравченко; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск, 2006. – 150 с. – Деп. в ВИНТИ 19.07.06, № 971-B2006.
20. Ковач К.П. Переходные процессы в машинах переменного тока / К.П. Ковач, И. Рац. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 744 с.
21. Шрейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты / Р.Т. Шрейнер. – Екатеринбург: УРО РАН, 2000. – 654 с.
22. Сили С. Электромеханическое преобразование энергии: пер. с англ. / Сили С. – М.: Энергия, 1968. – 376 с.
23. Поздеев А.Д. Электромагнитные и электромеханические процессы в частотно-регулируемых электроприводах / А.Д. Поздеев. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1998. – 172 с.
24. Виноградов А.Б. Векторное управление электроприводами переменного тока / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2008. – 298 с.
25. Герман-Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0: Учебное пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 2001. – 320 с.
26. Ключев В.И. Теория электропривода: Учеб. Для вузов. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.
27. Осипов О.И. Частотно-регулируемый асинхронный электропривод: учебное пособие по курсу «Типовые решения и техника современного электропривода» / О.И. Осипов. – М.: Изд-во МЭИ, 2004. – 80 с.
28. 22. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Г.Г. Соколовский. – М.: Изд. центр «Академия», 2006. – 272 с.
29. 23. Электроприводы с преобразователями частоты серии ЭПВ (Исполнение 2): техническое описание и инструкция по эксплуатации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.vectorgroup.ru.
30. 24. Кравченко О.А. Проблемы выбора и реализации силоизмерительных устройств для систем управления усилиями в механически передачах технологических машин / О.А. Кравченко, Г.Я. Пятибратов. – Новочеркасск: НГТУ, 1997. – 41 с. – Деп. в ВИНТИ 11.12.97, №3611-B97.
31. Лебедев Е.Д., Неймарк В.Е., Пистрак М.Я. и др. Управление вентильными электроприводами постоянного тока. – М.: Энергия, 1970. – 197 с.

32. Слежановский О.В., Дацковский Л.Х., Кузнецов И.С. и др. Системы подчиненного регулирования электроприводов переменного тока с вентильными преобразователями.– М.: Энергоатомиздат, 1983.– 256 с.

